

М. В. Мир-Салим-заде

## ЗАРОЖДЕНИЕ ТРЕЩИН В ПЕРФОРИРОВАННОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ, УСИЛЕННОЙ РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМОЙ СТРИНГЕРОВ

*Институт Математики и Механики НАН Азербайджана*

**Аннотация.** Проведено математическое описание модели зарождения трещин в перфорированной изотропной среде, усиленной поперечными стрингерами. Действие стрингеров моделируется неизвестными эквивалентными сосредоточенными силами в точках соединения ребер со средой. Считается, что по мере увеличения интенсивности внешней нагрузки в среде происходит зарождение трещин. Задача о равновесии изотропной перфорированной среды с зародышевыми трещинами сводится к решению нелинейного сингулярного интегрального уравнения с ядром типа Коши. Из решения этого уравнения находится усилие в полосе зарождения трещины. Условие появления трещины формулируется с учетом критерия предельной вытяжки связей материала.

**Ключевые слова:** зона предразрушения, силы сцепления материала, связи между берегами, появление трещины, перфорированная усиленная пластина, стрингеры.

УДК: 539.375

Проведено математическое описание модели зарождения трещин в перфорированной изотропной среде, усиленной поперечными стрингерами. Действие стрингеров моделируется неизвестными эквивалентными сосредоточенными силами в точках соединения ребер со средой. Считается, что по мере увеличения интенсивности внешней нагрузки в среде происходит зарождение трещин. Задача о равновесии изотропной перфорированной среды с зародышевыми трещинами сводится к решению нелинейного сингулярного интегрального уравнения с ядром типа Коши. Из решения этого уравнения находится усилие в полосе зарождения трещины. Условие появления трещины формулируется с учетом критерия предельной вытяжки связей материала.

Для обеспечения достаточной прочности листовых конструкций их обычно изготавливают из тонких пластин, усиленных приклепанными ребрами жесткости. Используемые в инженерных конструкциях пластины имеют технологические отверстия. Отверстия являются концентраторами напряжений, что зачастую порождает зарождение трещин. Чтобы сдерживать развитие трещин, пластины армируют стрингерами.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается бесконечная изотропная упругая пластина, ослабленная периодической системой круговых отверстий с радиусом  $\lambda$ . Контуры круговых отверстий свободны от внешних усилий. К пластине приклепаны поперечные ребра жесткости в точках  $z = \pm(2m + 1)L \pm iny_0$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ;  $n = 1, 2, \dots$ ) из другого упругого материала с площадью поперечного сечения  $A_S$  (рис. 1). На бесконечности усиленная пластина подвержена однородному растяжению вдоль стрингера напряжением  $\sigma_y^\infty = \sigma_0$ . Относительно стрингера принимается гипотеза об одномерном континууме, заключающаяся в том, что при

деформации толщина стрингера считается неизменяемой, а напряженное состояние одноосным. Стрингеры изгибу не сопротивляются и работают лишь на растяжение.

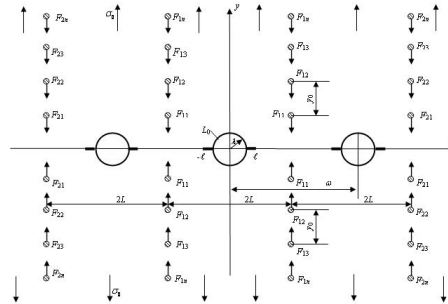


Рис. 1.

Принимаются следующие допущения:

- в тонкостенном листовом элементе конструкции (пластине) реализуется плоское напряженное состояние;
- подкрепляющая система стрингеров ферменного типа, ослабление их за счет постановки точек крепления не учитывается;
- листовой элемент и подкрепляющие элементы взаимодействуют друг с другом в одной плоскости и только в точках крепления;
- все точки крепления одинаковы, их радиус (площадка сцепления) мал по сравнению с их шагом и другими характерными размерами;
- действие точки крепления моделируем: в стрингере – действием в сплошном ребре сосредоточенной силы, приложенной в точке, соответствующей центру точки крепления, в пластине – действием сосредоточенной силы.

Считается, что точки крепления стрингеров расположены в дискретных точках с постоянным шагом по всей длине стрингера, симметрично относительно поверхности пластины. Действие приклепанных стрингеров в расчетной схеме заменяется неизвестными эквивалентными сосредоточенными силами, приложенными в местах расположения точек крепления. По мере повышения интенсивности внешнего нагружения в усиленной среде вокруг отверстий образуются зоны повышенных напряжений, расположение которых носит периодический характер. Зоны повышенных напряжений будут способствовать возникновению поверхностных трещин. Задача о зарождении трещин представляет большой интерес для механики разрушения. Ее постановка существенно расширяет первоначальную концепцию Гриффитса, предполагавшего, что в материале всегда имеется множество мельчайших трещин. По мере повышения интенсивности нагружения подкрепленной пластины с круговыми отверстиями силовой нагрузкой в пластине будут возникать зоны предразрушения, которые моделируем как области ослабленных межчастичных связей материала (рис. 1). Принято, что полоса предразрушения ориентирована в направлении максимальных растягивающих напряжений, возникающих в подкрепленной пластине. Взаимодействие берегов зоны предразрушения моделируется путем введения между берегами полосы предразрушения связей, имеющих заданную диаграмму деформирования. Физическая природа таких связей и размеры области предразрушения зависят от вида материала. Считается, что закон деформирования связей задан. В общем случае он представляет собой нелинейный закон деформирования [11-13].

В исследуемом случае возникновение дефекта типа трещины представляет собой процесс перехода области предразрушения в область разорванных связей между поверхностями материала. При этом размер зоны предразрушения заранее неизвестен и должен быть определен

в процессе решения задачи. Так как указанные зоны (прослойки материала) малы по сравнению с остальной частью подкрепленной пластины, их можно мысленно удалить, заменив разрезами, поверхности которых взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала.

Для математического описания зарождения трещин в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров, в процессе нагружения приходим к плоской задаче теории упругости для перфорированной среды, когда в среде имеются полосы предразрушения.

Пусть имеется усиленная среда с периодической системой круговых отверстий, имеющих радиус  $\lambda$  ( $\lambda < 1$ ) и центры в точках

$$P_m = m\omega (m = \pm 1, \pm 2, \dots), \omega = 2.$$

Из контуров отверстий исходят симметричные прямолинейные полосы предразрушения (рис. 1). Берега полосы предразрушения взаимодействуют таким образом, что это взаимодействие (связи между берегами) сдерживает зарождение трещины. В силу симметрии граничных условий и геометрии области  $D$ , занятой средой, напряжения являются периодическими функциями с основным периодом  $\omega$ . При действии внешних нагрузок на пластину в связях, соединяющих берега полосы предразрушения, будут возникать нормальные усилия  $q(x)$ . Следовательно, к берегам полосы предразрушения будут приложены нормальные напряжения, численно равные  $q(x)$ . Величина этих напряжений и размер  $\ell$  зоны предразрушения заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения задачи механики разрушения.

Граничные условия задачи имеют вид

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = 0 \text{ на контурах отверстий,} \quad (1)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = q(x) \text{ - на берегах полос предразрушения.}$$

Основные соотношения поставленной задачи необходимо дополнить соотношением, связывающим раскрытие берегов полосы предразрушения и усилия в связях. Это уравнение, без потери общности, можно представить в виде [2]

$$v^+(x, 0) - v^-(x, 0) = C(x, q) q(x), \quad (2)$$

где  $(v^+ - v^-)$  – раскрытие берегов полосы предразрушения,  $x$  – аффикс точек берегов полосы предразрушения; функцию  $C(x, q)$  можно рассматривать как эффективную податливость связей, зависящую от натяжения связей.

Для определения значений предельной величины интенсивности внешней нагрузки, при которой происходит зарождение трещины, нужно постановку задачи дополнить условием (критерием) появления трещины (разрыва межчастичных связей материала). В качестве такого условия принимаем критерий предельного раскрытия берегов полосы предразрушения

$$v^+ - v^- = \delta_c, \quad (3)$$

где  $\delta_c$  – характеристика сопротивления материала усиленной пластины трещинообразованию.

Это дополнительное условие позволяет определить параметры изотропной среды, усиленной регулярной системой стрингеров, при которых происходит появление трещины.

На основании формул Колосова–Мухелишвили [7] и граничных условий на контурах круговых отверстий  $L_m$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) и берегах полос предразрушения задача сводится к отысканию двух аналитических в области  $D$  функций  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  из краевых условий

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\tau\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)] e^{2i\theta} = 0, \quad (4)$$

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + t\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)} = q(x), \quad (5)$$

где  $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ );  $t$  – аффикс точек берегов полос предразрушения.

**2. Решение краевой задачи.** Решение краевой задачи (4), (5) ищем в виде

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad (6)$$

$$\Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z) + \Psi_2(z).$$

Здесь потенциалы  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$  определяют поле напряжений и деформаций в сплошной усиленной пластине без полос предразрушения под действием сосредоточенных сил  $F_{mn}$  и  $\sigma_0$  и определяются следующими формулами

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= \frac{1}{4}\sigma_0 - \frac{i}{2\pi h(1+\kappa_0)} \sum'_{m,n} F_{mn} \left[ \frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right], \\ \Psi_0(z) &= \frac{1}{2}\sigma_0 - \frac{i\kappa_0}{2\pi h(1+\kappa_0)} \sum'_{m,n} F_{mn} \left[ \frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right] + \\ &+ \frac{i}{2\pi h(1+\kappa_0)} \sum'_{m,n} F_{mn} \left[ \frac{Lm - iny_0}{(z - mL - iny_0)^2} - \frac{mL + iny_0}{(z - mL + iny_0)^2} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где  $h$  – толщина пластины;  $\kappa_0 = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ ;  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала пластины, штрих у знака суммы указывает на то, что при суммировании исключается индекс  $m = n = 0$ .

Функции  $\Phi_1(z)$  и  $\Psi_1(z)$ , соответствующие неизвестным нормальным смещениям вдоль полос предразрушения, ищем в явной форме

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t - z) dt, \\ \Psi_1(z) &= -\frac{\pi z}{2\omega^2} \int_{L_1} g(t) \sin^{-2} \frac{\pi}{\omega} (t - z) dt, \quad L_1 = [-\ell, -\lambda] + [\lambda, \ell]. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь искомая функция  $g(t)$  описывает раскрытие производных смещений на берегах полос предразрушения

$$\frac{1 + \kappa_0}{2\mu} g(x) = \frac{\partial}{\partial x} [v^+(x, 0) - v^-(x, 0)], \quad (9)$$

где  $\mu$  – модуль сдвига усиленной пластины.

Для нахождения комплексных потенциалов  $\Phi_2(z)$  и  $\Psi_2(z)$  представим граничное условие (4) в виде

$$\Phi_2(\tau) + \overline{\Phi_2(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta} = -\Phi_*(\tau) - \overline{\Phi_*(\tau)} + [\bar{\tau}\Phi_*'(\tau) + \Psi_*(\tau)] e^{2i\theta}, \quad (10)$$

где  $\Phi_*(\tau) = \Phi_0(\tau) + \Phi_1(\tau)$ ;  $\Psi_*(\tau) = \Psi_0(\tau) + \Psi_1(\tau)$ .

Функции  $\Phi_2(z)$  и  $\Psi_2(z)$  ищем в виде [6]

$$\begin{aligned} \Phi_2(z) &= \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}, \\ \Psi_2(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} S^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из условий симметрии относительно координатных осей находим, что  $Im\alpha_{2k+2} = 0$ ;  $Im\beta_{2k+2} = 0$   $k = 0, 1, 2, \dots$

Соотношения (6), (7), (8), (11) определяют класс симметричных задач с периодическим распределением напряжений. Из условия постоянства главного вектора всех сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в  $D$ , следует

$$\alpha_0 = \frac{\pi^2}{24} \beta_2 \lambda^2.$$

Неизвестные коэффициенты  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$  должны быть определены из краевого условия (10). Обозначим правую часть условия (10) через  $f_1(\theta) + if_2(\theta)$ . Относительно функции  $f_1(\theta) + if_2(\theta)$  будем считать, что она разлагается на контуре  $|\tau| = \lambda$  в ряд Фурье. В силу симметрии этот ряд имеет вид

$$f_1(\theta) + if_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ik\theta}, \quad \text{Im} A_{2k} = 0, \quad (12)$$

$$A_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f_1(\theta) + if_2(\theta)) e^{-2ik\theta} d\theta \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Подставив сюда правую часть соотношения (10), после вычисления интегралов с помощью теории вычетов, найдем

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{1}{2} \sigma_0 + \frac{1}{\pi h (1 + \kappa_0)} \sum_{m,n}' F_{mn} \left( \frac{2ny_0}{\rho_1^2} \right) - \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) f_0(t) dt, \\ A_2 &= \frac{1}{2} \sigma_0 - \frac{1}{\pi h (1 + \kappa_0)} \sum_{m,n}' F_{mn} \left[ \frac{\lambda^2 \sin 3\varphi_1}{\rho_1^3} + \frac{\kappa_0 \sin \varphi_1}{\rho_1} - \frac{\sin 3\varphi_1}{\rho_1} \right] - \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) f_2(t) dt, \\ A_{2k} &= \frac{1}{\pi h (1 + \kappa_0)} \left\{ \sum_{m,n}' F_{mn} \left[ \frac{\lambda^{2k} \sin(2k+1)\varphi_1}{\rho_1^{2k+1}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(-2)(-3)\dots(-2k)\lambda^{2k} \sin(2k+1)\varphi_1}{(2k-1)! \rho_1^{2k+1}} - \frac{\kappa_0 \lambda^{2k-2} \sin(2k-1)\varphi_1}{\rho_1^{2k-1}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(-2)(-3)\dots(1-2k)\lambda^{2k-2} \sin(2k+1)\varphi_1}{(2k-2)! \rho_1^{2k-1}} \right] \right\} - \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) f_{2k}(t) dt \quad (k = 2, 3, \dots), \\ A_{-2k} &= \frac{1}{\pi h (1 + \kappa_0)} \sum_{m,n}' F_{mn} \frac{\lambda^{2k} \sin(2k+1)\varphi_1}{\rho_1^{2k+1}} - \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) f_{-2k}(t) dt \quad (k = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

где  $\rho_1^2 = (mL)^2 + (ny_0)^2$ ,  $\varphi_1 = \text{arctg} \frac{ny_0}{mL}$ ,

$$\begin{aligned} f_0(t) &= 2\gamma(t), \quad f_2(t) = -\frac{\lambda^2}{2} \gamma^{(2)}(t), \quad \gamma(t) = \text{ctg} \frac{\pi}{\omega} t, \\ f_{2k}(t) &= -\frac{\lambda^{2k} (2k-1)}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) + \frac{\lambda^{2k-2}}{(2k-3)!} \gamma^{(2k-2)}(t) \quad (k = 2, 3, \dots), \\ f_{-2k}(t) &= -\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Неизвестная функция  $g(x)$  и коэффициенты  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$  должны быть определены из крайних условий (5) и (10). Так как выполняются условия периодичности, то система граничных условий (10) вырождается в одно функциональное уравнение, например, на контуре  $L_0$  ( $\tau = \lambda e^{i\theta}$ ), а система крайних условий (5) – в граничное условие на линии  $L_1$ .

