Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(66). С. 123–129

С. Г. Саакян

ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Ереванский государственный университет архитектуры и строительства

Аннотация. Решение задач динамической теории упругости методом интегральных преобразований общеизвестно [1]. Этим методом непосредственно получится решение задачи в изображениях. Однако, обращение изображений порой не всегда удается и часто представляется серьезной математической трудностью. Каньяр [2] предложил новый метод обращения интегральных преобразований, который в дальнейшем широко применяется в динамических задачах теории упругости [3-7]. Суть метода Каньяра заключается в том, что после обратного преобразования изображения по пространственной переменной и подходящего выбора системы координат изображение приводится к преобразованию Лапласа по времени для известной функции, откуда и найдется оригинал решения. В настоящей работе предлагается метод обращения интегральных преобразований, суть которого заключается в том, что после нахождения обратного преобразования Лапласа по времени и подходящей замены переменной интегрирования, изображение приводится к интегральному преобразованию по пространственной переменной для известной функции, откуда и найдется решение задачи. В качестве примера приложения метода приводится эффективное решение до сих пор нерешенной задачи о волнах давления, распространяющихся в жидком сжимаемом упругом полупространстве при расширяющихся с произвольной скоростью поверхностных нагрузках.

Ключевые слова: упругость, давление, интегральные преобразования, изображение, волны, жидкость, полупространство.

УДК: 539.1, 539.3

1. Постановка задачи. Рассматривается задача о распространении волн давления в жидкости, занимающей в системе координат (r, θ, z) полупространство $z \geq 0$, при расширяющейся с произвольной скоростью поверхностной нагрузке

$$p^* (r, \tau) = P_0 f \left(\sqrt{\gamma^2 \tau^2 - r^2} \right) \eta (\gamma \tau - r) , \tag{1}$$

где $\tau = c_0 t$, $\gamma = c/c_0$ c_0 – скорость распространения возмущений в жидкости, c – скорость фронта расширяющейся поверхностной нагрузки.

В (1) фронт расширяющейся поверхностной нагрузки задается $\eta (\tau)$ функцией Хевисайда. Фактически, (1) определяет давление за фронтом распространяющейся ударной волны, которая возникает, например, при точечных взрывах в воздухе над уровнем жидкости.

Поступила 25.08.2008

Автор считает своим приятным долгом выразить признательность д.ф.-м.н., проф., чл.-корр. НАН РА Багдоеву А.Г. за полезные замечания при обсуждении полученных результатов.

В рамках линейной теории распространение осесимметричных волн давления в идеальной сжимаемой жидкости при отсутствии объемных сил определяется уравнением [8]

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}. \tag{2}$$

Полагая

$$P_L\left(r, z, s\right) = \int\limits_0^\infty p\left(r, z, \tau\right) e^{-\gamma\tau} d\tau, \tag{3}$$

$$P_{LH}\left(\xi, z, s\right) = \int\limits_0^\infty P_L\left(r, z, s\right) J_0\left(\xi r\right) r dr, \tag{4}$$

найдем решение задачи (1) и (2) при однородных начальных условиях

$$p\left(r, z, 0\right) = p'_\tau\left(r, z, 0\right) = 0 \tag{5}$$

в изображениях интегральных преобразований Лапласа и Ханкеля.

Из (1) и (2) получаем

$$\frac{d^2 P_{LH}}{dz^2} - \left(\xi^2 + s^2\right) P_{LH} = 0. \tag{6}$$

$$P_{LH}\left(\xi, 0, s\right) = P^*_{LH}\left(\xi, s\right). \tag{7}$$

Теперь вычислим изображение P^*_{LH} граничного условия (1).

Имеем

$$P^*_{LH}\left(\xi, s\right) = P_0 \int\limits_0^\infty \left[\int\limits_{r/\gamma}^\infty f\left(\sqrt{\gamma^2\tau^2 - r^2}\right) e^{-s\tau} d\tau\right] J_0\left(\xi r\right) r dr. \tag{8}$$

Далее, переменим порядок интегрирования в (8), а затем заменим переменную r на $u = \sqrt{\gamma^2\tau^2 - r^2}$, получим

$$P^*_{LH}\left(\xi, s\right) = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^{\gamma\tau} J_0\left(\xi\sqrt{\gamma^2\tau^2 - u^2}\right) f\left(u\right) u du\right) e^{-s\tau} d\tau. \tag{9}$$

В силу известных соотношений операционного исчисления [9] находим

$$P^*_{LH}\left(\xi, s\right) = -\frac{P_0 F'_{LH}\left(\sqrt{\xi^2 + s^2/\gamma^2}\right)}{\gamma\sqrt{\xi^2 + s^2/\gamma^2}}, \tag{10}$$

где $F'_{LH}\left(s\right)$ есть изображение от $uf\left(u\right)$.

Решение уравнения (6), стремящееся к нулю при $z \to +\infty$ и удовлетворяющее условию (7), получим в виде

$$P_{LH}\left(\xi, z, s\right) = -\frac{P_0 F'_{LH}\left(\sqrt{\xi^2 + s^2/\gamma^2}\right)}{\gamma\sqrt{\xi^2 + s^2/\gamma^2}} \exp\left[-z\sqrt{\xi^2 + s^2}\right]. \tag{11}$$

2. Решение задачи в преобразовании Ханкеля. Формула (11) является произведением двух изображений $P^*_{LH}(\xi,s)$ и $P^0_{LH}(\xi,z,s)=\exp\left[-z\sqrt{\xi^2+s^2}\right]$, и ее оригинал определяется формулой свертки

$$P_H(\xi,z,\tau)=\int\limits_0^\tau P^*_H(\xi,\mathrm{v})\,P^0_H(\xi,z,\tau-\mathrm{v})\,d\mathrm{v}. \tag{12}$$

Здесь P^0_H есть оригинал от (11) по τ.

Из формулы (9) определим оригинал изображения $P^*_{LH}(\xi,s)$.

$$P^*_H(s,\tau)=\int\limits_0^{\gamma\tau} J_0\left(\xi\sqrt{\gamma^2\tau^2-u^2}\right)f(u)\,udu. \tag{13}$$

Оригинал изображения $P^0_{LH}(\xi,z,s)$ известен

$$P^0_H(\xi,z,\tau)=\delta(\tau-z)-\xi z\frac{J_1\left(\xi\sqrt{\tau^2-z^2}\right)}{\sqrt{\tau^2-z^2}}\eta(\tau-z). \tag{14}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}P_H(\xi,z,\tau)=\tfrac{P_0}{\gamma}\left\{\int\limits_0^\tau\left[\int\limits_0^{\gamma\mathrm{v}}J_0\left(\xi\sqrt{\gamma^2\mathrm{v}^2-u^2}\right)f(u)\,udu\right]\delta(\tau-\mathrm{v}-z)\,d\mathrm{v}-\right.\\ -\xi z\int\limits_0^\tau\left[\int\limits_0^{\gamma\mathrm{v}}J_0\left(\xi\sqrt{\gamma^2\mathrm{v}^2-u^2}\right)f(u)\,udu\right]\times\\ \left.\times\frac{J_1\left(\xi\sqrt{(\tau-\mathrm{v})^2-z^2}\right)}{\sqrt{(\tau-\mathrm{v})^2-z^2}}\eta(\tau-\mathrm{v}-z)\,d\mathrm{v}\right\}.\end{gathered} \tag{15}$$

В двойных интегралах (15) переменим порядок интегрирования, получим

$$P_H(\xi,z,\tau)=\frac{P_0}{\gamma}\left\{P^{(1)}_H(\xi,z,\tau)+P^{(2)}_H(\xi,z,\tau)\right\}, \tag{16}$$

где

$$P^{(1)}_H(\xi,z,\tau)=\int\limits_0^{\gamma(\tau-z)}J_0\left(\xi\sqrt{\gamma^2(\tau-z)^2-u^2}\right)f(u)\,udu, \tag{17}$$

$$\begin{gathered}P^{(2)}_H(\xi,z,\tau)=-\int\limits_0^{\gamma(\tau-z)}\left[\int\limits_{u/\gamma}^{\gamma(\tau-z)}J_0\left(\xi\sqrt{\gamma^2\mathrm{v}^2-u^2}\right)\times\right.\\ \left.\times\frac{J_1\left(\xi\sqrt{(\tau-\mathrm{v})^2-z^2}\right)}{\sqrt{(\tau-\mathrm{v})^2-z^2}}d\mathrm{v}\right]f(u)\,udu.\end{gathered} \tag{18}$$

Таким образом, формулы (16)–(18) дают решение задачи в виде изображения преобразования Ханкеля.

3. Переход к оригиналу. Процедура обращения изображений $P^{(1)}_H(\xi,z,\tau)$ и $P^{(2)}_H(\xi,z,\tau)$ заключается в том, чтобы привести их к преобразованию Ханкеля для известных функций, откуда и найдется их оригинал.

Очевидно, что (17) приводится к преобразованию Ханкеля для известной функции, если заменим в нем выражение $\sqrt{\gamma^2(\tau-z)^2-u^2}=r$. После некоторых преобразований (17) приводим к виду

$$P_H^{(1)}(\xi,z,\tau)=\int\limits_0^\infty f\left(\sqrt{\gamma^2(\tau-z)^2-r^2}\right)\eta\left[\gamma(\tau-z)-r\right]J_0(\xi r)\,rdr. \tag{19}$$

Отсюда видно, что оригиналом изображения $P_H^{(1)}(\xi,z,\tau)$ будет функция

$$P_H^{(1)}(r,z,\tau)=f\left(\sqrt{\gamma^2(\tau-z)^2-r^2}\right)\eta\left[\gamma(\tau-z)-r\right]. \tag{20}$$

Далее, чтобы найти оригинал (18) сначала рассмотрим изображение

$$\begin{gathered}Q_H(\xi,z,\tau)=-\int\limits_0^{\gamma(\tau-z)}\left[\int\limits_{u/\gamma}^{\tau-z}J_0\left(\xi\sqrt{\gamma^2\mathrm{v}^2-u^2}\right)\times\right.\\ \left.\times J_0\left(\xi\sqrt{(\tau-\mathrm{v})^2-z^2}\right)d\mathrm{v}\right]f(u)\,udu,\end{gathered} \tag{21}$$

из которого дифференцированием по z получится $P_H^{(2)}(\xi,z,\tau)$.

В (21) заменим переменную интегрирования v переменной φ по формулам

$$\sqrt{\gamma^2\mathrm{v}^2-u^2}=\omega\sin\varphi,\quad \sqrt{(\tau-\mathrm{v})^2-u^2}=q\cos\varphi, \tag{22}$$

где

$$\omega=\sqrt{\gamma^2(\tau-z)^2-u^2},\quad q=\sqrt{\left(\tau-\frac{u}{\gamma}\right)^2-z^2} \tag{23}$$

и пользуясь формулой [10]

$$\int\limits_0^{\pi/2}J_0(a\sin\varphi)\,J_0(b\cos\varphi)\sin\varphi\cos\varphi d\varphi=\frac{J_1\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)}{\sqrt{a^2+b^2}}, \tag{24}$$

получим

$$Q_H(\xi,z,\tau)=-\int\limits_0^{\gamma(\tau-z)}\frac{\omega^2+\gamma^2q^2}{\gamma^2\xi\tau}\frac{J_1\left(\xi\sqrt{\omega^2+q^2}\right)}{\sqrt{\omega^2+q^2}}f(u)\,udu. \tag{25}$$

Имеются три случая обращения $Q_H(\xi,z,\tau)$ в зависимости от значения отношений скорости распространения фронта поверхностной нагрузки к скорости звука в жидкости: сверхзвуковой ($c>c_0$), звуковой ($c=c_0$) и дозвуковой ($c<c_0$).

Сверхзвуковой случай ($\gamma>1$). В (25) заменим переменную интегрирования u на τ по формуле $\sqrt{\omega^2+q^2}=r$. Тогда, (25) после замены приводится к виду

$$\begin{gathered}Q(\xi,z,\tau)=\int\limits_0^\infty\tfrac{2[\tau-z-u_1]f(u_1)}{\xi[\tau+(\gamma^2-1)u_1]}\eta\times\\ \times\left(\sqrt{(\gamma^2-1)\left(z-\tfrac{\gamma^2\tau}{\gamma^2-1}\right)^2-\tfrac{\tau^2}{\gamma^2-1}}-r\right)J_1(\xi r)\,dr.\end{gathered} \tag{26}$$

Здесь введено обозначение

$$u_1=u_1(r,z,\tau)=\sqrt{\left(z-\frac{\gamma^2\tau}{\gamma^2-1}\right)^2-\frac{r^2}{\gamma^2-1}}-\frac{\tau}{\gamma^2-1}. \tag{27}$$

Формула (26) представляет собой преобразование Ханкеля первого порядка для известной функции. Поэтому, если учитываем соотношение между преобразованиями Ханкеля производных функции [1]

$$\int_0^\infty \gamma \frac{df}{dr} J_1(\xi r)\, dr = -\xi \int_0^\infty r f(r) J_0(\xi r)\, dr, \tag{28}$$

получим

$$\begin{gathered} Q(r,z,\tau) = \int_0^r \tfrac{2[\gamma(\tau-z)-u_1] f(u_1)}{\gamma\tau+(\gamma^2-1)u_1} \eta \times \\ \times \left(\sqrt{(\gamma^2-1)\left(z - \tfrac{\gamma^2\tau}{\gamma^2-1}\right)^2 - \tfrac{\tau^2}{\gamma^2-1}} - \omega \right) \tfrac{d\omega}{\omega}. \end{gathered} \tag{29}$$

Звуковой случай ($\gamma = 1$). Оригинал изображения $Q_H(\xi, z, \tau)$ при $\gamma = 1$ получается таким же путем, как в предыдущем случае

$$Q(r,z,\tau) = \int_0^r \frac{\omega f(u_2)}{\tau^2} \eta \left(\sqrt{2\tau(\tau-z)} - \omega \right) d\omega, \tag{30}$$

где

$$u_2(\omega, z, \tau) = \tau - z - \omega^2 / 2\tau. \tag{31}$$

Дозвуковой случай ($\gamma < 1$). Аналогично, как в рассмотренных случаях, получим

$$\begin{gathered} Q(r,z,\tau) = \int_0^r \tfrac{2[(\tau-z)-u_3] f(u_3)}{\tau-(1-\gamma^2)u_3} \eta \times \\ \times \left(\sqrt{\tfrac{r^2}{1-\gamma^2} - (1-\gamma^2)\left(z + \tfrac{\gamma^2\tau}{1-\gamma^2}\right)} - \omega \right) \tfrac{d\omega}{\omega}, \end{gathered} \tag{32}$$

где

$$u_3 = u_3(\omega, z, \tau) = \sqrt{\left(z + \frac{\gamma^2\tau}{1-\gamma^2}\right)^2 + \omega^2} + \frac{\tau}{1-\gamma^2}. \tag{33}$$

В силу линейности интегральных преобразований и соотношения $P^{(2)}(r,z,\tau) = \frac{\partial}{\partial z} Q(r,z,\tau)$ точное и аналитическое решение задачи о проникании давления в жидком полупространстве при любых скоростях расширения поверхностной нагрузки получим в виде

$$P(r,z,\tau) = \frac{P_0}{\gamma} \left\{ P^{(1)}(r,z,\tau) + \frac{\partial}{\partial z} Q(r,z,\tau) \right\}. \tag{34}$$

Таким образом, при всех скоростях расширения поверхностной нагрузки член $P^{(1)}(r,z,\tau)$ в (34) определяет часть решения для давления $P(r,z,\tau)$ в области, ограниченной поверхностями $\gamma(\tau - z) - r = 0$ и $z = 0$. В любой момент времени $\tau > 0$, уравнение $\gamma(\tau - z) - r = 0$ определяет коническую поверхность с вершиной в точке $z_0 = \tau$, $r_0 = 0$ и круг с радиусом $r_1 = \gamma\tau$ при $z = 0$. Фактически, этот член определяет часть давления, которая связана с фронтом расширяющейся поверхностной нагрузки. Далее, часть давления, которая определяется членом $Q(r,z,\tau)$ в (34) задается в области, определяемой η функцией Хевисайда при $z > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Снеддон, И.* Преобразования Фурье / И. Снеддон. - М. : 1955. - 687 с.

[2] *Cagniard, L.* Reflection and refraction of progressive seismic waves / L.Cagniard. - New York : Mc Graw-Hill, 1962. - 282 p.

[3] *De Hoop, A. T.* A modification of Cogniard's method for solving seismic pulse problems / A. T. de Hoop // Appl. Sci. Res. Sect. B. - 1960. - Vol. - 8, № 4. - P. 349-356.

[4]*Gakcnheimer, D. C.* Response of an Elastic Halfspace to Expanding Surface Loads / D. C.Gakcnheimer // Transactions of the ASME. - 1970. - Vol. 37. - № 1.

[4] *Саакян, С. Г.* Решение нестационарной задачи для упругого пространства при наличии в среде движущегося сосредоточенного импульса / С. Г. Саакян // Известия АН Арм ССР. Механика. - 1977. - Т. 30. - № 4. - С. 3-17.

[5]*Багдоев, А. Г.* Антиплоская задача распространения трещины с произвольной скоростью в анизотропной неоднородной упругой среде / Багдоев А. Г., Саакян С. Г. // Известия РАН. МТТ. - 2002. - № 2. - С. 145-154.

[6]*Karlsson, T.* Lamb's problem for on Imhomogeneous Medium with Constant Velocities of Propagation / Karlsson T., Hook J. F. // Bull. Seismol. Soc. Amer. - 1963. - Vol. 53. - № 5. - P. 1007-1022.

[7]*Газовая динамика* / Рахматулин Х. А. и др. - М. : Высш. шк., 1965. - 722 с.

[8]*Лаврентьев, М. А.* Методы теории функций комплексного переменного / Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. - М. : Наука, 1973. - 416 с.

[9] *Бейтмен, Г.* Высшие трансцендентные функции / Бейтмен Г., Эрдейи А. - М. : Наука, 1966. - 343 с.

S. G. Saakjan

EFFECTIVE METHOD OF SOLVING PROBLEMS OF DYNAMIC THEORY OF ELASTICITY

The Yerevan state university of architecture and building

Abstract. The solution of this problem in image is achieved with this method. However, the reference of images is not always possible, and often represents a serious mathematical difficulty. Kanyar offered a new method of the reference of integral transformation, which is widely applied in dynamic problems of the theory of elasticity. The essence of Kanyar's method is that after return transformations of the image in the spatial variable and a suitable choice of system of co-ordinates the image is led to Laplas time transformation for a known function where the original of solution is found. The method of the integral transformations reference which essence is that after fining Laplas time return transformation on a spatial variable for a known function is given, where the original of the solution is found. The effective decision of an unsolved problem of the waves of pressure extending in liquid compressed elastic semispace at superficial loadings extending with any speed is given an example of the method application.

Keywords: elasticity, pressure, integral conversions, image, waves, liquid, half-space.

Саакян Степан Георгович

доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Ереванского государственного университета архитектуры и строительства, г. Ереван

e-mail: StepanSahakyan@gmail.am

Saakjan Stepan Gevorgovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Higher Mathematics, Erevan State University of Architecture and Building, Erevan