

Ю. В. Немировский

ТЕРМОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Аннотация. Исследована модель термопластического квазистатического и динамического формования круглых и кольцевых пластин из идеально-пластического материала. Учитывается термочувствительность свойств материала и предполагается, что поле температур зависит только от времени и радиальной координаты. Исследуется средний продольно-поперечный изгиб пластины при использовании гипотез Киргофа-Лява, условия пластичности Треска и ассоциированного с ним закона пластического состояния. Получены общие разрешающие системы уравнений при реализации в пластине различных комбинаций пластических режимов, проведено частичное интегрирование для различных кольцевых зон пластичности и сформулированы условия сопряжения на границах этих зон. Полное решение ряда иллюстративных примеров и анализ результатов расчета предполагается провести во второй части статьи.

Ключевые слова: круглые и кольцевые пластины-заготовки, квазистатическое и динамическое нагружение, термический нагрев, идеально-пластические материалы, условие пластичности, ассоциированный закон пластического деформирования, термочувствительность пределов текучести, продольно-поперечный изгиб.

УДК: 539.3

Исследование процессов формования изделий и элементов тонкостенных конструкций в условиях воздействия статических и динамических нагрузок на основе модели жестко-пластического тела уже достаточно давно используется в практике теоретических решений технологических задач теории пластичности [1] – [5]. С целью более эффективного решения практических проблем технологического формования конструкций было предложено наряду с механическими воздействиями активно подключать температурные воздействия [6]. Воздействие переменной температуры на формируемую деталь приводит к появлению в ней дополнительных напряжений, а высокий уровень нагрева существенно изменяет механические характеристики материала: как правило, понижается модуль упругости, предел текучести, характеристики упрочнения и

© Немировский Ю. В., 2017
Немировский Юрий Владимирович
e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №17-41-210272).

Поступила 10.07.2017

вязкости и увеличивает степень допустимой деформативности, что создает благоприятные условия для процессов формоизменения. К сожалению, эти вопросы остаются в литературе слабо освещенными. В данной работе применительно к круглым пластинам анализируется характер их пластического деформирования при совместном воздействии силового и температурного поля. Исследуются области наиболее благоприятных воздействий на заготовку.

Основные гипотезы и уравнения. Рассматривая тонкие круглые пластины в условиях осесимметричного термосилового нагружения, закрепления и пологого продольно-поперечного изгиба, будем использовать при получении связей между деформациями и перемещениями традиционные зависимости Киргофа-Лява [1], [7]:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2, \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (1)$$

$$e_r = \varepsilon_r + z\chi_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 - z \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} \quad (2)$$

$$e_\theta = \varepsilon_\theta + z\chi_\theta = \frac{u}{r} - \frac{z}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \quad (3)$$

$$-\frac{h(r)}{2} \leq z \leq \frac{h(r)}{2} \quad (4)$$

здесь u, ω - компоненты вектора смещения точек срединной поверхности; $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ - компоненты деформации срединной поверхности; χ_r, χ_θ - компоненты кривизны изогнутой поверхности; z - координата вдоль нормали к этой поверхности; $h(r)$ - толщина пластинки.

Возникающие в процессе деформирования радиальные σ_r и окружные σ_θ напряжения порождают в пластинке внутренние усилия N_r, N_θ, Q_r и изгибающие моменты M_r, M_θ , которые, как известно [1], [7] должны подчиняться уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rN_r) - N_\theta = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5)$$

$$d(r\beta N_r) + d(rQ_r) = \left[q(r, t) + \rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right] r dr \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rM_r) - M_\theta = -rQ_r \quad (7)$$

здесь t - время, $\beta = \frac{\partial \omega}{\partial r}$.

После интегрирования уравнения (6) получим:

$$Q_r = N_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r} \int \left[q(r, t) + \rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right] r dr + \frac{C_1}{r} \quad (8)$$

здесь C_1 - постоянная интегрирования.

