

Ю. В. Астапов

## ВНЕДРЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО ИНДЕНТОРА В ОСНОВАНИЕ УПРУГОГО И ГИПОУПРУГОГО КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

*Тульский государственный университет, Тула*

**Аннотация.** В работе приведены результаты решения задачи о вдавливании в цилиндрический образец жесткого штампа сферической формы. Использовались три типа определяющих соотношений. Исследовалось влияние выбора коротационной производной на характеристики напряженно-деформированного состояния, а также выявлялись отлигиия в поведении упругих и гипоупругих моделей материалов в таких процессах. Предложен метод построения определяющих соотношений упругого материала, записанных с использованием логарифмического тензора деформаций Генки. Получены разложения тензора Генки и его производной по монотонному параметру в ряды по степеням тензора деформаций Коши без ограничений на величины допустимых деформаций. Построен численный алгоритм учета изменяющейся зоны контакта. Вычислительные процедуры, осуществляющие дискретизацию поставленной задачи методами конечных элементов и пошагового нагружения, были реализованы в виде пакета прикладных программ. Проведен анализ полученных решений и их сравнение с известными аналитическими зависимостями.

**Ключевые слова:** конечные упругие деформации, осесимметричные задачи, гипоупругость, логарифмическая мера деформаций, жесткий индентор

УДК: 539.3

**Введение.** Элементы конструкций, испытывающие в процессе эксплуатации конечные упругие деформации, играют значительную роль при рассмотрении таких вопросов, как, например, проблемы гидроизоляции и вибробезопасности. Для изготовления таких узлов используют резиноподобные материалы, характеризуемые с точки зрения механики деформируемого твердого тела как слабосжимаемые изотропные упругие среды. Точное описание отклика таких материалов при взаимодействии с жесткими матрицами является актуальной задачей, оказывающей влияние на качество изготовления узлов и их эксплуатацию. Для верификации численных моделей многие исследователи используют в качестве тестовых примеров задачи о вдавливании жестких штампов с вершинами различной формы в образец простой формы. Для данного класса контактных задач проведено множество теоретических исследований

---

© Астапов Ю. В., 2017  
Астапов Юрий Владимирович  
e-mail: ast3x3@gmail.com, аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (15-01-01875\_a).

Поступила 16.04.2017

[2, 3, 4], получены ряд аналитических прикладных решений для моделей упругих и гиперупругих тел, для случаев конечных вязкоупругих и упругопластических деформаций [13, 14, 17, 19]. Обширная экспериментальная база, накопленная в последние десятилетия, объясняется относительной простотой постановки эксперимента, который в различных вариациях может быть использован как для определения твердости материалов, так и для определения упругих констант материала. Оправданным таким подходом становится, когда представленный объем образца недостаточен для проведения экспериментов другого типа, как, например, опыта на одноосное растяжение. Достоверность предположения о характере контактного взаимодействия может быть обоснована путем измерения макрохарактеристик деформированного состояния для относительно простой задачи [16] и сравнения полученных результатов.

В рамках данной работы предложен алгоритм учета смешанных граничных условий контактного типа с изменяющейся поверхностью взаимодействия. Результаты работы данного алгоритма сравнивались с известными решениями для задачи о внедрении жесткого штампа в основание деформируемого цилиндра.

Открытым является вопрос выбора варианта определяющих соотношений, адекватно описывающих упругое поведение образцов в подобных процессах. Общепринятым подходом для описания конечных деформаций является использование постановок, записанных в терминах скоростей деформаций. В этом случае необходимо специальным образом определить абсолютную производную по времени от тензорной меры так, чтобы исключить изменение тензора напряжений при совершении телом жесткого движения. В работе [20] приведен анализ известных объективных (коротационных) производных тензоров и определяющих эти производные спин-тензоров. В работе [1] обращается внимание на возможность выбора такой производной тензора из несчетного множества. Другим подходом для описания кинематики конечных деформаций упругих изотропных тел является использование логарифмической меры деформаций Генки [6, 7], использование которой может быть особенно удобно при описании материалов с существенно различными откликами на изменение объема и формы, так как первый инвариант тензора Генки связан только с изменением элементарного объема, а его девиатор – с изменением формы. В данной статье приведены результаты расчетов для гипоупругих определяющих соотношений с использованием Яуманновской и обобщенной Яуманновской производных, а также для упругой модели с логарифмической мерой Генки в качестве меры деформаций. На примере процесса жесткого внедрения исследуется влияние выбора определяющих соотношений на результаты решения.

Необходимо также отметить, что при рассмотрении моделей эластомеров многие исследователи [15, 19] переходят к рассмотрению несжимаемых материалов, что в общем случае увеличивает количество разрешающих уравнений системы для сеточных методов и требует специальных методов решения систем уравнений с малыми числами обусловленности. В данной работе мы рассматриваем слабосжимаемый изотропный материал с коэффициентом Пуассона, приближающимся к 0.5. Сходимость решения достигается измельчением сетки вблизи области с предполагаемой большой интенсивностью деформаций.

**Постановка задачи и варианты определяющих соотношений.** Для моделирования квазистатического отклика материала на внешнее силовое воздействие возможно использовать условие равновесного протекания процесса деформирования.

Требование равенства нулю не только главного вектора приложенных к телу нагрузок, но и скорости его изменения после применения вариационного принципа Журдена приводит системе уравнений следующего вида [7]:

$$\begin{cases} \int_V (\nabla \cdot \mathbf{S} + \rho \mathbf{F}) \cdot \delta \mathbf{v} dV = 0, \\ \int_V \frac{d}{dt} (\nabla \cdot \mathbf{S} + \rho \mathbf{F}) \cdot \delta \mathbf{v} + \dot{\theta} (\nabla \cdot \mathbf{S} + \rho \mathbf{F}) \cdot \delta \mathbf{v} dV = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\mathbf{S}$  – тензор истинных напряжений Коши;  $\mathbf{P}^{(n)}$  и  $\mathbf{F}$  – внешние поля соответственно поверхностных и массовых сил;  $\rho$  – плотность;  $\mathbf{v}$  – поле скоростей точек среды,  $V$  – объем, занимаемый телом.

После преобразований [7] и исключения из рассмотрения массовых сил получим условие равновесного протекания процесса деформирования (1) в вариационной форме:

$$\int_V (\dot{\mathbf{S}} + \mathbf{S}\dot{\theta} - \mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{S}) \cdot \delta(\mathbf{v}\nabla) dV = \int_{\Sigma} (\dot{\mathbf{P}}^{(n)} + \mathbf{P}^{(n)} (\dot{\theta} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{n})) \cdot \delta \mathbf{v} d\Sigma, \quad (2)$$

которое должно быть дополнено соотношениями, связывающими скорость изменения напряжений со скоростью деформаций, а также начальными и граничными условиями.

Считаем, что в начальный момент деформирования напряжения в теле отсутствуют. Граничные условия статического типа предусматривают задание в каждой точке поверхности  $\Sigma_P$  закона изменения внешних нагрузок как функции времени и эйлеровых координат

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Sigma_P \quad \forall t > t_0. \quad (3)$$

Граничные условия кинематического типа в каждой точке поверхности  $\Sigma_U$  определяют закон изменения перемещений материальных точек

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Sigma_u \quad \forall t > t_0. \quad (4)$$

При записи определяющих соотношений конечного упругого поведения эластомеров обычно используют пары энергетически сопряженных тензоров напряжений и деформаций, входящих в выражение для удельной мощности напряжений [6, 7, 10]. Если в качестве меры напряжений использовать тензор истинных напряжений Коши  $\mathbf{S}$ , удельную мощность напряжений можно записать в виде  $N^{(i)} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{S} \cdot \mathbf{W}$ , где  $\rho$  – плотность материала,  $\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla)$  – тензор деформации скорости. В общем случае тензор  $\mathbf{W}$  не является абсолютной производной по времени ни одной из известных мер конечных деформаций [6, 7].

В работах [9, 11, 12, 18] через тензоры  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{W}$  строятся определяющие соотношения гипоупругости, линейно связывающие скорости напряжений со скоростями деформаций:

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{N} \cdot \mathbf{W}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{N}$  – тензор упругих постоянных четвертого ранга,  $\mathbf{S}^*$  – производная тензорной меры напряжений по параметру процесса. Соотношения (5) должны удовлетворять принципу материальной объективности, то есть компоненты этой меры не должны

изменяться при жестких поворотах деформируемой среды [6, 7], для этого в них используют объективную (коротационную) производную тензора напряжений. Проблема состоит в выборе типа такой производной, что определяется выбором вращающегося ортогонального базиса, относительно которого вычисляется изменение тензора напряжений. Производная Яуманна [9] определяет производную тензора относительно вихревого базиса  $\mathbf{i}_k$ ,  $k = 1..3$ , вращающегося со скоростью  $\omega = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} - \mathbf{v}\nabla)$ :

$$\mathbf{S}^\nabla = \dot{\mathbf{S}} + \omega \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \omega. \quad (6)$$

Одним из альтернативных подходов является использование обобщенной производной Яуманна [9], позволяющей вычислить скорость изменения тензора относительно полярного базиса  $\mathbf{n}_k$ ,  $k = 1..3$ , вращающегося со скоростью  $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{R}}$  ( $\mathbf{R}$  – ортогональный тензор, входящий в полярное разложение аффинора деформаций  $\Phi = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^{-1}$ ):

$$\mathbf{S}^\Delta = \dot{\mathbf{S}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (7)$$

В работе рассматриваются два варианта определяющих соотношений гипоупругости, когда  $\mathbf{S}^* = \mathbf{S}^\nabla$  или  $\mathbf{S}^* = \mathbf{S}^\Delta$ . Для изотропных материалов соотношение (5) при  $\mathbf{S}^* = \mathbf{S}^\nabla$  принимает вид:

$$\mathbf{S}^\nabla = K\dot{\theta}\mathbf{E} + 2G\left(\mathbf{W} - \frac{1}{3}\dot{\theta}\mathbf{E}\right), \quad (8)$$

а при  $\mathbf{S}^* = \mathbf{S}^\Delta$ :

$$\mathbf{S}^\Delta = K\dot{\theta}\mathbf{E} + 2G\left(\mathbf{W} - \frac{1}{3}\dot{\theta}\mathbf{E}\right). \quad (9)$$

Инвариант  $\dot{\theta} = I_1(\mathbf{W})$  – скорость изменения элементарного объема. Для слабосжимаемых материалов выполняется условие  $K \gg G$ , где  $K$  и  $G$  – объемный и сдвиговой модули упругости.

В работах [5, 6, 8] показано, что в изотропном материале энергетически сопряженными являются обобщенный «поворнутый» тензор напряжений  $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}} = \frac{dV}{dV_0}\mathbf{R} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}^{-1}$  и тензор логарифмических деформаций Генки  $\boldsymbol{\Gamma} = \ln \mathbf{U}$ , где  $\mathbf{U}$  – левая мера искажений, входящая в полярное разложение аффинора деформаций.  $N^{(i)} = -\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\Gamma}}$ . Тогда для изотропных упругих материалов простейший вариант тензорно-линейных определяющих соотношений может быть записан в виде:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}} = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \quad (10)$$

или с учетом выражения для компонент тензора  $\mathbf{N}$  через константы  $K$  и  $G$  в виде:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{R}} = KI_1(\boldsymbol{\Gamma})\mathbf{E} + 2G\left(\boldsymbol{\Gamma} - \frac{1}{3}I_1(\boldsymbol{\Gamma})\mathbf{E}\right), \quad (11)$$

где  $I_1(\boldsymbol{\Gamma})$  – первый инвариант тензора Генки, связанный с изменением объема соотношением  $I_1(\boldsymbol{\Gamma}) = \ln \frac{dV}{dV_0}$ .

С целью использования соотношений (11) в вариационных соотношениях (2) требуется продифференцировать соотношения (11) по времени в предположении, что константы материала не изменяются. Из (11) следует вариант этих соотношений в скоростях:

$$\dot{\Sigma}_{\mathbf{R}} = K\dot{\theta}\mathbf{E} + 2G \left( \dot{\Gamma} - \frac{1}{3}\dot{\theta}\mathbf{E} \right). \quad (12)$$

После подстановки этих выражений в определяющие соотношения (8), (9) и (12), придем к трем вариантам разрешающих уравнений:

$$\begin{aligned} \int_V \left( K\dot{\theta}\mathbf{E} + 2G \left( \mathbf{W} - \frac{1}{3}\dot{\theta}\mathbf{E} \right) - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{S}\dot{\theta} - \mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{S} \right) \cdot \delta(\mathbf{v}\nabla) dV = \\ = \int_{\Sigma} \left( \dot{\mathbf{P}}^{(n)} + \mathbf{P}^{(n)} \left( \dot{\theta} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \right) \right) \cdot \delta\mathbf{v} d\Sigma, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \int_V \left( K\dot{\theta}\mathbf{E} + 2G \left( \mathbf{W} - \frac{1}{3}\dot{\theta}\mathbf{E} \right) - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{S}\dot{\theta} - \mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{S} \right) \cdot \delta(\mathbf{v}\nabla) dV = \\ = \int_{\Sigma} \left( \dot{\mathbf{P}}^{(n)} + \mathbf{P}^{(n)} \left( \dot{\theta} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \right) \right) \cdot \delta\mathbf{v} d\Sigma, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \int_V \left( \frac{dV_0}{dV} \mathbf{R}^{-1} \cdot \left( K\dot{\theta}\mathbf{E} + 2G \left( \dot{\Gamma} - \frac{1}{3}\dot{\theta}\mathbf{E} \right) \right) \cdot \mathbf{R} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{S} \right) \cdot \delta(\mathbf{v}\nabla) dV = \\ = \int_{\Sigma} \left( \dot{\mathbf{P}}^{(n)} + \mathbf{P}^{(n)} \left( \dot{\theta} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \right) \right) \cdot \delta\mathbf{v} d\Sigma, \end{aligned} \quad (15)$$

где соотношения (13) соответствуют модели гипоупругого материала с определяющими соотношениями (8), соотношения (14) – модели гипоупругого материала с определяющими соотношениями (9), соотношения (15) соответствуют модели упругого материала (13).

**Разложение логарифмической меры деформаций в ряд по степеням тензора деформаций Коши.** Вычисление компонент тензора Генки в общем виде требует перехода к главным осям меры деформаций  $\mathbf{U}$ . Однако даже для относительно простых процессов имеет место неоднозначность выбора направлений главных осей тензора, что может приводить к неопределенностям и даже ошибкам, преодоление которых требует наложения дополнительных условий. Связь меры Генки с другими мерами деформаций имеет следующий вид:  $\boldsymbol{\Gamma} = \ln \mathbf{U} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{G} = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{E} + 2\boldsymbol{\varepsilon})$ , где  $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{g})$  – тензор деформаций Коши,  $\mathbf{G} = \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{\Phi}^T$  – мера деформаций Коши, а  $\mathbf{g}$  – метрический тензор отсчетной конфигурации. Используя ряд Маклорена для логарифмической функции, можно получить представление функции  $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{E} + 2\boldsymbol{\varepsilon})$  в виде тензорного ряда, сходящегося при  $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| < \frac{1}{2}$ . Данное условие, однако, существенно ограничивает класс рассматриваемых задач. Известен прием, позволяющий расширить область сходимости ряда для логарифмической функции. В частности  $\forall z > 0$ ,  $z > 0$  имеет место сходящийся ряд:

$$\ln(a + z) = \ln a + 2 \left( \frac{z}{2a + z} + \frac{1}{3} \left( \frac{z}{2a + z} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{z}{2a + z} \right)^5 + \dots \right). \quad (16)$$

Разложение тензора Генки в ряд (16) получается формальной подстановкой:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{E} + 2\boldsymbol{\varepsilon}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \mathbf{H}^{2k-1}, \quad (17)$$

где  $\mathbf{H} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon})^{-1} = (\mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon})^{-1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ . Определим производную  $\mathbf{H}$  по  $t$ :  $\dot{\mathbf{H}} = (\mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon})^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot (\mathbf{E} - (\mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon})^{-1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})$ . Используя формулу дифференцирования произведения тензорных функций  $\frac{d(\mathbf{H}^n)}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{H}^{i-1} \cdot \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{H}^{n-i}$ , получим, что производная логарифмической меры имеет разложение:

$$\dot{\Gamma} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \left( \sum_{m=1}^{2k-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{m-1} \cdot (\mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon})^{-m} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot (\mathbf{E} - (\mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon})^{-1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot ((\mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon})^{-1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})^{2k-m-1} \right) \quad (18)$$

Ряд (18) сходится к значениям производной от логарифмической меры деформаций по параметру без ограничений на величины деформаций.

**Процедура численного решения.** Для дискретизации краевых задач (3),(4),(13)-(15) используется метод конечных элементов, позволяющий, разбив расчетную область на конечное число подобластей с линейной аппроксимацией поля скоростей, перейти от вариационной проблемы (3),(4),(13)-(15) к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых скоростей:  $([\mathbf{K}_1] + [\mathbf{K}_2]) \mathbf{V} = \dot{\mathbf{F}}$ . Часть глобальной матрицы жесткости  $[\mathbf{K}_1]$  соответствует определяющим соотношениям (8), (9) или (12), а  $[\mathbf{K}_2]$  – геометрически нелинейным слагаемым в (13)-(15). Следует отметить, что соотношения (6) и (7) не эквивалентны по ресурсам, требуемым для построения  $[\mathbf{K}_2]$ . Развитие процесса во времени аппроксимируется с помощью метода пошагового нагружения, разбивающего параметр процесса на конечные отрезки.

В данной работе рассматривается внедрение в цилиндрическое тело, покоящееся на жесткой плоскости, штампа сферической формы. Расчетная схема представлена на рисунке 1.

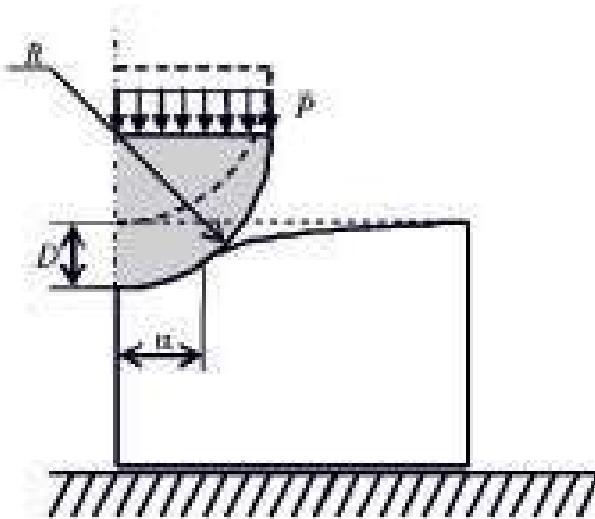


Рис. 1. Расчетная схема задачи

В начальный момент времени напряжения отсутствуют. Затем образец подвергается осесимметричному воздействию со стороны абсолютно жесткого штампа, форма которого определяется кусочно-гладкой кривой  $f(\xi)$ , где  $\xi$  – монотонный параметр.

Учет изменения зоны контакта отслеживается на каждом шаге нагружения вместе с выполнением неравенства  $f(\mathbf{x}) > 0$  – условия взаимного непроникновения упругого образца и жесткого штампа, где  $\mathbf{x} \in V$ . Вводится полоса скольжения достаточно малой ширины, попав в которую, точка границы считается скользящей по образующей штампа при условии неотрицательности действующей со стороны штампа реакции связи. Перемещения контактных узловых точек находятся путем интегрирования скоростей вдоль образующей в предположении достаточной малости изменения кривизны функции  $f(\xi)$  за один шаг.

Статические граничные условия сводятся в данной задаче к условию  $\sigma_\tau = 0$  – трение отсутствует. Вопрос о сходимости численного решения исследовался с использованием метода сгущающихся сеток.

**Результаты численного моделирования.** Схема нагружения соответствует взаимодействию тела со штампом, вершиной которого является шар. Отношение радиуса шара  $R$  к толщине тела  $h - R/h = 0.15$ . Производятся вычисления для слабосжимаемого изотропного образца ( $E = 7.5 \cdot 10^6$ ,  $\nu = 0.485$ ). Расчеты производились до достижения глубины внедрения, соответствующей уменьшению толщины образца под штампом на 3%.

На рисунке 2 представлены зависимости величины действующей силы  $P$ , приложенной к штампу, от глубины внедрения  $D$  для различных вариантов определяющих соотношений.

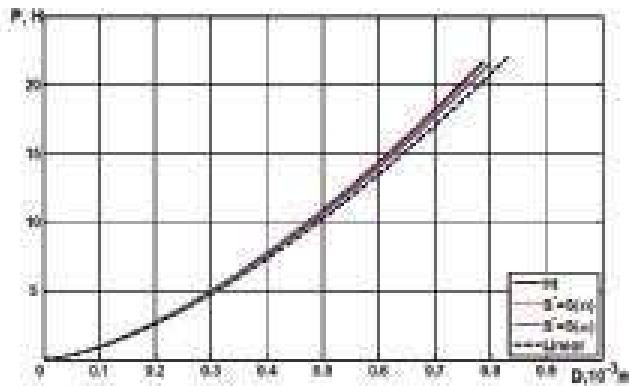


Рис. 2. Зависимость действующей нагрузки от величины осадки

На рисунке 2 черная пунктирная кривая соответствует аналитическому решению для линейно-упругого материала, когда  $\alpha/R \ll 1$  [15]. Синей кривой соответствует решение с использованием определяющих соотношений (8), а красной пунктирной кривой – (9). Черная сплошная кривая соответствует модели упругого материала (12). Из графиков видно, что зависимости, полученные в статье с использованием геометрически-нелинейных постановок (13)-(15) мало отличаются, но вносят, однако, существенные поправки к линейному решению для больших деформаций. Для процесса простого сдвига различия при использовании производных (6) и (7) значительны уже при деформациях порядка 10%. В рассматриваемых процессах жесткого интенсирования при величинах сдвиговых деформаций, превышающих 20%, наблюдается различие порядка 2.9%. Решение с использованием упругих определяющих соотношений (12) проходит близко к гипупрочному решению (9) с использованием обобщенной Яуманновской производной.

На рисунке 3а приведены распределения величин интенсивности деформаций, вычисленные для тензора конечных деформаций Коши.

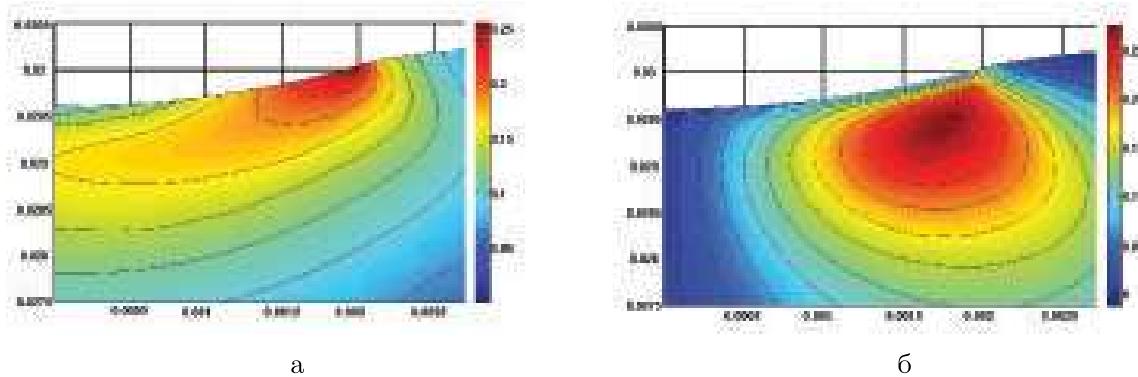


Рис. 3. Распределения интенсивности деформаций и сдвиговых напряжений

Максимальные интенсивности деформаций достигаются на границе зоны контакта  $\alpha$ , где со штампом начинают взаимодействовать новые точки. Компоненты касательных напряжений непропорциональны сдвиговым деформациям в данных процессах. На рисунке 3б показано распределение касательных напряжений  $S_{13}$ , отнесенное к модулю сдвига  $\mu$ , в зоне, близкой к области контакта.

Как видно из графиков, очаг сдвиговых напряжений находится внутри области, а не на ее границе, что соответствует ожидаемым результатам.

**Выводы.** Несмотря на конечные величины сдвиговых деформаций в зоне, близкой к границе контакта, тип используемой коротационной производной в малой степени влияет на интегральные характеристики процесса. Используемые в настоящей работе двухконстантные упругие (12) и гипоупругие определяющие соотношения (8) и (9) качественно верно описывают конечные деформации материала при индентировании. Для рассматриваемого процесса различие между решениями с определяющими соотношениями (9) и с соотношениями (12) не превышает 1%. В дальнейшем предлагается использовать определяющие соотношения, учитывающие не только геометрическую, но и физическую нелинейность поведения эластомеров.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бровко Г. Л. Материальные и пространственные представления определяющих соотношений деформируемых сред // Прикладная математика и механика. 1990. Т. 54. № 5. С. 814–824.
- [2] Бураго Н. Г., Кукуджанов В. Н. Обзор контактных алгоритмов // Известия РАН. Механика твердого тела. 2005. Т. 1. С. 45–87.
- [3] Ворович И. И., Александров В. М. Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001. 672 с.
- [4] Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
- [5] Коробейников С. Н. Строгое сопряженные тензоры напряжений и деформаций // Прикладная механика и техническая физика. 2000. Т. 41. № 3. С. 149–154.
- [6] Маркин А. А., Христич Д. В. Нелинейная теория упругости: Учеб. пособие. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. 92 с.

- [7] Маркин А. А., Соколова М. Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 320 с.
- [8] Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
- [9] Труслелл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
- [10] Черных К. Ф. Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 192 с.
- [11] Adam L., Ponthot J. P. Thermomechanical modeling of metals at finite strains: First and mixed order finite elements // International Journal of Solids and Structures. 2005. V. 42. P. 5615–5655.
- [12] Altmeyer G., Panicaud B., Rouhaud E., Wang M., Roos A, Kerner R. Viscoelasticity behavior for finite deformations, using a consistent hypoelastic model based on Rivlin materials // Continuum Mech. Thermodyn. 2016. V. 28. P. 1741–1758.
- [13] Bartier O., Hernot X., Mauvoisin G. Theoretical and experimental analysis of contact radius for spherical indentation // Mechanics and Materials. 2010. V. 42. P. 640–656.
- [14] Braun B., Deppler J., Fidlin A., Hochbruck M. Convergence of viscoelastic constraints to nonholonomic idealization // European Journal of Mechanics A/Solids. 2016. V. 58. P. 140–147.
- [15] Giannakopoulos A. E., Triantafyllou A. Spherical indentation of incompressible rubber-like materials // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2007. V. 55. P. 1196–1211.
- [16] Jang Jae-Won, Hyung-Kyu Kim, Soon-Bok Lee Numerical and experimental investigation of a complete contact problem by comparing with an asymptotic analysis // International Journal of Solids and Structures. 2016. V. 82. P. 39–46.
- [17] Lin D. C., Shreiber D. I., Dimitriadis E. K., Horkay F. Spherical indentation of soft matter beyond the Hertzian regime: numerical and experimental validation of hyperelastic models // Biomech Model Mechanobiol. 2009. V. 8. P. 345–358.
- [18] Ramezani S., Naghdabadi R. Micropolar hypo-elasticity // Arch Appl Mech. V. 80 P. 1449–1461.
- [19] Zhang M. G., Cao Y. P., Li G. Y., Feng X. Q. Spherical indentation method for determining the constitutive parameters of hyperelastic soft materials // Biomech Model Mechanobiol. 2014. V. 13. P. 1–11.
- [20] Xiao H., Bruhns O. T., Meyers A. Objective stress rates, path-dependence properties and non-integrability problems // Acta mechanica. 2005. V.176, no 3-4. P. 135–151.

*Yu. V. Astapov*

**THE RIGID SPHERICAL INDENTATION INTO THE BOTTOM OF ELASTIC  
AND HYPOELASTIC CIRCULAR CYLINDERS UNDER FINITE  
DEFORMATIONS**

*Tula State University, Tula*

**Abstract.** The results of solving of the problem about rigid spherical stamp indentation into the cylindrical body are presented in current investigation. The constitutive relations of three types were used within this paper. The influence of the corotational derivative type on stress-strain state characteristics was examined as well as the differences between the behavior of the elastic and the hypoelastic models in such processes were identifying. The formation of the constitutive relation for an elastic material using Hencky's logarithmic tensor of deformation is proposed. The decomposition of the Hencky's tensor and its monotone parameter derivative into the series in terms of powers of the Cauchy strain tensor is obtained without strain rate limitations. The numerical algorithm to take into account changes in a contact zone is built up. The computational procedures to discretize considered problem using finite element method and step-by-step loading method were realized into the software package. The obtained solutions were compared with commonly known analytical relations.

**Keywords:** finite elastic deformations, axisymmetrical problems, hypoelasticity, logarithmic strain measure, rigid indentor

**REFERENCES**

- [1] Brovko G. L. Material and dimensional representations of the constitutive relations for deformable media // Applied mathematics and mechanics. 1990. V. 54. No 5. P. 814–824.
- [2] Bourago N. G., Kukudzhanov V. N. A review of contact algorithms // Russian Academy of Sciences tidings. Mechanics of Solids. 2005. V. 1. P. 45–87.
- [3] Vorovich I. I., Aleksandrov V. M. Mechanics of contact interactions. Moscow.: FizMatLit, 2001. 672 p.
- [4] Goryacheva I. G. Mechanics of friction interaction. Moscow.: Nauka, 2001. 478 p.
- [5] Korobeynikov S. N. Strictly conjugated tensors of stresses and strains // Applied mechanics and technical physics. 2000. V. 41. No 3. P. 149–154.
- [6] Markin A. A., Khristich D. V. Nonlinear theory of elasticity: tutorial. Tula: TSU publ., 2007. 92 p.
- [7] Markin A. A. Sokolova M. Yu. Thermomechanics of elastoplastic deformation. Moscow.: FizMatLit, 2013. 320 p.
- [8] Sedov L. I. Introduction into mechanics of continuous media. Moscow.: FizMatGiz, 1962. 284 p.
- [9] Truesdell C. A First Course in Rational Continuum Mechanics, Academic Press, 1977. 304 p.
- [10] Chernykh K. F. Introduction to anisotropic elasticity. Moscow.: Nauka, 1988. 192 p.

---

*Astapov Yuri Vladimirovich*

e-mail: ast3x3@gmail.com, postgraduate student, Tula State University, Tula.

- [11] Adam L., Ponthot J. P. Thermomechanical modeling of metals at finite strains: First and mixed order finite elements // International Journal of Solids and Structures. 2005. V. 42. P. 5615–5655.
- [12] Altmeyer G., Panicaud B., Rouhaud E., Wang M., Roos A., Kerner R. Viscoelasticity behavior for finite deformations, using a consistent hypoelastic model based on Rivlin materials // Continuum Mech. Thermodyn. 2016. V. 28. P. 1741–1758.
- [13] Bartier O., Hernot X., Mauvoisin G. Theoretical and experimental analysis of contact radius for spherical indentation // Mechanics and Materials. 2010. V. 42. P. 640–656.
- [14] Braun B., Deppler J., Fidlin A., Hochbruck M. Convergence of viscoelastic constraints to nonholonomic idealization // European Journal of Mechanics A/Solids. 2016. V. 58. P. 140–147.
- [15] Giannakopoulos A. E., Triantafyllou A. Spherical indentation of incompressible rubber-like materials // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2007. V. 55. P. 1196–1211.
- [16] Jang Jae-Won, Hyung-Kyu Kim, Soon-Bok Lee Numerical and experimental investigation of a complete contact problem by comparing with an asymptotic analysis // International Journal of Solids and Structures. 2016. V. 82. P. 39–46.
- [17] Lin D. C., Shreiber D. I., Dimitriadis E. K., Horkay F. Spherical indentation of soft matter beyond the Hertzian regime: numerical and experimental validation of hyperelastic models // Biomech Model Mechanobiol. 2009. V. 8. P. 345–358.
- [18] Ramezani S., Naghdabadi R. Micropolar hypo-elasticity // Arch Appl Mech. V. 80 P. 1449–1461.
- [19] Zhang M. G., Cao Y. P., Li G. Y., Feng X. Q. Spherical indentation method for determining the constitutive parameters of hyperelastic soft materials // Biomech Model Mechanobiol. 2014. V. 13. P. 1–11.
- [20] Xiao H., Bruhns O. T., Meyers A. Objective stress rates, path-dependence properties and non-integrability problems // Acta mechanica. 2005. V. 176, no 3–4. P. 135–151.