Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 3 (21). С. 73–85

Е. Е. Кузнецов, Н. М. Матченко

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА СЕН-ВЕНАНА КАК ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Тульский государственный университет

Аннотация. В научной и учебной литературе плоская задача Сен-Венана трактуется как задача плоской деформации при справедливости условия пластичности Треска. Показано, что построения Сен-Венана представляют собой задачу предельного плоского чистого сдвига в условиях плоской деформации. Отмечается, что при такой постановке задачи нет необходимости в использовании условия пластичности.

Ключевые слова: уравнения равновесия, предельное условие сдвига, промежуточное главное напряжение, плоский чистый сдвиг.

УДК: 539.3; 539.214

1. Задача Сен-Венана. Почти полтора века назад в 1870 г. Сен-Венан (B. de Saint-Venant) предложил соотношения [17], описывающие пластическое течение идеально связных изотропных сред для случая плоской задачи.

Сен-Венан рассмотрел плоскую задачу в декартовых координатах x, z, предполагая, что скорость пластического течения в направлении оси y отсутствует. В соответствии с современной терминологией Сен-Венан ввел гипотезу о плоской деформации.

Далее Сен-Венан считает напряжение σ_y главным. Отсюда следуют соотношения для касательных напряжений

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0. \tag{1.1}$$

В силу этой гипотезы уравнения равновесия принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \tag{1.2}$$

В этих уравнениях опущены правые части.

Из уравнений (1.2) следует, что формально задача является один раз статически неопределимой. На самом деле она является два раза статически неопределимой, поскольку неизвестными являются четыре напряжения: σ_x, σ_y, σ_z, σ_{xz}.

Формально статически определимой плоскую задачу Сен-Венан делает посредством введения гипотезы: “на площадке, перпендикулярной плоскости xz, но вообще говоря, наклонной к x и z, где касательное напряжение является наибольшим, это последнее равно постоянному максимальному сопротивлению сдвига, обозначенному Треска через K...” [17].

Значение константы K определяется экспериментально при чистом сдвиге.

Таким образом, Сен-Венан вводит гипотезу о предельном касательном напряжении

$$(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\sigma_{xz}^2 = 4K^2. \tag{1.3}$$

Поступила 16.08.2014

Вследствие принятой гипотезы для определения трех напряжений σ_x, σ_z, σ_{xz} имеется три уравнения (1.2) и (1.3). По терминологии Г. Генки (H. Hencky, 1924 г.) [1], задача является формально статически определимой.

Поэтому несмотря на то, что в статье Сен-Венана промежуточное главное напряжение σ_y не определено, все же в рамках соотношений для поля напряжений, выписанных Сен-Венаном, имеется возможность вычислить это напряжение.

Сен-Венан пишет: "Отсюда следует, что в рассматриваемом нами теле внутренние напряжения сводятся к нормальному давлению $p = (\sigma_x+\sigma_z)/2$, одинаковому **во всех** направлениях ...". (Шрифт выделен автором статьи.)

Поскольку значение p является инвариантной характеристикой в плоскости xz, то это утверждение является естественным для этой плоскости xz. Однако если эту фразу понимать буквально, то в направлении оси y давлению p соответствует напряжение

$$\sigma_y = p = (\sigma_x + \sigma_z)/2. \tag{1.4}$$

Таким образом, задача становится статически определимой.

Конечно, можно возразить, что Сен-Венан фразой "во всех направлениях" подразумевал все направления только в плоскости xz.

Тогда обратимся в статье Сен-Венана к формуле (1). В уравнениях движения жидкости фигурирует характеристика напряженного состояния "p – давление, предполагаемое одинаковым для всех направлений в каждой точке жидкости".

Давление, предполагаемое одинаковым во всех направлениях, по современной терминологии называется гидростатическим давлением и вычисляется по формуле

$$p = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3. \tag{1.5}$$

Сравнивая значения p в плоской и объемной задаче, получим соотношение (1.4).

Согласно гипотезе (1.4) Сен-Венан рассматривает предельный плоский чистый сдвиг, на который наложено гидростатическое давление p, в условиях плоской деформации.

Поэтому соотношение (1.4) следует воспринимать как гипотезу Сен-Венана о предельном плоском чистом сдвиге. Эта гипотеза осталась в теории идеальной пластичности незамеченной исследователями в течение почти полутора столетий.

Таким образом, гениальная интуиция Сен-Венана определила плоскую задачу как плоский чистый сдвиг при предельном сопротивлении K в условиях плоской деформации.

2. О промежуточном главном напряжении. По определению, условием пластичности Треска постулируется, что промежуточное главное напряжение не влияет на процесс пластического течения. Следовательно, в рамках условия пластичности Треска без привлечения дополнительных гипотез нельзя определить промежуточное главное напряжение.

Однако на протяжении около 150 лет попытки определения промежуточного главного напряжения не прекращались [9], [13].

В 1871 г. М. Леви (M. Levy) [9]) ввел гипотезу о пропорциональности компонент тензоров девиаторов напряжений и скоростей деформаций. Он установил, что если плоский сдвиг происходит в условиях плоской деформации, то промежуточное главное напряжение определяется соотношением (1.4).

Статья М. Леви, по существу говоря, является продолжением статьи Сен-Венана [16], поскольку в ней сохранена нумерация формул статьи Сен-Венана. Очевидно, что основной целью статьи М. Леви было получение соотношения (1.4). Запись уравнения грани призмы Треска через компоненты тензора напряжений является побочным продуктом. Таким образом, для вычисления промежуточного главного напряжения М. Леви привлек дополнительную гипотезу о пропорциональности компонент девиаторов напряжений и скоростей деформаций для случая пластического деформирования в условиях трехмерного напряженного состояния.

Следует отметить, что предположение о пропорциональности компонент тензоров девиаторов напряжений и скоростей деформаций не вытекает из условия пластичности Треска.

Гораздо позже было установлено, что М. Леви предвосхитил ассоциированный закон пластического течения Р. Мизеса (R. Mises,1923).

Приведем еще одну попытку вычисления промежуточного главного напряжения, исходя из критерия пластичности Треска и условия плоской деформации, сделанную уже в наши дни [13].

Рассмотрим трехмерное векторное пространство главных напряжений σ_1, σ_2, σ_3.

Если через гидростатическую ось этого пространства и направления главных напряжений провести три плоскости, то они разделят векторное пространство на шесть равных сегментов, а девиаторную плоскость соответственно на шесть секторов. Введем нумерацию секторов арабскими цифрами в направлении против хода часовой стрелки от положительной проекции главного напряжения $\vec{\sigma}_1$. Поскольку на плоскостях между сегментами промежуточное главное напряжение является кратным (оно равно минимальному или максимальному главному напряжению), то эти плоскости называются плоскостями кратности.

Введем главные ранжированные напряжения $\sigma_{\max} \geq \sigma_{int} \geq \sigma_{\min}$, где $\sigma_{\max}, \sigma_{int}, \sigma_{\min}$ – максимальное, промежуточное и минимальное главные напряжения.

Критерий пластичности Треска, записанный через ранжированные главные напряжения, имеет вид:

$$(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})^2 - (2K)^2 = 0. \tag{2.1}$$

В зависимости от нумерации главных напряжений, можно записать три варианта соотношения (2.1) [6], [7], [8]:

– для секторов 3 и 6:

$$k_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - (2K)^2 = 0, \quad \sigma_{\text{int}} = \sigma_3;$$

– для секторов 2 и 5:

$$k_{23}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - (2K)^2 = 0, \quad \sigma_{\text{int}} = \sigma_1;$$

– для секторов 1 и 4:

$$k_{31} = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - (2K)^2 = 0, \quad \Sigma_{\text{int}} = \sigma_2.$$

В некоторых практически важных задачах заранее удается установить, какую из трех форм записи критерия Треска использовать. Однако в общем случае заранее выбрать одно из трех соотношений не удается.

В связи с этим А. Хаар (A. Haar) и Т. Карман (Th. von Karman) в 1909 году предложили условие пластичности (1.5) записать в виде [15]:

$$k(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = k_{12}k_{23}k_{31} = 0. \tag{2.2}$$

Если в уравнении (1.6) три множителя отрицательны, то сплошная среда находится в упругом состоянии. Если же два множителя в уравнении (2.2) равны нулю, то по терминологии А. Хаара и Т. Кармана сплошная среда находится в состоянии полной пластичности, т.е. осуществляется предельный пространственный сдвиг. Если же в уравнении (1.6) только один из множителей равен нулю, то сплошная среда находится в состоянии неполной пластичности (по современной терминологии осуществляется плоский пластический сдвиг). Такому плоскому сдвигу в трехмерном векторном пространстве главных напряжений соответствуют все области каждого из сегментов трехмерного векторного пространства главных напряжений [6], [7], [8], за исключением областей, напряженное состояние которых соответствует крайним значениям параметра Лоде [10] $\mu_\sigma = \pm 1$. Параметр Лоде вычисляется по формуле А. А. Ильюшина [3]:

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_{int} - \sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}. \tag{2.3}$$

Напряженное состояние, соответствующее предельному пространственному сдвигу, принадлежит плоскостям кратности промежуточного главного напряжения [7].

Через ось гидростатического напряжения проведем плоскости, которые делят каждый из сегментов на две равные части. На этих плоскостях напряженное состояние характеризуется максимальным касательным напряжением и двумя касательными напряжениями, составляющими по 1/2 от величины максимального касательного напряжения. Поскольку на этих плоскостях реализуется плоский чистый сдвиг, они называются плоскостями чистого сдвига. Плоскости чистого сдвига характеризуются параметром Лоде $\mu_\sigma = 0$.

Рассмотрим логику получения соотношения (2.3). Поскольку векторное пространство главных напряжений дискретно [6], [7], [8], то условие пластичности (2.1) должно быть записано через компоненты главных напряжении для каждого из секторов девиаторной плоскости.

В таблице 2.1 приведены записи критерия Треска для каждого из секторов девиаторной плоскости.

Таблица 2.1

1	2	3
$\sigma_1^{(1)} - \sigma_3^{(1)} = 2K$	$\sigma_2^{(2)} - \sigma_3^{(2)} = 2K$	$\sigma_2^{(3)} - \sigma_1^{(3)} = 2K$
4	5	6
$\sigma_3^{(4)} - \sigma_1^{(4)} = 2K$	$\sigma_3^{(5)} - \sigma_2^{(5)} = 2K$	$\sigma_1^{(6)} - \sigma_2^{(6)} = 2K$

Эти соотношения отражают запись уравнений граней призмы Треска.

Несложно убедиться, что для трех зон на девиаторной плоскости, состоящих из спаренных секторов, критерий пластичности Треска можно записать в виде таблицы 2.2.

Таблица 2.2

1,4	2,5	3,6
$(\sigma_1^{(1,4)} - \sigma_3^{(1,4)})^2 - 4K^2 = 0$	$(\sigma_2^{(2,5)} - \sigma_3^{(2,5)})^2 - 4K^2 = 0$	$(\sigma_2^{(3,6)} - \sigma_1^{(3,6)})^2 - 4K^2 = 0$

Из таблицы 2.2 следует, что А. Хаар и Т. Карман соотношением (2.2) записали условие пластичности Треска как условие пластичности Треска применительно к пространственному напряженному состоянию.

В [12] и [13], считая σ_3 промежуточным главным напряжением и принимая условие (2.2) в качестве пластического потенциала, получено соотношение для вычисления скорости промежуточной главной деформации

$$\varepsilon_3 = \frac{\partial k(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{\partial \sigma_3} = 2k_{12}[(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) - (2k_0)^2][\sigma_3 - \sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_2]. \tag{2.3}$$

В случае плоской деформации $\varepsilon_3 = 0$; на основании уравнения (2.3) делается вывод, что последний множитель в соотношении (2.3) равен нулю,

$$(\sigma_3 - \sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_2) = 0 \tag{2.4}$$

и отсюда

$$\sigma_3 = (\sigma_1 + \sigma_2)/2. \tag{2.5}$$

Этот вывод некорректен. Поскольку σ_3 является промежуточным главным напряжением, то условие пластичности Треска записывается в форме $k_{12} = 0$ и условие $\varepsilon_3 = 0$ тождественно удовлетворяется и при ограничениях

$$[(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)-(2K)^2]\neq 0, \quad [\sigma_3-\sigma_1+\sigma_3-\sigma_2]\neq 0. \tag{2.6}$$

3. Предельный плоский сдвиг в условиях плоской деформации. В многочисленной научной и учебной литературе по теории идеальной пластичности [2], [4], [5], [11], [12], [13], [14], гипотеза (1.3) трактуется как использование Сен-Венаном условия пластичности Треска.

Например, в монографии [4] А. Ю. Ишлинский и Д. Д. Ивлев на странице 11 пишут: "В 1870 году Сен-Венан использовал условие пластичности Треска и предложил соотношения, описывающие идеальное пластическое течение в случае плоской задачи".

Аналогично, в статье [13] Ю. Н. Радаев отмечает: "Сен-Венан (B. Sain-Venant. 1870 г.) одним из первых признал важность открытия Треска и использовал критерий максимального касательного для построения математической теории пластичности".

Таким образом, в научной и учебной литературе по теории идеальной пластичности осталось незамеченным то обстоятельство, что Сен-Венан дал постановку плоской задачи как задачи теории предельного состояния.

Ниже изложим ремейк статьи Сен-Венана при использовании соотношений трехмерного напряженного и деформированного состояния.

3.1. Напряженное состояние. Сплошную среду отнесем к декартовой системе координат $\mathrm{x}_i \quad (i=1,2,3)$. Напряженное состояние в элементе сплошной среды будем характеризовать симметричным тензором напряжений σ_{ij} или тройкой ранжированных напряжений $\sigma_{\max}, \sigma_{\mathrm{int}}, \sigma_{\min}$ и ортом их направлений. Растягивающие напряжения считаются положительными. Для возможности использования тензорного формализма будем использовать также обозначения $\sigma_{\max}=\sigma_1^r$, $\sigma_{\mathrm{int}}=\sigma_2^r$, $\sigma_{\min}=\sigma_3^r$.

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} связаны с ранжированными напряжениями σ_i^r соотношениями

$$\sigma_{ij}=\sum_{m=1}^{3} r_{im}r_{jm}\sigma_m^r, \tag{3.1.1}$$

где r_{im} – направляющие косинусы ранжированных напряжений по отношению к лабораторной системе координат. Направляющие косинусы должны удовлетворять условиям ортогональности

$$r_{im}r_{jm}=\delta_{ij} \quad \text{или} \quad r_{ij}r_{im}=\delta_{jm}. \tag{3.1.2}$$

Для ранжированных напряжений справедливы зависимости [69]

$$\sigma_{\max}=\sigma+a_1\mathrm{T}, \quad \sigma_{\mathrm{int}}=\sigma+a_2\mathrm{T}, \quad \sigma_{\min}=\sigma-a_3\mathrm{T}, \tag{3.1.3}$$

где $a_1=1-\mu_\sigma/3$, $a_2=2\mu_\sigma/3$, $a_3=1+\mu_\sigma/3$. В соотношениях (3.1.3) фигурируют инварианты тензора напряжений: $\sigma=\sigma_{ij}\delta_{ij}/3$ – гидростатическое давление; $\mathrm{T}=(\sigma_1^r-\sigma_3^r)/2$ – максимальное касательное напряжение

Подставляя зависимости (2.3) в соотношения (2.1), получим

$$\sigma_{ij}=Q\delta_{ij}+(\mathrm{M}r_{i1}r_{j1}-\mathrm{N}r_{i3}r_{j3})\mathrm{T}, \tag{3.1.4}$$

где $Q=\sigma+2\mu_\sigma\mathrm{T}/3$, $\mathrm{M}=1-\mu_\sigma$, $\mathrm{N}=1+\mu_\sigma$.

Аналогично можно записать соотношения и для компонент тензора скоростей деформаций ε_{ij}.

3.2. Предельное состояние плоского сдвига. Выше было показано, что при плоском чистом сдвиге параметр Лоде равен нулю и задача относится к задачам теории предельного состояния.

Докажем, что любые мыслимые условия пластичности изотропных идеально связных сред, согласованные с экспериментом при плоском чистом сдвиге, приводят к одному и тому же критерию предельного состояния плоского сдвига.

Следует пояснить, что условие пластичности отличается от условия предельного состояния тем, что оно позволяет прогнозировать переход сплошной среды в пластическое состояние при любом виде напряженного состояния, а критерий предельного состояния фиксирует переход сплошной среды в состояние, при котором исчерпан предел несущей способности.

Условие пластичности изотропной идеально связной среды можно записать в общем виде

$$\Sigma_d = f(\mu_\sigma), \tag{3.2.1}$$

где $\Sigma_d = [(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]^{1/2}/\sqrt{3}$ – модуль девиаторных напряжений [20].

Если учесть, что для модуля девиаторных напряжений Σ_d и максимального касательного напряжения справедлива зависимость [14]

$$\Sigma_d = \mathrm{T}\sqrt{2(1+\mu_\sigma^2/3)}, \tag{3.2.2}$$

то условию пластичности (3.2.1) можно придать вид

$$\mathrm{T} = [2(1+\mu_\sigma^2/3)]^{-1/2} f(\mu_\sigma). \tag{3.2.3}$$

В случае если напряженное состояние соответствует значению $\mu_\sigma = 0$, условие пластичности (3.2.3) переходит в критерий предельного состояния плоского чистого сдвига

$$\mathrm{T} = (\sigma_{\max}-\sigma_{\min})/2 = K, \quad \sigma_{int} = (\sigma_{\max}+\sigma_{\min})/2, \tag{3.2.4}$$

где $K = f(\mu_\sigma)|_{\mu_\sigma=0}/\sqrt{2}$ – предельное значение максимального касательного напряжения изотропной идеально связной среды при плоском чистом сдвиге. Величина K определяется из эксперимента в режиме нагружения $\mu_\sigma = 0$. Простейшим экспериментом в этом режиме нагружения является эксперимент на кручение трубчатого образца.

Критерий предельного состояния (3.2.4) указывает на сдвиговую природу пластического деформирования при чистом плоском сдвиге и справедлив для любых идеально связных изотропных сред.

Поскольку напряженное состояние при плоском чистом сдвиге в пространстве напряжений характеризуется значением параметра Лоде равным нулю, то такому виду напряженного состояния для промежуточного главного напряжения соответствует соотношение

$$\sigma_{int} = (\sigma_{\max}+\sigma_{\min})/2. \tag{3.2.5}$$

Зависимость (3.2.5) является фундаментальным соотношением предельного чистого плоского сдвига.

При плоском чистом сдвиге уравнения (3.1.4) принимают вид

$$\sigma_{ij} = \sigma\delta_{ij} + (r_{1i}r_{1j} - r_{2i}r_{2j})\mathrm{T}. \tag{3.2.6}$$

3.3. Уравнения теории предельного состояния плоского чистого сдвига в условиях плоской деформации.

Рассмотрим класс задач, в которых известно направление промежуточного ранжированного напряжения $\sigma_{int} = \sigma_2^r = \sigma_3$. То есть напряженное состояние отнесем к шестому сегменту трехмерного векторного пространства главных напряжений. Для удобства дальнейшего изложения введем локальную систему координат x, y, z. Условимся, что направление промежуточного главного напряжения $\sigma_3 = \sigma_z$ совпадает с направлением оси z

$$\sigma_3 = \sigma_z. \tag{3.3.1}$$

Отсюда следует равенство нулю касательных напряжений σ_{xz} и σ_{yz}.

Тогда из соотношений (3.2.6) следует

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \phi + \sigma_2 \sin^2 \phi = p + \tau \cos 2\phi, \quad \tau = (\sigma_1 - \sigma_2)/2,$$

$$\sigma_y = \sigma_1 \sin^2 \phi + \sigma_2 \cos^2 \phi = p - \tau \cos 2\phi, \quad \sigma_{xy} = (\sigma_1 - \sigma_2) = \tau \sin 2\phi, \tag{3.3.2}$$

где $p = (\sigma_1 + \sigma_2)/2 = \sigma_z$, $\tau = \mathrm{T} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$, $\sigma_1 \geq \sigma_2$, ϕ – угол между максимальным главным направлением σ_1 и осью x.

Составив характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_\gamma & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y - \sigma_\gamma \end{vmatrix} = 0, \quad (\gamma = 1, 2), \tag{3.3.4}$$

и определив его корни, получим

$$\sigma_{1,2} = 0,5\left[\sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma_{xy}^2}\right]. \tag{3.3.3}$$

Критерий предельного состояния (3.2.4) при переходе к напряжениям σ_1, σ_2, σ_3 принимает вид

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 = K, \quad \sigma_3 = \sigma_z = (\sigma_x + \sigma_y)/2. \tag{3.3.5}$$

Используя зависимости (3.3.2), запишем критерий предельного состояния при чистом плоском сдвиге через компоненты тензора напряжений

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma_{xy}^2 = 4K^2, \quad \sigma_z = (\sigma_x + \sigma_y)/2. \tag{3.3.6}$$

Подставляя (3.3.6) в (3.3.2), получим соотношения Леви

$$\sigma_x = p + K\cos 2\phi, \quad \sigma_y = p - K\cos 2\phi, \quad \sigma_{xy} = K \sin 2\phi. \tag{3.3.7}$$

При подстановке зависимостей (3.3.7) в условие предельного состояния (3.3.6) последнее удовлетворяется тождественно.

Далее все построения задачи для поля напряжений в теории предельного состояния чистого плоского сдвига совпадают с построениями Сен-Венана или задачей плоской деформации.

Уравнения равновесия при чистом плоском сдвиге имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \tag{3.3.8}$$

Подставляя соотношения Леви (4.7) в уравнения равновесия (4.8), получим

$$\frac{\partial p}{\partial x} - 2K\left(\sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} - \cos 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} + 2K\left(\cos 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = 0. \tag{3.3.9}$$

Прандтль (L. Prandtl, 1920 г.) установил гиперболический характер уравнений (3.3.9) и ввел понятие линий скольжения, совпадающих с линиями действия максимальных касательных напряжений.

