Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 3 (21). С. 131–143

В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ УДАРНОЙ ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ СРЕД

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук

Аннотация. В статье представлено обобщение метода асимптотического анализа прифронтовых областей для задач ударной деформации нелинейно-упругих сред, основанного на выводе эволюционного уравнения. Метод распространяется с одномерных краевых задач на многомерные за счет перехода к линейной апроксимации системы лучевых координат. Показано, что эволюционное уравнение содержит координату эйконала только как параметр, т.е. лучевая координата прифронтовой области имеет доминирующее значение при оценке скорости изменения деформации. В качестве модельного примера построено решение двумерной задачи антиплоской деформации несжимаемой нелинейно-упругой среды.

Ключевые слова: нелинейная упругость, несжимаемость, ударная волна, метод возмущений, лучевые координаты, эволюционное уравнение.

УДК: 539.3

Введение. Задача совершенствования наших представлений о динамике процессов, протекающих в твердых телах, неизбежным образом сопряжена с отказом от наиболее простых линейных модельных соотношений и переходом к моделям более высокого уровня сложности, учитывающим и геометрическую, и физическую нелинейность [1], [2], [3]. Для существенно нестационарных задач интенсивного деформирования этот переход является обязательным условием адекватного описания процесса. Он позволяет показать и взаимодействие объемной и сдвиговой деформации, и влияние на динамику передних волновых фронтов процесса послеударного воздействия и предварительных деформаций, имеющихся в среде [3], [4]. Вместе с тем, возникает известная трудность в решении конкретных нелинейных краевых задач — недостаточный набор математических методов и приемов. В первую очередь это относится к возможности получения точных решений. Одновременно возрастает значение приближенного анализа, как численного, так и теоретического. В последнем случае отметим методы малого параметра [2], [5], [6] и метод лучевых рядов [7], [8]. Наибольшую наглядность имеют решения, основанные на применении метода малого параметра, сводящего задачу в прифронтовой области к решению упрощенного, так называемого эволюционного уравнения. Сохраняя нелинейную структуру, это уравнение относится к вполне интегрируемым; его решения позволяют описать нелинейную динамическую деформацию. Получению и применению таких уравнений для одномерных задач нелинейно–упругих сред посвящен ряд работ [9], [10], [11]. Авторам статьи представляется вполне целесообразным дальнейшее развитие метода с целью

Поступила 15.08.2014

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 14–01–31030 мол_а, код проекта 14–01–00292 А).

перенесения его на неодномерные задачи. Далее из многообразия этих задач в качестве модельного примера выбрана задача антиплоского двумерного деформирования несжимаемой нелинейно-упругой среды. Наиболее важным результатом, полученным в ходе ее решения и обсуждаемым здесь, следует считать эволюционное уравнение, также возникающее в прифронтовой области, если независимыми переменными задачи выбраны лучевые координаты. Это уравнение показывает приоритетную зависимость прифронтового решения от координаты вдоль луча, поскольку координаты эйконала входят в уравнение только в качестве параметров. Подчеркнем принципиальное отличие в эволюционном уравнении распространения деформаций изменения формы от аналогичного, описывающего нелинейные особенности в распространении объемных деформаций (от уравнения квазипростых волн). Эти эффекты имеют универсальный характер, поскольку не определяются конкретными краевыми условиями задачи. Предлагаемый далее способ решения имеет как самостоятельную теоретическую ценность, так и прикладное значение: полученные формулы могут быть использованы при разработке новых схем численного счета с выделением поверхностей сильных разрывов.

1. Определяющие соотношения нелинейно-упругой несжимаемой среды и краевые условия задачи. Общая система уравнений, задающая движение несжимаемой упругой среды в пространственной криволинейной системе координат Эйлера, x^1 x^2, x^3, имеет вид

$$\begin{gathered}
v^i = \dot{u}^i + u^i_{,j} v^j, \quad 2\alpha_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u^k_{,j}, \\
\sigma^{ij}_{,j} = \rho(\dot{v}^i + v^i_{,j} v^j), \quad \sigma^i_j = -p_0 \delta^i_j + \frac{\partial W}{\partial \alpha^j_k}(\delta^i_k - 2\alpha^i_k), \\
\dot{u}^i = \frac{\partial u^i}{\partial t}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \Gamma^k_{ij} u_k, \quad u^i, j = \frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \Gamma^i_{jk} u^k, \quad \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},
\end{gathered} \tag{1.1}$$