Для составления уравнений относительно коэффициентов  $\alpha_{2k}$  и  $\beta_{2k}$  функций  $\Phi_2(z)$  и  $\Psi_2(z)$  разложим эти функции в ряды Лорана в окрестности точки  $z = 0$ . Подставив в левую часть граничного условия (10) на контуре  $z = \lambda \exp(i\theta)$  вместо  $\Phi_2(z)$ ,  $\overline{\Phi_2(z)}$ ,  $\Phi_2'(z)$  и  $\Psi_2(z)$  их разложения в ряды Лорана в окрестности  $z = 0$ , а в правую часть (10) вместо функции  $f_1(\theta) + if_2(\theta)$  – ряд Фурье (12) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\exp(i\theta)$ , получим две бесконечные системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $\alpha_{2k+2}$ ,  $\beta_{2k+2}$ . После некоторых преобразований приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно  $\alpha_{2k+2}$

$$\begin{aligned} \alpha_{2j+2} &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} \alpha_{2k+2} + b_j \quad j = 0, 1, 2, \dots, \\ b_0 &= A_2 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2} \cdot \lambda^{2k+4}}{2^{2k+4}} A_{-2k-2}, \\ b_j &= A_{2j+2} - \frac{(2j+1) A_0 g_{j+1} \lambda^{2j+2}}{K_1 2^{2j+2}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3) g_{j+k+2} \lambda^{2j+2k+4}}{(2j)!(2k+3)! 2^{2j+2k+4}} A_{-2k-2}, \\ a_{j,k} &= (2j+1) \gamma_{j,k} \lambda^{2j+2k+2}, \quad K_1 = 1 - \frac{\pi^2}{12} \lambda^2, \quad g_j = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2j}}, \\ \gamma_{0,0} &= \frac{3}{8} g_2 \lambda^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i+1) g_{i+1}^2 \lambda^{4i+2}}{2^{4i+4}}, \\ \gamma_{j,k} &= -\frac{(2j+2k+2)! g_{k+j+1}}{(2j+1)!(2k+1)! 2^{2j+2k+2}} + \frac{(2j+2k+4)! g_{j+k+2} \lambda^2}{(2j+2)!(2k+2)! 2^{2j+2k+4}} + \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2j+2i+1)!(2k+2i+1)! g_{j+i+1} g_{k+i+1} \lambda^{4i+2}}{(2j+1)!(2k+1)!(2i+1)!(2i)! 2^{2j+2k+4i+4}} + b_{j,k}, \\ b_{0,k} &= 0, \quad b_{j,0} = 0, \quad b_{j,k} = \frac{g_{j+1} g_{k+1} \lambda^2}{2^{2j+2k+4}} \left( 1 + \frac{2K_2 \lambda^2}{K_1} \right) \quad j = 1, 2, \dots; \quad k = 1, 2, \dots \quad K_2 = \frac{\pi^2}{24}. \end{aligned} \tag{13}$$

Постоянные  $\beta_{2k+2}$  определяются из следующих соотношений

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \frac{1}{K_1} \left[ -A_0 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1} \lambda^{2k+2}}{2^{2k+2}} \alpha_{2k+2} \right], \\ \beta_{2j+4} &= (2j+3) \alpha_{2j+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)! g_{j+k+2} \lambda^{2j+2k+4}}{(2j+2)!(2k+1)! 2^{2j+2k+4}} \alpha_{2k+2} - A_{-2j-2}. \end{aligned} \tag{14}$$

Потребуем, чтобы функции (6) удовлетворяли краевому условию (5). Тогда после некоторых преобразований получим сингулярное интегральное уравнение относительно функции  $g(x)$

$$\frac{1}{\omega} \int_{L_1} g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-x) dt + H(x) = q(x), \tag{15}$$

где

$$H(x) = \Phi_S(x) + \overline{\Phi_S(x)} + x \Phi_S'(x) + \Psi_S(x),$$

$$\Phi_S(x) = \Phi_0(x) + \Phi_2(x),$$

$$\Psi_S(x) = \Psi_0(x) + \Psi_2(x).$$

Сингулярное интегральное уравнение (15), а также системы (13), (14) содержат неизвестные величины сосредоточенных сил  $F_{mn}$  ( $m = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots$ ). Согласно закону Гука величина сосредоточенной силы  $F_{mn}$ , действующей на каждую точку крепления со стороны стрингера, равна

$$F_{mn} = \frac{E_S A_S}{2y_0 n} \Delta v_{m,n}, \quad (m = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots),$$

где  $E_S$  – модуль Юнга материала стрингера;  $A_S$  – площадь поперечного сечения стрингера;  $2y_0 n$  – расстояние между точками крепления;  $\Delta v_{m,n}$  – взаимное смещение рассматриваемых точек крепления, равное удлинению соответствующего участка стрингера.

Обозначим радиус точек крепления (площадки сцепления) через  $a_0$ . Примем естественное допущение о том, что взаимное упругое смещение точек  $z = mL + i(ny_0 - a_0)$  и  $z = mL - i(ny_0 - a_0)$  в рассматриваемой задаче теории упругости равно взаимному смещению точек крепления  $\Delta v_{m,n}$ . Это дополнительное условие совместности перемещений позволяет эффективно отыскать решение поставленной задачи.

С помощью комплексных потенциалов (6)–(8), (11) и формулы Колосова–Мусхелишвили [7] после выполнения элементарных, хотя и несколько громоздких выкладок, взаимное смещение  $\Delta v_{m,n}$  найдем в виде

$$\begin{aligned} \Delta v_{p,r} &= \Delta v_{p,r}^{(0)} + \Delta v_{p,r}^{(1)} + \Delta v_{p,r}^{(2)}, \\ \Delta v_{p,r}^{(0)} &= \frac{1}{2\pi(1+\kappa_0)\mu h} \sum_{m,n}' F_{mn} \left\{ \kappa_0 \ln \frac{(p-m)^2 L^2 + a_0^2}{(p-m)^2 L^2 + c^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(r-n)y_0 c \langle 2p(p-m)L^2 + a_0^c \rangle}{[(p-m)^2 L^2 + c^2] [(p-m)^2 L^2 + a_0^2]} \right\} + \frac{\sigma_0}{4\mu} (1+\kappa_0)(ry_0 - a_0), \\ \Delta v_{p,r}^{(1)} &= \frac{1+\kappa_0}{\mu} \left\{ \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) \left\langle \operatorname{arctg} \left[ \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-pL) \operatorname{th} \frac{\pi}{\omega} c \right] - \operatorname{arctg} \left[ \operatorname{tg} \frac{\pi p L}{\omega} \operatorname{th} \frac{\pi}{\omega} c \right] \right\rangle dt - \right. \\ &\quad \left. - \frac{c}{\mu} \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) \left[ \frac{\sin^2 \alpha_1 (\operatorname{ch}^2 \alpha_1 + \operatorname{sh}^2 \alpha_1)}{\sin^2 \alpha_1 \operatorname{ch}^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1 \operatorname{sh}^2 \alpha_1} \right] dt, \right. \\ \Delta v_{p,r}^{(2)} &= \frac{1}{\mu} \left\{ (\kappa_0 - 1)(ry_0 - a_0) a_0 + (1+\kappa_0) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \sin(2k+1)\alpha}{(2k+1)\rho_2^{2k+1}} + \right. \\ &\quad + (\kappa_0 - 1) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{j,k}}{2j+1} \rho_2^{2j+1} \sin(2j+1)\alpha - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \sin(2k+1)\alpha}{(2k+1)\rho_2^{2k+1}} - \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{j,k}}{2j+1} \rho_2^{2j+1} \sin(2j+1)\alpha + \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2) \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+2)}{2j+1} r_{j,k} \rho_2^{2j+1} \sin(2j+1)\alpha, \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

где  $c = (r-n)y_0 - a_0$ ,  $\alpha_1 = \frac{\pi}{\omega} (t-pL)$ ,  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{ry_0 - a_0}{pL}$

$$\rho_2^2 = (pL)^2 + (ry_0 - a_0)^2, \quad r_{j,k} = \frac{(2j+2k+1)! g_{j+k+1}}{(2j)!(2k+1)! 2_{2j+2k+2}}, \quad r_{0,0} = 0.$$

Искомая величина силы  $F_{mn}$  определяется с помощью формул (16) из бесконечной системы

$$(p = 1, 2, \dots; r = 1, 2, \dots). \quad (17)$$

Из-за периодичности задачи она вырождается в одну бесконечную алгебраическую систему.

Сингулярное интегральное уравнение (15) совместно с системами (13), (14), (17) являются основными разрешающими уравнениями задачи, позволяющими определить функцию  $g(x)$ , коэффициенты  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$  и значения сил  $F_{pr}$  ( $p = 1, 2, \dots; r = 1, 2, \dots$ ). Зная искомые функции  $\Phi_2(z)$ ,  $\Psi_2(z)$ ,  $g(x)$  и величины  $F_{pr}$  можно определить напряженно-деформированное состояние среды, усиленной регулярной системой стрингеров, при наличии полос предразрушения.

### 3. Методика численного решения и анализ.

Используя разложение

$$\frac{\pi}{\omega} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} z = \frac{1}{z} - \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \frac{z^{2j+1}}{\omega^{2j+2}},$$

уравнение (15) приведем к обычной форме

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{g(t) dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} g(t) K(t-x) dt = q(x), \quad (18)$$

$$K(t) = - \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \frac{t^{2j+1}}{\omega^{2j+2}}.$$

Преобразуем интегральное уравнение (18) к виду более удобному для нахождения его приближенного решения. Учитывая  $g(x) = -g(-x)$ , уравнение (18) принимает вид

$$\frac{2}{\pi} \int_{\lambda_1}^1 \frac{\xi p(\xi) d\xi}{\xi^2 - \xi_0^2} + \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_1}^1 K_0(\xi, \xi_0) p(\xi) d\xi + H(\xi_0) = q(\xi_0),$$

$$K_0(\xi, \xi_0) = K(\xi - \xi_0) + K(\xi + \xi_0), \quad p(\xi) = g(t), \quad \xi = \frac{t}{\ell}, \quad \xi_0 = \quad (19)$$

$$\lambda_1 = \lambda/\ell; \quad \lambda_1 \leq \xi_0 \leq 1,$$

$$H(\xi_0) = \Phi_S(\xi_0 \ell) + \overline{\Phi_S(\xi_0 \ell)} + \xi_0 \ell \Phi'_S(\xi_0 \ell) + \Psi_S(\xi_0 \ell).$$

Сделаем замену переменных

$$\xi^2 = u = \frac{1 - \lambda_1^2}{2} (\tau + 1) + \lambda_1^2, \quad \xi_0^2 = u_0 = \frac{1 - \lambda_1^2}{2} (\eta + 1) + \lambda_1^2.$$

При этом отрезок интегрирования  $[\lambda_1, 1]$  переходит в отрезок  $[-1, 1]$ , а преобразованное уравнение (19) принимает стандартную форму

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(\tau) d\tau}{\tau - \eta} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(\tau) B(\eta, \tau) d\tau + H_*(\eta) = q(\eta),$$

$$p(\tau) = p(\xi), \quad H_*(\eta) = H(\xi_0), \quad B(\eta, \tau) = -\frac{1 - \lambda_1^2}{2} \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \left(\frac{\ell}{2}\right)^{2j+2} \cdot u_0^j A_j,$$

$$A_j = (2j+1) + \frac{(2j+1)(2j)(2j-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{u}{u_0}\right) + \dots + \quad (20)$$



$$+ \frac{(2j+1)(2j)(2j-1)\dots[(2j+1)-(2j+1-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2j+1)} \cdot \left(\frac{u}{u_0}\right)^j.$$

Для алгебраизации сингулярного интегрального уравнения воспользуемся методом прямого решения сингулярных интегральных уравнений [4; 6; 9]. Интегральное уравнение (20), кроме особенности в ядре Коши, имеет также неподвижную особенность в точке выхода полосы предразрушения на поверхность кругового отверстия. Функция  $g(x)$  имеет в точках  $x = \pm\lambda$  особенность, отличающуюся от корневой. Характер этой особенности может быть установлен из анализа сингулярного интегрального уравнения (20) [8]. В рассматриваемом случае интеграл  $\int_{\lambda}^{\ell} g(t)dt = C \neq 0$  равен постоянной, отличной от нуля, которая выражается через раскрытие полосы предразрушения на поверхности кругового отверстия и должна быть определена после решения сингулярного интегрального уравнения.

В рассматриваемом случае нужно было бы использовать метод решения интегрального уравнения, построенного на базе квадратурной формулы Гаусса–Якоби. В виду громоздкости выражений для функций  $B(\eta, \tau)$  и  $H_*(\eta)$  установление истинной особенности функции  $p(\eta)$  на конце затруднительно. Следует отметить, что некоторый выигрыш в сходимости по уточненному методу обесценивается из-за громоздкости формул для коэффициентов матрицы системы. Используем другой способ численного решения интегральных уравнений типа (20), эффективность которого проверена на многочисленных конкретных задачах [5; 9; 10]. Так как напряжения в изотропной среде, усиленной системой стрингеров, ограничены, то решение сингулярного интегрального уравнения (20) следует искать в классе всюду ограниченных функций.

Представим решение в виде

$$p(\eta) = p_0(\eta) \sqrt{1 - \eta^2},$$

где  $p_0(\eta)$  – новая неизвестная ограниченная функция на  $[-1, 1]$ .

Использование квадратурных формул позволяет интегральное уравнение (20) свести к системе  $M + 1$  алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^M \frac{p_0(\tau_m)}{M+1} \sin^2 \frac{\pi m}{M+1} \left[ \frac{1}{\tau_m - \eta_r} + B(\tau_m, \eta_r) \right] = \pi [q(\eta_r) - H_*(\eta_r)] \quad (21)$$

$$(r = 1, 2, \dots, M + 1),$$

$$\tau_m = \cos \frac{\pi m}{M+1} (m = 1, 2, \dots, M), \eta_r = \cos \frac{2r-1}{2(M+1)} \pi (r = 1, 2, \dots, M + 1).$$

Полученная алгебраическая система (21) из  $M + 1$  уравнений, служащая для определения неизвестных  $p_0(\tau_1), p_0(\tau_2) \dots, p_0(\tau_M)$  и  $\ell/\lambda$ , обеспечивает удовлетворение дополнительного условия, при котором существует решение в классе всюду ограниченных функций [7]. В правую часть алгебраической системы (21) входят неизвестные значения напряжений  $q(\eta_r)$  в узловых точках, принадлежащих полосе предразрушения. Для определения неизвестного напряжения в связях, возникающего на берегах полосы предразрушения, используем соотношение (2). Используя полученное решение, соотношение (2) можно записать в виде

$$g(x) = \frac{2\mu}{1 + \kappa_0} \frac{d}{dx} [C(x, q) q(x)]. \quad (22)$$

Это уравнение служит для определения усилий  $q(x)$  в связях. Для построения недостающих алгебраических уравнений потребуем выполнения условий (22) в узловых точках  $\tau_m$

( $m = 1, 2, \dots, M$ ), принадлежащих полосе предразрушения. При этом используется метод конечных разностей. В результате получим алгебраическую систему из  $M$  уравнений для определения приближенных значений  $q(\eta_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) в узловых точках полосы предразрушения. При этом учитывалось граничное условие  $q(1) = 0$ , соответствующее условию  $v^+(\ell, 0) - v^-(\ell, 0) = 0$ .

Из-за неизвестного размера полосы предразрушения объединенная алгебраическая система, состоящая из разрешающей системы уравнений задачи (13), (14), (17), (21) и конечно-разностного аналога уравнения (22), является нелинейной даже при линейно-упругих связях. Чтобы избежать решения нелинейной системы уравнений при линейно-упругих связях, используем обратный способ, а именно, считаем заданным размер полосы предразрушения и в процессе решения определяем параметр нагружения  $\sigma_0$ . При таком способе решения объединения алгебраическая система при линейных связях оказывается линейной. Для численных расчетов полагалось  $M = 30$ , что отвечает разбиению интервала интегрирования на 30 чебышевских узлов соответственно. Расчеты были выполнены методом Гаусса с выбором главного элемента.

В случае нелинейного закона деформирования связей для определения усилий в связях использовался также итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений [3]. Принимается, что закон деформирования межчастичных связей (сил сцепления) является линейным при  $(v^+ - v^-) \leq v_*$ . Первый шаг итерационного процесса вычислений заключается в решении систем уравнений для линейно-упругих межчастичных связей. Последующие итерации выполняются только в случаях, когда на части зоны предразрушения имеет место соотношение  $(v^+ - v^-) > v_*$ . Для таких итераций решается система уравнений в каждом приближении для квазиупругих связей с эффективной податливостью, переменной вдоль берегов полосы предразрушения и зависящей от усилий в связях полученного на предыдущем шаге расчета. Расчет эффективной податливости проводится подобно определению секущего модуля в методе переменных параметров упругости [1]. Принято, что процесс последовательных приближений заканчивается, как только усилия вдоль полосы предразрушения, полученные на двух последовательных итерациях, будут мало отличаться друг от друга.

Нелинейная часть кривой деформирования связей представлялась в форме билинейной зависимости [2], восходящий участок которой соответствует упругому деформированию связей ( $0 < (v^+ - v^-) \leq v_*$ ) с их максимальным натяжением. При  $(v^+ - v^-) > v_*$  закон деформирования описывался нелинейной зависимостью, определяемой точками  $(v_*, \sigma_*)$  и  $(\delta_c, \sigma_c)$ .

Для определения предельно-равновесного состояния полосы предразрушения, при котором происходит появление трещины, используем условие (3).

Таким образом, условием, определяющим предельную интенсивность внешней растягивающей нагрузки, при которой происходит появление трещины в точке  $x = \pm\lambda$ , будет

$$C(\lambda, q(\lambda))q(\lambda) = \delta_c. \quad (23)$$

Совместное решение объединенной алгебраической системы (13), (14), (17), (21), конечно-разностного аналога уравнения (22) и (23) позволяет (при заданных характеристиках трещиностойкости материала) определить критическую величину внешней растягивающей нагрузки, размер полосы предразрушения и усилия в связях для состояния предельного равновесия, при которых происходит образование трещин в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров.

Расчеты проводились в зависимости от геометрических параметров задачи при  $v = 0, 3$ ,  $\varepsilon_1 = a_0/L = 0, 01$ ,  $\varepsilon = y_0/L = 0, 15; 0, 25; 0, 5$ ,  $E = 7, 1 \cdot 10^4$  МПа (сплав В95),  $E_S = 11, 5 \cdot 10^4$  МПа (композит  $Al$ -сталь),  $A_S/y_0h = 1$ . Число стрингеров и точек крепления принималось конечным: 6, 10, 14.  $v_* = 10^{-6}$  м,  $\sigma_* = 130$  МПа,  $\sigma_c/\sigma_* = 2$ ,  $\delta_c = 2 \cdot 10^{-6}$  м; Эффективная податливость связей  $C = 2 \cdot 10^{-7}$  м/МПа.

На рис. 2 представлены графики зависимости относительной длины полосы предразрушения  $d = (\ell - \lambda)/L$  от безразмерной величины внешней нагрузки  $\sigma_0/q_{\max}$  для некоторых значений радиуса отверстия  $\lambda = 0, 2 \div 0, 5$  (кривые 1–4) при  $\varepsilon = 0, 25$ .

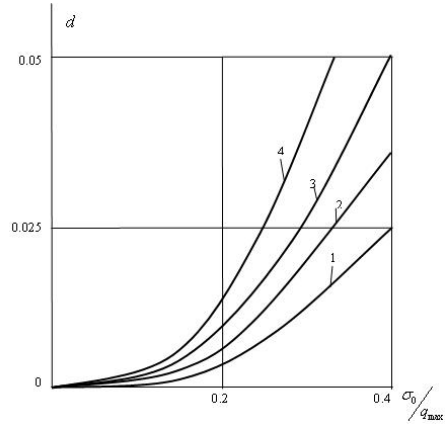


Рис. 2.

На рис. 3 приведены графики распределения усилий в связях полосы предразрушения  $q/\sigma_0$  вдоль полосы предразрушения для радиуса отверстия  $\lambda = 0, 5$  при  $\varepsilon = 0, 15$ . Здесь кривая 1 соответствует линейной связи, 2 – билинейной зависимости деформирования связей.

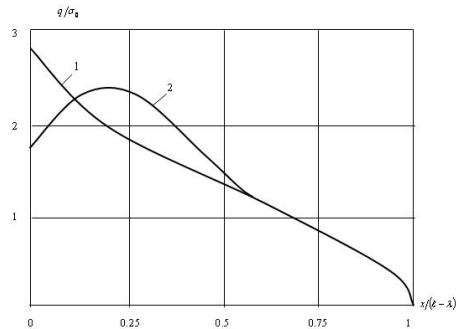


Рис. 3.

На рис. 4 приведен график зависимости критической внешней нагрузки  $\sigma_0^*/\sigma_S$  от относительного раскрытия  $\delta_*/(\ell - \lambda)$  в точке  $x = \lambda$  для некоторых значений радиуса отверстия  $\lambda = 0, 2 \div 0, 5$  (кривые 1–4) при  $\varepsilon = 0, 15$ . Здесь  $\delta_* = \frac{\pi \delta_c \mu}{(1 + \kappa_0) \sigma_S}$ ,  $\sigma_S$  – предел текучести материала на растяжение.

Анализ предельно-равновесного состояния перфорированной изотропной среды, усиленной регулярной системой стрингеров, при котором происходит появление трещины, сводится к параметрическому исследованию разрешающей алгебраической системы (9), (13), (14) (17), (21), конечно-разностного аналога уравнения (22) и критерия зарождения трещины (23) при различных законах деформирования связей, упругих постоянных материалов и геометрических параметров усиленной среды.

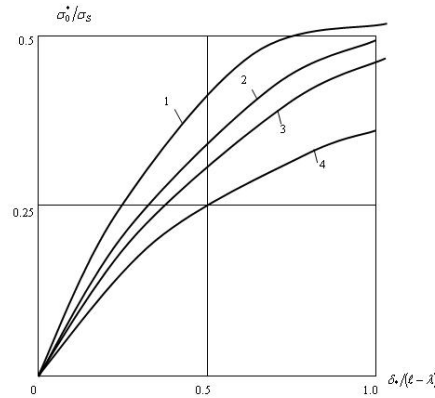


Рис. 4.

### ЛИТЕРАТУРА

[1] *Биргер, И. А.* Общие алгоритмы решения задач теорий упругости, пластичности и ползучести / И. А. Биргер // Успехи механики деформируемых сред. - М. : Наука, 1975. - С. 51-73.

[2] *Гольдштейн, Р. В.* Рост трещин по границе соединения материалов / Р. В. Гольдштейн, М. Н. Перельмутер // Проблемы механики : сб. статей : к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. - М. : Физматлит, 2003. - С. 221-238.

[3] *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин. - М. ; Л. : ГИТТЛ, 1948. - 376 с.

[4] *Каландия, А. И.* Математические методы двумерной упругости / А. И. Каландия. - М. : Наука, 1973. - 304 с.

[4] *Мирсалимов, В. М.* Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами / В. М. Мирсалимов. - Баку : Элм, 1984. - 124 с.

[5] *Мирсалимов, В. М.* Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. - М. : Наука, 1987. - 256 с.

[6] *Мухелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. - М. : Наука, 1966. - 707 с.

[7] *Мухелишвили, Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мухелишвили. - М. : Наука, 1968. - 512 с.

[8] *Панасюк, В. В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. - Киев : Наук. думка, 1976. - 443 с.

[9] *Саврук, М. П.* Численный анализ в плоских задачах теории трещин / М. П. Саврук, П. Н. Осив, И. В. Прокопчук. - Киев : Наук. думка, 1989. - 248 с.

[10] *Budiansky, B.* Fiber-matrix de bonding effects on cracking in aligned fiber ceramic composites / B. Budiansky, A. G. Evans, J. W. Hutchinson // Int. J. Solid Structures. - 1995. - Vol. 32. - № 3-4. - P. 315-328.

[11] *Goldstein, R. V.* Modeling of the adhesion strength and fracture kinetics of the microelectronic package polymer-polymer joints / R. V. Goldstein, V. F. Bakirov, M. N. Perlmutter // Proc. Inst. Phys. Technol. Russian Ac. of Sci. - 1997. - Vol. 13 : Modeling and Simulation of Submicron Technology and Devices. - P. 115-125.

[12] *Ji, H.* Adhesion via Connector Molecules : the Many-stitch Problem / H. Ji, P. O. de Gennes // Macromolecules. - 1993. - Vol. 26. - P. 520-525.

M. V. Mir-Salim-zada

**CRACK FORMATION IN A PERFORATED ISOTROPIC MEDIUM  
INTENSIFIED BY A REGULAR SYSTEM OF STRINGERS**

*Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Sciences*

**Abstract.** The mathematical description of crack formation model in a perforated isotropic medium intensified by cross-section stringers is carried out. The stringers action is simulated by the unknown equivalent concentrated forces in points of their edge junction with the medium. It is considered, that crack formation occurs in the process of increase of external load intensity in the medium. The task about equilibrium at the isotropic perforated medium with arisen cracks comes to the solution of non-linear singular integral equation with kernel of Cauchy type. We find stress in the crack formation zone by solving the equation. The crack formation condition is formulated with taking into account the limit stretching of material relations criterion.

**Keywords:** pre-fracture zone, adhesive forces of a material, bonds between crack faces, crack formation, perforated strengthened slab, stringers.

*Мир-Салим-заде Минавар Вагиф кызы*

*кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института математики и механики Национальной академии наук Азербайджана, г. Баку*

**e-mail:** iracon63@hotmail.com

*M. V. Mir-Salim-zada*

*Ph. D., Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku*