Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 3 (21). С. 105–111

Е. А. Деревянных, Б. Г. Миронов

К ВОПРОСУ О КРУЧЕНИИ НЕОДНОРОДНЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Использование новых методов пластической деформации является одним из наиболее перспективных направлений в создании мелкокристаллических материалов с уникальными свойствами. В качестве способа деформации часто выбирают кручение.

В работе используются апробированные модели механического поведения тел и математические методы исследования, результаты не противоречат исследованиям других авторов. Кручение изотропных цилиндрических и призматических стержней в случае, когда боковая поверхность стержней свободна от касательных нагрузок, а также в случае, когда боковая поверхность стержня находится под действием внешнего переменного давления, рассмотрено в [7], [9]. Кручение анизотропных цилиндрических и призматических стержней исследовано в [1], [7]. Кручение неоднородных призматических стержней в случае трансляционной анизотропии изучено в [2], [3], [4], [5], [6].

Исследовано предельное состояние неоднородных призматических стержней. Предполагается, что составляющие стержня изготовлены из изотропного идеальнопластического материала и обладают независимыми предельными условиями.

Ключевые слова: кручение, напряжение, предел текучести, предельное состояние.

УДК: 539.374

Рассмотрим составной прямоугольный призматический стержень (рис. 1), ориентированный в декартовой системе координат x, y, z. Образующие стержня параллельны оси z. Стержень закручивается вокруг оси z равными и противоположными парами сил с моментом M.

Пусть напряженное состояние, возникающее в стержне, характеризуется следующими значениями компонент напряжения:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0,\ \tau_{xz} = \tau_{xz}(x,\ y),\ \tau_{yz} = \tau_{yz}(x,\ y). \qquad (1)$$

Условие пластичности в каждой области (рис. 2) имеет вид

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k_{i0}^2, \quad k_{i0} = \mathrm{const}, \quad i = 1,\ 2. \qquad (2)$$

Уравнение равновесия в каждой области также запишется в виде

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \qquad (3)$$

Поступила 02.07.2014

Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 13-01-97029, 14-01-31323 мол_а) и в рамках выполнения государственного задания (код проекта 1179)

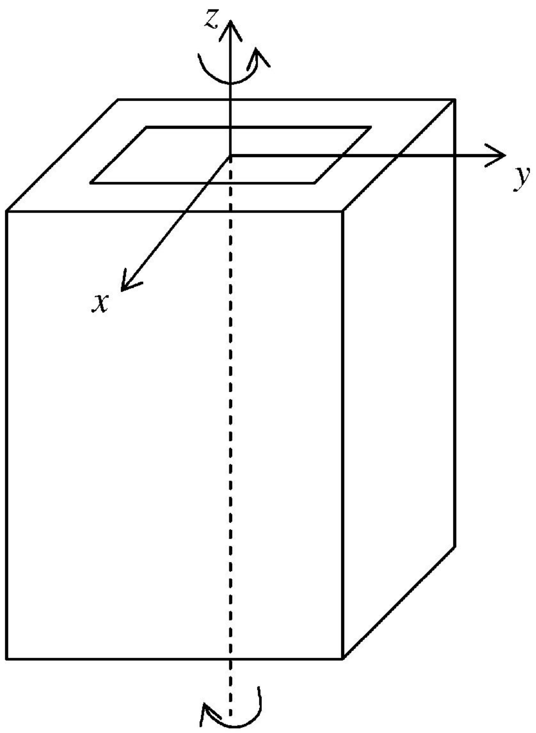

Рис. 1

На рис. 3 изображено поперечное сечение стержня плоскостью $z = const$.

В сечениях стержня плоскостью $z = const$ вектор касательного напряжения равен

$$\bar{\tau} = \tau_{xz}\bar{i} + \tau_{yz}\bar{j}, \tag{4}$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$ — единичные орты осей x и y.

Боковая поверхность стержня предполагается свободной от нагрузок. Тогда вектор касательного напряжения $\bar{\tau}$ направлен по касательной к контуру стержня.

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} \text{вдоль} \quad ABCD. \tag{5}$$

В этом случае задача становится статически определимой.

Положим в каждой области

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= k_{i0}\cos\theta, \\ \tau_{yz} &= k_{i0}\sin\theta, \end{aligned} \tag{6}$$

где $i = 1,\ 2$.

Подставляя выражение (6) в уравнение равновесия (3), получим

$$-\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0. \tag{7}$$

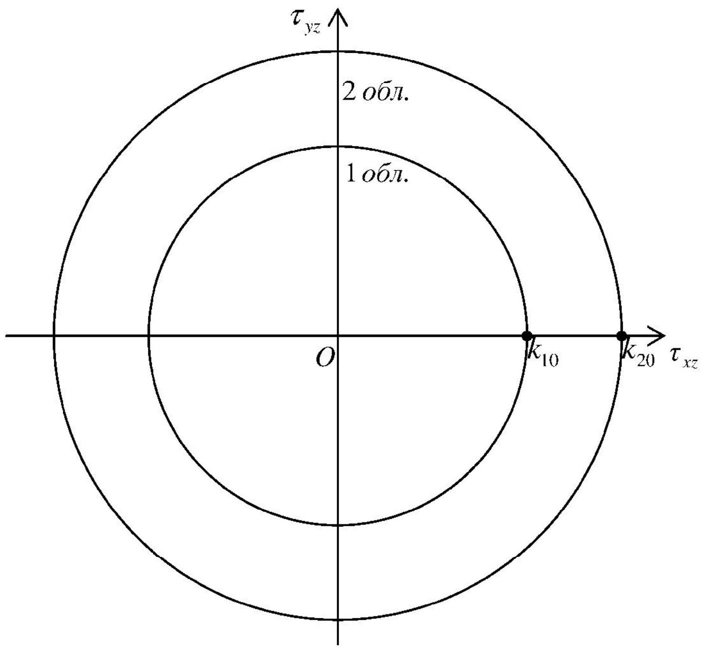

Рис. 2

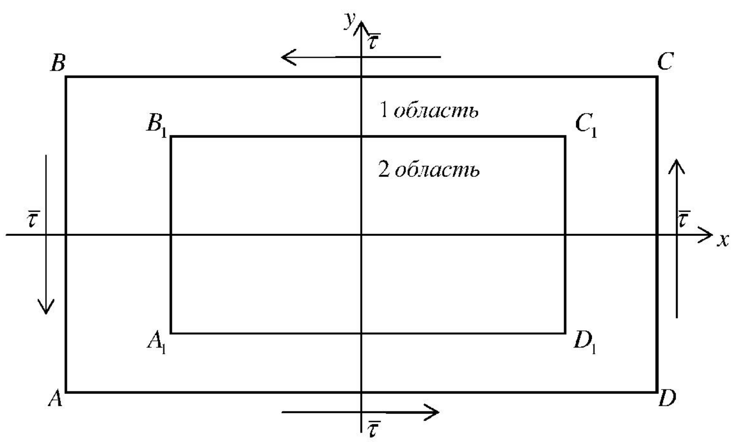

Рис. 3

Соответствующие уравнения для определения характеристик соотношения (7) имеют вид

$$\frac{dx}{-\sin\theta} = \frac{dy}{\cos\theta} = \frac{d\theta}{0}. \tag{8}$$

Интегрируя уравнение (8), получим

$$y = x \cdot ctg\theta + \Phi_i(\theta), \quad \theta = const. \tag{9}$$

Таким образом, характеристики уравнения (7) в каждой области есть прямые линии, перпендикулярные вектору касательного напряжения $\bar{\tau}$, причем θ есть угол наклона вектора $\bar{\tau}$ к оси x, меняющийся от одной характеристики к другой.

На рис. 4а построены линии разрыва напряжений на поперечном сечении стержня плоскостью $z = const$ при $k_{20} > k_{10}$.

На линии разрыва напряжений нормальные к линии разрыва напряжений составляющие вектора касательного напряжения непрерывны, а касательные составляющие терпят разрыв.

Линии неоднородности A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, A_1D_1 являются линиями разрыва напряжений.

В области APA_1D_1YD действует вектор касательного напряжения $\bar{\tau}_{11}$, а в области $APQB$ – вектор касательного напряжения $\bar{\tau}_{14}$. Направляющий вектор линии разрыва AP первой области равен вектору $\bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_{11} - \bar{\tau}_{14}$. Линия разрыва AP пересекает линию разрыва A_1B_1 в точке P.

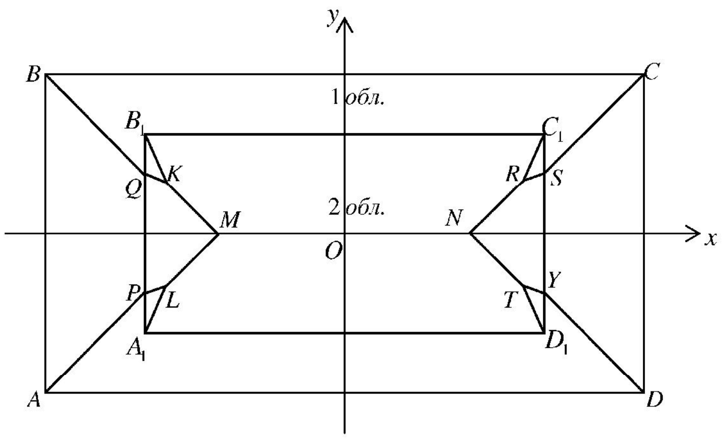

Рис. 4а

Аналогично строятся линии разрыва напряжений BQ, CS, DY в остальных углах.

В области A_1PL действует вектор касательного напряжения $\bar{\tau}'_{11}$, в области $PLMKQ$ – вектор $\bar{\tau}_{24}$, а в области A_1LMNTD_1 – вектор $\bar{\tau}_{21}$. Направляющий вектор линии разрыва PL второй области равен вектору $\bar{\tau}_2 = \bar{\tau}'_{11} - \bar{\tau}_{24}$. Направляющий вектор линии разрыва A_1L равен вектору $\bar{\tau}_3 = \bar{\tau}_{21} - \bar{\tau}'_{11}$. Линии разрыва PL и A_1L пересекаются в точке L. Направляющий вектор линии разрыва LM второй области равен вектору $\bar{\tau}_4 = \bar{\tau}_{21} - \bar{\tau}_{24}$. Аналогично строятся линии разрыва напряжений QK, B_1K, SR, C_1R, YT, D_1T, KM, RN и TN в остальных углах.

Линии разрыва KM и LM пересекаются в одной точке M, а линии разрыва TN и RN – в точке N.

Так как в области A_1LMNTD_1 действует вектор касательного напряжения $\bar{\tau}_{21}$, а в области B_1KMNRC_1 – вектор $\bar{\tau}_{23}$, то линия MN также является линией разрыва напряжений.

Линии разрыва MN, RN, TN пересекаются в одной точке N.

Таким образом, в каждой области найдены векторы касательных напряжений, характеристики соотношений, определяющих напряженно-деформированное состояние тела, и построены линии разрыва напряжений.

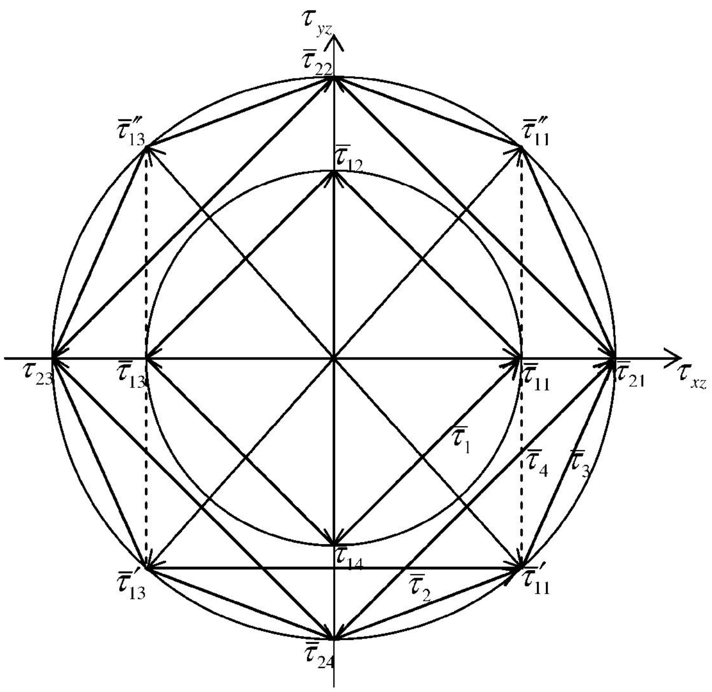

Рис. 4б

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Быковцев, Г. И.* Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.

[2] *Деревянных, Е. А.* Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней / Е. А. Деревянных, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2012. – № 4 (76). – С. 108–112.

[3] *Деревянных, Е. А.* О предельном состоянии анизотропных призматических стержней при кручении в случае трансляционной анизотропии / Е. А. Деревянных // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2012. – № 4 (14). – С. 174–184.

[4] *Деревянных, Е. А.* О предельном состоянии кусочно-неоднородных анизотропных призматических стержней полигонального сечения при кручении / Е. А. Деревянных // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2012. – № 1 (11). – С. 75–80.

[5] *Деревянных, Е. А.* Предельное состояние анизотропных призматических кусочно-неоднородных стержней при кручении / Е. А. Деревянных // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2012. – № 3 (13). – С. 72–80.

[6] *Деревянных, Е. А.* Предельное состояние анизотропных призматических стержней прямоугольного сечения при кручении / Е. А. Деревянных // Новый университет. Серия : Вопросы естественных наук. – 2012. – № 1 (11). – С. 15–18.

[7] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.

[8] *Митрофанова, Т. В.* О предельном состоянии анизотропных призматических стержней при кручении / Т. В. Митрофанова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – Ч. 3. – С. 601–609.

Деревянных Евгения Анатольевна,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и физики, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары

e-mail: jane-evgeniya@yandex.ru

Миронов Борис Гурьевич,

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: strangcheb@mail.ru

E. A. Derevyannih, B. G. Mironov

TO A QUESTION OF TORSION OF NON-UNIFORM PRISMATIC CORES

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. The limit condition of compound prismatic cores is investigated. It is supposed that core components from an isotropic idealnoplastichesky material and possess independent limit conditions.

Keywords: torsion, tension, fluidity limit, limiting condition.

REFERENCES

[1] *Bykovtsev, G. I.* Theory of plasticity / G. I. Bykovtsev, D. D. Ivlev. – Vladivostok : Dalnauka, 1998. – 528 p.

[2] *Derevyannih, E. A.* About the general ratios of the theory of torsion of anisotropic cores / E. A. Derevyannih, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2012. – № 4 (76). – P. 108–112.

[3] *Derevyannih, E. A.* About a limit condition of anisotropic prismatic cores at torsion in case of transmitting anisotropy / E. A. Derevyannih // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2012. – № 4 (14). – P. 174–184.

[4] *Derevyannih, E. A.* About a limit condition of piecewise and non-uniform anisotropic prismatic cores of polygonal section at torsion / E. A. Derevyannih // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2012. – № 1 (11). – P. 75–80.

[5] *Derevyannih, E. A.* Limit condition of anisotropic prismatic piecewise and non-uniform cores at torsion / E. A. Derevyannih // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2012. – № 3 (13). – P. 72–80.

[6] *Derevyannih, E. A.* Limit condition of anisotropic prismatic cores of rectangular section at torsion / E. A. Derevyannih // New university. Series: Questions of natural sciences. – 2012. – № 1 (11). – P. 15–18.

[7] *Ivlev, D. D.* Theory of ideal plasticity / D. D. Ivlev. – M. : Nauka, 1966. – 231 p.

[8] *Mitrofanova, T. V.* About a limit condition of anisotropic prismatic cores at torsion / T. V. Mitrofanova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2010. – № 2 (8). – Part 3. – P. 601–609.

Derevyannih, Evgeniya Anatolevna

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematics and Physics, Chuvash state agricultural Academy, Cheboksary

Mironov, Boris Guryevich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary