

О ПРОГИБАХ ПЛАСТИНЫ УГЛОВОЙ ФОРМЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ ПРИ ЖЕСТКОМ ЗАКРЕПЛЕНИИ

Военный авиационный инженерный университет

Аннотация. Получено точное решение в конечном виде для полуограниченной упругой пластины угловой формы при жестком закреплении ее границ. Приводится анализ компонент тензора напряжений.

Ключевые слова: упругая полуограниченная пластина, угловая форма, прогибы, жесткое закрепление, компоненты тензора деформаций, равномерная нагрузка.

УДК: 539

Решению задач о прогибах упругой пластины, форма которой ограничена и имеет углы, посвящены работы [1-5] и другие.

Пусть упругая пластина имеет полуограниченную угловую форму с углом раствора α (рис. 1). Уравнение для прогибов запишем в виде неоднородного уравнения в частных производных четвертого порядка

$$\Delta^2 W = q, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

где Δ —оператор Лапласа, q —равномерная нагрузка на пластину, $W(x, y)$ —ее прогибы, Ω —полуограниченная угловая область, занимаемая пластиной. Обозначим через θ_1 и θ_2 — углы между осью x и гранями пластины, уравнения которых запишем в виде

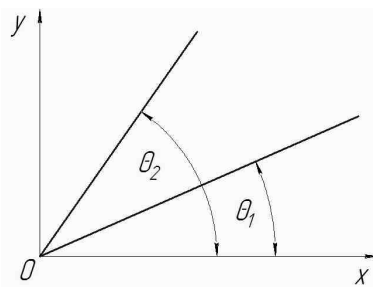


Рис. 1.

$$x \sin \theta_1 - y \cos \theta_1 = 0, \quad x \sin \theta_2 - y \cos \theta_2 = 0, \quad \theta_2 - \theta_1 = \alpha. \quad (2)$$

Введем новые независимые переменные (ξ_1, ξ_2) по формулам

Поступила 16.01.2009

$$\xi_1 = -x \sin \theta_1 + y \cos \theta_1, \quad \xi_2 = x \sin \theta_2 - y \cos \theta_2. \quad (3)$$

В некоторых случаях удобнее эти переменные записывать в векторной форме

$$\xi_i = r n_i, \quad n_i = \left[(-1)^i \sin \theta_i, -(-1)^i \cos \theta_i \right], \quad i = 1, 2, \quad \theta_2 - \theta_1 = \alpha. \quad (4)$$

В дальнейшем будем искать частное точное решение из класса целых полиномов четвертой степени по переменным (ξ_1, ξ_2)

$$W = A_1 \xi_1 + B_1 \xi_2 + A_2 \xi_1^2 + B_2 \xi_1 \xi_2 + C_2 \xi_2^2 + A_3 \xi_1^3 + B_3 \xi_1^2 \xi_2 + C_3 \xi_1 \xi_2^2 + D_3 \xi_2^3 + A_4 \xi_1^4 + B_4 \xi_1^3 \xi_2 + C_4 \xi_1^2 \xi_2^2 + D_4 \xi_1 \xi_2^3 + E_4 \xi_2^4. \quad (5)$$

Для уравнения (1) поставим граничные условия жесткого закрепления краев пластины

$$W|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (6)$$

Здесь n - внутренняя единичная нормаль к Γ . Отметим, что внутри области пластины имеют место неравенства

$$\xi_1 > 0, \quad \xi_2 > 0, \quad (7)$$

а на границе Γ равенства

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0. \quad (8)$$

Зависимость (5) вначале будем упрощать за счет граничных условий. Из первого граничного условия (6) при $\xi_1 = 0$, а затем при $\xi_2 = 0$ получим

$$\text{при } \xi_1 = 0 \Rightarrow B_1 \xi_2 + C_2 \xi_2^2 + D_3 \xi_2^3 + E_4 \xi_2^4 = 0, \quad \forall \xi_2 > 0,$$

$$\text{при } \xi_2 = 0 \Rightarrow A_1 \xi_1 + A_2 \xi_1^2 + A_3 \xi_1^3 + A_4 \xi_1^4 = 0, \quad \forall \xi_1 > 0.$$

Отсюда следует

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = B_1 = C_2 = D_3 = E_4 = 0.$$

Тогда зависимость (5) упрощается

$$W = B_2 \xi_1 \xi_2 + B_3 \xi_1^2 \xi_2 + C_3 \xi_1 \xi_2^2 + B_4 \xi_1^3 \xi_2 + C_4 \xi_1^2 \xi_2^2 + D_4 \xi_1 \xi_2^3. \quad (9)$$

Для подстановки W из (9) во второе граничное условие (6) понадобятся следующие формулы для частных производных

$$\begin{aligned} \text{grad } W(\xi_1, \xi_2) &= \frac{\partial W}{\partial \xi_1} n_1 + \frac{\partial W}{\partial \xi_2} n_2, \\ \frac{\partial W(\xi_1, \xi_2)}{\partial n_{\Gamma}} &= n_{\Gamma} \text{grad } W = \frac{\partial W}{\partial \xi_1} (n_1 n_{\Gamma}) + \frac{\partial W}{\partial \xi_2} (n_2 n_{\Gamma}). \end{aligned} \quad (10)$$

Единичная нормаль n_{Γ} на границе Γ может принимать значения: либо $n_{\Gamma} = n_1$ на крае $\xi_1 = 0$, либо $n_{\Gamma} = n_2$ на крае $\xi_2 = 0$. Поэтому формулы (10) можно представить выражениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial n_1} \Big|_{\xi_1=0} &= \frac{\partial W}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_1=0} + (n_1 n_2) \frac{\partial W}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_1=0}, \\ \frac{\partial W}{\partial n_2} \Big|_{\xi_2=0} &= (n_1 n_2) \frac{\partial W}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_2=0} + \frac{\partial W}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=0}, \quad (n_1 n_2) = -\cos \alpha. \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь второе граничное условие из (6) при помощи (11) и (9) на гранях клина $\xi_1 = 0$ и $\xi_2 = 0$ приводится к двум уравнениям

$$\begin{aligned}
& B_2 [\xi_2 + \xi_1 (n_1 n_2)]_{\xi_1=0} + B_3 [2\xi_1 \xi_2 + \xi_1^2 (n_1 n_2)]_{\xi_1=0} + C_3 [\xi_2^2 + 2\xi_1 \xi_2 (n_1 n_2)]_{\xi_1=0} + \\
& \quad + B_4 [3\xi_1^2 \xi_2 + \xi_1^3 (n_1 n_2)]_{\xi_1=0} + 2C_4 [\xi_1 \xi_2^2 + \xi_1^2 \xi_2 (n_1 n_2)]_{\xi_1=0} + \\
& \quad + D_4 [\xi_2^3 + 3\xi_1 \xi_2^2 (n_1 n_2)]_{\xi_1=0} = B_2 \xi_2 + C_3 \xi_2^2 + D_4 \xi_2^3 = 0, \quad \forall \xi_2 \in [0, \infty), \\
& B_2 [\xi_1 + \xi_2 (n_1 n_2)]_{\xi_2=0} + B_3 [\xi_1^2 + 2\xi_1 \xi_2 (n_1 n_2)]_{\xi_2=0} + C_3 [2\xi_1 \xi_2 + \xi_2^2 (n_1 n_2)]_{\xi_2=0} + \\
& \quad + B_4 [\xi_1^3 + 3\xi_1^2 \xi_2 (n_1 n_2)]_{\xi_2=0} + 2C_4 [\xi_1^2 \xi_2 + \xi_1 \xi_2^2 (n_1 n_2)]_{\xi_2=0} + \\
& \quad + D_4 [3\xi_1 \xi_2^2 + \xi_2^3 (n_1 n_2)]_{\xi_2=0} = B_2 \xi_1 + B_3 \xi_1^2 + B_4 \xi_1^3 = 0, \quad \forall \xi_1 \in [0, \infty).
\end{aligned} \tag{12}$$

Равенства (12) будут выполнены при условиях

$$B_2 = B_3 = B_4 = C_3 = D_4 = 0. \tag{13}$$

С учетом (13) зависимость (9) для прогибов W принимает вид

$$W = C_4 \xi_1^2 \xi_2^2. \tag{14}$$

Итак, если прогибы пластины W представить зависимостью (14), то граничные условия жесткого закрепления краев (6) будут выполнены. Постоянную C_4 найдем, подставляя (14) в уравнение равновесия (1). Для этого вначале оператор Лапласа выразим через оператор $grad$:

$$\Delta W = grad(grad W). \tag{15}$$

Подставляя $grad W$ из (10) в (15), найдем

$$\begin{aligned}
\Delta W &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi_1} n_1 + \frac{\partial W}{\partial \xi_2} n_2 \right) n_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi_1} n_1 + \frac{\partial W}{\partial \xi_2} n_2 \right) n_2 = \\
&= \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_1^2} + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_1 \xi_2} (n_1 n_2) + \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_2^2}.
\end{aligned} \tag{16}$$

С помощью данного выражения будем иметь

$$\Delta W = C_4 [2\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 8\xi_1 \xi_2 (n_1 n_2)]. \tag{17}$$

Если в (16) формально заменить W на ΔW , для которого получено выражение (17), то уравнение (1) примет вид

$$8C_4 [1 + 2(n_1 n_2)^2] = q_0, \quad C_4 = \frac{q_0}{8(1 + 2 \cos^2 \alpha)}.$$

Отсюда приходим к решению задачи (1), (6)

$$W = \frac{q_0 \xi_1^2 \xi_2^2}{8(1 + 2 \cos^2 \alpha)}. \tag{18}$$

Для анализа границ применимости полученного решения перейдем к полярной системе координат (r, φ) . Положим $\theta_1 = -\alpha/2$, $\theta_2 = \alpha/2$ т. е. ось симметрии будет соответствовать значению $\varphi = 0$, где $\varphi \in [-\alpha/2, \alpha/2]$. Проекции нормалей n_1, n_2 будут выражаться через угол раствора пластины α по формулам

$$n_1 = \left(\sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2} \right), \quad n_2 = \left(\sin \frac{\alpha}{2}, -\cos \frac{\alpha}{2} \right).$$

В полярной системе переменные (ξ_1, ξ_2) представляются зависимостями

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= x \sin \frac{\alpha}{2} + y \cos \frac{\alpha}{2} = r \sin \left(\varphi + \frac{\alpha}{2} \right), \\
\xi_2 &= x \sin \frac{\alpha}{2} - y \cos \frac{\alpha}{2} = r \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \varphi \right).
\end{aligned} \tag{19}$$

Так как в области клина $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$, т. е. при $-\frac{\alpha}{2} \leq \varphi \leq \frac{\alpha}{2}$, должны выполняться неравенства

$$\sin\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right) \geq 0, \quad \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \varphi\right) \geq 0, \quad 0 \leq \varphi + \frac{\alpha}{2} \leq \pi, \quad 0 \leq \frac{\alpha}{2} - \varphi \leq \pi,$$

то отсюда имеем $0 \leq \alpha \leq \pi$. Однако при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$ преобразование $(x, y) \rightarrow (\xi_1, \xi_2)$ становится вырожденным, поэтому для угла раствора пластины в данном рассмотрении приходим к ограничению $0 < \alpha < \pi$. Подставляя (ξ_1, ξ_2) из (19) в (18), получим решение задачи (1), (6) в цилиндрических координатах

$$W = \frac{q_0 r^4 \sin^2\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} - \varphi\right)}{8(1 + 2\cos^2\alpha)}, \quad 0 < \alpha < \pi. \quad (20)$$

Максимальный прогиб пластины находится на ее биссектрисе при $\varphi = 0$

$$\max W = W|_{\varphi=0} = \frac{q_0 \sin^4 \frac{\alpha}{2}}{8(1 + 2\cos^2\alpha)} r^4 \quad 0 < \alpha < \pi. \quad (21)$$

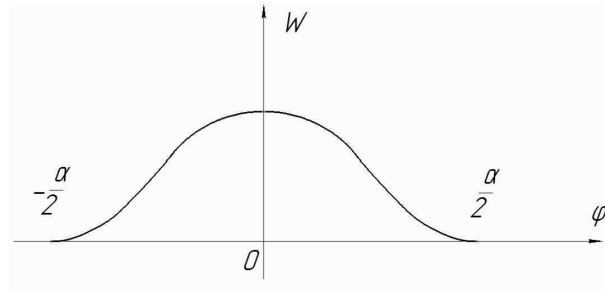


Рис. 2.

При удалении от вершины угла пластины ее прогиб быстро возрастает пропорционально четвертой степени радиуса r^4 . На дуге радиуса $r = r_0$ профиль прогиба показан на рис.2.

По прогибам пластины $W(x, y)$ из (18) можно вычислить компоненты тензора деформаций [6]

$$\begin{aligned} e_{xx} &= -zW_{xx} = \frac{q_0(\cos\alpha - 1)}{8(1 + 2\cos^2\alpha)} z (\xi_1^2 + \xi_2^2 + 4\xi_1\xi_2), \\ e_{yy} &= -zW_{yy} = \frac{q_0(1 + \cos\alpha)}{8(1 + 2\cos^2\alpha)} z (4\xi_1\xi_2 - \xi_1^2 - \xi_2^2), \\ e_{xy} &= -zW_{xy} = \frac{q_0 \sin\alpha}{8(1 + 2\cos^2\alpha)} z (\xi_1^2 - \xi_2^2), \end{aligned} \quad (22)$$

где координата z отсчитывается от срединной поверхности пластины в направлении, противоположном по отношению к направлению равномерной нагрузки q_0 . Компоненты тензора напряжений выражаются через деформации (22) по закону Гука.

На оси симметрии угловой пластины при $\xi_1 = \xi_2 = x \sin \frac{\alpha}{2}$ для деформаций из (22) будем иметь значения

$$e_{xx} = -\frac{3q_0(1 - \cos\alpha)^2}{8(1 + 2\cos^2\alpha)} x^2 z, \quad e_{yy} = \frac{q_0 \sin^2\alpha}{8(1 + 2\cos^2\alpha)} x^2 z, \quad e_{xy} = 0. \quad (23)$$

На грани пластины ($\xi_1 = 0, \xi_2 = 2x \sin \frac{\alpha}{2}$) для деформаций из (22) найдем зависимости

$$\begin{aligned} e_{xx} &= -\frac{q_0(1 - \cos\alpha)^2}{4(1 + 2\cos^2\alpha)} x^2 z, \quad e_{yy} = -\frac{q_0 \sin^2\alpha}{4(1 + 2\cos^2\alpha)} x^2 z, \\ e_{xy} &= \frac{q_0 \sin\alpha(1 - \cos\alpha)}{4(1 + 2\cos^2\alpha)} x^2 z. \end{aligned} \quad (24)$$

На другой грани пластины ($\xi_2 = 0, \xi_1 = 2x \sin \frac{\alpha}{2}$) деформации e_{xx}, e_{yy} останутся как и в (24), а e_{xy} изменит знак на противоположный.

Заключение.

Из полученного точного решения (18) можно вычислить все компоненты тензоров деформаций и напряжений в любой точке упругой пластины. В частности, из формул (22) – (24) видно, что при удалении от угла пластины деформации и напряжения возрастают пропорционально квадрату этого расстояния.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Алейников, С. М.* Пространственная контактная задача изгиба пластин на упругом неклассическом основании / С. М. Алейников, М. Д. Гончаров // Труды 16 международной конференции по теории оболочек и пластин. - 1994. - С. 8-13.
- [2] *Журавлев, А. А.* Устойчивость ортотропной треугольной пластинки / А. А. Журавлев // Известия вузов. Строительство и архитектура. - 1985. - № 11. - С. 47-51.
- [3] *Недорезов, П. Ф.* Применение В-сплайнов в задаче определения НДС при установившихся колебаниях прямоугольной пластины из вязкоупругого материала / П. Ф. Недорезов. - Саратов : Саратовский государственный университет. - 1997. - С. 12-21.
- [4] *Никифоров, С. Н.* Теория упругости и пластичности / С. Н. Никифоров. - М. : Гос. изд-во лит. по строительству и архитектуре, 1955. - 284 с.
- [5] *Gorman, D. J.* Accurate free vibration analysis of right triangular plates with one free edge / D. J. Gorman // Journal of sound and vibration. - 1989. - № 131. - P. 115-125.
- [6] *Hampshire, J.* Three mode triangular bending elements with one degree of freedom per node / J. Hampshire, B. Tooping, H. Chang // Eng. Comput. - 1992. - № 9. - P. 49-62.

N. A. Chernyshov

ABOUT ANGLE-SHAPED SLAB DEFLECTIONS UNDER THE UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD INFLUENCE AT RIGID FIXING

Military Aviation Engineering University

Abstract. The exact final solution for semi-restricted elastic angle-shaped slab at rigid fixing of its bounds is achieved. Stress tensor components analysis is given.

Keywords: elastic semi-restricted slab, angled shape, deflections, rigid fixing, stress tensor components, uniformly distributed load.

Чернышов Николай Александрович

кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры высшей математики Военного авиационного инженерного университета, г. Воронеж

e-mail: chernyshovad@mail.ru

Chernyshov Nikolay Aleksandrovich

Ph.D., Department of Higher Mathematics, Military Aviation Engineering University, Voronezh