Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 3 (21). С. 96–104

А. Д. Чернышов, В. В. Горяйнов

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ УПРУГОЙ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ МЕТОДОМ БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Воронежский государственный университет инженерных технологий

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

Аннотация. Методом быстрых разложений решается задача об изгибе упругой консольной балки с жесткой заделкой на одной стороне и произвольно нагруженной – на трех остальных сторонах. Полученное аналитическое решение может быть использовано для анализа деформаций балки.

Ключевые слова: быстрые разложения, аналитическое решение, упругая консольная балка, изгиб.

УДК: 517.518.454

Введение. Многомерные задачи теории упругости представляют большой научный и инженерный интерес. Но к настоящему времени для подобных краевых задач хорошо разработаны лишь только численные методы [1], [2] и существуют только отдельные единицы аналитических решений. Так, в [3], [4] для балки с граничными условиями в напряжениях приводятся частные решения в полиномах и тригонометрических функциях, в некоторых случаях граничные условия выполняются только приближенно в интегральной форме. В данной работе предлагается новый аналитический метод – метод быстрых разложений [5], [6], позволяющий с высокой точностью при минимальных затратах на ЭВМ определить решение в аналитическом виде [7], [8], [9], [10], [11], [12].

Постановка задачи. В условиях плоской деформации проекции вектора перемещений материальных точек бруса зависят только от координат x, y:

$$u = u(x, y),\ v = v(x, y),\ w = 0.$$

Компоненты тензора напряжения будут иметь вид:

$$\begin{gathered}\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\, u_x + \lambda v_y\,,\quad \sigma_{yy} = (\lambda + 2\mu)\, v_y + \lambda u_x\,,\ \sigma_{xy} = \mu\left(u_y + v_x\right)\,,\\ \sigma_{zz} = \lambda\left(u_x + v_y\right)\,,\ \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Запишем уравнения равновесия Ламе для перемещений с учетом массовых сил $X\,(x, y)\,,\ Y\,(x, y)$:

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu)\, u_{xx} + (\lambda + \mu)\, v_{xy} + \mu u_{yy} = X\,(x, y)\,,\\ (\lambda + 2\mu)\, v_{yy} + (\lambda + \mu)\, u_{xy} + \mu v_{xx} = Y\,(x, y)\,.\end{aligned} \tag{2}$$

К уравнениям (2) необходимо добавить граничные условия. Будем считать, что упругий брус прямоугольного сечения $\Omega = (0 \le x \le a,\ 0 \le y \le h)$ имеет жесткую заделку на нижней стороне

Поступила 14.09.2014

$$u(x,y)|_{y=0} = \upsilon(x,y)|_{y=0} = 0 \tag{3}$$

и нагружен проивольной нагрузкой на трех остальных сторонах:

$$\begin{gathered}\sigma_{xx}|_{x=a} = q_x^{(1)}(y)\ ,\ \sigma_{yx}|_{x=a} = q_y^{(1)}(y)\,,\ \ \sigma_{xx}|_{x=0} = q_x^{(3)}(y)\ ,\ \sigma_{yx}|_{x=0} = q_y^{(3)}(y)\,,\\ \sigma_{xy}|_{y=h} = q_x^{(2)}(x)\ ,\ \sigma_{yy}|_{y=h} = q_y^{(2)}(x)\,.\end{gathered} \tag{4}$$

Полагаем, что функции в граничных условиях должны быть непрерывными, гладкими:

$$\begin{gathered}q_x^{(1)}(y)\,,\ q_y^{(1)}(y)\,,\ \ q_x^{(3)}(y)\,,\ \ q_y^{(3)}(y)\in C^{(2)}\quad(0\le y\le h)\ \ ,\\ q_x^{(2)}(x)\ ,\ q_y^{(2)}(x)\in C^{(2)}\quad(0\le x\le a)\,,\end{gathered}$$

и удовлетворять условиям их согласования:

$$q_y^{(1)}(h) = q_x^{(2)}(a)\ \ ,\ \ q_y^{(3)}(h) = q_x^{(2)}(0)\,.$$

С учетом (1) граничные условия (4) принимают форму:

$$\left.\left((\lambda+2\mu)\,\upsilon_y + \lambda u_x\right)\right|_{y=h} = q_y^{(2)}(x)\ ,\quad \left.\mu\,(u_y+\upsilon_x)\right|_{y=h} = q_x^{(2)}(x)\ . \tag{5}$$

$$\left.\left((\lambda+2\mu)\,u_x + \lambda \upsilon_y\right)\right|_{x=0} = q_x^{(3)}(y)\ ,\quad \left.\mu\,(u_y+\upsilon_x)\right|_{x=0} = q_y^{(3)}(y)\,, \tag{6}$$

$$\left.\left((\lambda+2\mu)\,u_x + \lambda \upsilon_y\right)\right|_{x=a} = q_x^{(1)}(y)\ ,\quad \left.\mu\,(u_y+\upsilon_x)\right|_{x=a} = q_y^{(1)}(y)\,. \tag{7}$$

Таким образом, получена краевая задача: найти решение системы двух дифференциальных уравнений (2) относительно $(u,\upsilon)\in C^{(3)}(\Omega)$, удовлетворяющих граничным условиям (3), (5)–(7).

Решение задачи. В соответствии с методом быстрых разложений решение данной задачи следует представить суммой граничных функций второго и третьего порядка M_2, M_3 и быстрых рядов Фурье [3], [4].

$$u(x,y) = M_2 + \sum_{m=1}^{N} u_m(x)\sin m\pi\frac{y}{h},\ \upsilon(x,y) = M_3 + \upsilon_0(x) + \sum_{m=1}^{N}\upsilon_m(x)\cos m\pi\frac{y}{h}, \tag{8}$$

где $N-$число учитываемых членов в рядах Фурье, а граничные функции M_2 и M_3 имеют специальный вид [3]:

$$\begin{gathered}M_2 = \phi_1(x)\left(1-\tfrac{y}{h}\right) + \phi_2(x)\,\tfrac{y}{h} + \phi_3(x)\left(\tfrac{y^2}{2}-\tfrac{y^3}{6h}-\tfrac{hy}{3}\right) + \phi_4(x)\left(\tfrac{y^3}{6h}-\tfrac{hy}{6}\right),\\ M_3 = \psi_1(x)\left(y-\tfrac{y^2}{2h}\right) + \psi_2(x)\,\tfrac{y^2}{2h} + \psi_3(x)\left(\tfrac{y^3}{6}-\tfrac{y^4}{24\,h}-\tfrac{hy^2}{6}\right) + \psi_4(x)\left(\tfrac{y^4}{24\,h}-\tfrac{hy^2}{12}\right),\end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered}\phi_1(x) = u(x,0)\,,\ \phi_2(x) = u(x,h)\,,\ \ \phi_3(x) = u_{yy}(x,0)\,,\ \ \phi_4(x) = u_{yy}(x,h)\,,\\ \psi_1(x) = \upsilon_y(x,0)\,, \psi_2(x) = \upsilon_y(x,h)\,,\ \ \psi_3(x) = \upsilon_{yyy}(x,0)\,, \psi_4(x) = \upsilon_{yyy}(x,h)\,.\end{gathered}$$

В результате приходим к задаче о нахождении следующих $9+2N$ неизвестных, зависящих только от одной переменной:

$$\phi_j(x)\ \ ,\ \psi_j(x)\ \ ,\ \upsilon_0(x)\ \ ,\ u_m(x)\ \ ,\ \upsilon_m(x)\ \ ,\ \ j=1\div 4\ ,\ \ m=1\div N, \tag{9}$$

которые найдем, выполняя дифференциальные уравнения (2) и граничные условия (3), (5)–(7). Для этого подставим быстрые разложения (8) в (2):

$$\begin{gathered}(\lambda+2\mu)\left[\phi_1''\left(1-\tfrac{y}{h}\right)+\phi_2''\tfrac{y}{h}+\phi_3''\left(\tfrac{y^2}{2}-\tfrac{y^3}{6h}-\tfrac{hy}{3}\right)+\phi_4''\left(\tfrac{y^3}{6h}-\tfrac{hy}{6}\right)+\sum_{m=1}^{N}u_m''\sin m\pi\tfrac{y}{h}\right]+\\ +(\lambda+\mu)\left[\psi_1'\left(1-\tfrac{y}{h}\right)+\psi_2'\tfrac{y}{h}+\psi_3'\left(\tfrac{y^2}{2}-\tfrac{y^3}{6h}-\tfrac{hy}{3}\right)+\right.\\ \left.+\psi_4'\left(\tfrac{y^3}{6h}-\tfrac{hy}{6}\right)-\sum_{m=1}^{N}m\tfrac{\pi}{h}v_m'\sin m\pi\tfrac{y}{h}\right]\\ +\mu\left[\phi_3\left(1-\tfrac{y}{h}\right)+\phi_4\tfrac{y}{h}-\sum_{m=1}^{N}m^2\tfrac{\pi^2}{h^2}u_m\sin m\pi\tfrac{y}{h}\right]=X(x,y),\end{gathered}\tag{10}$$

$$\begin{gathered}(\lambda+2\mu)\left[\tfrac{\psi_2-\psi_1}{2}+\psi_3\left(y-\tfrac{y^2}{2h}-\tfrac{h}{3}\right)+\psi_4\left(\tfrac{y^2}{2h}-\tfrac{h}{6}\right)-\sum_{m=1}^{N}m^2\tfrac{\pi^2}{h^2}v_m\cos m\pi\tfrac{y}{h}\right]+\\ +(\lambda+\mu)\left[\tfrac{\phi_2'-\phi_1'}{h}+\phi_3'\left(y-\tfrac{y^2}{2h}-\tfrac{h}{3}\right)+\phi_4'\left(\tfrac{y^2}{2h}-\tfrac{h}{6}\right)+\sum_{m=1}^{N}m\tfrac{\pi}{h}u_m'\cos m\pi\tfrac{y}{h}\right]+\\ +\mu\left[\psi_1''\left(y-\tfrac{y^2}{2h}\right)+\psi_2''\tfrac{y^2}{2h}+\psi_3''\left(\tfrac{y^3}{6}-\tfrac{y^4}{24h}-\tfrac{hy^2}{6}\right)+\right.\\ \left.+\psi_4''\left(\tfrac{y^4}{24h}-\tfrac{hy^2}{12}\right)+v_0''+\sum_{m=1}^{N}v_m''\cos m\pi\tfrac{y}{h}\right]=Y(x,y).\end{gathered}\tag{11}$$

Для построения замкнутой системы относительно неизвестных, перечисленных в (9), в соответствии с методом быстрых разложений в уравнении (10), представляющем собой разложение по синусам с граничной функцией нулевого порядка, следует положить $y=0$, затем $y=h$. Тем самым найдем два уравнения:

$$\begin{gathered}(\lambda+2\mu)\,\phi_1''+(\lambda+\mu)\,\psi_1'+\mu\phi_3=X(x,0)\,,\\ (\lambda+2\mu)\,\phi_2''+(\lambda+\mu)\,\psi_2'+\mu\phi_4=X(x,h)\,.\end{gathered}\tag{12}$$

Теперь уравнение (10) надо умножить на $\sin n\pi y/h$ и проинтегрировать в пределах $0\le y\le h$:

$$\begin{gathered}(\lambda+2\mu)\left[\tfrac{h}{n\pi}\left(\phi_1''-\phi_2''(-1)^n\right)+\tfrac{h^3}{n^3\pi^3}\left(\phi_4''(-1)^n-\phi_3''\right)+\tfrac{h}{2}u_n''\right]+\\ +(\lambda+\mu)\left[\tfrac{h}{n\pi}\left(\psi_1'-\psi_2'(-1)^n\right)+\tfrac{h^3}{n^3\pi^3}\left(\psi_4'(-1)^n-\psi_3'\right)-n\tfrac{\pi}{2}v_n'\right]+\\ +\mu\left[\tfrac{h}{n\pi}\left(\phi_3-\phi_4(-1)^n\right)-n^2\tfrac{\pi^2}{2h}u_n\right]=X_n(x)\quad,\quad X_n(x)=\int\limits_0^h X(x,y)\sin n\pi\tfrac{y}{h}dy.\end{gathered}\tag{13}$$

Уравнение (11) является разложением по косинусам с граничной функцией первого порядка, поэтому вначале его проинтегрируем по $0\le y\le h$, что соответствует нахождению нулевого коэффициента перед суммой ряда по косинусам:

$$\begin{gathered}(\lambda+2\mu)\left(\psi_2-\psi_1\right)+(\lambda+\mu)\left(\phi_2'-\phi_1'\right)+\\ +\mu\left(\psi_1''\tfrac{h^2}{3}+\psi_2''\tfrac{h^2}{6}-\psi_3''\tfrac{h^4}{45}-\psi_4''\tfrac{7h^4}{360}+v_0''h\right)=Y_0(x)\;,\;\;Y_0(x)=\int\limits_0^h Y(x,y)\,dy.\end{gathered}\tag{14}$$

Теперь уравнение (11) надо продифференцировать по переменной y:

$$\begin{gathered}(\lambda+2\mu)\left[\psi_3\left(1-\tfrac{y}{h}\right)+\psi_4\tfrac{y}{h}+\sum_{m=1}^{N}m^3\tfrac{\pi^3}{h^3}v_m\sin m\pi\tfrac{y}{h}\right]+\\ +(\lambda+\mu)\left[\phi_3'\left(1-\tfrac{y}{h}\right)+\phi_4'\tfrac{y}{h}-\sum_{m=1}^{N}m^2\tfrac{\pi^2}{h^2}u_m'\sin m\pi\tfrac{y}{h}\right]+\\ +\mu\left[\psi_1''\left(1-\tfrac{y}{h}\right)+\psi_2''\tfrac{y}{h}+\psi_3''\left(\tfrac{y^2}{2}-\tfrac{y^3}{6h}-\tfrac{hy}{3}\right)+\right.\\ \left.+\psi_4''\left(\tfrac{y^3}{6h}-\tfrac{hy}{6}\right)-\sum_{m=1}^{N}m\tfrac{\pi}{h}v_m''\sin m\pi\tfrac{y}{h}\right]=\tfrac{\partial Y}{\partial y},\end{gathered}\tag{15}$$

