Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 4 (34). С. 133–141

Г. Е. Чекмарев, П. Н. Кузнецов

К ВОПРОСУ О ВЛИЯНИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО УПРОЧНЕНИЯ НА ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ПЛОСКОЙ ПОЛОСЫ

Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары

Аннотация. В работе [1] получено условие пластичности для одной плоской двухэлементной динамической модели. В данной статье исследовано возмущение развитого течения одноосного растяжения плоской полосы, вышедшей на режим идеально пластического состояния при отсутствии и при наличии начальных микронапряжений.

Ключевые слова: пластичность, упругость.

УДК: 539.374

Пусть

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^0 + \sigma_x^{'}, \quad s_x = s_x^0 + s_x^{'}, \\ \sigma_y &= \sigma_y^0 + \sigma_y^{'}, \quad s_y = s_y^0 + s_y^{'}, \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}^{'}, \quad s_{xy} = s_{xy}^0 + s_{xy}^{'}. \end{aligned}$$

Линеаризуя условия пластичности [1] получим для невозмущенного состояния

$$\left[(\sigma_x^0 - \sigma_y^0) - (s_x^0 - s_y^0)\right]^2 + 4\left(\tau_{xy}^0 - s_{xy}^0\right)^2 = 4k_1^2, \tag{1}$$

$$(s_x^0 - s_y^0)^2 + 4(s_{xy}^0)^2 = 4k_2^2, \tag{2}$$

и для возмущенного

$$\left[(\sigma_x^0 - \sigma_y^0) - (s_x^0 - s_y^0)\right]\left[(\sigma_x^{'} - \sigma_y^{'}) - (s_x^{'} - s_y^{'})\right] + 4\left(\tau_{xy}^0 - s_{xy}^0\right)\left(\tau_{xy}^{'} - s_{xy}^{'}\right) = 0, \tag{3}$$

$$(s_x^0 - s_y^0)(s_x^{'} - s_y^{'}) + 4s_{xy}^0 s_{xy}^{'} = 0.$$

Линеаризация условия ассоциированного закона течения, дает:
для внешнего элемента

$$de_x^0 = -de_y^0 = 2d\lambda^0\left[(\sigma_x^0 - \sigma_y^0) - (s_x^0 - s_y^0)\right], de_{xy}^0 = 4d\lambda^0\left(\tau_{xy}^0 - s_{xy}^0\right),$$

$$de_x^{'} = -de_y^{'} = 2d\lambda^0\left[(\sigma_x^{'} - \sigma_y^{'}) - (s_x^{'} - s_y^{'})\right] + 2d\lambda^{'}\left[(\sigma_x^0 - \sigma_y^0) - (s_x^0 - s_y^0)\right], \tag{4}$$

Чекмарев Георгий Евгеньевич
`e-mail:` chekmarevge@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары.
Кузнецов Павел Николаевич
`e-mail:` kuznecov_pn@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Поступила 22.11.2017

$$de_{xy}^{'} = 4d\lambda^0 \left(\tau_{xy}^{'} - s_{xy}^{'}\right) + 4d\lambda^{'} \left(\tau_{xy}^0 - s_{xy}^0\right);$$

для внутреннего элемента

$$\begin{gathered} d\chi_x^0 = -d\chi_y^0 = 2d\mu^0 (s_x^0 - s_y^0), d\chi_{xy}^0 = 4d\mu^0 s_{xy}^0, \\ d\chi_x^{'} = -d\chi_y^{'} = 2d\mu^0 (s_x^{'} - s_y^{'}) + 2d\mu^{'} (s_x^0 - s_y^0), \\ d\chi_{xy}^{'} = 4d\mu^0 s_{xy}^{'} + 4d\mu^{'} s_{xy}^0. \end{gathered} \tag{5}$$

Откуда получим следующие соотношения

$$e_x - \chi_x = \frac{1}{2c}\left(s_x - s_y\right), e_y - \chi_y = \frac{1}{2c}\left(s_y - s_x\right), e_{xy} - \chi_{xy} = \frac{1}{c} s_{xy}.$$

Линеаризация которых приводит к формулам

$$\begin{gathered} e_x^0 - \chi_x^0 = -\left(e_y^0 - \chi_y^0\right) = \frac{1}{2c}\left(s_x^0 - s_y^0\right), e_{xy}^0 - \chi_{xy}^0 = \frac{1}{c} s_{xy}^0, \\ e_x^{'} - \chi_x^{'} = -\left(e_y^{'} - \chi_y^{'}\right) = \frac{1}{2c}\left(s_x^{'} - s_y^{'}\right), e_{xy}^{'} - \chi_{xy}^{'} = \frac{1}{c} s_{xy}^{'} \end{gathered} \tag{6}$$

1. Пусть

$$\sigma_x^0 \neq 0, \quad s_x^0 \neq 0, \quad \chi_x \neq 0, \quad \sigma_y^0 = \tau_{xy}^0 = 0, \quad s_y^0 = 0, \quad \chi_y^0 = \chi_{xy}^0 = 0; \tag{7}$$

тогда из (1), (2) будем иметь

$$\sigma_x^0 - s_x^0 = 2k_1, s_x^0 = 2k_2, \sigma_x^0 = 2k_1 + s_x^0 = 2\left(k_1 + k_2\right), \tag{8}$$

а из (3), (4)

$$(\sigma_x^{'} - \sigma_y^{'}) - (s_x^{'} - s_y^{'}) = 0, s_x^{'} - s_y^{'} = 0, \sigma_x^{'} - \sigma_y^{'} = 0$$

и, следовательно, справедливы следующие соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \sigma_x^{'}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{'}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}^{'}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^{'}}{\partial y} = 0, \\ \sigma_x^{'} - \sigma_y^{'} = 0. \end{array} \right. \tag{9}$$

Полученная система уравнений совпадает с уравнениями для идеально пластического течения, рассмотренного в работе [2]. Получили статически определимую задачу.

Рассмотрим кинематику среды.

Из (5)-(9) имеем

$$\begin{gathered} de_x^0 = 2d\lambda^0 \left(\sigma_x^0 - s_x^0\right) = 4k_1 d\lambda^0 = dT, dT = de_x^0, \\ d\chi_x^0 = 2d\mu^0 s_x^0 = 4k_2 d\mu^0, \\ e_x^0 - \chi_x^0 = \frac{1}{2c} s_x^0 = \frac{k_2}{c} \end{gathered} \tag{10}$$

Дальнейшие преобразования дают

$$de_x^0 = d\chi_x^0, 4k_1 d\lambda^0 = 4k_2 d\mu^0 = dT, d\lambda^0 = \frac{dT}{4k_1}, d\mu^0 = \frac{dT}{4k_2}$$

и

$$de_{xy}^{'} - d\chi_{xy}^{'} = \frac{1}{c} ds_{xy}^{'} \tag{11}$$

Так как в силу (10) и (11) $de'_{xy} = 4d\lambda^0\left(\tau'_{xy} - s'_{xy}\right) = \frac{dT}{k_1}\left(\tau'_{xy} - s'_{xy}\right)$ и $d\chi'_{xy} = 4s'_{xy}d\mu^0 = s'_{xy}\frac{dT}{k_2}$, то (11) запишется в виде

$$\frac{dT}{k_1}\left(\tau'_{xy} - s'_{xy}\right) - \frac{dT}{k_2}s'_{xy} = \frac{1}{c}ds'_{xy}. \tag{12}$$

Что приводит к неоднородному линейному дифференциальное уравнение первого порядка относительно s'_{xy}

$$\frac{ds'_{xy}}{dT} + c\left[\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right]s'_{xy} = \frac{c\tau'_{xy}}{k_1},$$

где τ'_{xy} – известная функция не зависящая от T.

Для решения его воспользуемся методом вариации произвольных постоянных

$$s'_{xy} = C(T)\exp(-aT), a = -\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right),$$

$$C'(T)\exp(-aT) = \frac{c\tau'_{xy}}{k_1}, C(T) = \frac{-\tau'_{xy}\exp(aT)}{ak_1} + C_1, C_1 - const,$$

$$s'_{xy} = \frac{c\tau'_{xy}}{ak_1} + C_1\exp(-aT).$$

Константу C_1 определим из условия, что при $T = 0$, $e'_{xy} = = \chi'_{xy} = s'_{xy} = 0$, тогда $0 = \frac{c\tau'_{xy}}{ak_1} + C_1, C_1 = -\frac{c\tau'_{xy}}{ak_1}$ и

$$s'_{xy} = \frac{c}{ak_1}\tau'_{xy}\left[1 - \exp(-aT)\right]. \tag{13}$$

Подставив (13) в (12), получим $k_1\frac{de'_{xy}}{dT} = \tau'_{xy} - \frac{c\tau'_{xy}}{ak_1}\left[1 - \exp(-aT)\right]$

$$k_1\frac{de'_{xy}}{dT} = \tau'_{xy}\left[\left(1 - \frac{c}{ak_1}\right) + \frac{c}{ak_1}\exp(-aT)\right], \frac{k_1}{\tau'_{xy}}e'_{xy} = \left(1 - \frac{c}{ak_1}\right)T - \frac{c}{a^2k_1}\exp(-aT) + C_2.$$

Так как при $T = 0$, e'_{xy} =0, то

$$C_2 = \frac{c}{a^2k_1}.$$

Переходя к перемещениям, получим систему двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{k_1}{\tau'_{xy}}e'_{xy} = \left(1 - \frac{c}{ak_1}\right)T + \frac{c}{a^2k_1}\left(1 - \exp(-aT)\right), \\ e'_x + e'_y = 0 \end{cases}$$

относительно u', v' , где $e'_x = \frac{\partial u'}{\partial x}$, $e'_y = \frac{\partial v'}{\partial y}$, $e'_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}\right)$.

Удовлетворив с помощью замены $u' = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, v' = \frac{\partial\psi}{\partial x}$ условие не сжимаемости $e'_x + e'_y = 0$, $\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0$, получим

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \tau'_{xy}\Phi(T), \tag{14}$$

где

$$\Phi(T) = \frac{k_1}{2}\left(\left(1 - \frac{c}{ak_1}\right)T + \frac{c}{a^2k_1}\left(1 - \exp(-aT)\right)\right).$$

Представив функцию ψ в виде $\psi = \varphi(x,y)\Phi(T)$, из (13) и (14) получим

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \tau'_{xy}. \tag{15}$$

С помощью функции Эри $\sigma'_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \sigma'_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tau'_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$
уравнения равновесия могут быть сведены к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Характер решения для компонент τ'_{xy} имеет вид согласно [3]:

$$\tau'_{xy} = f_1(x+y) + f_2(x-y).$$

Таким образом, уравнение (15) преобразуется в форму

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = f_1(x+y) + f_2(x-y). \tag{16}$$

Которое в дальнейшем может быть преобразовано к виду

$$4\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta} = f_1(\xi) + f_2(\eta), \xi = x+y, \eta = x-y. \tag{17}$$

Из (16) и (17) имеем

$$\varphi = \bar{f}_1(\xi)\eta/4 + \bar{f}_2(\eta)\xi/4 + \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\eta), \tag{18}$$

где черта наверху означает интеграл по аргументу.

Согласно (18) все искомые компоненты деформации могут быть определены.

Для рассмотренного случая возмущения развитого течения одноосного растяжения плоской полосы, вышедшей на режим идеально пластического состояния материала, предварительное упрочнение не сказывается на характере возмущенного напряженного состояния идеально пластического тела. Компоненты возмущений перемещений зависят от характера упрочнения.

2. Предположим далее, что имеет место одноосное растяжение

$$\sigma^0_x \neq 0, \sigma^0_y = \tau^0_{xy} = 0. \tag{19}$$

Предполагаем при этом, что имеют место внутренние напряжения

$$s^0_x \neq 0, s^0_y \neq 0, s^0_{xy} \neq 0. \tag{20}$$

Примем исходное состояние за начальное и положим

$$e^0_x = e^0_y = e^0_{xy} = 0, \chi^0_x = \chi^0_y = \chi^0_{xy} = 0. \tag{21}$$

Из (4), (21) имеем

$$d\lambda^0 = 0, d\mu^0 = 0.$$

Приравнивая $de_{ij}, d\chi_{ij}$ к e'_{ij}, χ'_{ij}, получим

$$\begin{aligned} &e'_x = -e'_y = 2d\lambda' \left[\sigma^0_x - \left(s^0_x - s^0_y\right)\right], \\ &e'_x + e'_y = 0, e'_{xy} = -4d\lambda' s^0_{xy}, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} &\chi'_x = 2d\mu' \left(s^0_x - s^0_y\right), \chi'_y = -2d\mu' \left(s^0_x - s^0_y\right), \\ &\chi'_x + \chi'_y = 0, \chi'_{xy} = 4d\mu' s^0_{xy}. \end{aligned} \tag{23}$$

Из (3) получаем

$$\frac{(\sigma_x'-\sigma_y')-(s_x'-s_y')}{4(\tau_{xy}'-s_{xy}')} = \frac{s_{xy}^0}{\sigma_x^0-(s_x^0-s_y^0)} = A,$$
$$(\sigma_x'-\sigma_y')-(s_x'-s_y')-4A\left(\tau_{xy}'-s_{xy}'\right)=0, \quad A=const. \tag{24}$$

Из (2) находим

$$-\frac{s_x'-s_y'}{4s_{xy}'} = \frac{s_{xy}^0}{s_x^0-s_y^0} = B,$$
$$s_x'-s_y'+4B\,s_{xy}'=0, \quad B\;=\;const. \tag{25}$$

Из (22), (23) следует

$$\frac{e_{xy}'}{e_x'-e_y'} = \frac{-s_{xy}^0}{\sigma_x^0-\left(s_x^0-s_y^0\right)} = -A, e_{xy}'+A(e_x'-e_y')=0,$$
$$\frac{\chi_x'-\chi_y'}{\chi_{xy}'} = \frac{s_x^0-s_y^0}{s_{xy}^0} = \frac{1}{B}, B(\chi_x'-\chi_y')-\chi_{xy}'=0. \tag{26}$$

Из (24), (25) имеем

$$\begin{cases} s_x'-s_y'-4As_{xy}'=\sigma_x'-\sigma_y'-4A\tau_{xy}', \\ s_x'-s_y'+4Bs_{xy}'=0. \end{cases} \tag{27}$$

Систему линейных алгебраических уравнений (26) относительно $s_x'-s_y'$ и s_{xy}' решаем по формулам Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -4A \\ 1 & 4B \end{vmatrix} = 4(A+B),$$
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \sigma_x'-\sigma_y'-4A\tau_{xy}' & -4A \\ 0 & 4B \end{vmatrix} = 4B\left(\sigma_x'-\sigma_y'-4A\tau_{xy}'\right),$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \sigma_x'-\sigma_y'-4A\tau_{xy}' \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\left(\sigma_x'-\sigma_y'-4A\tau_{xy}'\right),$$
$$s_x'-s_y' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{B\left(\sigma_x'-\sigma_y'-4A\tau_{xy}'\right)}{A+B}, \tag{28}$$
$$s_{xy}' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{\sigma_x'-\sigma_y'-4A\tau_{xy}'}{4(A+B)}. \tag{29}$$

Из (6) получим

$$\begin{cases} \chi_x'-\chi_y'=e_x'-e_y'-\frac{1}{c}\left(s_x'-s_y'\right), \\ \chi_{xy}'=e_{xy}'-\frac{1}{c}s_{xy}'. \end{cases} \tag{30}$$

Из (26) - (30) имеем

$$\frac{e_{xy}'-\frac{1}{c}s_{xy}'}{e_x'-e_y'-\frac{1}{c}\left(s_x'-s_y'\right)} = B,$$
$$e_{xy}'-\frac{1}{c}s_{xy}' = B(e_x'-e_y')-\frac{B}{c}\left(s_x'-s_y'\right). \tag{31}$$

Подставляя (28), (29) в (31), получим

$$e_{xy}'-B(e_x'-e_y') = -\frac{(1+4B^2)}{4c(A+B)}\left(\sigma_x'-\sigma_y'-4A\tau_{xy}'\right). \tag{32}$$

Для связи между компонентами тензора деформации и компонентами перемещений воспользуемся формулами Коши

$$e_x' = \frac{\partial u'}{\partial x}, e_y' = \frac{\partial v'}{\partial y}, e_{xy}' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}\right). \tag{33}$$

Переходя от компонент деформации к компонентам перемещений и, присоединяя к ним уравнения равновесия, получим следующую систему уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \sigma_x'}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}'}{\partial y} = 0, \frac{\partial \tau_{xy}'}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y'}{\partial y} = 0,\\
\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0,\\
\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} + 2A\left(\frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\partial v'}{\partial y}\right) = 0,\\
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}\right) - B\left(\frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\partial v'}{\partial y}\right) = -\frac{(1+4B^2)}{4c(A+B)}\left(\sigma_x' - \sigma_y' - 4A\tau_{xy}'\right).
\end{gathered} \tag{34}$$

Система уравнений (34) является системой пяти уравнений относительно пяти неизвестных $\sigma_x', \sigma_y', \tau_{xy}', u', v'$.

Уравнение не сжимаемости (третье в системе) удовлетворим с помощью замены

$$u' = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, v' = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{35}$$

Из формул Коши с использованием (35) следует, что

$$e_x' = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, e_y' = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, e_{xy}' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right). \tag{36}$$

Из (33), (36) получаем

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 4A\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0. \tag{37}$$

Решением уравнения (37) является функция ψ вида

$$\psi = \psi\left(x + ay\right),$$

откуда

$$\begin{gathered}
1 - 4Aa - a^2 = 0, a_{1,2} = -2A \pm \sqrt{4A^2+1},\\
\psi = f_1(\xi) + f_2(\eta) = f_1(x + a_1 y) + f_2(x + a_2 y).
\end{gathered}$$

Уравнения равновесия удовлетворим с помощью замены с использованием функции Эри (аналогично тому, как это сделано в п.1).

В результате получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 4A\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = F_1(x + a_1 y) + F_2(x + a_2 y), \tag{38}$$

где

$$\begin{gathered}
F_1(x + a_1 y) = \tfrac{8c(B+A)^2 a_1}{1+4B^2} f_1''(x + a_1 y),\\
F_2(x + a_2 y) = \tfrac{8c(B-A)^2 a_2}{1+4B^2} f_2''(x + a_2 y).
\end{gathered}$$

Уравнение (38) имеет те же характеристики, что и (37).

Произведя замену переменных

$$\xi = x + a_1 y, \eta = x + a_2 y,$$

вычислим

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = a_1\frac{\partial U}{\partial \xi} + a_2\frac{\partial U}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial U^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}, \tag{39}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = a_1\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + (a_1 + a_2)\frac{\partial U^2}{\partial \xi \partial \eta} + a_2\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}, \tag{40}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = a_1^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2a_1 a_2\frac{\partial U^2}{\partial \xi \partial \eta} + a_2^2\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}. \tag{41}$$

Подставляя (39) - (41) в (38), получим

$$[2 - 2a_1 a_2 - 4A(a_1 + a_2)]\,\frac{\partial U^2}{\partial \xi \partial \eta} = F_1(\xi) + F_2(\eta). \tag{42}$$

Из (42) найдем

$$U = D\left[\eta f_1'(\xi) + \xi f_2'(\eta)\right] + \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\eta).$$

где

$$D = \frac{2c(B + A)^2}{(1 + 4A^2)(1 + 4B^2)}.$$

Используя выражения для частных производных

$$\frac{\partial U}{\partial x} = D\left[f_1'(\xi) + \eta f_1''(\xi) + f_2'(\eta) + \xi f_2''(\eta)\right] + \varphi_1'(\xi) + \varphi_2'(\eta),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = D\left[a_2 f_1'(\xi) + a_1\eta f_1''(\xi) + a_1 f_2'(\eta) + a_2\xi f_2''(\eta)\right] + a_1\varphi_1'(\xi) + a_2\varphi_2'(\eta),$$

определим компоненты напряжений

$$\sigma_y' = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \varphi_1''(\xi) + \varphi_2''(\eta) + D\left[2f_1''(\xi) + \eta f_1'''(\xi) + 2f_2''(\eta) + \xi f_2'''(\eta)\right], \tag{43}$$

$$\begin{aligned}\sigma_x' = \tfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= a_1^2\varphi_1''(\xi) + a_2^2\varphi_2''(\eta) + \\ &+ D\left[2a_1 a_2 f_1''(\xi) + a_1^2\eta f_1'''(\xi) + 2a_1 a_2 f_1''(\eta) + a_2^2\xi f_2'''(\eta)\right],\end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy}' = -\tfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= -a_1\varphi_1''(\xi) - a_2\varphi_2''(\eta) - \\ &- D\left[(a_1 + a_2) f_1''(\xi) + a_1\eta f_1'''(\xi) + (a_1 + a_2) f_2''(\eta) + a_2\xi f_2'''(\eta)\right].\end{aligned} \tag{45}$$

Выражения (43)–(45) определяют напряженное состояние.

Наличие начальных внутренних микронапряжений определяет эффекты анизотропного поведения материала, вышедшего на режим идеально пластического состояния.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Чекмарев Г. Е. Об одной динамической модели упрочняющегося материала и условии пластичности для нее. VIII всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела. Сб. статей по материалам конференции: Чебоксары, 2014. С. 209–222.

[2] Максимова Л. А. О линеаризованных уравнениях пространственных течений идеально пластических тел // ДАН РАН. 1998. Т.385. №6. С. 772–772.

[3]Владимиров В. С., Жариков В. В. Уравнения математической физики. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2000. 400 с.

G. E. Chekmarev, P. N. Kuznecov

ON THE EFFECT OF PRELIMINARY HARDENING ON THE PLASTIC FLOW OF A FLAT STRIP

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Abstract. In [1] the plasticity condition was obtained for one flat two-element dynamic model. In this paper, we investigate the perturbation of the developed flow of a uniaxial stretching of a flat strip that went to the ideal plastic state in the absence and in the presence of initial microstresses.

Keywords: plasticity, elasticity.

REFERENCES

[1] CHekmarev G. E. Ob odnoj dinamicheskoj modeli uprochnyayushchegosya materiala i uslovii plastichnosti dlya nee. VIII vserossijskaya konferenciya po mekhanike deformiruemogo tverdogo tela. Sb. statej po materialam konferencii: CHeboksary, 2014. C. 209–222. (in Russian)

[2] Maksimova L. A. O linearizovannyh uravneniyah prostranstvennyh techenij ideal'no plasticheskih tel // DAN RAN. 1998. T.385. №6. S. 772–772. (in Russian)

[3]Vladimirov V. S., ZHarikov V. V. Uravneniya matematicheskoj fiziki. M. : FIZMATLIT, 2000. 400 s. (in Russian)

Chekmarev Gorgiy Evgenjevich

`e-mail:` chekmarevge@mail.ru, Ph.D. Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

Kuznecov Pavel Nikolaevich

`e-mail:` kuznecov_pn@mail.ru, Ph.D. Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.