Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2017. №2 (32). С. 37–44

К. Н. Галимзянова[1], *Л. В. Ковтанюк*[1], *Г. Л. Панченко*[2, 3]

ПОЛЗУЧЕСТЬ И ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ МАТЕРИАЛА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ В УСЛОВИЯХ ВСЕСТОРОННЕГО ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО СЖАТИЯ

[1] *Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток, Россия*

[2] *Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия*

[3] *Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, г. Владивосток, Россия*

Аннотация. В рамках теории малых деформаций приводится решение краевой задачи о деформировании материала с упругими, вязкими и пластическими свойствами в сферическом слое под действием равномерного изменяющегося со временем давления. Реологические эффекты учитываются на стадии деформирования, предваряющей пластическое течение. Рассчитаны обратимые и необратимые деформации, напряжения, перемещения. Установлена закономерность продвижения упругопластической границы в слое.

Ключевые слова: упругость, ползучесть, пластичность.

УДК: 539.37

Изменение формы некоторых конструкционных материалов осуществляется способом холодной формовки в условиях ползучести [1]. Поэтому интересными становятся

© Галимзянова К. Н., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л., 2017

Галимзянова Ксения Наилевна
e-mail: gal-ksyusha@ya.ru, аспирант, Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток, Россия.
Ковтанюк Лариса Валентиновна
e-mail: lk@iacp.dvo.ru, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией, Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток, Россия.
Панченко Галина Леонидовна
e-mail: panchenko.21@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия; доцент, Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, г. Владивосток, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16–31–60017 мол_а_дк), программы фундаментальных научных исследований "Дальний Восток" (0262–2015–0064, 0262–2015–0065).

Поступила 08.05.2017

задачи о пластическом течении в материале, который на предварительной стадии уже приобретает необратимые деформации за счет его ползучести. Смена механизма накопления необратимых деформаций на упругопластических границах требует новых постановок задач. Рассмотренная задача является одним из таких примеров.

1. Основные модельные соотношения. Для решения задачи будем использовать математическую модель малых деформаций, в которой полные деформации d_{ij} складываются из обратимой e_{ij} и необратимой p_{ij} составляющих [2]

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \tag{1}$$

В соотношениях (1) u_i — компоненты вектора перемещений, x_i — пространственные координаты точки деформируемой среды.

Напряжения в среде связаны с обратимыми деформациями законом Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \tag{2}$$

в котором λ, μ — параметры Ламе.

Полагаем, что необратимые деформации накапливаются в материале непосредственно с начала процесса деформирования. При этом необратимые деформации p_{ij} могут быть и деформациями ползучести, и пластическими деформациями.

Диссипативный механизм деформирования свяжем только с вязкими и пластическими свойствами материалов. В областях, где напряженное состояние еще не достигло поверхности текучести, диссипативный механизм деформирования зададим в форме закона ползучести Нортона [3]

$$\begin{gathered} V\left(\sigma_{ij}\right) = B\Sigma^n\left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\right), \quad \Sigma = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\left(\sigma_1 - \sigma\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma\right)^2\right)^{1/2}, \\ \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right), \quad \gamma_{ij} = \varepsilon^v_{ij} = \frac{\partial V}{\partial \sigma_{ij}}. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь σ_1, σ_2, σ_3 — главные значения тензора напряжений, ε^v_{ij} — скорости деформаций ползучести, B, n — заданные параметры ползучести материала.

При достижении напряженным состоянием поверхности текучести диссипативный механизм меняется: начинается пластическое течение. В качестве такой поверхности будем использовать условие пластичности Мизеса [4]

$$f\left(\sigma_{ij}\right) = s_{ij}s_{ji} - \frac{8}{3}k^2, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}, \quad \gamma_{ij} = \varepsilon^p_{ij} = \xi\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \xi > 0, \tag{4}$$

где ε^p_{ij} — тензор скоростей пластических деформаций, k — предел текучести.

2. Постановка и решение задачи до пластического течения. Пусть слой материала, ограниченный сферическими поверхностями $r = r_0$ и $r = R$ $(r_0 < R)$, находится в условиях следующего воздействия

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = -p(t), \quad \sigma_{rr}|_{r=r_0} = 0. \tag{5}$$

В соотношениях (5) $p(t)$ — известная возрастающая со временем функция, σ_{rr} — радиальная компонента тензора напряжений в сферической системе координат r, θ, φ.

Для отличных от нуля компонент тензора деформаций в рассматриваемом случае согласно соотношениям (1) имеем

$$d_{rr} = e_{rr} + p_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad d_{\theta\theta} = d_{\varphi\varphi} = e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}. \tag{6}$$

В зависимостях (6) $u = u_r$ — единственная не равная нулю компонента вектора перемещений.

Из закона Гука (2) найдем напряжения в сферическом слое:

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\, e_{rr} + 2\lambda e_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda e_{rr} + 2\,(\lambda + \mu)\, e_{\varphi\varphi}. \tag{7}$$

В рамках квазистатического подхода запишем уравнение равновесия для рассматриваемого случая

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + 2\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0. \tag{8}$$

Формула (3) в сферической системе координат принимает форму

$$V(\sigma_{ij}) = 2^{-n/2} B \left((\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta})^2 \right)^{n/2}. \tag{9}$$

Учитывая, что в рассматриваемом случае сферической симметрии $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}$, из (3) и (9) получим

$$\begin{gathered} \varepsilon^v_{rr} = \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} = -2\varepsilon^v_{\varphi\varphi} = -2\frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} = Bn\,(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^{n-1}, \\ \varepsilon^v_{rr} + 2\varepsilon^v_{\varphi\varphi} = 0, \quad p_{rr} + 2p_{\varphi\varphi} = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Из зависимостей (6) следуют два уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} = e_{rr} - e_{\varphi\varphi} + \frac{3}{2} p_{rr}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r} = e_{rr} + 2e_{\varphi\varphi}. \tag{11}$$

Обратимые деформации вычисляются через напряжения согласно соотношениям (7)

$$e_{rr} = \frac{(\lambda + \mu)\,\sigma_{rr} - \lambda\sigma_{\varphi\varphi}}{\mu\,(3\lambda + 2\mu)}, \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{(\lambda + 2\mu)\,\sigma_{\varphi\varphi} - \lambda\sigma_{rr}}{2\mu\,(3\lambda + 2\mu)}. \tag{12}$$

Исключая обратимые деформации с помощью соотношений (12) из уравнений (11) и затем интегрируя их, получим

$$u = -\frac{r\sigma_{rr}}{4\mu} + \frac{3r}{2}\int \frac{p_{rr}}{r} dr, \quad u = \frac{1}{r^2(3\lambda + 2\mu)} \int r^2\,(\sigma_{rr} + 2\sigma_{\varphi\varphi})\, dr. \tag{13}$$

Вычисляя неопределенные интегралы в выражениях (13), получим окончательные зависимости

$$\begin{gathered} u = -\frac{r\sigma_{rr}}{4\mu} + \frac{3r}{2}\int \frac{p_{rr}}{r} dr, \quad u = \frac{r\sigma_{rr}}{3\lambda + 2\mu} + \frac{c(t)}{r^2(3\lambda + 2\mu)}, \\ p_{rr} = -\frac{\lambda + 2\mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}\,(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) - \frac{2c(t)}{r^3(3\lambda + 2\mu)}. \end{gathered} \tag{14}$$

Используя закон ползучести (10), получим интегро-дифференциальное уравнение для компоненты необратимых деформаций $p_{rr}(r,t) = -2p_{\varphi\varphi}$

$$\frac{\partial p_{rr}}{\partial t} = Bn \left(-\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \left((3\lambda + 2\mu)\, p_{rr} + \frac{2c(t)}{r^3} \right) \right)^{n-1}, \tag{15}$$

а также выражения для компонент тензора напряжений $\sigma_{rr}(r,t)$ и $\sigma_{\varphi\varphi}(r,t)$

$$\sigma_{rr} = \frac{2\mu\,(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu}\int\limits_{r_0}^{r}\frac{p_{rr}}{r}dr + \frac{4\mu c(t)}{3\,(\lambda+2\mu)}\left(\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r^3}\right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} + \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\left((3\lambda+2\mu)\,p_{rr} + \frac{2c(t)}{r^3}\right), \tag{16}$$

$$c(t) = -\frac{3r_0^3R^3}{2\left(R^3-r_0^3\right)}\left(\frac{\lambda+2\mu}{2\mu}p(t) + (3\lambda+2\mu)\int\limits_{r_0}^{R}\frac{p_{rr}}{r}dr\right).$$

Решение интегро-дифференциального уравнения (15) при начальном условии $p_{rr}(r,0) = 0$ было получено методом конечных разностей с использованием составной формулы трапеций [5] для приближенного вычисления входящего в уравнение интеграла.

По известным значениям напряжений (16) из соотношений (12) можно найти компоненты упругих деформаций.

Из второй зависимости (6) получим распределение перемещений по сферическому слою

$$u = r\,(e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi})\,. \tag{17}$$

3. Пластическое течение. При дальнейшем возрастании функции $p(t)$ в момент времени $t = t_0$ на внутренней сферической поверхности $r = r_0$ выполнится условие пластичности (4). С этого момента времени от поверхности $r = r_0$ развивается область пластического течения $r_0 \le r \le m(t)$, а область $m(t) \le r \le R$ остается вязкоупругой областью, в которой присутствуют упругие деформации и деформации ползучести. Таким образом, граница $r = m(t)$ является движущейся границей области пластического течения.

Условие пластичности Мизеса (4) в нашем случае принимает вид

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2k \tag{18}$$

и выполняется во всей области $r_0 \le r \le m(t)$.

Согласно соотношениям (5)–(8), (10) и (18) в области $m(t) \le r \le R$ продолжает выполняться интегро-дифференциальное уравнение (15), в котором

$$c(t) = -\frac{3m^3R^3}{2\,(R^3-m^3)}\left(\frac{\lambda+2\mu}{2\mu}p(t) - \frac{2k\,(\lambda+2\mu)}{\mu}\ln\frac{m}{r_0} + (3\lambda+2\mu)\int\limits_{m}^{R}\frac{p_{rr}}{r}dr\right). \tag{19}$$

Из зависимостей (10) и (18), а также условия непрерывности напряжений на упругопластической границе $r = m(t)$ следует уравнение

$$\left(\frac{1}{Bn}\frac{\partial p_{rr}}{\partial t}\right)^{\frac{1}{n-1}}\Bigg|_{r=m(t)} = 2k. \tag{20}$$

Уравнения (15) и (20) образуют систему относительно неизвестных функций $p_{rr}(r,t)$ в области $m(t) \le r \le R$ и $m(t)$. Данная система также была решена при помощи конечно-разностного метода.

Выражение для напряжения σ_{rr} в области $m(t) \le r \le R$ следует из зависимостей (5)–(8)

$$\sigma_{rr} = -\frac{2\mu\,(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu}\int\limits_{r}^{R}\frac{p_{rr}}{r}dr - \frac{4\mu c(t)}{3\,(\lambda+2\mu)}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right) - p(t). \tag{21}$$

В области пластического течения $r_0 \le r \le m(t)$, интегрируя уравнение равновесия (8) с учетом (18), найдем

$$\sigma_{rr} = -4k\ln\frac{r}{r_0}.$$

Соотношение для p_{rr} в области $r_0 \le r \le m(t)$ следует из (6)–(8) и (18)

$$p_{rr} = -\frac{2}{3\lambda+2\mu}\left(\frac{c(t)}{r^3}+\frac{k\,(\lambda+2\mu)}{\mu}\right). \tag{22}$$

В формулах (21) и (22) функция $c(t)$ имеет вид (19). Для компоненты напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ продолжает выполняться второе соотношение (16) в обеих областях. Компоненты упругих деформаций и перемещений вычисляются из зависимостей (12) и (17).

При проведении расчетов использовалась линейная функция давления $p(t) = \alpha t$ и следующие значения постоянных: $n = 3$, $Bn\mu^3/\alpha = 3.5$, $\lambda/\mu = 3.9$, $r_0/R = 0.03$, $k/\mu = 0.0026$. На рис. 1 показан график зависимости упругопластической границы m/R от безразмерного времени $\tau = \alpha t/\mu$. Распределение необратимых p_{rr} и $p_{\varphi\varphi}$ и обратимых e_{rr} и $e_{\varphi\varphi}$ деформаций по слою в момент времени $\tau = 0.03$ показано на рис. 2. Рис. 3 иллюстрирует распределение напряжений σ_{rr}/μ и $\sigma_{\varphi\varphi}/\mu$ и перемещений u/R в момент времени $\tau = 0.03$.

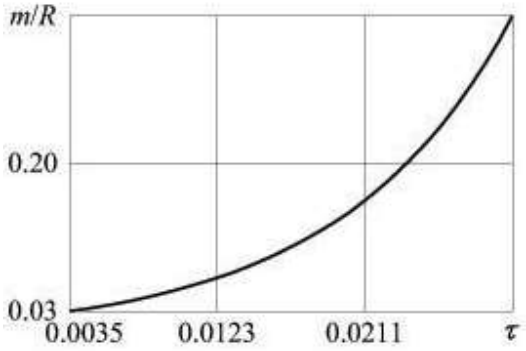

Рис. 1. График упругопластической границы в зависимости от времени

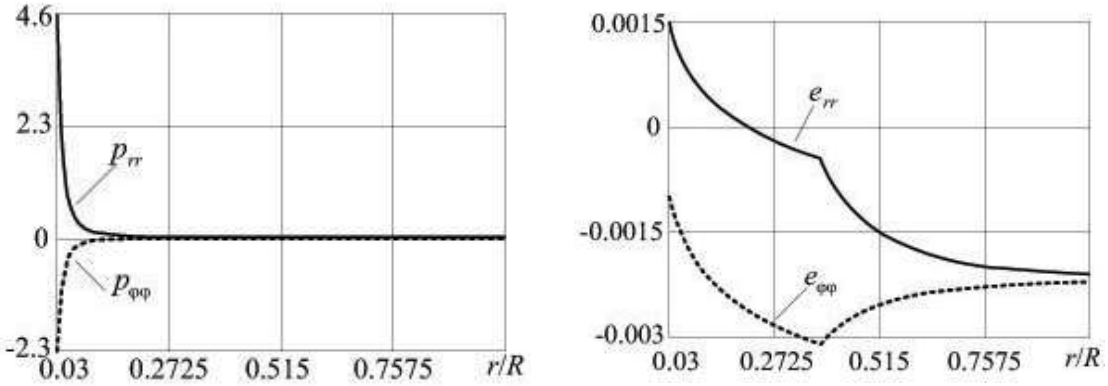

Рис. 2. Распределение необратимых и обратимых деформаций по слою

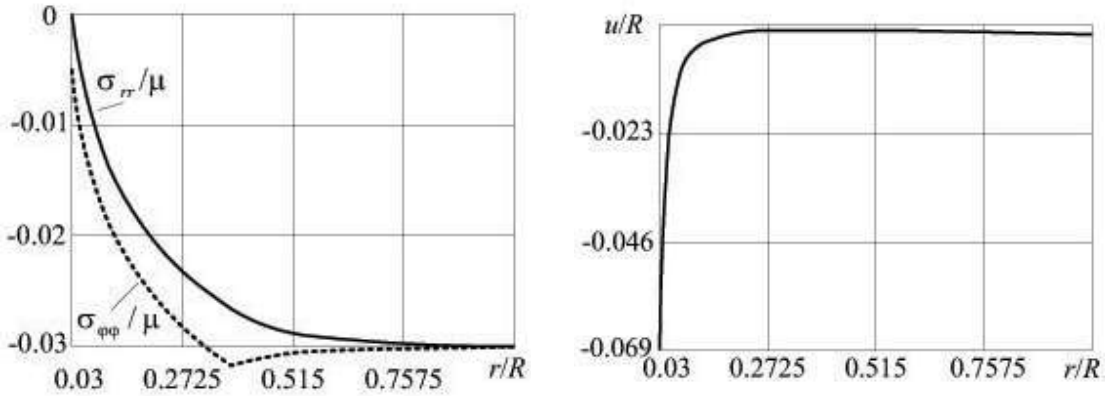

Рис. 3. Распределение напряжений и перемещений по слою

Заключение. В работе получено решение краевой задачи о пластическом течении материала сферического слоя, который предварительно накапливает необратимые деформации за счет ползучести. Расчитаны основные параметры напряженно-деформированного состояния.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Олейников А. И., Пекарш А. И. Интегрированное проектирование процессов изготовления монолитных панелей. М.: Эком, 2009. 109 с.

[2] Белых С. В., Бормотин К. С., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Прокудин А. Н. О больших изотермических деформациях материалов с упругими, вязкими и пластическими свойствами // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4(22). С. 145–157.

[3] Norton F. H. The creep steel of high temperature / F. H. Norton. Y.: Mc Gpaw Hill, 1929. 110 p.

[4] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.

[5] Вержбицкий В. М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): учеб. пособие для вузов. М.: Высш. школа, 2001. 382 с.

K. N. Galimzyanova[1], *L. V. Kovtanyuk*[1], *G. L. Panchenko*[2, 3]

CREEP AND PLASTIC FLOW OF THE MATERIAL OF AN ELASTOPLASTIC SPHERICAL LAYER UNDER CONDITIONS OF COMPREHENSIVE HYDROSTATIC COMPRESSION

[1] *Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia*

[2] *Institute of Machinery and Metallurgy of FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia*

[3] *Vladivostok State University of Economics and Service, Vladivostok, Russia*

Abstract. In the framework of the theory of small deformations the paper presents the solution of a boundary value problem about a deformation process of the material with elastic, viscous and plastic properties. The material is placed between two spherical surfaces and deformed under the action of uniform pressure changing with the times. Rheological effects are taken into account at the stage of deformation, which precedes the plastic flow. Reversible and irreversible deformations, stresses, and displacements are calculated. The regularity of motion of the elastoplastic boundary in the layer is established.

Keywords: elasticity, creep, plasticity.

REFERENCES

[1] Oleinikov A. I., Pekarsh A. I. Integrated design of the manufacturing processes of integral panels. M.: Ekom, 2009. 109 p. (in Russian).

[2] Belykh S. V., Bormotin K. S., Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Prokudin A. N. On large isothermal deformation of materials with elastic, viscous and plastic properties // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2014. № 4 (22). P. 145—157. (in Russian).

[3] Norton F. H. The creep steel of high temperature / F. H. Norton. Y.: Mc Gpaw Hill, 1929. 110 p.

[4] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. Theory of plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p. (in Russian).

[5] Verzhbitsky V. M. Numerical methods (mathematical analysis and ordinary differential equations): manual for Universities. M .: Vyssh. shk., 2001. 382 p. (in Russian).

Galimzyanova Kseniya Nailevna
e-mail: gal-ksyusha@ya.ru, Postgraduate Student, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia.

Kovtanyuk Larisa Valentinovna
e-mail: lk@iacp.dvo.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Head of the Laboratory of Irreversible Deformation Mechanics, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia.

Panchenko Galina Leonidovna
e-mail: panchenko.21@yandex.ru, Candidate of Phys. & Math.; Senior Researcher, Institute of Machinery and Metallurgy of FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia; Assoc. Professor, Vladivostok State University of Economics and Service, Vladivostok, Russia.