

Ю. В. Немировский, Т. П. Романова

## ПРЕДЕЛЬНОЕ И ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН С КРУГЛЫМ СВОБОДНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

*Институт теоретической и прикладной механики СО РАН им. С. А. Христиановича*

**Аннотация.** На основе модели идеального жесткопластического материала предложена методика расчета предельных нагрузок и остаточных прогибов прямоугольных пластин с круглым свободным отверстием при воздействии равномерно распределенной динамической нагрузки взрывного типа. Стороны пластины шарнирно оперты или защемлены. Рассмотрены возможные схемы предельного деформирования пластин. Приведены численные примеры. Решения могут быть использованы при различных инженерных расчетах.

**Ключевые слова:** идеальная жесткопластическая пластина, прямоугольная пластина, круглое отверстие, взрывная нагрузка, остаточный прогиб.

УДК: 539.4+539.37

Разнообразные по форме пластины являются составными элементами многих ответственных конструкций, и расчет их поведения при воздействии динамических нагрузок имеет большое значение при их проектировании и прогнозировании чрезвычайных ситуаций. В работе в рамках модели идеального жесткопластического тела рассмотрен динамический изгиб прямоугольных пластин со свободным круглым отверстием. Имеющиеся в литературе решения для пластических полигональных пластин со свободным отверстием касаются только динамики правильных полигональных пластин [1] и предельного анализа для квадратных пластин [2, 3].

1. Рассмотрим прямоугольную пластину со сторонами  $2a$  и  $2\gamma a$  ( $\gamma \geq 1$ ), имеющую в центре свободное круглое отверстие радиуса  $\mu a$ , где  $0 \leq \mu < 1$  (рис. 1). Противоположные стороны пластины шарнирно оперты или защемлены. Нормальный изгибающий момент на опорных сторонах равен  $-(1 - \eta_i)M_0$  ( $i = 1, 2$ ), где  $i = 1$  относится к меньшей стороне, а  $i = 2$  – к большей;  $\eta_i = 0$  при защемлении и  $\eta_i = 1$  при шарнирном опирании соответствующей стороны;  $M_0$  – предельный момент. На пластину действует равномерно распределенная по поверхности динамическая нагрузка взрывного типа высокой интенсивности  $P(t)$ , которая характеризуется мгновенным достижением максимального значения  $P_{\max} = P(0)$  в начальный момент времени  $t = 0$  с последующим быстрым ее уменьшением.

В динамике рассматриваемой пластины из идеального жесткопластического материала возможны несколько схем деформирования. При нагрузках, не превышающих предельные

---

Поступила 05.09.2009

Работа выполнена при финансовой поддержке Президиума СО РАН (Постановление № 10 от 15.01.09, номер проекта 15).

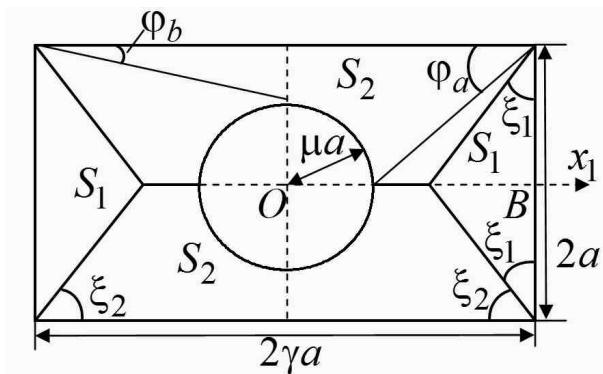


Рис. 1.

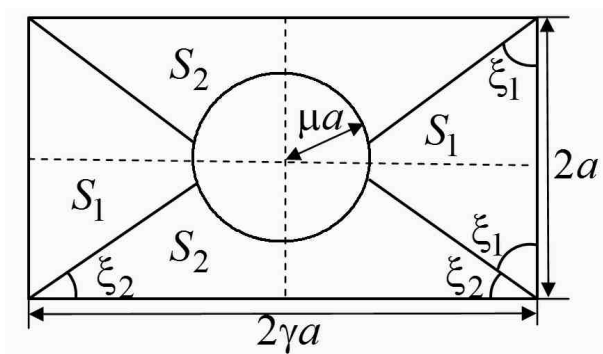


Рис. 2.

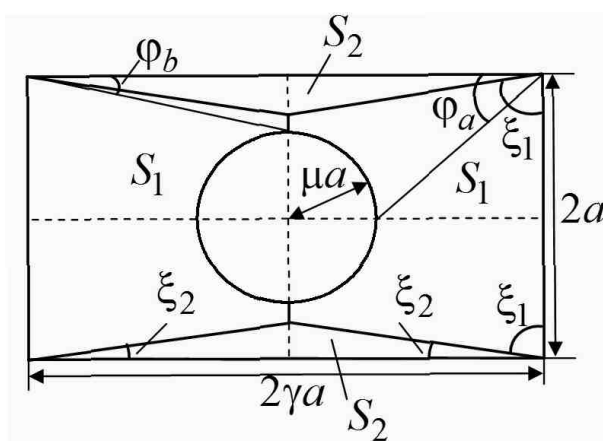


Рис. 3.

нагрузки («низких» нагрузках,  $P_{\max} < P_0$ ), пластина остается в покое. При нагрузках, несущественно превышающих предельные («средних» нагрузках,  $P_0 < P_{\max} < P_1$ ), схему деформирования пластины можно представить в виде совокупности областей  $S_i$  ( $i = 1, 2$ ), которые

жестко вращаются вокруг опорных сторон с угловой скоростью  $\dot{\alpha}_i$  (рис. 1–3). Области  $S_i$  разделены кусочно-линейными пластическими шарнирами с нормальным изгибающим моментом, равным  $M_0$ . В зависимости от соотношения значений  $\gamma, \mu, \eta_1, \eta_2$  при этом возможны три варианта деформирования пластины, изображенные на рис. 1 (схема А,  $\xi_2 \geq \phi_a$ ), рис. 2 (схема Б,  $\phi_b \leq \xi_2 \leq \phi_a$ ) и рис. 3 (схема В,  $\xi_2 \leq \phi_b$ ), где  $\phi_a = \arctg [1/(\gamma - \mu)]$ ,  $\phi_b = \arctg [(1 - \mu)/\gamma]$ . Из симметричности пластины следует, что схема В может реализоваться только в случае заземления меньшей стороны и шарнирного опирания большей ( $\eta_1 = 0, \eta_2 = 1$ ). Углы  $\xi_1$  и  $\xi_2$  на рис. 1–3 являются углами при основании областей  $S_1$  и  $S_2$  соответственно.

В каждой области  $S_i$  ( $i = 1, 2$ ) введем декартовую систему координат  $(x_i, y_i)$ , в которой ось  $x_i$  проходит по опорной стороне, а ось  $y_i$  направлена внутрь пластины. Начало координат  $(x_i, y_i)$  выбирается произвольно на опорной стороне. Тогда скорости прогибов пластины во всех схемах будут представлены в виде:

$$(x_i, y_i) \in S_i : \quad \dot{u}(x_i, y_i, t) = \dot{\alpha}_i(t)y_i. \quad (i = 1, 2). \quad (1)$$

Уравнения движения пластины получим из принципа виртуальной мощности с использованием принципа Даламбера [4]

$$K = A - N, \quad (2)$$

$$K = \rho \sum_{i=1,2} \iint_{S_i} \ddot{u}i^* ds = \rho \sum_{i=1,2} \ddot{\alpha}_i \dot{\alpha}_i^* \iint_{S_i} y_i^2 dy_i dx_i, \quad (3)$$

$$A = P(t) \sum_{i=1,2} \iint_{S_i} \dot{u}^* ds = P(t) \sum_{i=1,2} \dot{\alpha}_i^* \iint_{S_i} y_i dy_i dx_i, \quad (4)$$

$$N = \sum_m \int_{l_m} M_m \left[ \frac{\partial \theta^*}{\partial t} \right]_{l_m} dl_m = 2M_0 \sum_{i=1,2} \dot{\alpha}_i^* [a \gamma^{i-1} (2 - \eta_i) - b_i]. \quad (5)$$

Здесь  $K, A, N$  – мощности инерционных, внешних и внутренних сил соответственно;  $u$  – прогиб;  $\rho$  – поверхностная плотность материала пластины;  $t$  – текущее время;  $ds$  – элемент площади;  $m$  – количество линий разрыва угловых скоростей;  $l_m$  – линии разрыва угловых скоростей, включая контур пластины;  $\left[ \frac{\partial \theta}{\partial t} \right]_{l_m}$  – разрыв угловой скорости на  $l_m$ ;  $M_m$  – изгибающий момент на  $l_m$ ;  $dl_m$  – элемент линии  $l_m$ ;  $b_i$  – проекция части границы свободного отверстия в области  $S_i$  на опорную сторону области  $S_i$  ( $i = 1, 2$ ). Верхний индекс “\*” обозначает допустимые скорости.

Подставляя величины (3)–(5) в (2) и учитывая независимость  $\dot{\alpha}_i^*(t)$  ( $i = 1, 2$ ), получим следующие уравнения движения:

$$\rho \ddot{\alpha}_i \iint_{S_i} y_i^2 dy_i dx_i = P(t) \iint_{S_i} y_i dy_i dx_i - M_0 [a \gamma^{i-1} (2 - \eta_i) - b_i]. \quad (i = 1, 2). \quad (6)$$

Условие непрерывности скоростей на границах областей  $S_1$  и  $S_2$  дает равенство

$$\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2 \operatorname{tg} \xi_2. \quad (7)$$

Начальные условия для  $\dot{\alpha}_i, \alpha_i$  имеют вид

$$\dot{\alpha}_i(0) = \alpha_i(0) = 0, \quad (i = 1, 2). \quad (8)$$

Система уравнений (7), (5) с начальными условиями (8) и  $\xi_2(0) = \xi_2^0, \xi_1(0) = \pi/2 - \xi_2^0$  описывает динамическое поведение пластины. Начальные значения  $\xi_2^0$  определяются в зависимости от величины  $P_{\max}$ , как это будет показано ниже.

2. Рассмотрим подробно схемы А, Б и В. Уравнения движения (6) при схеме А, учитывая  $\xi_1 = \pi/2 - \xi_2$ , имеют вид

$$\rho \ddot{\alpha}_1 a^3 \text{ctg}^3 \xi_2 = 2P(t) a^2 \text{ctg}^2 \xi_2 - 12M_0(2 - \eta_1), \quad (9)$$

$$\rho \ddot{\alpha}_2 a^3 [8 \mu^3 - 3\mu^2 \pi(1 + \mu^2/4) - 3\text{ctg} \xi_2 + 4 \gamma] = 2P(t) a^2 [\mu(3 + 2\mu^2) - 3\mu^2 \pi/2 - 2\text{ctg} \xi_2 + 3(\gamma - \mu)] - 12M_0 [\gamma(2 - \eta_2) - \mu]. \quad (10)$$

Предельную нагрузку  $P_0$  определим так. Из (9), (10) при  $\ddot{\alpha}_i = 0$  ( $i = 1, 2$ ) имеем

$$P = 6M_0(2 - \eta_1) \text{tg}^2 \xi_2 / a^2, \quad (11)$$

$$P = \frac{6M_0 [\gamma(2 - \eta_2) - \mu] / a^2}{\mu(3 + 2\mu^2) - 3\mu^2 \pi/2 + 3(\gamma - \mu) - 2\text{ctg} \xi_2}. \quad (12)$$

Обозначим через  $\xi_{2p}$  значение  $\xi_2$  при действии предельной нагрузки  $P_0$ . Из (11), (12) получим, что при схеме А в зависимости от соотношения значений  $\gamma$ ,  $\mu$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  величина  $\xi_{2p}$  определяется из уравнения

$$(2 - \eta_1) \text{tg}^2 \xi_{2p} [\mu(3 + 2\mu^2) - 3\mu^2 \pi/2 + 3(\gamma - \mu) - 2\text{ctg} \xi_{2p}] = \gamma(2 - \eta_2) - \mu. \quad (13)$$

Тогда из (11) получим, что предельная нагрузка равна

$$P_0 = 6M_0(2 - \eta_1) \text{tg}^2 \xi_{2p} / a^2. \quad (14)$$

Уравнения движения (6) при схеме Б примут вид

$$\begin{aligned} & \rho \ddot{\alpha}_1 a^3 \{4 \gamma c_1 (\gamma^2 + 3\mu^2 - c_1^2) - 6(\gamma^2 + \mu^2/4) [\mu^2 \arcsin(c_1/\mu) + \\ & \quad + c_1 \sqrt{\mu^2 - c_1^2}] - c_1 (\sqrt{\mu^2 - c_1^2})^3 + \text{ctg}^3 \xi_2 (1 - c_1)^4 \} = \\ & = 2P(t) a^2 \{c_1 (3\gamma^2 + 3\mu^2 - c_1^2) - 3\gamma [c_1 \sqrt{\mu^2 - c_1^2} + \mu^2 \arcsin(c_1/\mu)] + \\ & \quad + \text{ctg}^2 \xi_2 (1 - c_1)^3 \} - 12M_0(2 - \eta_1 - c_1), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \rho \ddot{\alpha}_2 a^3 \{4 c_2 (1 + 3\mu^2 - c_2^2) - 6(1 + \frac{\mu^2}{4}) [\mu^2 \arcsin(c_2/\mu) + \\ & \quad + c_2 \sqrt{\mu^2 - c_2^2}] - c_2 (\sqrt{\mu^2 - c_2^2})^3 + \text{tg}^3 \xi_2 (1 - c_2)^4 \} = \\ & = 2P(t) a^2 \{c_2 (3 + 3\mu^2 - c_2^2) - 3(c_2 \sqrt{\mu^2 - c_2^2} + \mu^2 \arcsin(c_2/\mu)) + \\ & \quad + (1 - c_2)^3 \text{tg}^2 \xi_2 \} - 12M_0 [\gamma(2 - \eta_2) - c_2], \end{aligned} \quad (16)$$

$$c_1 = \sin \xi_2 [\sqrt{\mu^2 - (\gamma \sin \xi_2 - \cos \xi_2)^2} - (\gamma - \text{ctg} \xi_2) \cos \xi_2],$$

$$c_2 = \cos \xi_2 \sqrt{\mu^2 - (\gamma \sin \xi_2 - \cos \xi_2)^2} + (\gamma - \text{ctg} \xi_2) \sin^2 \xi_2,$$

$$c_1^2 + c_2^2 = \mu^2.$$

Для определения  $P_0$  считаем  $\ddot{\alpha}_i = 0$  ( $i = 1, 2$ ) в уравнениях (15), (16) и имеем

$$P = \frac{6M_0(2 - \eta_1 - c_1) / a^2}{\mu \sin \xi_2 [3 + \mu^2(2 + \cos^2 \xi_2) - 3\mu \cos \xi_2] - 3\mu^2 \xi_2 + \text{ctg}^2 \xi_2 (\gamma - \mu \sin \xi_2)^3}, \quad (17)$$

$$P = \frac{6M_0 [\gamma(2 - \eta_2) - c_2] / a^2}{\mu \cos \xi_2 [3 + \mu^2(2 + \sin^2 \xi_2) - 3\mu \sin \xi_2] - 3\mu^2 (\frac{\pi}{2} - \xi_2) + \text{tg}^2 \xi_2 (\gamma - \mu \cos \xi_2)^3}. \quad (18)$$

Из (17), (18) получим, что при схеме Б в зависимости от соотношения значений  $\gamma$ ,  $\mu$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  величина  $\xi_{2p}$  определяется из уравнения

$$\frac{2 - \eta_1 - c_1}{\mu \sin \xi_{2p} [3 + \mu^2(2 + \cos^2 \xi_2) - 3\mu \cos \xi_{2p}] - 3\mu^2 \xi_{2p} + \text{ctg}^2 \xi_{2p} (\gamma - \mu \sin \xi_{2p})^3} = \quad (19)$$

$$= \frac{\gamma(2 - \eta_2) - c_2}{\mu \cos \xi_{2p} [3 + \mu^2(2 + \sin^2 \xi_{2p}) - 3\mu \sin \xi_{2p}] - 3\mu^2(\pi/2 - \xi_{2p}) + \text{tg}^2 \xi_{2p}(\gamma - \mu \cos \xi_{2p})^3},$$

а предельная нагрузка  $P_0$  определяется из (17) при  $\xi_2 = \xi_{2p}$ .

Уравнения (6) при схеме В ( $\eta_1 = 0, \eta_2 = 1$ ) имеют вид

$$\rho \ddot{\alpha}_1 a^3 [4\gamma^3 - \mu^2 \pi(\gamma^2 + \mu^2/4) + 8\gamma\mu^3 - 3\gamma^4 \text{tg}^2 \xi_2] = 2P(t)a^2 \{ \mu(3\gamma^2 + 2\mu^2) - 3\gamma\mu^2 \pi/2 + \gamma^2 [3(1 - \mu) - 2\gamma \text{tg} \xi_2] \} - 12M_0(2 - \mu), \quad (20)$$

$$\rho \ddot{\alpha}_2 a^3 \gamma^3 \text{tg}^3 \xi_2 = 2P(t)a^2 \gamma^3 \text{tg}^2 \xi_2 - 12M_0. \quad (21)$$

Для определения  $P_0$  считаем  $\ddot{\alpha}_i = 0$  ( $i = 1, 2$ ) в уравнениях (20), (21) и имеем

$$P = \frac{6M_0(2 - \mu)/a^2}{\mu(3\gamma^2 + 2\mu^2) - 3\gamma\mu^2 \pi/2 + \gamma^2 [3(1 - \mu) - 2\gamma \text{tg} \xi_2]}, \quad (22)$$

$$P = 6M_0/(a^2 \gamma^2 \text{tg}^2 \xi_2). \quad (23)$$

Из (22), (23) получим, что в зависимости от соотношения значений  $\gamma, \mu$  величина  $\xi_{2p}$  при схеме В определяется из уравнения

$$(2 - \mu)\gamma^2 \text{tg}^2 \xi_{2p} = \mu(3\gamma^2 + 2\mu^2) - 3\gamma\mu^2 \pi/2 + \gamma^2 [3(1 - \mu) - 2\gamma \text{tg} \xi_{2p}], \quad (24)$$

а  $P_0$  определяется из (23) при  $\xi_2 = \xi_{2p}$ .