Х. Генки (H. Hencky, 1923 г.) получил интегралы вдоль ортогональных характеристик, совпадающих с линиями скольжения:

$$p + 2K\phi = const \quad \text{вдоль} \quad \alpha \quad - \text{линий} \quad \frac{dy}{dx} = tg\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right) \tag{3.3.10}$$

и

$$p - 2K\phi = const \quad \text{вдоль} \quad \beta \quad - \text{линий} \quad \frac{dy}{dx} = tg\left(\phi + \frac{\pi}{4}\right), \tag{3.3.11}$$

а также уравнения, устанавливающие фундаментальные свойства линий скольжения для плоской задачи.

Таким образом, в случае если известно направление промежуточного главного напряжения, то касательные напряжения σ_{xz} и σ_{yz} равны нулю и задача предельного плоского чистого сдвига в напряжениях является статически определимой. Дифференциальные уравнения поля напряжений относятся к гиперболическому типу уравнений, а их характеристики ортогональны.

Перейдем к построению поля скоростей пластических деформаций.

Рассмотрим функционал

$$J = \varepsilon_x\sigma_x + \varepsilon_y\sigma_y + 2\varepsilon_{xy}\sigma_{xy} + \frac{1}{2}\varepsilon_z(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\lambda_1[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma_{xy}^2 - 4K^2], \tag{3.3.12}$$

где λ – неопределенный множитель Лагранжа.

В функционале (3.3.12) учтены ограничения, накладываемые критерием предельного состояния на компоненты поля напряжений.

Принимая (3.3.13) в качестве потенциала, запишем ассоциированный закон пластического течения

$$\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_z = \lambda(\sigma_x - \sigma_y), \quad \varepsilon_y + \frac{1}{2}\varepsilon_z = -\lambda(\sigma_x - \sigma_y), \quad \varepsilon_{xy} = 2\lambda\sigma_{xy}. \tag{3.3.13}$$

Несложно убедиться, что пластическое течение идеально связной изотропной среды при плоском чистом сдвиге не сопровождается измерением объема

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0. \tag{3.3.14}$$

Далее введем предположение о том, что плоский чистый сдвиг происходит в условиях плоской деформации

$$\varepsilon_z = 0. \tag{3.3.15}$$

Тогда ассоциированный закон пластического течения принимает вид

$$\varepsilon_x = \lambda(\sigma_x - \sigma_y), \quad \varepsilon_y = -\lambda(\sigma_x - \sigma_y), \quad \varepsilon_{xy} = 2\lambda\sigma_{xy}. \tag{3.3.16}$$

Из (3.3.16) следует, что в пространстве скоростей пластических деформаций параметр Лоде соответствует плоскому чистому сдвигу $\mu_\varepsilon = 0$.

Это означает, что при предельном плоском чистом сдвиге в условиях плоской деформации изотропной идеально связной среды вид напряженного и деформированного состояния совпадает.

Используя (3.3.7), соотношениям для компонент тензора скоростей деформаций придадим вид

$$\varepsilon_x = 2\lambda\tau\cos 2\phi, \quad \varepsilon_y = -2\lambda\tau\cos 2\phi, \quad \varepsilon_{xy} = 2\lambda\tau\sin 2\phi. \tag{3.3.17}$$

Из (3.3.17) следует, что поле скоростей перемещений определяется двумя уравнениями: условием изотропии

$$\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2\varepsilon_{xy}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\sigma_{xy}} = \mathrm{ctg}2\phi, \tag{3.3.18}$$

и условием несжимаемости

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = 0. \tag{3.3.19}$$

Для компонент тензора скоростей деформации ε_x, ε_{y}, ε_{xy} справедливы соотношения Коши

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right),$$

где u_x, u_y – компоненты скорости перемещений.

Перейдя в уравнениях (3.3.18) и (3.3.19) к компонентам вектора скоростей перемещения, получим

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} - \mathrm{ctg}2\phi\frac{\partial u_x}{\partial y} - \mathrm{ctg}2\phi\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \tag{3.3.20}$$

Система уравнений (3.3.20) принадлежит к гиперболическому типу и имеет характеристики, совпадающие с характеристиками поля напряжений. Вдоль характеристик имеют место соотношения Гейрингер

$$dv_\alpha - v_1 d\phi_\alpha = 0, \quad dv_\beta + v_2 d\phi_\beta = 0 \tag{3.3.21}$$

вдоль α и β линий. Здесь v_α – проекция скорости на направление α-характеристики, а v_1 – проекция скорости на направление, перпендикулярное α-характеристике, ϕ_α – угол на α-характеристике к оси x, аналогично для проекций v_β, v_2, ϕ_β.

Уравнения предельного состояния плоского сдвига совпадают с аналогичными уравнениями теории идеальной пластичности идеально связных изотропных сред в случае плоской деформации [2], [4], [5], [11], [12], [13], [14].

Однако отличие приведенного здесь построения уравнений теории предельного состояния при плоском сдвиге от классических построений идеальной пластической плоской деформации является принципиальным.

В основе построения теории плоской деформации лежит частное предположение о справедливости условия пластичности Треска (или Мизеса), т.е. теория плоской пластической деформации является разделом теории идеальной пластичности. При этом предполагается, что условие пластичности Треска и условие пластичности Мизеса согласованы с экспериментом на чистый сдвиг, т.е. цилиндр Мизеса вписан в равностороннюю шестигранную призму Треска.

В предложенной здесь постановке задачи чистого плоского сдвига в условиях плоской деформации нет необходимости в использовании условия пластичности. Вводится универсальный критерий предельного состояния, в который входит только одна механическая характеристика – значение предельного чистого сдвига.

В основе построения теории плоской деформации лежит частное предположение о справедливости условия пластичности Треска (или Мизеса), т.е. теория плоской пластической деформации является разделом теории идеальной пластичности. При этом предполагается, что условие пластичности Треска и условие пластичности Мизеса согласованы с экспериментом на чистый сдвиг, т.е. цилиндр Мизеса вписан в равностороннюю шестигранную призму Треска.

Выводы.

1. Сен-Венан сформулировал плоскую задачу как задачу теории предельного состояния.

2. При построении теории предельного состояния плоского чистого сдвига такое понятие, как условие пластичности, не используется, поскольку любые условия пластичности идеально связных изотропных сред при условии их согласования с экспериментом на чистый сдвиг сводятся к одному и тому же условию предельного максимального касательного напряжения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Генки, Г.* О некоторых статически определимых случаях равновесия в пластических телах / Г. Генки // Сб. переводов: теория пластичности: – М. : Иностр. лит., 1948. – С. 80–101.

[2] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 234 с.

[3] *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.

[4] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 1976. – 704 с.

[5] *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1956. – 324 с.

[6] *Кузнецов, Е. Е.* О дискретности трехмерного векторного пространства главных напряжений / Е. Е. Кузнецов, Н. М. Матченко // Известия ТулГу. Естественные науки. – 2013. – Выпуск 2. – Ч. 2. – С. 140–147.

[7] *Кузнецов, Е. Е.* Дискретность трехмерного векторного пространства главных напряжений и ее следствия / Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий : сб. ст. по материалам междунар. науч.-практ. конф. (Чебоксары, 12-15 августа 2013 г.) : в 2 ч. Ч. 1. Механика деформируемого твердого тела / отв. ред. Б. Г. Миронов. – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2013. – С. 121–125.

[8] *Кузнецов, Е. Е.* Шесть вариантов представления вектора интенсивности тензора напряжений в пространстве главных напряжений / Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 1 (15). – С. 90–97.

[9] *Леви, М.* К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости / М. Леви // Теория пластичности : сб. переводов. – М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 20–23.

[10] *Лоде, В.* Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов / В. Лоде // Теория пластичности : сб. переводов. – М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 168–205.

[11] *Радаев, Ю. Н.* Пространственная задача математической теории пластичности / Ю. Н. Радаев. – Самара : Изд-во Самарского гос. университета, 2006. – 340 с.

[12] *Радаев, Ю. Н.* К теории плоской деформации идеально пластических тел / Ю. Н. Радаев // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2008. – №3 (62). – С. 272–289.

[13] *Радаев, Ю. Н.* Об одной достижимой оценке снизу трехмерного инварианта напряжений Кулона-Треска системами "двумерных"" касательных напряжений / Ю. Н. Радаев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 4(14). – С. 3–14.

[14] *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высшая школа, 1969. – 605 с.

[15] *Хаар, А.* К теории напряженного состояний в пластических и сыпучих средах / А. Хаар, Т. Карман // Теория пластичности : сб. переводов. – М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 41–56.

[16] *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : ГИТТЛ, 1956. – 407 с.

[17] *De Saint-Venant, B.* Mémoire sur des équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delá des limites oú les sélasticité pourrait les ramener á leur premier état // Comptes Rendus de sAc. Des Sciences, 1870. – T. 71. – P. 1323–1325.

Кузнецов Евгений Евгеньевич,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: smithe71@yandex.ru

Матченко Николай Михайлович,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики пластического формоизменения, Тульский государственный университет, г. Тула

e-mail: ekc_05@mail.ru

Y. Y. Kuznetsov, N. M. Mattchenko

FLAT TASK SAINT-VENANT/S, AS THE TASK OF THE THEORY OF THE LIMITING CONDITION

Tula State University

Abstract. In the scientific and educational literature flat task Sent-Venant/s is treated, how a task of flat deformation at validity of a condition of plasticity of the Crash. It is shown, that constructions Sent-Venant/s represent a task of limiting flat clean shift in conditions of flat deformation. It is marked, that at such statement of a task there is no necessity for use of a condition of plasticity.

Keywords: the equations of balance, a limiting condition of shift, an intermediate main stress, flat clean shift.

REFERENCES

[1] *Genki, G.* About some statically definable cases of balance in plastic bodies / G. Genki // Collection of translations: theory of plasticity: – M. : Inostr. litas., 1948. – P. 80–101.

[2] *Ivlev, D. D.* Theory of ideal plasticity / D. D. Ivlev. – M. : Nauka, 1966. – 234 p.

[3] *Ilyushin, A. A.* Plasticity / A. A. Ilyushin. – M. ; L. : Gostekhizdat, 1948. – 376 p.

[4] *Ishlinsky, A. Yu.* Mathematical theory of plasticity / A. Yu. Ishlinsky, D. D. Ivlev. – M. : Fizmatlit, 1976. – 704 p.

[5] *Kachanov, L. M.* Bases of the theory of plasticity / L. M. Kachanov. – M. : Nauka, 1956. – 324 p.

[6] *Kuznetsov, E. E.* About discretization of three-dimensional vector space of the main tension / E. E. Kuznetsov, N. M. Mattchenko // Tulgu's news. Natural sciences. – 2013. – Issue 2. – Part. 2. – P. 140–147.

[7] *Kuznetsov, E. E.* Discretization of three-dimensional vector space of the main tension and its consequence / E. E. Kuznetsov, I. N. Mattchenko, N. M. Mattchenko // Fundamental and applied problems of mechanics of a deformable solid body, mathematical modeling and information technologies : the collection of the Art. on materials of the international scientific and practical conference (Cheboksary, on August 12-15, 2013): in 2 p. P. 1. Mechanics of a deformable solid body / responsible edition B. G. Mironov. – Cheboksary : Chuvash State Pedagogical University, 2013. – P. 121–125.

[8] *Kuznetsov, E. E.* Six options of representation of a vector of intensity of a tensor of tension in space of the main tension / E. E. Kuznetsov, I. N. Mattchenko, N. M. Mattchenko // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2013. – № 1 (15). – P. 90–97.

[9] *Levi, M.* To a question of the general equations of the internal movements arising in solid plastic bodies outside elasticity / M. Levi // Theory of plasticity: collection of translations. – M. : The state publishing house of foreign literature, 1948. – P. 20–23.

[10] *Lode, V.* Influence of average main tension on the fluidity of metals / V. Lode // Theory of plasticity: collection of translations. – M. : The state publishing house of foreign literature, 1948. – P. 168–205.

[11] *Radayev, Yu. N.* Spatial task of the mathematical theory of plasticity / Yu. N. Radayev. – Samara : Publishing house the Samara state university, 2006. – 340 p.

[12] *Radayev, Yu. N.* To the theory of flat deformation of ideally plastic bodies / Yu. N. Radayev // Vestnik SamSY. Natural-science series. – 2008. – № 3 (62). – P. 272–289.

[13] *Radayev, Yu. N.* About one achievable assessment from below three-dimensional invariant tension of Kulona-Treska systems "two-dimensional"" tangent tension / Yu. N. Radayev // Vestnik

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2012. – № 4 (14). – P. 3–14.

[14] *Sokolovsky, V. V.* Theory of plasticity / V. V. Sokolovsky. – M. : The higher school, 1969. – 605 p.

[15] *Haar, A.* To the theory strained states in plastic and loose environments / A. Haar, T. Karman // Theory of plasticity: collection of translations. – M. : The state publishing house of foreign literature, 1948. – P. 41–56.

[16] *Hill, R.* Mathematical theory of plasticity / R. Hill. – M. : GITTL, 1956. – 407 p.

[17] *De Saint-Venant, B.* Mémoire sur des équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delá des limites oú les sélasticité pourrait les ramener á leur premier état // Comptes Rendus de sAc. Des Sciences, 1870. – T. 71. – P. 1323–1325.

Kuznetsov, Yevgeniy Yevgenevich

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor of Department of building, building materials and designs, Tula State University, Tula

Mattchenko, Nikolay Mihailovich

Dr. of Phys. & Math. Sci., Professor, Department of mechanics plastic forming, Tula State University, Tula