Для сплошных пластинок (без отверстия) величину C_1 можно определить из требования ограниченности сил N_r, Q_r в точке $z = 0$. Тогда будем иметь:

$$Q_r = N_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r} \int_0^r \left[q(r, t) + \rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right] r dr \quad (9)$$

Уравнение (8) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rM_r) - M_\theta + rN_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \int_0^r \left[q(r,t) + \rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right] r dr \quad (10)$$

В случае кольцевой пластинки с заданными на одном из контуров (внутреннем или внешнем) усилия N_r или Q_r постоянная C_1 должна быть определена из требования выполнимости этого условия.

Условие пластичности и закон пластического течения. Будем рассматривать пластическую деформацию заготовки нагружаемой распределенной поперечной нагрузкой $q(r,t)$, равномерным контурным усилием $N_r(a,t) = N_0(t)$ и нагреваемой равномерной по толщине температурой $T(r,t)$, и будем считать, что предел текучести материала заготовки, зависит от температуры, и не зависит от деформации или скорости деформации, при заданных уровнях силовых нагрузок пластичность возникает при превышении уровня начального поля температур $T_0(r)$. Это позволяет использовать подходы и методы решения задач успешно применявшиеся в теории предельного равновесия пластин при отсутствии температуры [1],[2],[4],[5],[8]. В качестве условия пластичности воспользуемся известной призмой Треска–Сен-Венана которая в интересующей нас плоскости напряжений σ_r, σ_θ будет описываться неравенством:

$$|\sigma_\theta - \sigma_r| \leq \sigma_s(T) \text{ при } \sigma_r \sigma_\theta \leq 0; \quad |\sigma_\theta| \leq \sigma_s(T), |\sigma_r| \leq \sigma_s(T) \text{ при } \sigma_r \sigma_\theta > 0 \quad (11)$$

и граница ее определяет шестиугольник ABCDEF на рис.1.

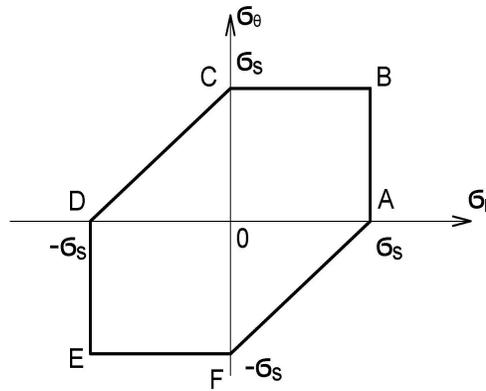


Рис.1

Достижение пластического состояния соответствует реализации знаков равенства в (11). Таким образом, в деформируемой пластинке могут возникать участки, соответствующие различным сторонам или вершинам шестиугольника Треска на рис.1.

Закон пластического течения, связанный с используемым условием текучести требует, чтобы вектор скорости пластического деформирования $(\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2)$ развивался по направлению внешней нормали к поверхности текучести. Таким образом, для гладких участков кривой текучести будем иметь:

$$\dot{\epsilon}_i = \lambda^{(n)} \frac{\partial f^{(n)}(\sigma_1, \sigma_2, T)}{\partial \sigma_i} + \left[\alpha [(T(r,t) - T_0(r))] \right] \quad (12)$$

$$i = z, \theta; n = 1, 2, 3, \dots$$

где $\alpha = \alpha(T)$ - коэффициент линейного расширения материала; $T_0(r)$ - температура тела в допределном состоянии; $T(r, t)$ - текущая температура в состоянии пластического деформирования; $\lambda^{(n)}$ - неопределенный положительный множитель, соответствующий n -му гладкому участку кривой текучести.

Так как пластическое течение развивается непрерывно, то вектор скорости пластической деформации для пластических состояний соответствующих вершинам многоугольника текучести должен занимать любое положение между нормальными к сторонам n и $n + 1$ образующим данную вершину. В результате будем иметь:

$$\dot{\epsilon}_i = \lambda_1^{(n)} \frac{\partial f^{(n)}(\sigma_1, \sigma_2, T)}{\partial \sigma_i} + \lambda_2^{(n)} \frac{\partial f^{(n+1)}(\sigma_1, \sigma_2, T)}{\partial \sigma_i} + \left[\alpha[(T(r, t) - T_0(r))] \right] \quad (13)$$

Множители $\lambda_1^{(n)}$ и $\lambda_2^{(n)}$ связаны между собой следующим образом:

$$\lambda_1^{(n)} = (1 - \mu^{(n)})\nu^{(n)}, \quad \lambda_2^{(n)} = \mu^{(n)}\nu^{(n)} \quad (14)$$

$$0 \leq \mu^{(n)} \leq 1$$

где $\nu^{(n)}$ совпадает с множителем $\lambda^{(n)}$ или $\lambda^{(n+1)}$ из напряженных состояний отвечающих гладким участкам функции текучести $f^{(n)} = 0$ или $f^{(n+1)} = 0$ будет ли $\mu^{(n)}$ равно нулю или единице. При использовании условия пластичности Треска пластинка-заготовка при деформировании разбивается на кольцевые зоны а пределах которых основные уравнения могут быть относительно легко проинтегрированы, что позволяет довести анализ до простых инженерных формул и избежать громозких и объемных вычислительных процедур. Скорость рассеяния механической энергии при пластической деформации рассматриваемой пластины равна:

$$D = \sum_{i=1}^2 \sigma_i \dot{\epsilon}_i = \lambda^{(n)} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f^{(n)}}{\partial \sigma_i} \sigma_i = \lambda^{(n)} \sigma_s(T)x, \quad (x = \pm 1)$$

Таким образом множитель $\lambda^{(n)}$ пропорционален удельной скорости рассеяния механической энергии.

Связь между усилиями, моментами деформациями и искривлениями пластинки при термопластическом изгибе.

Для получения замкнутой разрешающей системы уравнений необходимо получать соотношения между кинематическими и механическими характеристиками и температурой в пластически деформирующейся заготовке при любых комбинациях возможных пластических режимов. Используя методологию анализа возможных пластических режимов в оболочках вращения [8] для рассматриваемых круглых пластин можно установить, что в пластинах, деформирующихся в условиях рассмотренных термосиловых воздействий возможно существование пластичных режимов в виде пар параллельных сторон (BC, EF) , (CD, FA) и им симметричным на рис.1 или троек угловых режимов (B, C, D) , (C, D, E) и им симметричным. Усилия N_r, N_θ и изгибающие

моменты M_r, M_θ определяются выражениями:

$$N_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r dz, \quad N_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta dz, \quad M_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r z dz, \quad M_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta z dz \quad (15)$$

Пусть некоторый слой по толщине пластинки $z_1 \leq z \leq z_2$ находится в состоянии BC (рис.1). Тогда закон пластического течения имеет вид:

$$\dot{\epsilon}_r = \dot{\epsilon}_r + z\dot{\chi}_r - \left[\alpha\dot{T} + \dot{\alpha}(T - T_0) \right] = 0, \quad \dot{\epsilon}_\theta > 0 \quad (16)$$

Рассматривая (16) как полином первой степени по z , получим:

$$\dot{\epsilon}_r = \alpha\dot{T} + \dot{\alpha}(T - T_0) = 0, \quad \dot{\chi}_r > 0 \quad (17)$$

Отсюда, используя кинематические формулы (1), (2) после интегрирования получим:

$$\dot{\omega} = \dot{C}_1(t)r + \dot{C}_2(t); \quad \dot{u} = \dot{C}_1 C_1 r + \int \frac{d(\alpha(T - T_0))}{dt} dr + C_3(t) \quad (18)$$

здесь $\dot{C}_1, \dot{C}_2, \dot{C}_3$ - константы интегрирования по r .

В силу равенств (17), и непрерывности развития пластических деформаций по толщине пластины в оставшихся слоях должно быть $\dot{\epsilon}_r = 0$, что по закону течения соответствует стороне EF на рис.1. Таким образом по толщине пластины могут реализоваться два состояния:

Состояние BC :

$$\sigma_\theta = \sigma_\zeta(T), \quad \dot{\epsilon}_r = 0, \quad 0 \leq \sigma_r \leq \sigma_\theta, \quad \dot{\epsilon}_\theta > 0 \quad (19)$$

$$z_0 \leq z \leq \frac{h}{2}$$

И состояние EF :

$$\sigma_\theta = -\sigma_\zeta, \quad \dot{\epsilon}_r = 0, \quad \sigma_\theta \leq \sigma_r \leq 0, \quad \dot{\epsilon}_\theta = 0 \quad (20)$$

$$-\frac{h}{2} \leq z \leq z_0$$

где $z_0 = z_0(r)$ - граница раздела состояний BC и EF .