где u^i и v^i — контравариантные компоненты векторов перемещений и скорости среды, α_{ij} — ковариантные компоненты тензора деформаций Альманси, σ^{ij}— контравариантные компоненты тензора напряжений Эйлера-Коши, $\rho = const$ — плотность среды, p_0 — добавочное гидростатическое давление, W — функция упругого потенциала. В (1.1) и далее латинские индексы принимают значения 1, 2, 3, если не оговорено иное. По повторяющемуся верхнему и нижнему индексу происходит суммирование. Замыкает систему (1.1) уравнение, задающее конкретный вид W и тем самым свойства среды. Считая среду изотропной и раскладывая W в ряд Тейлора в окрестности свободного состояния, приходим к формуле

$$\begin{gathered}
W(I_1, I_2) = -2\mu I_1 - \mu I_2 + bI_1^2 + (b-\mu) I_1 I_2 - \theta I_1^3 + \\
+cI_1^4 + \frac{b-\mu}{4} I_2^2 + (b - \mu - \frac{3}{2}\theta) I_1^2 I_2 + ..., \quad I_1 = \alpha^i_i, \quad I_2 = \alpha^i_j \alpha^j_i,
\end{gathered} \tag{1.2}$$

в которой μ, b, θ, c — упругие модули среды. Необходимо отметить, что в (1.2) входит меньшее число упругих модулей, чем в обычное для таких сред представление W [10]. На это обстоятельство ранее обращалось внимание в [12], оно определяется типом рассматриваемой краевой задачи.

Теперь остановимся на краевых условиях задачи. Рассматриваем пространство, занятое нелинейно-упругой несжимаемой средой, в котором присутствует полость. Границей полости считаем цилиндрическую поверхность Φ, бесконечные образующие которой параллельны прямой, совпадающей с осью x^3. Направляющий контур L расположен в плоскости x^1, x^2, он замкнутый и достаточно гладкий. Если контур L — неограниченная кривая, то можно перейти к задаче, в которой исследуемая область — полупространство с неплоской границей. До момента $t = 0$ среда считается недеформированной. Начиная с момента $t = 0$, на границе полости Φ происходит интенсивное сдвиговое нагружение, результатом которого будет возникающее в среде поле перемещений $u^1 = u^2 = 0$, $u = u^3(x^1, x^2, t)$. Движение граничных точек

Φ считаем известным и представим рядом Тейлора в положительной окрестности $t = 0$:

$$u|_{\Phi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}\bigg|_{t=0} t^k \approx v(y)t + \frac{a(y)t^2}{2} + \ldots, \quad v(y) \neq 0, \tag{1.3}$$

где y — произвольный параметр вдоль контура L. Как следует из (1.3), в начальный момент времени от Φ отделяется ударная волна Σ. Ее положение со временем в пространстве задается параметрическими уравнениями $x^i = x^i(y^\alpha, t), (\alpha = 1, 2)$, где y^α — внутренняя координатная система на Σ. Каждая ее точка в любой момент времени движется в направлении единичной внешней нормали ν^i с сохранением значений y^α, так что $\dot{x}^i = G\nu^i$, где G — скорость ударной волны. Если необходимо проследить за изменением каких-либо величин, заданных во всей области или только на Σ, с течением времени, то мерой его становится оператор дельта-дифференцирования [13], [14]. Обычно ограничиваются представлением этого оператора для случая, когда x^i — декартова система координат. При этом

$$\frac{\delta f}{\delta t} = \dot{f} + \frac{\partial f}{\partial x^i} G\nu^i, \tag{1.4}$$

когда $f = f(x^i(y^\alpha, t), t)$ и $\delta f/\delta t$ совпадает с частной производной по времени для $f = f(y^\alpha, t)$ (функция f задана только на Σ). Здесь для сокращения обозначений под буквой «f» подразумеваются компоненты некоторого тензорного поля. В [15] показано, что для произвольной криволинейной системы координат x^i обобщением (1.4) будет формула

$$\begin{gathered} \frac{\delta f^{i_1 \ldots i_s\, \alpha_1 \ldots \alpha_m}_{j_1 \ldots j_r\, \beta_1 \ldots \beta_n}}{\delta t} = \frac{\partial f^{i_1 \ldots i_s\, \alpha_1 \ldots \alpha_m}_{j_1 \ldots j_r\, \beta_1 \ldots \beta_n}}{\partial t} + \Big\{ \Gamma^{i_1}_{lk} f^{l i_2 \ldots i_s\, \alpha_1 \ldots \alpha_m}_{j_1 \ldots j_r\, \beta_1 \ldots \beta_n} + \cdots + \\ + \Gamma^{i_s}_{lk} f^{i_1 \ldots l\, \alpha_1 \ldots \alpha_m}_{j_1 \ldots j_r\, \beta_1 \ldots \beta_n} - \Gamma^{l}_{j_1 k} f^{i_1 \ldots i_s\, \alpha_1 \ldots \alpha_m}_{l j_2 \ldots j_r\, \beta_1 \ldots \beta_n} - \cdots - \Gamma^{l}_{j_r k} f^{i_1 \ldots i_s\, \alpha_1 \ldots \alpha_m}_{j_1 \ldots l\, \beta_1 \ldots \beta_n} \Big\} G\nu^k. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Там же приводится детальное исследование свойств этой операции.

На поверхности ударной волны Σ систему уравнений (1.1), (1.2) необходимо заменить геометрическими, кинематическими и динамическими условиями совместности [15], которые с учетом (1.5) имеют вид

$$\begin{gathered} [f_{,i}] = \left[\frac{\partial f}{\partial \nu}\right] \nu_i + g_{ik} a^{\alpha\beta} [f]_{,\alpha} x^k_{,\beta}, \quad [\dot{f}] = -G \left[\frac{\partial f}{\partial \nu}\right] + \frac{\delta [f]}{\delta t}, \\ \big[\rho(v^i \nu_i - G)\big] = 0, \quad [\sigma^{ij}]\nu_j = \rho^+ (v^+_j \nu^j - G)[v^i], \\ x^k_{,\beta} = \frac{\partial x^k}{\partial y^\beta}, \quad a^{\alpha\beta} a_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma, \quad a_{\beta\gamma} = x^i_{,\beta} x^i_{,\gamma}, \quad \left[\frac{\partial f}{\partial \nu}\right] = f_{,i}\nu^i, \quad [f] = f^+ - f^-, \end{gathered} \tag{1.6}$$

где g_{ij} и $a_{\alpha\beta}$ — ковариантные компоненты пространственной и поверхностной метрики соответственно, греческие индексы принимают значения 1, 2, индексами «+» и «-» обозначены предельные значения индексированной величины, взятые перед перед Σ или сразу за ней, квадратными скобками обозначен скачок величины, заключенной в них.

Для нашей задачи следствием (1.6) и отсутствия предварительных деформаций будет система краевых условий на ударной волне:

$$\begin{gathered} u|_\Sigma = 0, \quad G = C\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \tau^{2k}\right)^{1/2}, \quad \tau = \left[\frac{\partial u}{\partial \nu}\right]\bigg|_\Sigma = -\frac{\partial u^-}{\partial \nu}\bigg|_\Sigma, \\ [\sigma_{\nu\nu}]|_\Sigma = 0, \quad C^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad \gamma_1 = \frac{b - \mu}{8\mu}, \quad \gamma_2 = -\frac{b + 5\mu}{4\mu}, \end{gathered} \tag{1.7}$$

в которых τ — мера интенсивности ударной волны. В (1.7) не содержится полной информации относительно геометрии и кинематики Σ, что отличает поставленную задачу от одномерных, где можно было сделать предварительные заключения по геометрии ударной волны.

2. Уточнение координатной системы и уравнения движения задачи. До сих пор не был конкретизирован выбор криволинейной системы координат x^i за исключением утверждения о прямолинейности оси x^3. Свяжем оставшиеся координаты x^1, x^2 с геометрией границы полости. Будем считать, что от каждой точки L в среду направлена прямая по вектору $\bar{\nu}_{\mathbf{0}}$— нормали к Ф. Откладываемое вдоль этих прямых расстояние примем в качестве x^1, а параметр вдоль контура L будем считать совпадающим с x^2. При этом любой радиус-вектор в плоскости x^1, x^2 можно задать в виде

$$\bar{\mathbf{r}}(x^1, x^2) = \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}}(x^2) + \bar{\nu}_{\mathbf{0}}(x^2)x^1, \quad x^1 \geq 0, \tag{2.1}$$

где $\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}}(x^2)$ — вектор-функция, соответствующая точкам L. Очевидно, что система координат x^i будет ортогональной. Диагональные компоненты ее метрического тензора даются формулами

$$g_{11} = g_{33} = 1, \quad g_{22}(x^1, x^2) = g_{22}^0 \left(1 - \frac{x^1 b_0}{g_{22}^0}\right)^2, \quad g_{22}|_{\Phi} = g_{22}^0(x^2), \quad b_0 = b_0(x^2), \tag{2.2}$$

где индексом «0» обозначены геометрические характеристики Ф. В частности, b_0 — единственный ненулевой элемент второй квадратичной формы поверхности Ф: $b_{\alpha\beta} = x^i_{0,\alpha\beta}\nu_i^0$, причем x_0^i значения координат, соответствующие $\bar{r}_0$. В дальнейшем все геометрические характеристики Ф обозначаются дополнительно индексом «0». Выбранная система координат x^i совпадает с лучевыми координатами поставленной задачи в линейном приближении.