При  $\xi_{2p} = \phi_a$  уравнения (13), (19) совпадают. Считая  $\xi_{2p} = \phi_a$  в уравнении (13), получим зависимость  $\mu = \mu(\gamma, \eta_1, \eta_2)$

$$\frac{2 - \eta_1}{(\gamma - \mu)^2} = \frac{\gamma(2 - \eta_2) - \mu}{\mu(3 + 2\mu^2) - 3\mu^2 \pi/2 + \gamma - \mu}. \quad (25)$$

При  $\xi_{2p} = \phi_b$  уравнения (19) при  $\eta_1 = 0, \eta_2 = 1$  и (24) совпадают. Считая  $\xi_{2p} = \phi_b$  в уравнении (24), получим зависимость  $\mu = \mu(\gamma)$  при  $\eta_1 = 0, \eta_2 = 1$

$$\frac{2 - \mu}{\mu(3\gamma^2 + 2\mu^2) - 3\gamma\mu^2 \pi/2 + \gamma^2(1 - \mu)} = \frac{1}{(1 - \mu)^2}. \quad (26)$$

График зависимости  $\mu$  от величины  $\gamma$  при разных  $\eta_1, \eta_2$  по формуле (25) приведен на рис. 4. Кривая 1 соответствует случаю  $\eta_1 = \eta_2 = 0$  (защемление всех сторон); кривая 2 относится к случаю  $\eta_1 = \eta_2 = 1$  (шарнирное опирание всех сторон); кривая 3 –  $\eta_1 = 1, \eta_2 = 0$ ; кривая 4 –  $\eta_1 = 0, \eta_2 = 1$ . Кривая 5 на рис. 4 изображает зависимость  $\mu$  от величины  $\gamma$  при  $\eta_1 = 0, \eta_2 = 1$  по формуле (26). Теперь, для того чтобы определить по какой схеме А, Б или В будет происходить предельное деформирование пластины с заданными параметрами  $\gamma, \mu, \eta_1, \eta_2$ , достаточно определить правее или левее соответствующей кривой лежит точка  $(\gamma, \mu)$  на рис. 4. В случае  $\eta_1 = 0, \eta_2 = 1$ , если точка  $(\gamma, \mu)$  лежит правее кривой 4, то  $\xi_{2p} \geq \phi_a$ , и пластина деформируется по схеме А; если  $(\gamma, \mu)$  лежит левее кривой 5, то  $\xi_{2p} \leq \phi_b$ , и пластина деформируется по схеме В; если точка  $(\gamma, \mu)$  находится левее кривой 4 и правее кривой 5, то  $\phi_b \leq \xi_{2p} \leq \phi_a$ , и в предельном состоянии реализуется схема Б. В случаях, отличных от  $\eta_1 = 0, \eta_2 = 1$ , если точка  $(\gamma, \mu)$  лежит правее соответствующей кривой (1, 2 или 3), то  $\xi_{2p} \geq \phi_a$ , и пластина деформируется по схеме А; если точка  $(\gamma, \mu)$  лежит левее этой кривой, то  $\phi_b \leq \xi_{2p} \leq \phi_a$ , и пластина деформируется по схеме Б. Из рис. 4 видно для любого  $\mu$ , что в случае  $\gamma = 1$  при одинаковом закреплении сторон ( $\eta_1 = \eta_2$ ) деформирование происходит по схеме Б, а при  $\gamma > 2,54$  и любом креплении сторон – по схеме А.

Предельная нагрузка  $P_0$  при схеме А определяется из уравнения (14). Предельная нагрузка  $P_0$  при схеме Б определяется из уравнения (17), в котором считаем  $P = P_0$  и  $\xi_{2p}$  вычислено из уравнения (19). Предельная нагрузка  $P_0$  при схеме В определяется из уравнения (23), в котором считаем  $P = P_0$  и  $\xi_{2p}$  получено из уравнения (24).

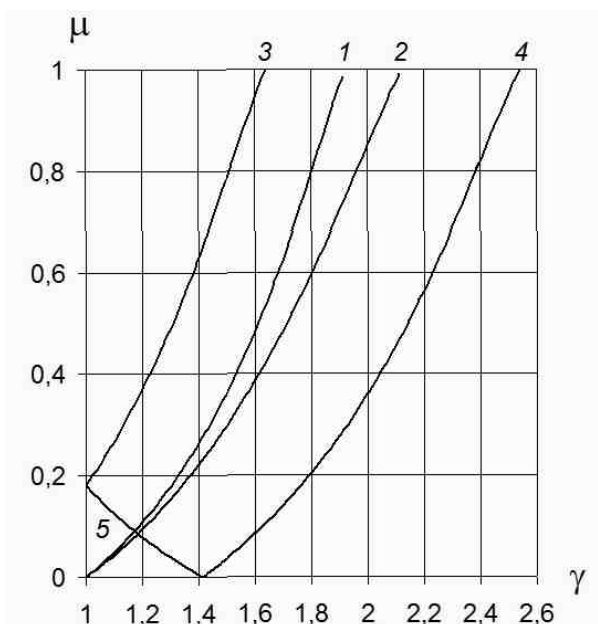


Рис. 4.

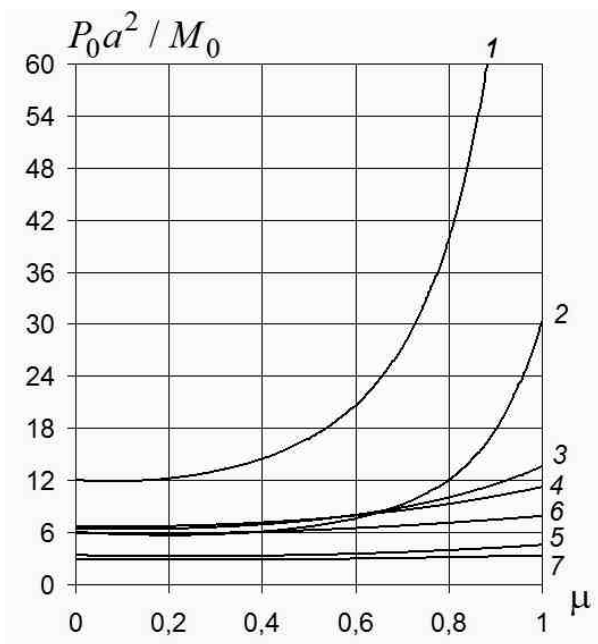


Рис. 5.

График зависимости  $P_0$  от параметра  $\mu$  при различных значениях  $\gamma, \eta_1, \eta_2$  приведен на рис. 5. Кривая 1 изображает случай  $\gamma = 1, \eta_1 = \eta_2 = 0$ ; кривая 2 – случай  $\gamma = 1, \eta_1 = \eta_2 = 1$ ; кривая 3 – случай  $\gamma = 1,7, \eta_1 = 1, \eta_2 = 0$ ; кривая 4 – случай  $\gamma = 2,2, \eta_1 = \eta_2 = 0$ ; кривая

5 – случай  $\gamma = 2, 2$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 1$ ; кривая 6 – случай  $\gamma = 3$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ ; кривая 7 – случай  $\gamma = 3$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 1$ . При фиксированном  $\gamma$  и при увеличении значения  $\mu$  от нуля до единицы значение предельной нагрузки  $P_0$  сначала немного снижается, а затем увеличивается. При росте  $\gamma$  значение  $P_0$  уменьшается, также уменьшается влияние параметра отверстия  $\mu$  на величину  $P_0$ .

В случае отсутствия отверстия ( $\mu = 0$ ) и шарнирного опирания всех сторон ( $\eta_1 = \eta_2 = 1$ ) полученная предельная нагрузка прямоугольной пластины совпадает с предельной нагрузкой, вычисленной в работе [2]. В [2] также показано, что эта предельная нагрузка превышает не более чем на 1,55 % точное значение, определенное на основе условия текучести Треска.

**3.** При деформировании под действием «средних» нагрузок по схеме А динамическое поведение описывается уравнениями (7), (9), (10) с начальными условиями (11). Начальные условия  $\xi_2(0) = \xi_{20}$  определим следующим образом. Интегрируя по времени уравнения (9), (10), учитывая (11), получим

$$\rho \dot{\alpha}_1 a^3 = 2 \int_0^t \frac{P(t) a^2 \operatorname{ctg}^2 \xi_2 - 6M_0(2 - \eta_1)}{\operatorname{ctg}^3 \xi_2} dt,$$

$$\rho \dot{\alpha}_2 a^3 = 2 \int_0^t \frac{P(t) a^2 [\mu (3 + 2\mu^2) - 3\mu^2 \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{ctg} \xi_2 + 3(\gamma - \mu)] - 6M_0 [\gamma (2 - \eta_2) - \mu]}{8\mu^3 - 3\mu^2 \pi (1 + \mu^2/4) - 3\operatorname{ctg} \xi_2 + 4\gamma} dt.$$

Подставляя полученные равенства в (8), имеем

$$\operatorname{tg} \xi_2 = \frac{\int_0^t \frac{P(t) a^2 \operatorname{ctg}^2 \xi_2 - 6M_0(2 - \eta_1)}{\operatorname{ctg}^3 \xi_2} dt}{\int_0^t \frac{P(t) a^2 [\mu (3 + 2\mu^2) - 3\mu^2 \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{ctg} \xi_2 + 3(\gamma - \mu)] - 6M_0 [\gamma (2 - \eta_2) - \mu]}{8\mu^3 - 3\mu^2 \pi (1 + \mu^2/4) - 3\operatorname{ctg} \xi_2 + 4\gamma} dt}.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу  $t \rightarrow 0$ , раскрывая неопределенность по правилу Лопитала, получим уравнение для определения  $\xi_{20}$  в зависимости от величины  $P_{\max}$

$$\begin{aligned} \{P_{\max} a^2 [\mu (3 + 2\mu^2) - 3\mu^2 \pi/2 - 2\operatorname{ctg} \xi_{20} + 3(\gamma - \mu)] - \\ - 6M_0 [\gamma (2 - \eta_2) - \mu]\} \operatorname{ctg}^2 \xi_{20} = [P_{\max} a^2 \operatorname{ctg}^2 \xi_{20} - \\ - 6M_0(2 - \eta_1)] [8\mu^3 - 3\mu^2 \pi (1 + \mu^2/4) - 3\operatorname{ctg} \xi_{20} + 4\gamma]. \end{aligned} \quad (27)$$

На рис. 6 приведена зависимость угла  $\xi_{20}$  от максимальной нагрузки  $p_{\max} = P_{\max} a^2 / M_0$  ( $P_0 \leq P_{\max} \leq 5P_0$ ) для шарнирно опертой по всем сторонам ( $\eta_1 = \eta_2 = 1$ ) прямоугольной пластины с круглым отверстием при  $\gamma = 3$ . Кривые 1–4 относятся к случаям  $\mu = 0, 1$ ,  $\mu = 0, 3$ ,  $\mu = 0, 6$ ,  $\mu = 0, 8$ , соответственно. Видно, что при возрастании амплитуды нагрузки значение угла  $\xi_{20}$  увеличивается.

При схемах Б и В начальные значения  $\xi_{20}$  определяются аналогичным образом. При схеме Б значение  $\xi_{20}$  в зависимости от  $P_{\max}$  вычисляется из уравнения

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \xi_{20} (P_{\max} a^2 \{\mu \cos \xi_{20} [3 + \mu^2(2 + \sin^2 \xi_{20}) - 3\mu \sin \xi_{20}] - \\ - 3\mu^2(\pi/2 - \xi_2) + \operatorname{tg}^2 \xi_{20} (\gamma - \mu \cos \xi_{20})^3\} - 6M_0 [\gamma (2 - \eta_2) - c_2]) / \Sigma_1(\xi_{20}) / \Sigma_2(\xi_{20}) = \\ = P_{\max} a^2 \{\mu \sin \xi_{20} [3 + \mu^2(2 + \cos^2 \xi_{20}) - 3\mu \cos \xi_{20}] - \\ - 3\mu^2 \xi_{20} + \operatorname{ctg}^2 \xi_{20} (\gamma - \mu \sin \xi_{20})^3\} - 6M_0(2 - \eta_1 - c_1), \end{aligned}$$

при схеме В – из уравнения

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \xi_{20} \gamma (P_{\max} a^2 \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \xi_{20} - 6M_0) \Sigma_1(\xi_{20}) / \Sigma_2(\xi_{20}) = \\ = P_{\max} a^2 \{\mu (3\gamma^2 + 2\mu^2) - 3\gamma \mu^2 \frac{\pi}{2} + \gamma^2 [3(1 - \mu) - 2\gamma \operatorname{tg} \xi_2]\} - 2M_0(2 - \mu), \end{aligned}$$

где обозначено

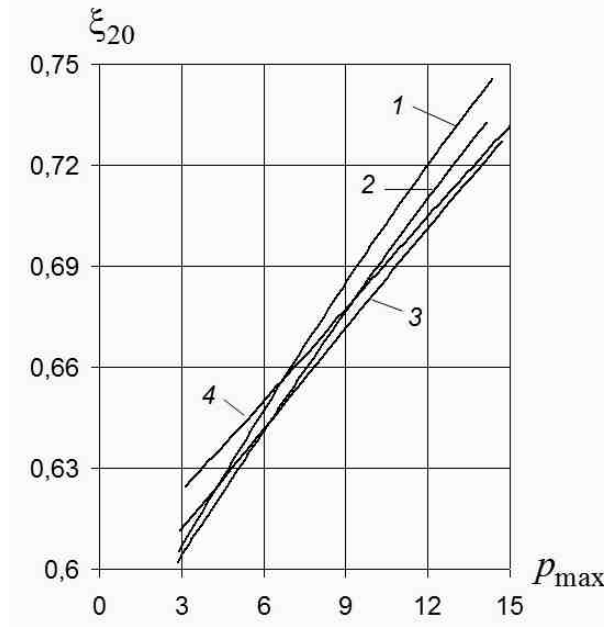


Рис. 6.

$$\Sigma_i(\xi_2) = \iint_{S_i} y_i^2 dy_i dx_i / a. (i = 1, 2). \quad (28)$$

При «средних» нагрузках и деформировании по схеме А определяющая система уравнений (8), (9), (10) с начальными условиями (11) и (28) решается численно методом Рунге-Кутты. Момент остановки пластины  $t_k$  определяется из условия

$$\dot{\alpha}_1(t_k) = 0.$$

При схемах Б и В поведение пластины определяются аналогичным образом. Все прогибы вычисляются из (1).

На рис. 7 приведены безразмерные прогибы  $w = ua^2\rho/(M_0T^2)$  в сечении вдоль линии  $OB$  (на рис. 1) для прямоугольной пластины с круглым свободным отверстием с параметрами  $\gamma = 3$  и  $\mu = 0,3$  под действием нагрузки прямоугольного вида с  $P_{\max} = 8,49M_0/a^2$  во время нагружения  $0 \leq t \leq T$ . Кривые 1, 2 относятся к случаю защемления всех сторон ( $P_0 = 5,92M_0/a^2$ ,  $\xi_{2p} = 0,61$ ,  $\xi_{20} = 0,63$ ) и изображают прогибы в моменты снятия нагрузки  $t = T$  и остановки пластины  $t = t_k = 1,44T$  ( $\xi_2(t_k) = 0,58$ ). Кривые 3, 4 соответствуют прогибам при шарнирном опирании всех сторон ( $P_0 = 2,83M_0/a^2$ ,  $\xi_{2p} = 0,60$ ,  $\xi_{20} = 0,67$ ) и изображают прогибы в моменты снятия нагрузки  $t = T$  и момент остановки  $t = t_k = 3T$  ( $\xi_2(t_k) = 0,57$ ).

Отметим, что во всех проведенных численных расчетах выполнялось следующее соотношение для времени деформирования пластины:  $t_k \approx \int_0^T P(t)dt/P_0$ .



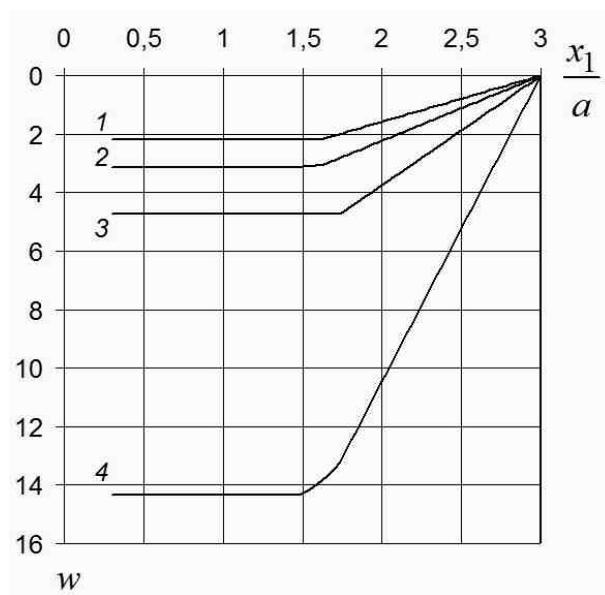


Рис. 7.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Немировский, Ю. В.* Динамика жесткопластической правильной полигональной пластины с отверстием под действием взрывных нагрузок / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова // Краевые задачи и математическое моделирование : сб. ст. 9-й Всерос. науч. конф., 28-29 ноября 2008 г., Новокузнецк : в 3 т. / под общ. ред. В. О. Каледина. - Новокузнецк, 2008. - Т. 1. - С. 93-97.
- [2] *Ржаницын, А. Р.* Предельное равновесие пластинок и оболочек / А. Р. Ржаницын - М. : Наука, 1983. - 288 с.
- [3] *Narasimhan, R. K.* Yield line analysis of square slabs with central rectangular openings / R. K. Narasimhan, V. Verreyya // J. Inst. Eng. (India) Civil Eng. Div. - 1978. - Vol. 59, № 2. - P. 138-143.
- [4] *Ерхов, М. И.* Теория идеально пластических тел и конструкций / М. И. Ерхов. - М. : Наука, 1978. - 352 с.

Yu. V. Nemirovskiy, T. P. Romanova

**LIMIT AND DYNAMIC BEHAVIOR OF RECTANGULAR SLABS WITH FREE  
ROUND APERTURE**

*Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch, S. Khristianovich Russian  
Academy of Sciences*

**Abstract.** The method of calculation at ultimate load and permanent deflection of rectangular slabs with a free round aperture under the impact of uniformly distributed dynamic load of explosive type on the basis of ideal rigid-plastic material model is proposed. The slab sides are simply supported and fixed. Possible schemes of slab ultimate deforming are described. Numerical examples are given. The solutions can be used in various engineering calculations.

**Keywords:** ideal rigid-plastic slab, rectangular slab, round aperture, explosive load, permanent deflection.

*Немировский Юрий Владимирович*

*доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и прикладной механики СО РАН им. С. А. Христиановича*

**e-mail:** nemirov@itam.nsc.ru

*Романова Татьяна Павловна*

*кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института теоретической и прикладной механики СО РАН им. С. А. Христиановича*

**e-mail:** nemirov@itam.nsc.ru

*Nemirovsky Yury Vladimirovich*

*Dr. Sci. Phys & Math, Professor, Main Research worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk*

*Romanova Tatyana Pavlovna*

*Ph.D., Senior Research Worker, Main Research worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk*