

Н. В. Минаева, А. А. Сизиков

## О ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ УПРУГОПОДКРЕПЛЕННОЙ ПЛАСТИНЫ

*Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

**Аннотация.** Рассмотрена прямоугольная пластина на упругом основании, сжатая в своей плоскости и нагруженная поперечной нагрузкой. Найдено условие, определяющее границу области непрерывной зависимости решения, описывающего прогиб пластины, от параметров поперечной нагрузки и жесткости постели. Она также будет границей адекватности выбранной математической модели.

**Ключевые слова:** линейная упругость, пластина, винклеровское основание, непрерывная зависимость.

УДК: 539.3

Прямоугольные пластины с переменными параметрами используются в различных отраслях промышленности. Поперечно нагруженная прямоугольная пластина, опирающаяся на упругое основание, применяется, например, при моделировании покрытий автомобильных дорог, мостов или взлетно-посадочных полос аэродромов. Для исследования прочности и несущей способности таких конструкций требуется знание их напряженно-деформированного состояния. В аналитической форме решение удастся получить для ограниченного числа краевых задач [1, 2]. В связи с этим широко применяются различного рода приближенные методы [3-6]. В [7] представлен комплекс аналитических решений, отражающих действие на пластины переменной толщины сложных нагрузок. Проводится расчет фундаментных плит переменной толщины с учетом податливости упругого основания. В работах [8, 9] было изучено влияние напряжений на скорость коррозии, которая считалась линейной функцией интенсивности напряжений.

Как известно, одним из основных условий корректности постановки задачи является требование непрерывной зависимости решения от исходных данных [10]. Поскольку в результате реальной эксплуатации параметры конструкции могут отличаться от расчетных значений, то необходимо изучение подобной проблемы. К исследованиям

---

© Минаева Н. В., Сизикова А. А. 2017

*Минаева Надежда Витальевна*

**e-mail:** minaeva@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия,

*Сизиков Андрей Александрович*

**e-mail:** minaeva@yandex.ru, магистрант факультета прикладной математики и механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия.

Поступила 11.11.2017

по этому направлению можно отнести работы по изучению устойчивости формы для различного рода пластин и оболочек. В них рассмотрены тонкостенные конструкции на упругом основании при сжатии [2,12-14], комбинированном нагружении [11]. Получены формы потери устойчивости, а также проведено сравнение полученных в численном расчете критических нагрузок с экспериментальными данными [12]. В работе [13] изучаются формы потери устойчивости однородно сжатой пластины на мягком упругом основании на основе анализа энергии начальной послекритической деформации. Исследование упругой устойчивости бесконечной неоднородной тонкой пластинки, лежащей на упругом основании, в плоскости сжатия проведено в [14]. Здесь константы жесткости зависят от координат в направлении толщины пластины.

В настоящей работе рассматривается проблема непрерывной зависимости решения, определяющего прогиб пластины, от параметров, характеризующих поперечную нагрузку и жесткость основания. Реакция основания описывается однопараметрической моделью, основанной на гипотезе Винклера. Пластина находится в условиях всестороннего сжатия (рис. 1). Одна пара кромок жестко закреплена, а другая шарнирно оперта.

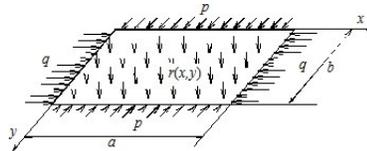


Рис. 1.

Согласно линейной теории жестких пластин, функция  $u$ , описывающая форму изогнутой пластины, является решением краевой задачи (в безразмерных переменных) [1, 2]:

$$\begin{aligned} \nabla^4 u(x, y) + q \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - r + ku &= 0 \\ u(0, y) = u(l, y) = u(x, 0) = u(x, 1) &= 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=1} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть при  $r(x, y) = r_0(x, y)$  и  $k = k_0$  задача (1) имеет решение

$$u(x, y) = u_0(x, y) \quad (2)$$

Оно будет характеризовать прогиб рассматриваемой пластины, если функция  $u$  непрерывно зависит от  $r(x, y)$  и  $k$  при  $r(x, y) = r_0(x, y)$ ,  $k = k_0$ . Для исследования этой зависимости, согласно [15, 16], необходимо построить вспомогательную задачу относительно  $\zeta(x, y)$ , определяемую следующим образом:

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \zeta(x, y) \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1) и учитывая, что (2) – решение, получаем задачу для  $\zeta(x, y)$ :

$$\begin{aligned} \nabla^4 \zeta(x, y) + q \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + p \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + k_0 \zeta &= 0 \\ \zeta(0, y) = \zeta(l, y) = \zeta(x, 0) = \zeta(x, 1) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} \Big|_{y=1} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Основным условием непрерывной зависимости  $u(x, y)$  от  $r(x, y)$  и  $k$  является требование существования только тривиального решения у линеаризованной задачи, соответствующей (3). Будем искать ее решение в виде [1]

$$\zeta = Y(y) \sin m\pi x \quad (4)$$

В этом случае часть граничных условий удовлетворяется. Для  $Y(y)$  имеем следующую задачу:

$$\begin{aligned} Y^{(4)} - 2a_1 Y'' + a_2 Y &= 0 \\ Y(0) = Y(1) = Y'(0) = Y'(1) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $a_1 = \gamma^2 - p/2$ ,  $a_2 = \gamma^2 (\gamma^2 - q) + k_0$ ,  $\gamma = \left(\frac{\pi m}{l}\right)$ .

Корни соответствующего характеристического уравнения будут такими:

$$\lambda_i = \pm \sqrt{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - a_2}}, \quad i = 1, \dots, 4$$

Поскольку вид общего решения дифференциального уравнения из (5) зависит от значений  $\lambda_i$ , то, анализируя различные случаи, получаем ( $p > 0$ ,  $q > 0$ , т.к. пластина находится при сжатии):

1. при  $0 < p < 2\gamma^2$  и  $-\frac{p^2}{4\gamma^2} + p + \frac{k_0}{\gamma^2} < q < \gamma^2 + \frac{k_0}{\gamma^2}$ :

$$Y(y) = C_1 \cosh(\lambda_1 y) + C_2 \sinh(\lambda_1 y) + C_3 \cosh(\lambda_2 y) + C_4 \sinh(\lambda_2 y) \quad (6)$$

2. при  $p < 2\gamma^2(1 + \sqrt{1 + k_0/\gamma^4})$  и  $0 < q < -\frac{p^2}{4\gamma^2} + p + \frac{k_0}{\gamma^2}$ :

$$\begin{aligned} Y(y) = C_1 \cosh(\alpha y) \cos(\beta y) + C_2 \sinh(\alpha y) \cos(\beta y) + \\ + C_3 \cosh(\alpha y) \sin(\beta y) + C_4 \sinh(\alpha y) \sin(\beta y), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{a_2 - a_1 \sqrt{a_2}}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{a_2 + a_1 \sqrt{a_2}}{2}},$$

3. при  $p > 2\gamma^2$  и  $-\frac{p^2}{4\gamma^2} + p + \frac{k_0}{\gamma^2} < q < \gamma^2 + \frac{k_0}{\gamma^2}$ :

$$Y(y) = C_1 \cos(\beta_1 y) + C_2 \sin(\beta_1 y) + C_3 \cos(\beta_2 y) + C_4 \sin(\beta_2 y), \quad (8)$$

$$\beta_1 = \sqrt{|a_1 - \sqrt{a_1^2 - a_2}|}, \quad \beta_2 = \sqrt{|a_1 + \sqrt{a_1^2 - a_2}|},$$

4. при  $q > \gamma^2 + \frac{k_0}{\gamma^2}$ :

$$Y(y) = C_1 \cosh(\lambda_1 y) + C_2 \sinh(\lambda_1 y) + C_3 \cos(\beta_1 y) + C_4 \sin(\beta_1 y). \quad (9)$$

Для каждого из (6)-(9) были построены системы, определяющие  $C_i$ :

1.

$$\begin{aligned}
 C_1 + C_3 &= 0, \\
 \lambda_1 C_2 + \lambda_2 C_4 &= 0, \\
 C_1 \cosh \lambda_1 + C_2 \sinh \lambda_1 + C_3 \cosh \lambda_2 + C_4 \sinh \lambda_2 &= 0, \\
 C_1 \lambda_1 \sinh \lambda_1 + C_2 \lambda_1 \cosh \lambda_1 + C_3 \lambda_2 \sinh \lambda_2 + C_4 \lambda_2 \cosh \lambda_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{10}$$

2.

$$\begin{aligned}
 C_1 &= 0, \\
 \alpha C_2 + \beta C_3 &= 0, \\
 C_1 \cosh \alpha \cos \beta + C_2 \sinh \alpha \cos \beta + C_3 \cosh \alpha \sin \beta + C_4 \sinh \alpha \sin \beta &= 0, \\
 C_1(\alpha \sinh \alpha \cos \beta - \beta \cosh \alpha \sin \beta) + C_2(\alpha \cosh \alpha \cos \beta - \beta \sinh \alpha \sin \beta) + \\
 + C_3(\alpha \sinh \alpha \sin \beta + \beta \cosh \alpha \cos \beta) + C_4(\alpha \cosh \alpha \sin \beta + \beta \sinh \alpha \cos \beta) &= 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

3.

$$\begin{aligned}
 C_1 + C_3 &= 0, \\
 \beta_1 C_2 + \beta_2 C_4 &= 0, \\
 C_1 \cos \beta_1 + C_2 \sin \beta_1 + C_3 \cos \beta_2 + C_4 \sin \beta_2 &= 0, \\
 -\beta_1 C_1 \sin \beta_1 + \beta_1 C_2 \cos \beta_1 - \beta_2 C_3 \sin \beta_2 + \beta_2 C_4 \cos \beta_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

4.

$$\begin{aligned}
 C_1 + C_3 &= 0, \\
 \lambda_1 C_2 + \beta_1 C_4 &= 0, \\
 C_1 \cosh \lambda_1 + C_2 \sinh \lambda_1 + C_3 \cos \beta_1 + C_4 \sin \beta_1 &= 0 \\
 C_1 \lambda_1 \sinh \lambda_1 + C_2 \lambda_1 \cosh \lambda_1 - \beta_1 C_3 \sin \beta_1 + \beta_1 C_4 \cos \beta_1 &= 0.
 \end{aligned} \tag{13}$$

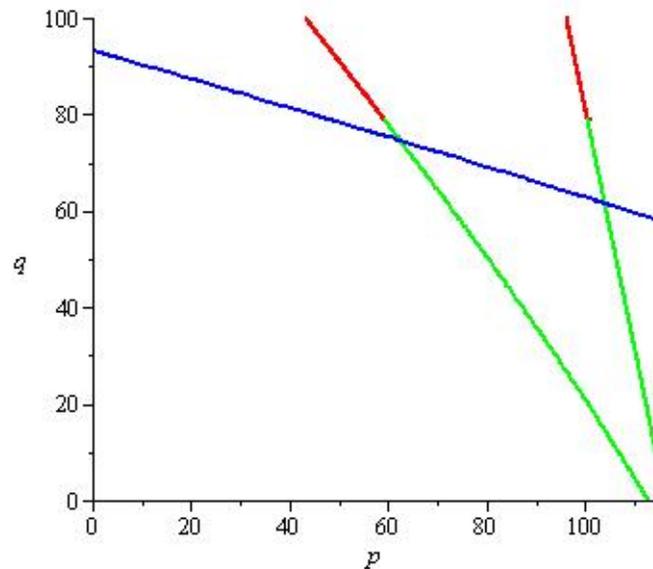


Рис. 2.  $D = 0.1465$  МН·м,  $l = a/b = 1$ ,  $\delta = h/b = 0.02$ ,  $\mu = 0.3$ ,  $k_0 = 685.2$

в поле сартіон указывається заголовок рисунка

Согласно (10)-(13), условие нетривиальности решения вспомогательной задачи (3) имеет вид:

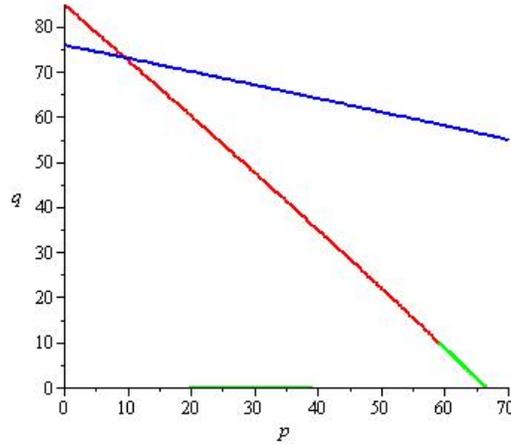


Рис. 3.

при  $0 < p < 2\gamma^2$  и  $-\frac{p^2}{4\gamma^2} + p + \frac{k_0}{\gamma^2} < q < \gamma^2 + \frac{k_0}{\gamma^2}$

$$2\lambda_1\lambda_2(1 - \cosh \lambda_1 \cosh \lambda_2) + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sinh \lambda_1 \sinh \lambda_2 = 0 \quad (14)$$

при  $0 < p < 2\gamma^2(1 + \sqrt{1 + k_0/\gamma^4})$  и  $0 < q < -\frac{p^2}{4\gamma^2} + p + \frac{k_0}{\gamma^2}$

$$\alpha^2 \sin^2 \beta - \beta^2 \cosh^2 \alpha = 0 \quad (15)$$

при  $p > 2\gamma^2$  и  $-\frac{p^2}{4\gamma^2} + p + \frac{k_0}{\gamma^2} < q < \gamma^2 + \frac{k_0}{\gamma^2}$

$$2\beta_1\beta_2(1 - \cos \beta_1 \cos \beta_2) - (\beta_1^2 + \beta_2^2) \sin \beta_1 \sin \beta_2 = 0 \quad (16)$$

при  $0 < p$  и  $q > \gamma^2 + \frac{k_0}{\gamma^2}$

$$2\lambda_1\beta_1(1 - \cosh \lambda_1 \cos \beta_1) + (\lambda_1^2 - \beta_1^2) \sinh \lambda_1 \sin \beta_1 = 0 \quad (17)$$

С точностью до обозначений (17) совпадает с результатом, полученным в [2], если положить  $p = 0$  и  $k_0 = 0$ .

Таким образом, если параметры пластины и сжимающих усилий таковы, что соответствующая им точка лежит внутри области, ограниченной линией (14)-(17), то решение (2) непрерывно зависит от  $r(x, y)$  и  $k$  при  $r(x, y) = r_0(x, y)$ ,  $k = k_0$ .

Например, для стальной ( $E = 0.2 \cdot 10^6$  МПа) квадратной пластины с коэффициентом жесткости основания  $k = 100$  МПа/м линия (14)-(17) в пространстве параметров внешних воздействий имеет вид (рис. 2):

Значения  $p_* = 112.88$  ( $q = 0$ ) и  $q_* = 93.197$  ( $p = 0$ ) совпадают с результатами из [3].

Если рассмотреть такую же пластину, но без упругого подкрепления ( $k = 0$ ), то область непрерывной зависимости будет следующей (рис.3):

При равных сжимающих усилиях непрерывная зависимость нарушается при  $p = q = 37,74$ , что совпадает со значениями из [4]. Если силы приложены только вдоль шарнирно закрепленных краев ( $p = 0$ ), то при  $q < 75.87$  решение (2) приближенно описывает прогиб пластины. Этот результат согласуется с [2]. Для случая сжатия вдоль шарнирно закрепленных краев ( $q = 0$ ), получаем аналогичный вывод при  $p < 66.57$ . В работе [4] для этого случая найдено значение  $p_* = 66.55$ .

Если пластина удлинена вдоль оси  $x$  ( $a \gg b$ ) и сжата вдоль длинной стороны ( $p = 0$ ), то получаем, например, что при  $\frac{a}{mb} = 0.662$  непрерывная зависимость будет нарушаться при  $q \geq 68.81$ . Это соответствует результатам из [2], где  $q_* = 68.72$ .

Таким образом, если параметры нагрузок и пластины таковы, что соответствующая им точка лежит вне области, ограниченной (14)-(17), то непрерывная зависимость решения  $u(x, y)$  от  $r(x, y)$  и  $k$  нарушается, и (2) уже не будет приближенно описывать поведение рассматриваемой пластины. В подобных случаях необходимо проводить исследования на основе другой математической модели, а не (1).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М., 1963. 636 с.
- [2] Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 880 с.
- [3] Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 432 с.
- [4] Ушаков А. Ю. Расчет тонких упругих пластинок при действии продольных сжимающих сил на устойчивость методом начальных функций // Промышленное и гражданское строительство. 2014. №10. С.55–57.
- [5] Jones R., Mazumdar J. A note on behavior of plates on an elastic foundation // Journal of Applied Mechanics. Transactions of the ASME. 1980. Vol. 47. pp. 191–192.
- [6] Li Z., Yang T., Luo W. An Improved Model for Bending of Thin Viscoelastic Plate on Elastic Foundation // Natural Science. 2009. №1. pp. 120–123. doi: 10.4236/ns.2009.12014.
- [7] Коренева Е. Б. Аналитические методы расчета пластин переменной толщины и их практические приложения. М., 2009. 296 с.
- [8] Долинский В. М. Расчет элементов конструкций, подверженных равномерной коррозии // Исследования по теории оболочек. Казань. 1976. №7. С. 37–42
- [9] Pronina Y. Analytical solution for the general mechanochemical corrosion of an ideal elastic-plastic thick-walled tube under pressure // International Journal of Solids and Structures. 2013. V. 50. № 22–23. P. 3626–3633.
- [10] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 376 с.
- [11] Гусев А. М., Иванов В. А. Устойчивость пластин на упругом основании при комбинированном нагружении // Труды семинара по теории оболочек. Вып. 5. 1974. С. 136–142.
- [12] Кургузов В. Д., Демешкин А. Г. Экспериментальное и теоретическое исследование потери устойчивости узких тонких пластин на упругом основании при сжатии // ПМТФ. 2016. №3. С. 121–128
- [13] Морозов Н. Ф. О формах потери устойчивости сжатой пластины на упругом основании // Изв. РАН МТТ. 2012. № 6. С. 30–36.
- [14] Morimoto T., Tanigawa Y. Elastic stability of inhomogeneous thin plates on an elastic foundation // Arch Appl Mech. 2007. №77. P. 653–674. doi:10.1007/s00419-007-0117-1
- [15] Darinskii V. M., Sapronov Y. I. and Tsarev S. L. // J. Math. Sci. 2007. № 145. pp. 5311–5453.
- [16] Минаева Н. В., Морозов Ю. Г. Исследование продольно-поперечного изгиба упругой прямоугольной пластины // Изв. ВУЗОВ. Машиностроение. 2007. №5. С. 19–22.

N. V. Minaeva, A. A. Sizikov

**THE INVESTIGATION OF STATE OF AN ELASTIC RECTANGULAR PLATE  
ON AN ELASTIC SUBSTRUCTURE**

*Voronezh State University, Voronezh, Russia*

**Abstract.** We investigated the bending of a homogeneous plate compressed in its plane and is loaded with transverse load. We found the condition of continuous dependence of the function of the deflection parameters of stiffness Winkler's base and transverse forces. It is also a border of the adequacy of the selected model.

**Keywords:** linear elasticity, plate, Winkler's base, continuous dependence.

**REFERENCES**

- [1] Timoshenko S. P., Vojnovskij-Kriger S. *Plastiny i obolochki*. M., 1963. 636 s. (in Russian)
- [2] Vol'mir A. S. *Ustojchivost' uprugih sistem*. M.: Fizmatgiz, 1963. 880 s. (in Russian)
- [3] Vlasov V. Z., Leont'ev N. N. *Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii*. M. : Fizmatgiz, 1960. 432 c. (in Russian)
- [4] Ushakov A. YU. *Raschet tonkih uprugih plastinok pri dejstvii prodol'nyh szhimayushchih sil na ustojchivost' metodom nachal'nyh funkcij // Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo*. 2014. №10. S.55–57. (in Russian)
- [5] Jones R., Mazumdar J. *A note on behavior of plates on an elastic foundation // Journal of Applied Mechanics. Transactions of the ASME*. 1980. Vol. 47. pp. 191–192.
- [6] Li Z., Yang T., Luo W. *An Improved Model for Bending of Thin Viscoelastic Plate on Elastic Foundation // Natural Science*. 2009. №1. pp. 120–123. doi: 10.4236/ns.2009.12014.
- [7] Koreneva E. B. *Analiticheskie metody rascheta plastin peremennoj tolschiny i ih prakticheskie prilozheniya*. M., 2009. 296 s. (in Russian)
- [8] Dolinskij V. M. *Raschet ehlementov konstrukcij, podverzhennyh ravnomernoj korrozii // Issledovaniya po teorii obolochek. Kazan'*. 1976. №7. S. 37–42. (in Russian)
- [9] Pronina Y. *Analytical solution for the general mechanochemical corrosion of an ideal elastic-plastic thick-walled tube under pressure // International Journal of Solids and Structures*. 2013. V. 50. № 22–23. P. 3626–3633.
- [10] Vladimirov V. S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki*. M. : Nauka, 1976. 376 s. (in Russian)
- [11] Gusev A. M., Ivanov V. A. *Ustojchivost' plastin na uprugom osnovanii pri kombinirovannom nagruzhenii // Trudy seminarov po teorii obolochek. Vyp. 5*. 1974. S. 136–142. (in Russian)
- [12] Kurguzov V. D., Demeshkin A. G. *Ehksperimental'noe i teoreticheskoe issledovanie poteri ustojchivosti uzkih tonkih plastin na uprugom osnovanii pri szhatii // PMTF*. 2016. №3. S. 121–128. (in Russian)

*Minaeva Nadezhda Vitalevna*

e-mail: minaeva@yandex.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russia

*Sizikov Andrey Aleksandrovich*

e-mail: minaeva@yandex.ru, graduate Voronezh State University, Voronezh, Russia

- [13] Morozov N. F. O formah poteri ustojchivosti szhatoj plastiny na uprugom osnovanii // *Izv. RAN MTT*. 2012. № 6. S. 30–36. (in Russian)
- [14] Morimoto T., Tanigawa Y. Elastic stability of inhomogeneous thin plates on an elastic foundation // *Arch Appl Mech*. 2007. №77. P. 653–674. doi:10.1007/s00419-007-0117-1
- [15] Darinskii B. M., Sapronov Y. I. and Tsarev S. L. // *J. Math. Sci*. 2007. № 145. pp. 5311–5453.
- [16] Minaeva N. V., Morozov YU. G. Issledovanie prodol'no-poperechnogo izgiba uprugoj pryamougol'noj plastiny // *Izv. VUZOV. Mashinostroenie*. 2007. №5. S. 19–22. (in Russian)