В этом случае будем иметь:

$$N_\theta = -2z_0\sigma_\zeta(T), \quad M_\theta = \sigma_\zeta(T) \left(\frac{h^2}{4} - z_0^2 \right), \quad (21)$$

$$-\sigma_\zeta(T) \left(z_0 + \frac{h}{2} \right) \leq N_r \leq \sigma_\zeta(T) \left(\frac{h}{2} - z_0 \right), \quad M_\theta \geq 0, \quad 0 \leq M_r \leq \sigma_\zeta(T) \left(\frac{h^2}{4} - z_0^2 \right)$$

Если по толщине пластинки реализуется только состояние BC , то получим:

$$0 \leq N_r \leq \sigma_\zeta(T)h(r), \quad M_\theta = 0, \quad N_\theta = \sigma_\zeta(T)h \quad (22)$$

Исключая в (21) z_0 получим условие пластичности, связывающее момент M_θ и усилие N_θ :

$$M_\theta = \frac{\sigma_\zeta(T)}{4} \left[h^2 - \frac{N_\theta^2}{\sigma_\zeta^2(T)} \right], \quad h = h(r) \quad (23)$$

Поверхность $z_0(r)$ определяется равенством:

$$z_0 = - \frac{\dot{\varepsilon}_\theta - \alpha \dot{T}(r, t) - \dot{\alpha}[T(r, t) - T_0(r)]}{\dot{\chi}_\theta}$$

или через скорости \dot{u} , $\dot{\omega}$:

$$z_0 = \frac{\dot{u} - r[\alpha \dot{T} - \dot{\alpha}(T - T_0)]}{\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial r}} \quad (24)$$

Таким образом, для данного режима определение основных характеристик (усилий, моментов, нейтральной поверхности z_0 сводится к нахождению скоростей перемещений \dot{u} , $\dot{\omega}$. Для определения последних существуют два дифференциальных уравнения равновесия для сил и моментов. Третья главная деформация, характеризующая скорость изменения толщины пластинки определяется из условия несжимаемости:

$$\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\theta + \dot{\varepsilon}_n = 3[\alpha(T(r, t) - T_0)] \quad (25)$$

Аналогичным образом, можно показать что, если по толщине пластины реализуются режимы *CB* и *FA*, то будут справедливы зависимости:

$$\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\theta - 2[\alpha \dot{T}(r, t) - \dot{\alpha}(T(r, t) - T_0(r))] = 0 \quad (26)$$

$$\dot{\chi}_r + \dot{\chi}_\theta = 0$$

$$\omega = C_1 \ln r + C_2 \quad (27)$$

$$ru = -\frac{C_1^2}{2} \ln r + 2 \int \alpha(T - T_0) r dr + C_3$$

$$N_\theta = N_r - 2z_0 \sigma_\zeta(T); \quad M_\theta = M_r + \sigma_\zeta(T) \left(\frac{h^2}{4} - z_0^2 \right) \quad (28)$$

$$M_\theta = M_r + \sigma_\zeta(T) \left[\frac{h^2}{4} - \frac{(N_r - N_\theta)^2}{4\sigma_\zeta^2(T)} \right] \quad (29)$$

$$z_0 = \frac{\dot{u} - r[\alpha(T - T_0)]'}{\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial r}} \quad (30)$$

$$-h\sigma_\zeta(T) \leq N_\theta - N_r \leq h\sigma_\zeta(T)$$

$$0 \leq M_\theta - M_r \leq \sigma_\zeta(T) \frac{h^2}{4} \quad (31)$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial r} < 0, \quad \frac{\partial^2 \dot{\omega}}{\partial r^2} > 0 \quad (32)$$

Ситуация, соответствующая неравенствам (31) может возникать вблизи заделанного контура заготовки, когда этот край не движется и не поворачивается. Можно показать, что в рамках рассматриваемых осесимметричных поверхностных нагрузок и равномерных по толщине нагревов одновременная реализация пластического деформирования, соответствующая стороне и вершине шестиугольника пластичности, невозможна. В пластине могут реализоваться пластические состояния, соответствующие соседним вершинам шестиугольника. Предположим, что некоторый слой $z_1 \leq z \leq \frac{z}{2}$ находится в состоянии B . Тогда закон течения будет иметь вид:

$$\dot{\epsilon}_r = \lambda_1 = -(1 - \mu)\nu_1 > 0, \quad \dot{\epsilon}_\theta = \lambda_2 = \mu_1\nu_1 > 0 \quad (33)$$

или

$$\mu_1 \dot{\epsilon}_r - (1 - \mu) \dot{\epsilon}_\theta = 0 \quad (34)$$

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_\varsigma(T)$$

здесь μ_1 - неизвестная искомая величина, которая для состояния B принимает вид:

$$\mu_1 = \frac{\dot{\epsilon}_\theta}{\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta} = \frac{\dot{\epsilon}_\theta + z\dot{\chi}_\theta - [\alpha(T - T_0)]'}{\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta + z(\dot{\chi}_r + \dot{\chi}_\theta) - 2[\alpha(T - T_0)]'} \quad (35)$$

$$\forall z \in \left[z_1, \frac{h}{2} \right]$$

Аналогично можно записать законы пластических течений в других вершинах.

$$C : \dot{\epsilon}_r = -\lambda_2 = \mu_2\nu_2; \quad \dot{\epsilon}_\theta = \lambda_1 + \lambda_2 = \nu_2; \quad \mu_2 = -\frac{\dot{\epsilon}_r}{\dot{\epsilon}_\theta} \quad (36)$$

$$D : \dot{\epsilon}_r = -\lambda_1 - \lambda_2 = \nu_3; \quad \dot{\epsilon}_\theta = \lambda_1 = (1 - \mu_3)\nu_3; \quad \mu_3 = \frac{\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta}{\dot{\epsilon}_r} \quad (37)$$

$$E : \dot{\epsilon}_r = -\lambda_1 = (1 - \mu_4)\nu_4; \quad \dot{\epsilon}_\theta = \lambda_2 = \mu_4\nu_4; \quad \mu_4 = \frac{\dot{\epsilon}_\theta}{\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta} \quad (38)$$

$$(0 \leq \mu_j \leq 1, \quad j = 1, 2, 3, 4)$$

Равенства (36)-(38) можно записать в форме:

$$\mu_2(z) = -\frac{\dot{\epsilon}_r + z\dot{\chi}_r - [\alpha(T - T_0)]'}{\dot{\epsilon}_\theta + z\dot{\chi}_\theta - [\alpha(T - T_0)]'} \quad (39)$$

$$\mu_3(z) = \frac{\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta + z(\dot{\chi}_r + \dot{\chi}_\theta) - 2[\alpha(T - T_0)]'}{\dot{\epsilon}_r + z\dot{\chi}_r - [\alpha(T - T_0)]'} \quad (40)$$

$$\mu_4(z) = \frac{\dot{\epsilon}_\theta + z\dot{\chi}_\theta - [\alpha(T - T_0)]'}{\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta + z(\dot{\chi}_r + \dot{\chi}_\theta) - 2[\alpha(T - T_0)]'} \quad (41)$$

Так как скорости деформаций $\dot{\epsilon}_r, \dot{\epsilon}_\theta$ - линейны по z , то в общем случае распределение пластических состояний - вершин может быть следующим:

Состояние C ($z_2(r) \leq z \leq z_1(r)$):

$$\dot{\epsilon}_\theta > 0, \quad \dot{\epsilon}_r \leq 0, \quad \sigma_r = 0, \quad \sigma_\theta = \sigma_\varsigma(T),$$

μ_2 определяется по формуле (39).

Состояние D ($z_3(r) \leq z \leq z_2(r)$):

$$\dot{\epsilon}_\theta \geq 0, \dot{\epsilon}_r < 0, \sigma_r = -\sigma_\zeta(T), \sigma_\theta = 0,$$

μ_3 определяется по формуле (40).

Состояние E ($-\frac{h}{2} \leq z \leq z_3(r)$):

$$\dot{\epsilon}_\theta < 0, \dot{\epsilon}_r < 0, \sigma_r = \sigma_\theta = -\sigma_\zeta(T),$$

μ_4 определяется по формуле (41).

В соответствии с рассмотренным полем напряжений для этих угловых режимов получим выражения усилий и моментов:

$$N_r = - \int_{-h/2}^{z_3} \sigma_\zeta dz - \int_{z_3}^{z_2} \sigma_\zeta dz + \int_{z_1}^{h/2} \sigma_\zeta dz = -\sigma_\zeta(T)(z_1 + z_2) \quad (42)$$

$$N_\theta = -\sigma_\zeta(T)(z_2 + z_3) \quad (43)$$

$$M_r = \frac{\sigma_\zeta(T)}{2} \left[\frac{h^2}{2} - z_2^2 - z_1^2 \right] \geq 0 \quad (44)$$

$$M_\theta = \frac{\sigma_\zeta(T)}{2} \left[\frac{h^2}{2} - z_2^2 - z_1^2 \right] \geq 0 \quad (45)$$

Так как $-\frac{h}{2} \leq z_1 \leq \frac{h}{2}$, $-\frac{h}{2} \leq z_2 \leq \frac{h}{2}$, $-\frac{h}{2} \leq z_3 \leq \frac{h}{2}$, то:

$$-\sigma_\zeta(T)h(r) \leq N_r \leq \sigma_\zeta(T)h(r), \quad -\sigma_\zeta(T)h \leq N_\theta \leq \sigma_\zeta(T)h(r) \quad (46)$$

Границы z_1 и z_3 находим, соответственно, из условий $\dot{\epsilon}_r(z_1) = 0$, $\dot{\epsilon}_\theta(z_3) = 0$:

$$z_1 = - \frac{\dot{\epsilon}_r - [\alpha(T - T_0)]'}{\dot{\chi}_r} \quad (47)$$

$$z_3 = - \frac{\dot{\epsilon}_\theta - [\alpha(T - T_0)]'}{\dot{\chi}_\theta} \quad (48)$$

Поскольку граница z_2 разделяет состояния C и D , то для нее $[\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta]_{z=z_2}$, следовательно:

$$z_2 = - \frac{\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta - 2[\alpha(T - T_0)]'}{\dot{\chi}_r + \dot{\chi}_\theta} \quad (49)$$

Таким образом, в случае реализации угловых режимов поиск всех неизвестных величин сведется к отысканию компонентов вектора перемещений u и ω . При этом для таких состояний необходимо соблюдать ограничения на величины $0 \leq \mu_j \leq 1$, ($j = 1, 2, 3, 4$), которые с помощью кинематических соотношений можно привести к виду:

$$\text{для } \forall z \in \left[z_1, \frac{h}{2} \right]$$

$$\dot{u} - z \frac{\partial^2 \dot{\omega}}{\partial r^2} \geq r[\alpha(T - T_0)]'$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial r} - z \frac{\partial^2 \dot{\omega}}{\partial r^2} > [\alpha(T - T_0)]' \quad (50)$$

для $\forall z \in [z_2, z_1]$:

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial r} - z \frac{\partial^2 \dot{\omega}}{\partial r^2} \leq [\alpha(T - T_0)]' \quad (51)$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial r} + \frac{\dot{u}}{r} - z \left(\frac{\partial^2 \dot{\omega}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial r} \right) > 2[\alpha(T - T_0)]'$$

для $\forall z \in [z_3, z_2]$:

$$\dot{u} - z \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial r} \geq [\alpha(T - T_0)]' \quad (52)$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial r} + \frac{\dot{u}}{r} - z \left(\frac{\partial^2 \dot{\omega}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial r} \right) \leq 2[\alpha(T - T_0)]'$$

и для $\forall z \in [-\frac{h}{2}, z_3]$:

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial r} - z \frac{\partial^2 \dot{\omega}}{\partial r^2} < [\alpha(T - T_0)]' \quad (53)$$

$$\dot{u} - z \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial r} < r[\alpha(T - T_0)]'$$

Точка и штрих обозначают частную производную по времени t .

Эти неравенства эквивалентны требованию закона пластического течения, чтобы неопределенные множители λ_1, λ_2 были положительными. Если предположить, что по толщине пластины реализуется другая комбинация угловых режимов, например:

при $z_1 \leq z \leq \frac{h}{2}$ – режим C :

$$\dot{e}_\theta > 0, \dot{e}_r \leq 0, \sigma_r = 0, \sigma_\theta = \sigma_\varsigma(T)$$

при $z_2 \leq z \leq z_1$ – режим D :

$$\dot{e}_\theta \geq 0, \dot{e}_r < 0, \sigma_r = -\sigma_\varsigma(T), \sigma_\theta = 0$$

при $z_3 \leq z \leq z_2$ – режим E :

$$\dot{e}_\theta \leq 0, \dot{e}_r \leq 0, \sigma_r = -\sigma_\varsigma(T) = \sigma_\theta$$

при $-\frac{h}{2} \leq z \leq z_3$ – режим F .

то проводя аналогичные рассуждения можно получить иные зависимости и неравенства. Например, для усилий и моментов получим выражения:

$$N_r = \sigma_\varsigma(T)(z_3 - z_1), \quad N_\theta = -\sigma_\varsigma(T)(z_2 + z_1) \quad (54)$$

$$M_r = \frac{\sigma_\varsigma(T)}{2}(z_3^2 - z_1^2), \quad M_\theta = \frac{\sigma_\varsigma(T)}{2} \left(\frac{h^2}{2} - z_2^2 + z_1^2 \right)$$

где

$$z_1 = -\frac{\dot{e}_r + \dot{e}_\theta - 2[\alpha(T - T_0)]'}{\dot{\chi}_r + \dot{\chi}_\theta},$$

$$z_2 = -\frac{\dot{\varepsilon}_\theta - [\alpha(T - T_0)]'}{\dot{\chi}_\theta}, \quad (55)$$

$$z_3 = -\frac{\dot{\varepsilon}_r - [\alpha(T - T_0)]'}{\dot{\chi}_r}.$$

Реализация различных пластических режимов в пластике будет меняться в зависимости от изменения условий ее закрепления, характера изменения температурного поля и механических нагрузок. Поэтому дальнейшее углубление в анализе реализации возможных пластических нагрузок целесообразнее проводить для конкретных условий технологического деформирования заготовок. Если поле напряжений во всей пластинке реализуется в одном типе пластических режимов, то нахождение всех интересующих нас величин: усилий, моментов, перемещений и границ разделов пластических состояний по толщине не представляет большого труда. Однако, как правило, пластинка делится на кольцевые зоны, каждая из которых находится в различном пластическом состоянии и границы этих зон заранее неизвестны.

Условия сопряжения между различными пластическими кольцевыми областями. С целью определения кольцевых границ различных пластических состояний, выделим окружность, разделяющую два различных пластических состояния и рассмотрим соотношения между различными механическими величинами по обе стороны от этой окружности.

Из условия локального равновесия следует что при переходе через границу L непрерывными должны быть усилие N_r , изгибающий момент M_r и перерезывающее усилие Q_r . Условие сплошности пластинки требует непрерывности перемещений u, ω и углов поворота $\frac{\partial \omega}{\partial r}$ на всех окружностях, кроме окружности, для которой $|\sigma_r| = \sigma_c(T)$ - шарнирной окружности - на которой $\frac{\partial \omega}{\partial r}$ может терпеть разрыв. В общем случае для решения задачи в каждой области необходимо определить функции $u, \omega, \varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_h, \chi_r, \chi_\theta, z_0, M_r, M_\theta, Q_r, N_r, N_\theta$ и λ .

Для их нахождения служат выписанные выше кинематические соотношения, уравнение несжимаемости, закон пластического деформирования, усилия и моменты выраженные через поверхности разрыва пластических состояний z_{0j} , выражения z_{0j} через кинематические характеристики и уравнения равновесия. Появляющиеся при интегрировании в каждой пластической зоне константы интегрирования должны определяться из условий на границах сопряжения и заданных граничных условий на внутреннем и наружном контуре пластины. Ясно, что детальное описание соответствующих процедур можно провести при решении конкретных задач, которые будут рассмотрены во второй части этой статьи в следующем номере.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ерхов М. И. Теория идеально пластических тел и конструкций. М.: Наука, 1978.
- [2] Комаров К. Л., Немировский Ю.В. Динамика жестко-пластических элементов конструкций. Новосибирск: Наука, 1984. 232 с.
- [3] Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамика сопротивления плоских пластических преград. Новосибирск: ГЕО, 2009. 311 с.
- [4] Гопкинс Г., Прагер В. Несущая способность круглых пластинок. М.:И.Л., 1955. С.100-113.
- [5] Gleisal Plastic deformations of circular diaphragms under pressure //J.Appl.Meran. Ser.E. 1948. V.15, No 3.
- [6] Шевченко Ю. Н. Пространственные задачи термопластичности. Киев: Наукова думка, 1980.
- [7] Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: Физматлит,1956.
- [8] Онат Е., Прагер В. Предельное равновесие оболочек вращения. Сб.перев. Механика, М.:И.Л., 1955. С.107–119.
- [9] Проблемы высоких температур в авиационных конструкциях. Сб.статей под ред. Г.В. Ужика. Москва:И.Л., 1967. 595 с.

Yu. V. Nemirovskii

THERMOPLASTIC BEND OF ROUND PLATES

Institute of Theoretical and Applied Mechanics S.A.Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

Abstract. The model of thermoplastic quasistatic and dynamic formation of round and ring plates from ideal and plastic material is investigated. The thermosensitivity of properties of material is considered and it is supposed that the field of temperatures depends only on time and radial coordinate. The average longitudinally cross bend of a plate at an ospolzovaniye of hypotheses is investigated Kirgofa-Lyava, conditions of plasticity of the Crash and the law of a plastic state associated with him. The general allowing systems of the equations at realization in a plate of various combinations of the plastic modes are received, partial integration for various ring zones of plasticity is carried out and interface conditions on borders of these zones are formulated. The full solution of a number of illustrative examples and the analysis of results of calculation is supposed to be carried out in the second part of article.

Keywords: round and ring plates preparations, quasistatic and dynamic loading, thermal heating, ideal and plastic materials, plasticity condition, the associated law of plastic deformation, thermosensitivity of limits of fluidity, longitudinally cross bend.

REFERENCES

- [1] Erhov M. I. Teoriya ideal'no plasticheskikh tel i konstrukcij. M.: Nauka, 1978. (in Russian)
- [2] Komarov K. L., Nemirovskij YU.V. Dinamika zhestko-plasticheskikh ehlementov konstrukcij. Novosibirsk: Nauka, 1984. 232 s. (in Russian)
- [3] Nemirovskij YU. V., Romanova T. P. Dinamika soprotivleniya ploskikh plasticheskikh pregrad. Novosibirsk: GEO, 2009. 311 s. (in Russian)
- [4] Gopkins G., Prager V. Nesushchaya sposobnost' kruglyh plastinok. M.:I.L., 1955. C.100-113. (in Russian)
- [5] Gleisal Plastic deformations of circular diaphragms under pressure //J.Appl.Meran. Ser.E. 1948. V.15, No 3.
- [6] SHEvchenko YU. N. Prostranstvennyye zadachi termoplastichnosti. Kiev: Naukova dumka, 1980. (in Russian)
- [7] Vol'mir A. S. Gibkie plastinki i obolochki. M.: Fizmatlit, 1956. (in Russian)
- [8] Onat E., Prager V. Predel'noe ravnovesie oblochek vrashcheniya. Sb.perev. Mekhanika, M.:I.L., 1955. C.107-119. (in Russian)
- [9] Problemy vysokih temperatur v aviacionnyh konstrukciyah. Sb.statej pod red. G.V. Uzhika. Moskva:I.L., 1967. 595 s. (in Russian)

Nemirovsky Yuri Vladimirovich

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics S.A.Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia.