

С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова

О ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ АНИЗОТРОПНЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск

Аннотация. В статье рассмотрено предельное состояние анизотропных пластических тел. Теория предельного состояния имеет дело со статически определимым состоянием твердых тел. В этом случае система замкнута за счет предельных условий. Рассмотрена система уравнений, в которой содержатся три касательных компонента тензора напряжений, а диагональные компоненты равны между собой. В этом случае удастся подобрать такое поле скоростей, что система также является статически определимой. Показано, что эта система может быть рассмотрена и в терминах компонент тензора скоростей деформации. При этом количество уравнений не увеличивается, поскольку условия совместности выполняется тождественно. Для этой системы найдена группа точечных симметрий и законы сохранения, рассмотрены некоторые точные решения, которые могут быть использованы для описания пластического кручения вокруг трех ортогональных осей.

Ключевые слова: предельное состояние, пластические тела, анизотропные пластические тела.

УДК: 539.374

Введение. Некоторые задачи теории идеальной пластичности исследованы достаточно хорошо. Это так называемые статически определимые задачи. К ним относятся задачи о кручении призматических стержней и задачи о плоском деформированном состоянии. Они относятся к широкому классу задач – задачам о предельном состоянии деформируемых тел. Теория предельного состояния – один из фундаментальных разделов механики деформируемого твердого тела [1,2]. Теория предельного состояния имеет дело со статически определимым состоянием твердых тел. В этом случае система замкнута за счет предельных условий и такие свойства материи как вязкость, упругость и т.п. на предельное состояние влиять не могут. Другими словами при достижении предельного состояния характер связи между напряжениями и деформациями не оказывает влияния на предельное состояние. Некоторые такие системы

© Сенашов С. И., Савостьянова И. Л., 2017

Сенашов Сергей Иванович

e-mail: sen@sibsau.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск.
Савостьянова Ирина Леонидовна

e-mail: savostyanova@sibsau.ru, кандидат педагогических наук, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск.

Поступила 30.11.2017

рассмотрены в [1].

В предлагаемой работе приведена еще одна система уравнений пластичности, которая описывает предельное состояние. Эта система может быть использована для описания пластического течения вокруг трех ортогональных осей.

Постановка задачи. Пусть $x = x_1, y = x_2, z = x_3$ – ортогональная система координат, u, v, w – компоненты вектора скорости деформаций, e_{ij} – компоненты тензора скоростей деформации, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений. Компоненты тензора напряжений удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\partial_j \sigma_{ij} = 0. \quad (1)$$

По повторяющимся индексам предполагается суммирование. Система уравнений (1) – это три уравнения на шесть компонент тензора напряжений. В общем случае система (1) замыкается присоединением к ней трех уравнений, описывающих предельное состояние.

$$f_1(\sigma_{ij}) = 0, f_2(\sigma_{ij}) = 0, f_3(\sigma_{ij}) = 0. \quad (2)$$

Очевидно, что система (1)-(2) является статически определимой. Иногда систему уравнений (1) удастся сделать статически определимой с помощью двух соотношений вида

$$f_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, f_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0. \quad (3)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные компоненты тензора напряжений, как это было сделано Рейсом [1]. В ряде случаев систему уравнений (1) удастся замкнуть с помощью одного условия пластичности вида

$$f(\sigma_{ij}) = 0. \quad (4)$$

Установление даже одного условия пластичности вида (4) для данного материала это очень не простая задача. Она сильно усложняется для условий вида (2) и (3). В данной работе мы ограничимся одним условием пластичности и рассмотрим только те случаи, когда система уравнений (1) может быть замкнута уравнением вида (4). Считаем, что компоненты тензора напряжений и тензора скоростей деформации связаны ассоциированным законом течения

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = e_{ij}, \quad (5)$$

где λ – некоторая неотрицательная функция.

Система уравнений (1) замыкается условием пластичности Мизеса в анизотропном случае [3]

$$f = a_{33}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + a_{11}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + a_{22}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2(a_{12}\sigma_{12}^2 + a_{13}\sigma_{13}^2 + a_{23}\sigma_{23}^2) - 1 = 0, \quad (6)$$

здесь a_{ij} – параметры анизотропии.

Известно из [1], что в случае кручения призматического стержня вокруг оси oz поле скоростей деформации имеет вид

$$u = yz, v = -xz, w = w(x, y). \quad (7)$$

Обобщая соотношения (7), потребуем

$$u = u(y, z), v = v(x, z), w = w(x, y). \quad (8)$$

Построим систему уравнений, соответствующую полю скоростей деформации (8). В результате получаем следующую систему, которая и будет исследоваться в этой работе

$$\begin{aligned} \partial_y \tau^1 + \partial_z \tau^2 &= \partial_x p, \partial_x \tau^1 + \partial_z \tau^3 = \partial_y p, \partial_x \tau^2 + \partial_y \tau^3 = \partial_z p, \\ 2a_{12}(\tau^1)^2 + (\tau^2)^2 + 2a_{23}(\tau^3)^2 - 1 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Система уравнений (9) может быть использована, в частности, для описания кручения прямоугольного параллелепипеда находящегося в пластическом состоянии, вокруг трех осей. (см. рисунок)

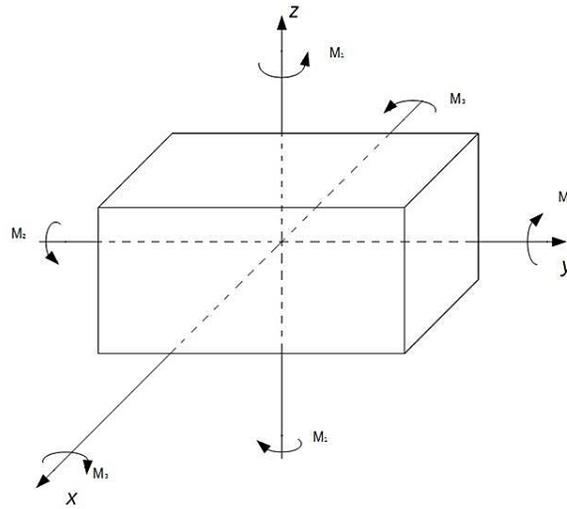


Рис. 1. Кручение прямоугольного параллелепипеда находящегося в пластическом состоянии, вокруг трех осей

Предположим, что параллелепипед закручивается вокруг осей ox , oy , oz равными и противоположными парами сил с моментами M_1 , M_2 , M_3 . При этом существует некоторые предельные моменты M_1^* , M_2^* , M_3^* , когда параллелепипед перейдет в пластическое состояние и начнет закручиваться. Из системы (9) видно, что такая задача является статически определяемой и может служить для определения значения предельных моментов по формулам

$$\begin{aligned} M_1^* &= \int \int (y\tau^2 - z\tau^1) dydz, \\ M_2^* &= \int \int (z\tau^1 - x\tau^3) dx dz, \\ M_3^* &= \int \int (x\tau^3 - y\tau^2) dy dz. \end{aligned} \quad (10)$$

Кроме моментов (10) на тело еще действует гидростатическое давление

$$P|_{\Sigma} = P_0,$$

где Σ – боковая поверхность параллелепипеда.

Свойства системы (9)

1. Характеристические поверхности системы (9). Система (9) содержит конечное соотношение, связывающее величины τ^1, τ^2, τ^3 . Дифференцируем его по x, y, z , в результате получаем систему

$$\begin{aligned} \partial_y \tau^1 + \partial_z \tau^2 &= \partial_x p, \partial_x \tau^1 + \partial_z \tau^3 = \partial_y p, \partial_x \tau^2 + \partial_y \tau^3 = \partial_z p, \\ a_{12} \tau^1 \partial_x \tau^1 + a_{13} \tau^2 \partial_x \tau^2 + a_{23} \tau^3 \partial_x \tau^3 &= 0, \\ a_{12} \tau^1 \partial_y \tau^1 + a_{13} \tau^2 \partial_y \tau^2 + a_{23} \tau^3 \partial_y \tau^3 &= 0, \\ a_{12} \tau^1 \partial_z \tau^1 + a_{13} \tau^2 \partial_z \tau^2 + a_{23} \tau^3 \partial_z \tau^3 &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение характеристической поверхности системы уравнений (11) представим в виде

$$\psi = \psi(x, y, z) = 0. \quad (12)$$

Характеристические поверхности системы (11) находятся из определителя

$$\begin{vmatrix} \partial_x \psi & \partial_y \psi & \partial_z \psi & 0 \\ \partial_y \psi & \partial_x \psi & 0 & \partial_z \psi \\ \partial_z \psi & 0 & \partial_x \psi & \partial_y \psi \\ 0 & a_{12} \tau^1 & a_{13} \tau^2 & a_{23} \tau^3 \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Замечание. Нетрудно видеть, что все три последних уравнения системы (11) дают одинаковые строки в определителе (13). Раскрываем определитель (13) по последней строке получаем

$$\begin{aligned} a_{12} \tau^1 \partial_z \psi ((\partial_z \psi)^2 - (\partial_x \psi)^2 - (\partial_y \psi)^2) + a_{13} \tau^2 \partial_y \psi ((\partial_y \psi)^2 - (\partial_x \psi)^2 - (\partial_z \psi)^2) + \\ + a_{23} \tau^3 \partial_x \psi ((\partial_x \psi)^2 - (\partial_y \psi)^2 - (\partial_z \psi)^2) = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение можно записать в виде

$$a_{12} \tau^1 n_3 (2n_3^2 - 1) + a_{13} \tau^2 n_2 (2n_2^2 - 1) + a_{23} \tau^3 n_1 (2n_1^2 - 1) = 0, \quad (14)$$

где $n_1 = \frac{\partial_x \psi}{\sqrt{(\nabla \psi)^2}}, n_2 = \frac{\partial_y \psi}{\sqrt{(\nabla \psi)^2}}, n_3 = \frac{\partial_z \psi}{\sqrt{(\nabla \psi)^2}}$.

Одно из решений уравнения (14), которое не зависит от величин τ^1, τ^2, τ^3 имеет вид

$$2n_i^2 = 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Следовательно, угол между нормалью к характеристической поверхности $\psi(x, y, z) = 0$ и вектором n равен $\pm\pi/4$. Совокупность элементов характеристической поверхности образуют конус раствора $\pm\pi/4$ вокруг направления, которое определяется третьим корнем уравнения (14) и зависит от напряженного состояния.

Точечные симметрии системы уравнений (9)

Точечные симметрии уже достаточно широко применяются в механике деформируемого твердого тела. С их помощью удастся не только построить т.н. инвариантные решения, но и строить новые решения используя технику «размножения» (см. [4-9]). В этой статье точечные симметрии будут использоваться только для построения инвариантных решений.

Поскольку система (9) содержит конечное соотношение, то необходимо работать с ее следствиями, которые имеют вид (11), где для удобства введены обозначения $\partial_x \tau^1 = q_1^1, \partial_x \tau^2 = q_1^2, \partial_x \tau^3 = q_1^3, \partial_x p = q_1^4$ и т.д.

$$\begin{aligned} q_2^1 + q_3^2 &= q_1^4, q_1^1 + q_3^3 = q_2^4, q_1^1 + q_2^3 = q_3^4, \\ a_{12} \tau^1 q_1^1 + a_{13} \tau^2 q_1^2 + a_{23} \tau^3 q_1^3 &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} a_{12}\tau^1 q_2^1 + a_{13}\tau^2 q_2^2 + a_{23}\tau^3 q_2^3 &= 0, \\ a_{12}\tau^1 q_3^1 + a_{13}\tau^2 q_3^2 + a_{23}\tau^3 q_3^3 &= 0, \\ a_{12}\tau^1(\tau^1)^2 + a_{13}(\tau^2)^2 + a_{23}(\tau^3)^2 - \frac{1}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Будем искать точечные симметрии, относительно которых инвариантно многообразие, определяемое системой уравнений (15). Согласно методике Ли–Овсянникова, будем искать допустимый оператор точечной симметрии в виде

$$X = \xi^j \frac{\partial}{\partial x_j} + \eta^i \frac{\partial}{\partial \tau^i}, j = 1, 2, 3; i = 1, 2, 3, 4 \quad (16)$$

Продолжаем оператор (16) на первые производные по формулам

$$\tilde{X} = X + \varsigma_k^i \frac{\partial}{\partial q_k^i}, \quad (17)$$

где $\varsigma_k^i = D_k(\eta^i) - q_\beta^i D_k(\zeta^\beta)$, $D_k = \frac{\partial}{\partial x_k} + q_k^i \frac{\partial}{\partial \tau^i}$. Действуем оператором (17) на систему уравнений (15) и переходим на многообразие, задаваемое этой системой. В результате получаем многочлены второй степени относительно «внутренних» - эндогенных переменных q_k^2, q_k^3 . «Внешние» - экзогенные переменные q_k^1, q_k^4 определяются из системы (15) через эндогенные переменные. В полученных многочленах второй степени приравниваем нулю коэффициенты при первых и вторых степенях эндогенных переменных. Это позволяет получить переопределенную систему линейных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов ξ^j, η^i . Решая эту систему, получаем следующий результат.

Теорема. Система уравнений (9) допускает алгебру Ли L_5 , порождаемую операторами

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, X_4 = x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, X_5 = \frac{\partial}{\partial p}.$$

Наличие операторов X_i $i = 1, 2, 3, 4$ означает, что система (9) допускает сдвиги и растяжение по осям x, y, z .

$$x'_i = x_i + a_i, i = 1, 2, 3, x'_i = x_i \exp a_4,$$

сдвиг для гидростатического давления $p' = p + a_5$.

Инвариантные решения системы уравнений (9)

Построим инвариантное решение относительно подалгебры, порождаемой оператором $X_3 = \frac{\partial}{\partial z}$.

Такое решение следует искать в виде

$$\tau^i = \tau^i(x, y), p = p(x, y). \quad (18)$$

Подставляем (18) в систему (9) получаем

$$\partial_y \tau^1 = \partial_x p, \partial_x \tau^1 = \partial_y p, \partial_x \tau^2 + \partial_y \tau^3 = 0, \quad (19)$$

$$a_{12}(\tau^1)^2 + a_{13}(\tau^2)^2 + a_{23}(\tau^3)^2 - \frac{1}{2} = 0.$$

Из (19) без труда получаем

$$\tau^1 = f(x + y) + g(x - y), p = f(x + y) - g(x - y). \quad (20)$$

Теперь функции τ^2, τ^3 определяются из системы уравнений

$$\partial_x \tau^2 + \partial_y \tau^3 = 0, a_{13}(\tau^2)^2 + a_{23}(\tau^3)^2 = k_s^2 - a_{12}(\tau^1)^2. \quad (21)$$

Система уравнений (21) описывает кручение анизотропного стержня в условиях, когда предел текучести зависит от переменных x, y . Такие задачи рассмотрены в [1,2] и цитируемой там литературе.

Законы сохранения системы уравнений (9) Использование законов сохранения для уравнений механики деформируемого твердого тела еще только начинается. Но уже имеются обнадеживающие результаты, которых удастся добиться именно с помощью законов сохранения. Это решение задачи Коши для плоского деформированного ряда и решение ряда упруго – пластических задач, описывающих кручение стержней и консолей [4, 5, 10-13]. В этом разделе построены законы сохранения для уравнений (9).

Будем искать законы сохранения системы уравнений (9) в виде

$$\partial_x A(\tau^1, \tau^2, \tau^3, p) + \partial_y B(\tau^1, \tau^2, \tau^3, p) + \partial_z C(\tau^1, \tau^2, \tau^3, p) = 0.$$

Это равенство выполняется в силу системы уравнений (9). Из этого следуют соотношения

$$\begin{aligned} X_{12}A - a_{13}\tau^2\partial_p B + a_{12}\tau^1\partial_p C &= 0, \\ X_{13}B - a_{23}\tau^3\partial_p A + a_{12}\tau^1\partial_p C &= 0, \\ X_{12}B - a_{13}\tau^2\partial_p A &= 0, \\ X_{12}C - a_{12}\tau^1\partial_p A &= 0, \\ X_{13}C + a_{12}\tau^1\partial_p B &= 0, \\ X_{13}A - a_{23}\tau^3\partial_p B &= 0, \end{aligned}$$

где $X_{12} = -a_{13}\tau^2\partial_{\tau^1} + a_{12}\tau^1\partial_{\tau^2}$, $X_{13} = -a_{23}\tau^3\partial_{\tau^1} + a_{12}\tau^1\partial_{\tau^3}$.

Покажем, что эти уравнения совместны. Пусть

$$\partial_p A = \partial_p B = \partial_p C = 0,$$

тогда одно из решений - бесконечная серия $A(S), B(S), C(S)$, где $S = a_{12}(\tau^1)^2 + a_{13}(\tau^2)^2 + a_{23}(\tau^3)^2$,

$A(S), B(S), C(S)$ - произвольные гладкие функции.

Замечание. Есть ли другие законы? Неизвестно, но, по мнению авторов, других законов сохранения нет.

Система уравнений (9) в терминах компонент тензора деформации

Понятно, что для системы (9) наиболее актуально напряженное состояние. Пусть оно известно. Тогда для нахождения трех компонент вектора скорости имеем три уравнения

$$a_{12}\lambda\tau^1 = e_{12}, a_{13}\lambda\tau^2 = e_{13}, a_{23}\lambda\tau^3 = e_{23}, \quad (22)$$

где

$$2e_{12} = \partial_y u + \partial_x v, 2e_{13} = \partial_z u + \partial_x w, 2e_{23} = \partial_z v + \partial_y w. \quad (23)$$

Покажем, что уравнения (22) можно решить в терминах компонент тензора скоростей деформации. Как известно, компоненты тензора скоростей деформации кроме уравнений (22) должны удовлетворять еще и уравнениям совместности. В силу соотношений (23) и (5) их остается только шесть

$$\partial_{xy}^2 e_{12} = 0, \partial_{xz}^2 e_{13} = 0, \partial_{yz}^2 e_{23} = 0, \quad (24)$$

$$\partial_x (\partial_x e_{23} - \partial_z e_{12} - \partial_y e_{13}) = 0,$$

$$\partial_y (\partial_y e_{13} - \partial_z e_{12} - \partial_x e_{23}) = 0,$$

$$\partial_z (\partial_z e_{12} - \partial_y e_{13} - \partial_x e_{23}) = 0.$$

Теорема. Уравнения совместности скоростей деформации выполняются тождественно.

В этом случае из (22) имеем

$$\begin{aligned} (\tau^1)^2 (e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2) &= k_s^2 e_{12}^2, \\ (\tau^2)^2 (e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2) &= k_s^2 e_{23}^2, \\ (\tau^3)^2 (e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2) &= k_s^2 e_{13}^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Системы уравнений (25) – это система линейных однородных уравнений относительно переменных $e_{12}^2, e_{13}^2, e_{23}^2$. Ее определитель имеет вид

$$\begin{vmatrix} (\tau^1)^2 - k_s^2 & (\tau^1)^2 & (\tau^1)^2 \\ (\tau^2)^2 & (\tau^2)^2 - k_s^2 & (\tau^2)^2 \\ (\tau^3)^2 & (\tau^3)^2 & (\tau^3)^2 - k_s^2 \end{vmatrix}$$

Этот определитель равен нулю, поскольку сумма всех строк равна нулю. Это означает, что система (25) имеет только два независимых уравнения для трех компонент тензора скоростей деформации. Например, величина e_{23}^2 может быть выбрана произвольно, поэтому для данного напряженного состояния, определяемого из системы (9), поле скоростей определяется с функциональным произволом. Систему (9), в случае, когда $p \equiv 0$ можно записать так:

$$\begin{aligned} \partial_y \Lambda e_{12} + \partial_z \Lambda e_{13} &= 0, \\ \partial_x \Lambda e_{12} + \partial_z \Lambda e_{23} &= 0, \\ \partial_x \Lambda e_{13} + \partial_y \Lambda e_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь для удобства считаем $\Lambda = \lambda^{-1}$.

Продифференцируем первое уравнение по x , а второе по y и вычтем полученное соотношение

$$\partial_z (\partial_x \Lambda e_{13} - \partial_y \Lambda e_{23}) = 0. \quad (27)$$

Из третьего уравнения (26) имеем

$$\partial_z (\partial_x \Lambda e_{13} + \partial_y \Lambda e_{23}) = 0. \quad (28)$$

Из (27) и (28) получаем

$$\partial_{zx} \Lambda e_{13} = 0, \partial_{zy} \Lambda e_{23} = 0. \quad (29)$$

Проделав аналогичную операцию с первым и третьим уравнениями системы (26) имеем

$$\partial_{xy} \Lambda e_{12} = 0. \quad (30)$$

Из этих соотношений можно определить вид компонент тензора напряжений

$$S_{12} = \Lambda e_{12} = F_1(x, z) + G_1(z, y). \quad (31)$$

$$S_{13} = \Lambda e_{13} = H_1(x, y) + G_1(z, y), S_{23} = \Lambda e_{23} = H_2(x, y) + F_2(z, x).$$

Между этими функциями выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \partial_y G_1 + \partial_z G_2 = 0, \partial_x F_1 + \partial_z F_2 = 0, \partial_x H_1 + \partial_y H_2 = 0, \\ a_{12}(G_1 + F_1)^2 + a_{13}(G_2 + H_1)^2 + a_{23}(F_2 + H_2)^2 = 1. \end{aligned} \quad (32)$$

В системе уравнений (32) введем функции Φ_i , по следующим формулам

$$F_1 = \partial_z \Phi_1, F_2 = -\partial_x \Phi_1, G_1 = \partial_z \Phi_2, G_2 = -\partial_y \Phi_2, H_1 = \partial_y \Phi_3, H_2 = -\partial_x \Phi_3.$$

В этом случае первые три уравнения (32) удовлетворяются тождественно, а последнее запишется так

$$a_{12}(\partial_z\Phi_1 + \partial_z\Phi_2)^2 + a_{13}(\partial_y\Phi_3 - \partial_y\Phi_2)^2 + a_{23}(\partial_x\Phi_3 + \partial_x\Phi_1)^2 = 1.$$

В этом случае компоненты напряжения примут вид

$$S_{12} = \Lambda e_{12} = \partial_z(\Phi_1(x, z) + \Phi_2(z, y)), \quad (33)$$

$$S_{13} = \Lambda e_{13} = \partial_y(\Phi_3(x, y) - \Phi_2(z, y)), S_{23} = \Lambda e_{23} = \partial_x(-\Phi_1(x, z) - \Phi_3(x, y)).$$

Заключение. В работе построена новая система уравнений (9). Ее необходимо исследовать более подробно. Для этого можно использовать методы развитые в работах [4-13].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д. Д. и др. Предельное состояние деформированных тел и горных пород. М., Физматлит, 2008. 832 с.
- [2] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 702 с.
- [3] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
- [4] Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решениям дифференциальных уравнений. Новосибирск: СО РАН, 2001. 192 с.
- [5] Сенашов С. И., Гомонова О. В., Яхно А. Н. Математические вопросы двумерных уравнений идеальной пластичности. Красноярск: СибГАУ, 2012. 139 с.
- [6] Senashov S. I., Yakchno A. N. Reproduction of solutions for bidimensional ideal plasticity // Journal of Non-Linear Mechanics. 2007. № 42. P. 500–503
- [7] Senashov S. I., Yakchno A. N. Deformation of characteristic curves of the plane ideal plasticity equations by point symmetries // Nonlinear analysis. 2009. №71. P. 1274–1284
- [8] Senashov S. I., Yakchno A. N. Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity // SIGMA 8 (2012), 071, 16 pages, <http://dx.doi.org/10.3842//SIGMA.2012.071>. Special Issue „Geometrical Methods in Mathematical Physics“
- [9] Senashov S. I., Yakchno A.N. Some symmetry group aspects of a perfect plane plasticity system //J. Phys. A: Math. Theor. 2013. №46. P. 355202.
- [10] Senashov S. I., Yakchno A.N. Conservation Laws of Three-Dimensional Perfect Plasticity Equations under von Mises Yield // Criterion Abstract and Applied Analysis. 2013. V. 2013. 702132. 8 p.
- [11] Senashov S. I, Kondrin A. V., Cherepanova O. N. On Elastoplastic Torsion of a Rod with Multiply Connected Cross-Section // J. Siberian Federal Univ. Math. and Physics. 2015. №7(1). P. 343–351.
- [12] Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A. V. Elastoplastic Bending of Beam //J. Siberian Federal Univ., Math. and Physics. 2014. №7(2). P. 203–208.
- [13] Senashov S. I., Filyushina E. V., Gomonova O. V. Construction of elasto-plastic boundaries using conservation laws. // Scientific Journal of Science and Technology. 2015. V. 16. №2. P. 343–346

S. I. Senashov, I. L. Savostyanova

ELASTIC STATE OF A PLATE WITH FREE-FORM HOLES

Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk

Abstract. The authors consider the limit state of anisotropic plastic bodies. The theory of limit state deals with statically determinate condition of solids. The system is closed due to the marginal conditions in this case. The system of equations has three tangential component of the stress tensor. Diagonal components of this system are equal. In this case, the authors are able to choose a velocity field that the system is also statically determinate. The system can be considered in terms of components of tensor of rate of deformation. The number of equations is not increased because the terms of jointness performs identically. For this system the authors found a group of point symmetries and conservation laws, considered some exact solutions, which can be used to describe the plastic swirl around the three orthogonal axes.

Keywords: limit state, plastic body, anisotropic plastic body.

REFERENCES

- [1] Ivlev D. D. i dr. Predel'noe sostoyanie deformirovannyh tel i gornyh porod. M. , Fizmatlit, 2008. 832 s. (in Russian)
- [2] Ishlinskij A. YU., Ivlev D. D. Matematicheskaya teoriya plastichnosti. M.: Fizmatlit, 2001. 702 s. (in Russian)
- [3] Hill R. Matematicheskaya teoriya plastichnosti. M.: Gostekhizdat, 1956. 407 s. (in Russian)
- [4] Kiryakov P. P., Senashov S. I., YAhno A. N. Prilozhenie simmetrij i zakonov sohraneniya k resheniyam differencial'nyh uravnenij. Novosibirsk: SO RAN, 2001. 192 s. (in Russian)
- [5] Senashov S. I., Gomonova O. V., YAhno A. N. Matematicheskie voprosy dvumernyh uravnenij ideal'noj plastichnosti. Krasnoyarsk: SibGAU, 2012. 139 s. (in Russian)
- [6] Senashov S. I., Yakchno A. N. Reproduction of solutions for bidimensional ideal plasticity // Journal of Non-Linear Mechanics. 2007. № 42. P. 500–503
- [7] Senashov S. I., Yakchno A. N. Deformation of characteristic curves of the plane ideal plasticity equations by point symmetries // Nonlinear analysis. 2009. №71. P. 1274–1284
- [8] Senashov S. I., Yakhno A. N. Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity // SIGMA 8 (2012), 071, 16 pages, <http://dx.doi.org/10.3842//SIGMA.2012.071>. Special Issue „Geometrical Methods in Mathematical Physics“
- [9] Senashov S. I., Yakhno A.N. Some symmetry group aspects of a perfect plane plasticity system // J. Phys. A: Math. Theor. 2013. №46. P. 355202.

Senashov Sergei Ivanovich

e-mail: sen@sibsau.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology , Krasnoyarsk, Russia.

Savostyanova Irina Leonidovna

e-mail: savostyanova@sibsau.ru, Ph.D. in Pedagogy, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology , Krasnoyarsk, Russia

[10] Senashov S. I., Yakchno A.N. Conservation Laws of Three-Dimensional Perfect Plasticity Equations under von Mises Yield // *Criterion Abstract and Applied Analysis*. 2013. V. 2013. 702132. 8 p.

[11] Senashov S. I., Kondrin A. V., Cherepanova O. N. On Elastoplastic Torsion of a Rod with Multiply Connected Cross-Section // *J. Siberian Federal Univ. Math. and Physics*. 2015. №7(1). P. 343–351.

[12] Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A. V. Elastoplastic Bending of Beam // *J. Siberian Federal Univ., Math. and Physics*. 2014. №7(2). P. 203–208.

[13] Senashov S. I., Filyushina E. V., Gomonova O. V. Sonstruction of elasto-plastic boundaries using conservation laws. // *Scientific Journal of Science and Technology*. 2015. V. 16. №2. P. 343–346