после чего в (15) положить $y=0$, затем $y=h$. В результате будем иметь еще два уравнения:

$$(\lambda + 2\mu)\,\psi_3 + (\lambda + \mu)\,\phi_3' + \mu\psi_1'' = Y_0^*(x) \quad , \quad Y_0^*(x) = \left.\frac{\partial Y}{\partial y}\right|_{y=0} ; \tag{16}$$

$$(\lambda + 2\mu)\,\psi_4 + (\lambda + \mu)\,\phi_4' + \mu\psi_2'' = Y_h^*(x) \quad , \quad Y_h^*(x) = \left.\frac{\partial Y}{\partial y}\right|_{y=h} . \tag{17}$$

Последняя операция с уравнением (11) состоит в умножении его на $\cos n\pi y/h$ и последующем интегрировании в пределах $0 \le y \le h$:

$$\begin{gathered}(\lambda + 2\mu)\left[-\psi_3 \tfrac{h^2}{n^2\pi^2} + \psi_4 (-1)^n \tfrac{h^2}{n^2\pi^2} - n^2 \tfrac{\pi^2}{2h}\upsilon_n\right] + \\ + (\lambda + \mu)\left[-\phi_3' \tfrac{h^2}{n^2\pi^2} + \phi_4' (-1)^n \tfrac{h^2}{n^2\pi^2} + n\tfrac{\pi}{2}u_n'\right] + \\ +\mu\left[-\psi_1'' \tfrac{h^2}{n^2\pi^2} + \psi_2'' (-1)^n \tfrac{h^2}{n^2\pi^2} + \tfrac{h^4}{n^4\pi^4}\left(\psi_3'' - \psi_4'' (-1)^n\right) + \upsilon_n'' \tfrac{h}{2}\right] = Y_n^*(x) \;, \\ Y_n^*(x) = \int\limits_0^h Y(x,y) \cos n\pi \tfrac{y}{h} dy.\end{gathered} \tag{18}$$

Перейдем к выполнению граничных условий. Подставляя быстрые разложения из (8) в (3), получим

$$\phi_1(x) = 0 \quad , \quad \upsilon_0(x) = -\sum_{m=1}^{N} \upsilon_m(x). \tag{19}$$

Учитывая $\phi_1(x) = 0$, из граничного условия (5) будем иметь

$$\begin{gathered}\tfrac{\phi_2}{h} + \phi_3 \tfrac{h}{6} + \phi_4 \tfrac{h}{3} + \sum_{m=1}^{N} u_m m \tfrac{\pi}{h} (-1)^m + \\ + (\psi_1' + \psi_2') \tfrac{h}{2} - \tfrac{h^3}{24}(\psi_3' + \psi_4') + \upsilon_0' + \sum_{m=1}^{N} \upsilon_m' (-1)^m = \tfrac{q_x^{(2)}}{\mu}, \quad (\lambda + 2\mu)\,\psi_2 + \lambda\phi_2' = q_y^{(2)}.\end{gathered} \tag{20}$$

Получили замкнутую систему (12)–(14), (15)–(18) из $9 + 2N$ уравнений относительно неизвестных, перечисленных в (9).

Подстановка быстрых разложений (8) в граничные условия (6), (7) с учетом ранее полученного результата $\phi_1(x) = 0$ приводит к следующим четырем уравнениям:

$$\begin{gathered}(\lambda + 2\mu)\left(\phi_2'(0)\tfrac{y}{h} + \phi_3'(0)\left(\tfrac{y^2}{2} - \tfrac{y^3}{6h} - \tfrac{hy}{3}\right) + \phi_4'(0)\left(\tfrac{y^3}{6h} - \tfrac{hy}{6}\right) + \sum_{m=1}^{N} u_m'(0)\sin m\pi\tfrac{y}{h}\right) + \\ +\lambda\left(\psi_1(0)\left(1 - \tfrac{y}{h}\right) + \psi_2(0)\tfrac{y}{h} + \psi_3(0)\left(\tfrac{y^2}{2} - \tfrac{y^3}{6h} - \tfrac{hy}{3}\right) + \psi_4(0)\left(\tfrac{y^3}{6h} - \tfrac{hy}{6}\right) - \right. \\ \left. - \sum_{m=1}^{N} m\tfrac{\pi}{h}\upsilon_m(0)\sin m\pi\tfrac{y}{h}\right) = q_x^{(3)}(y) \;,\end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered}\tfrac{\phi_2(0)}{h} + \phi_3(0)\left(y - \tfrac{y^2}{2h} - \tfrac{h}{3}\right) + \phi_4(0)\left(\tfrac{y^2}{2h} - \tfrac{h}{6}\right) + \sum_{m=1}^{N} u_m(0)\, m\tfrac{\pi}{h}\cos m\pi\tfrac{y}{h} + \\ +\psi_1'(0)\left(y - \tfrac{y^2}{2h}\right) + \psi_2'(0)\tfrac{y^2}{2h} + \psi_3'(0)\left(\tfrac{y^3}{6} - \tfrac{y^4}{24h} - \tfrac{hy^2}{6}\right) + \psi_4'(0)\left(\tfrac{y^4}{24h} - \tfrac{hy^2}{12}\right) + \\ +\upsilon_0'(0) + \sum_{m=1}^{N} \upsilon_m'(0)\cos m\pi\tfrac{y}{h} = \tfrac{q_y^{(3)}(y)}{\mu},\end{gathered} \tag{22}$$

$$
\begin{gathered}
(\lambda+2\mu)\left(\phi_2'(a)\frac{y}{h}+\phi_3'(a)\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6h}-\frac{hy}{3}\right)+\phi_4'(a)\left(\frac{y^3}{6h}-\frac{hy}{6}\right)+\sum_{m=1}^{N}u_m'(a)\sin m\pi\frac{y}{h}\right)+\\
+\lambda\left(\psi_1(a)\left(1-\frac{y}{h}\right)+\psi_2(a)\frac{y}{h}+\psi_3(a)\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6h}-\frac{hy}{3}\right)+\right.\\
\left.+\psi_4(a)\left(\frac{y^3}{6h}-\frac{hy}{6}\right)-\sum_{m=1}^{N}m\frac{\pi}{h}\upsilon_m(a)\sin m\pi\frac{y}{h}\right)=q_x^{(1)}(y)\ ,
\end{gathered}
\tag{23}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{\phi_2(a)}{h}+\phi_3(a)\left(y-\frac{y^2}{2h}-\frac{h}{3}\right)+\phi_4(a)\left(\frac{y^2}{2h}-\frac{h}{6}\right)+\sum_{m=1}^{N}m\frac{\pi}{h}u_m(a)\cos m\pi\frac{y}{h}+\\
+\psi_1'(a)\left(y-\frac{y^2}{2h}\right)+\psi_2'(a)\frac{y^2}{2h}+\psi_3'(a)\left(\frac{y^3}{6}-\frac{y^4}{24h}-\frac{hy^2}{6}\right)+\\
+\psi_4'(a)\left(\frac{y^4}{24h}-\frac{hy^2}{12}\right)+\upsilon_0'(a)+\sum_{m=1}^{N}\upsilon_m'(a)\cos m\pi\frac{y}{h}=\frac{q_y^{(1)}(y)}{\mu}.
\end{gathered}
\tag{24}
$$

Данные четыре уравнения (21)–(24) следует рассматривать как быстрые разложения функций в соответственных правых частях $q_x^{(1)}(y)$, $q_y^{(1)}(y)$, $q_x^{(3)}(y)$, $q_y^{(3)}(y)$ на отрезке $0\le y\le h$. Из характера граничных условий (6) и (7) следует, что быстрые разложения для $q_x^{(1)}(y)$, $q_x^{(3)}(y)$ представлены в (21) и (23) с граничной функцией второго порядка, а для $q_y^{(1)}(y)$, $q_y^{(3)}(y)$ в (19) и (24) – с граничной функцией первого порядка. Поэтому к левой и правой частям уравнений (21) и (23) следует применить оператор быстрых разложений второго порядка [5], а для уравнений (19), (24) – оператор быстрых разложений первого порядка. Эти действия приводят к следующим алгебраическим уравнениям, играющим роль граничных условий для ранее полученной системы (12)–(14), (15)–(18). Операторы быстрых разложений сводятся к выполнению следующих действий. Из уравнения (21) при $y=0$ и $y=h$ будем иметь

$$\lambda\psi_1(0)=q_x^{(3)}(0)\ ,\quad (\lambda+2\mu)\,\phi_2'(0)+\lambda\psi_2(0)=q_x^{(3)}(h)\,. \tag{25}$$

После вычисления второй производной по y от уравнения (21) при $y=0$ и $y=h$ получим

$$(\lambda+2\mu)\,\phi_3'(0)+\lambda\psi_3(0)=q_x^{(3)\prime\prime}(0)\ ,\quad (\lambda+2\mu)\,\phi_4'(0)+\lambda\psi_4(0)=q_x^{(3)\prime\prime}(h)\,. \tag{26}$$

Интеграл по y от уравнения (19) в пределах $0\le y\le h$ дает

$$
\begin{gathered}
\phi_2(0)+\psi_1'(0)\frac{h^2}{3}+\psi_2'(0)\frac{h^2}{6}-\psi_3'(0)\frac{h^4}{45}-\psi_4'(0)\frac{h^4 7}{360}+\upsilon_0'(0)\,h=\frac{q_{y0}^{(3)}}{\mu}\ ,\\
q_{y0}^{(3)}=\int_0^h q_y^{(3)}(y)\,dy.
\end{gathered}
\tag{27}
$$

После вычисления первой производной по y из уравнения (19) при $y=0$ и $y=h$ будем иметь

$$\phi_3(0)+\psi_1'(0)=\frac{q_y^{(3)\prime}(0)}{\mu}\ ,\quad \phi_4(0)+\psi_2'(0)=\frac{q_y^{(3)\prime}(h)}{\mu}. \tag{28}$$

Из уравнения (23) при $y=0$ и $y=h$ найдем

$$\lambda\psi_1(a)=q_x^{(1)}(0)\ ,\quad (\lambda+2\mu)\,\phi_2'(a)+\lambda\psi_2(a)=q_x^{(1)}(h)\,. \tag{29}$$

Вычисляя вторую производную по y, из уравнения (23) при $y=0$ и $y=h$ получим

$$(\lambda+2\mu)\,\phi_3'(a)+\lambda\psi_3(a)=q_x^{(1)\prime\prime}(0)\ ,\quad (\lambda+2\mu)\,\phi_4'(a)+\lambda\psi_4(a)=q_x^{(1)\prime\prime}(h)\,. \tag{30}$$

Уравнение (24) после интегрирования в пределах $0\le y\le h$ дает

$$\begin{gathered}\phi_2(a)+\psi_1'(a)\tfrac{h^2}{3}+\psi_2'(a)\tfrac{h^2}{6}-\psi_3'(a)\tfrac{h^4}{45}-\psi_4'(a)\tfrac{h^4 7}{360}+\upsilon_0'(a)\,h=\tfrac{q_{y0}^{(1)}}{\mu}\,,\\ q_{y0}^{(1)}=\int\limits_0^h q_y^{(1)}(y)\,dy.\end{gathered}\tag{31}$$

После вычисления первой производной по y из уравнения (24) при $y=0$ и $y=h$ будем иметь

$$\phi_3(a)+\psi_1'(a)=\frac{{q_y^{(1)}}'(0)}{\mu},\quad \phi_4(a)+\psi_2'(a)=\frac{{q_y^{(1)}}'(h)}{\mu}.\tag{32}$$

Теперь остается получить серийные $4N$ уравнений. Для этого уравнения (21), (23) умножим на $\sin n\pi y/h$, а уравнения (19), (24) – на $\cos n\pi y/h$ и проинтегрируем по y, где $n=1\div N$:

$$\begin{gathered}(\lambda+2\mu)\left(-\phi_2'(0)\tfrac{h}{n\pi}(-1)^n-\phi_3'(0)\tfrac{h^3}{n^3\pi^3}+\phi_4'(0)\tfrac{h^3(-1)^n}{n^3\pi^3}+u_n'(0)\tfrac{h}{2}\right)+\\ +\lambda\left(\psi_1(0)\tfrac{h}{n\pi}-\psi_2(0)\tfrac{h}{n\pi}(-1)^n-\psi_3(0)\tfrac{h^3}{n^3\pi^3}+\psi_4(0)\tfrac{h^3(-1)^n}{n^3\pi^3}-n\tfrac{\pi}{2}\upsilon_n(0)\right)=q_{x\,n}^{(3)}\,,\\ q_{x\,n}^{(3)}=\int\limits_0^h q_x^{(3)}(y)\sin n\pi\tfrac{y}{h}dy\,,\ \ n=1\div N\,;\end{gathered}\tag{33}$$

$$\begin{gathered}-\phi_3(0)\tfrac{h^2}{n^2\pi^2}+\phi_4(0)\tfrac{h^2(-1)^n}{n^2\pi^2}+u_n(0)\,n\tfrac{\pi}{2}-\\ -\psi_1'(0)\tfrac{h^2}{n^2\pi^2}+\psi_2'(0)\tfrac{h^2(-1)^n}{n^2\pi^2}+\psi_3'(0)\tfrac{h^4}{n^4\pi^4}-\psi_4'(0)\tfrac{h^4(-1)^n}{n^4\pi^4}+\upsilon_n'(0)\tfrac{h}{2}=\tfrac{q_{y\,n}^{(3)}}{\mu}\,,\\ q_{y\,n}^{(3)}=\int\limits_0^h q_y^{(3)}(y)\cos n\pi\tfrac{y}{h}dy\ \ ,\ \ n=1\div N\ ;\end{gathered}\tag{34}$$

$$\begin{gathered}(\lambda+2\mu)\left(-\phi_2'(a)\tfrac{h}{n\pi}(-1)^n-\phi_3'(a)\tfrac{h^3}{n^3\pi^3}+\phi_4'(a)\tfrac{h^3(-1)^n}{n^3\pi^3}+u_n'(a)\tfrac{h}{2}\right)+\\ +\lambda\left(\psi_1(a)\tfrac{h}{n\pi}-\psi_2(a)\tfrac{h}{n\pi}(-1)^n-\psi_3(a)\tfrac{h^3}{n^3\pi^3}+\psi_4(a)\tfrac{h^3(-1)^n}{n^3\pi^3}-n\tfrac{\pi}{2}\upsilon_n(a)\right)=q_{x\,n}^{(1)},\\ q_{x\,n}^{(1)}=\int\limits_0^h q_x^{(1)}(y)\sin n\pi\tfrac{y}{h}dy\ \ ,\ \ n=1\div N\ ;\end{gathered}\tag{35}$$

$$\begin{gathered}-\phi_3(a)\tfrac{h^2}{n^2\pi^2}+\phi_4(a)\tfrac{h^2(-1)^n}{n^2\pi^2}+u_n(a)\,n\tfrac{\pi}{2}-\\ -\psi_1'(a)\tfrac{h^2}{n^2\pi^2}+\psi_2'(a)\tfrac{h^2(-1)^n}{n^2\pi^2}+\psi_3'(a)\tfrac{h^4}{n^4\pi^4}-\psi_4'(a)\tfrac{h^4(-1)^n}{n^4\pi^4}+\upsilon_n'(a)\tfrac{h}{2}=\tfrac{q_{y\,n}^{(1)}}{\mu},\\ q_{y\,n}^{(1)}=\int\limits_0^h q_y^{(1)}(y)\cos n\pi\tfrac{y}{h}dy\,,\ \ n=1\div N\,.\end{gathered}\tag{36}$$

Исключая из системы (12)–(14), (15)–(18) и граничных условий (22), (26), найденные в (19) выражения для $\phi_1(x)$ и $\upsilon_0(x)$, получим замкнутую систему (12)–(14), (15)–(17), (18) из $7{+}2N$ линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных

$$\phi_j(x)\ ,\ \ \psi_i(x)\ ,\ \ u_m(x)\ ,\ \ \upsilon_m(x)\ ,\ \ j=2\div 4\,,\ \ i=1\div 4\,,\ \ m=1\div N$$

с граничными условиями (20)–(36). Данная система была решена методом Эйлера.

Вывод. Полученное аналитическое решение (8) позволяет вычислить перемещения в любой точке консольной балки прямоугольного сечения и может быть использовано для расчета и анализа в ней напряжений. Точность решения задачи будет зависеть от количества членов быстрого ряда Фурье и порядка граничной функции в быстром разложении.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Зверяев, Е. М.* Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит / Е. М. Зверяев // Прикладная математика и механика. – 2003. – Т. 67. – № 3. – С. 472 – 481.

[2] *Иванов, Г. В.* Решение плоских задач упругости на основе конечных элементов с независимой аппроксимацией смещений / Г. В. Иванов, В. Д. Кургузов // Вычислительные технологии. – 1997. – Т. 2. – № 4. – С. 60–76.

[3] *Тимошенко, С. П.* Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1979. – С. 560.

[4] *Лурье, А. И.* Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – С. 940.

[5] *Чернышов, А. Д.* Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений / А. Д. Чернышов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54. – № 1. – С. 13–24.

[6] *Чернышов, А. Д.* Оператор быстрых разложений и теорема единственности быстрых разложений / А. Д. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. тр. междунар. конф. Ч. 1. – Воронеж : ВГУ, 2012. – С. 401–405.

[7] *Чернышов, А. Д.* Температурный режим при естественной конвекции термовязкой несжимаемой жидкости в емкости прямоугольной формы / А. Д. Чернышов, А. Н. Марченко, В. В. Горяйнов // Тепловые процессы в технике. – 2012. – Т. 4. – № 11. – С. 482–486.

[8] *Чернышов, А. Д.* Решение методом быстрых разложений задачи о сушке зерна / А. Д. Чернышов, И. О. Павлов, Е. В. Воронова, В. В. Горяйнов // Теплофизика и аэромеханика. – 2012. – Т. 19. – № 6. – С. 739–749.

[9] *Чернышов, А. Д.* Решение одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения методом быстрых разложений / А. Д. Чернышов, В. В. Горяйнов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 4(14).. – С. 105–112.

[10] *Чернышов, А. Д.* Решение задачи о контактном тепловом сопротивлении между сжатыми шарами методом быстрых разложений / А. Д. Чернышов, В. М. Попов, А. С. Шахов, В. В. Горяйнов, А. П. Новиков // Тепловые процессы в технике. – 2012. – Т. 4. – № 12. – С. 544–552.

[11] *Чернышов, А. Д.* Решение задачи о деформировании термоупругой пластины методом быстрых разложений / А. Д. Чернышов, А. Н. Марченко, В. В. Горяйнов // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. – 2013. – № 2. – С. 84–89.

[12] *Попов, В. М.* Повышенная точность решения задачи о контактном термосопротивлении между сжатыми шарами методом быстрых разложений / В. М. Попов, А. С. Шахов, В. В. Горяйнов, О. А. Чернышов, А. П. Новиков // Тепловые процессы в технике. – 2014. – Т. 6. – № 4. – С. 179–191.

Чернышов Александр Данилович,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж

e-mail: chernyshovad@mail.ru

Горяйнов Виталий Валерьевич,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, г. Воронеж

e-mail: gorvit77@mail.ru

A. D. Chernyshov, V. V. Gorjajnov

ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM ABOUT BENDING OF AN ELASTIC CANTILEVER BEAM BY THE METHOD RAPID EXPANSIONS

Voronezh State University of Engineering Technologies

Abstract. Rapid expansion method to solve the problem of the bending of the elastic cantilever beam with a rigid embedded on one side and loaded randomly on the other three sides. The resulting analytical solution can be used to analyze the deformation of the beam.

Keywords: rapid expansion, an analytical solution, the elastic cantilever beam, bend.

REFERENCES

[1] *Zveryaev, E. M.* The analysis of the hypotheses used at creation of the theory of beams and plates / E. M. Zveryaev // Applied mathematics and mechanics. – 2003. – Vol. 67. – № 3. – P. 472 – 481.

[2] *Ivanov, G. V.* The solution of flat problems of elasticity on the basis of final elements with independent approximation of shifts / G. V. Ivanov, V. D. Kurguzov // Computing technologies. – 1997. – Vol. 2. – № 4. – P. 60–76.

[3] *Tymoshenko, S. P.* Theory of elasticity / S. P. Tymoshenko, J. Gudyer. – M. : Nauka, 1979. – P. 560.

[4] *Lurye, A. I.* Theory of elasticity / A. I. Lurye. – M. : Nauka, 1970. – P. 940.

[5] *Chernyshov, A. D.* Method of fast decomposition for the solution of the nonlinear differential equations / A. D. Chernyshov // Zhurnal of calculus mathematics and mathematical physics. – 2014. – Vol. 54. – № 1. – P. 13–24.

[6] *Chernyshov, A. D.* Operator of fast decomposition and theorem of uniqueness of fast decomposition / A. D. Chernyshov // Actual problems of applied mathematics, informatics and mechanics : collection of works of the international conference Part 1. – Voronezh : VSU, 2012. – P. 401–405.

[7] *Chernyshov, A. D.* Temperature condition at natural convection of thermoviscous incompressible liquid in squared capacity / A. D. Chernyshov, A. N. Marchenko, V. V. Goryaynov // Thermal processes in equipment. – 2012. – Vol. 4. – № 11. – P. 482–486.

[8] *Chernyshov, A. D.* The decision by method of fast decomposition of a task about grain drying / A. D. Chernyshov, I. O. Pavlov, E. V. Voronova, V. V. Goryaynov // Thermophysics and aeromechanics. – 2012. – Vol. 19. – № 6. – P. 739–749.

[9] *Chernyshov, A. D.* Solution of one nonlinear integro-differential equation by method of fast decomposition / A. D. Chernyshov, V. V. Goryaynov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2012. – № 4 (14).. – P. 105–112.

[10] *Chernyshov, A. D.* The solution of a task on contact thermal resistance between the squeezed spheres by method of fast decomposition / A. D. Chernyshov, V. M. Popov, A. S. Shahov, V. V. Goryaynov, A. P. Novikov // Thermal processes in equipment. – 2012. – Vol. 4. – № 12. – P. 544–552.

[11] *Chernyshov, A. D.* Solution of a task on deformation of a thermoelastic plate by method of fast decomposition / A. D. Chernyshov, A. N. Marchenko, V. V. Goryaynov // Vestnik Voronezh State University of Engineering Technologies. – 2013. – № 2. – P. 84–89.

[12] *Popov, V. M.* The increased accuracy of the solution of a task on contact thermoresistance between the squeezed spheres by method of fast decomposition / V. M. Popov, A. S. Shahov, V. V. Goryaynov, O. A. Chernyshov, A. P. Novikov // Thermal processes in equipment. – 2014. – Vol. 6. – № 4. – P. 179–191.

Chernyshov, Alexander Danilovich

Dr. Sci. Phys.&Math., Professor, Department of Higher Mathematics, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh

Gorjajnov, Vitalij Valerevich

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Department of Higher Mathematics, Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering, Voronezh