В системе x^i следствиями уравнений (1.1), (1.2) для нашей краевой задачи будут три уравнения движения, причем в двух из них содержатся функции $p_0(x^i, t)$ и $u(x^i, t)$, а третье уравнение решается независимым образом относительно $u(x^i, t)$. Можно было бы утверждать, что эта система переопределенная, но это обстоятельство устраняется специальным выбором W в виде (1.2), о чем уже говорилось ранее. Решение задачи относительно поля перемещений находится из уравнения

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^2}\left\{1 + 3\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x^1}\right)^2 + \alpha g^{22}\left(\frac{\partial u}{\partial x^2}\right)^2\right\} + g^{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial x^2}\left\{1 + \alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x^1}\right)^2 + \right. \\
\left. + 3\alpha g^{22}\left(\frac{\partial u}{\partial x^2}\right)^2\right\} + \frac{1}{2}\left\{g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\frac{\partial u}{\partial x^1} - \left(g^{22}\right)^2\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x^2}\right\}\cdot \\
\cdot\left\{1 + \alpha\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x^1}\right)^2 + g^{22}\left(\frac{\partial u}{\partial x^2}\right)^2\right)\right\} + 4\alpha g^{22}\frac{\partial u}{\partial x^1}\frac{\partial u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^2} - \\
-\alpha\left(g^{22}\right)^2\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\frac{\partial u}{\partial x^1}\left(\frac{\partial u}{\partial x^2}\right)^2 - \alpha\left(g^{22}\right)^3\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x^2}\right)^3 + \ldots = \frac{\ddot{u}}{C^2}, \quad \alpha = \frac{b - \mu}{4\mu}.
\end{gathered} \tag{2.3}$$

Полученное уравнение и система краевых условий (1.3), (1.7) приводят к выводу о необходимости применения приближенных методов решения, о чем далее пойдет речь.

3. Безразмерные переменные и внешняя краевая задача. Поставим цель отразить влияние на решение задачи в первую очередь краевого условия (1.3), поставленного на границе полости. Для этого определим безразмерные переменные формулами

$$\begin{gathered}
s = \frac{x^1}{l}\varepsilon^{-4}, \quad m = \frac{x^1 - Ct}{l}\varepsilon^{-3}, \quad r = \frac{x^2}{X}, \\
w\left(s, m, r\right) = \frac{u(x^1, x^2, t)}{l}\varepsilon^{-\frac{9}{2}}, \quad \varepsilon = \left(\frac{V}{C}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad V = \frac{1}{L_0}\oint v(x^2)dx^2,
\end{gathered} \tag{3.1}$$

в которых l — некоторый характерный линейный размер на L, X — ненулевое значение x^2, V — среднеконтурное значение скоростей точек границы, константу ε, исходя из механически допустимых значений V, можно считать малым параметром задачи, L_0 — длина замкнутого контура L. На основании масштабов координат, выбранных в (3.1), получим представление решения в окрестности нагружаемой поверхности Φ при условии, что ударная волна Σ отошла от Φ незначительно.

В новых переменных (3.1) уравнение движения (2.3) преобразуется к виду:

$$\left(w_{,ss} + 2\varepsilon w_{,sm} + \varepsilon^2 w_{,mm}\right)\left(1 + 3\alpha\varepsilon N^2\right) - \varepsilon^2 w_{,mm} + \ldots = 0, \quad N = w_{,s} + \varepsilon w_{,m}\,. \tag{3.2}$$

В приведенной записи многоточием обозначены слагаемые более высокого порядка малости по ε, чем третий. Здесь и в следующем параграфе латинской буквой после запятой обозначено частное дифференцирование по координате, обозначенной этой буквой. Также для решения необходимо краевое условие (1.3), заданное в безразмерных переменных:

$$\begin{gathered} w|_{s=0} = -A(r)m + \frac{B(r)}{2}\varepsilon^3 m^2 + \ldots, \\ A(r) = \frac{v(Xr)}{V}, \quad B(r) = \frac{a(Xr)l}{CV}, \quad B(r) \sim 1. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Поскольку (3.2) содержит только степени малого параметра ε, то искомую функцию $w(s,m,r)$ тоже представим рядом по степеням ε:

$$\begin{gathered} w(s,m,r) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(s,m,r) \approx w_0(s,m,r) + \varepsilon w_1(s,m,r) + \\ + \varepsilon^2 w_2(s,m,r) + \varepsilon^3 w_3(s,m,r) + \ldots, \end{gathered} \tag{3.4}$$

где неизвестную функцию w заменяем бесконечной цепочкой новых неизвестных функций. В соответствии с принятой терминологией [16], назовем (3.4) внешним разложением решения. Последовательно подставляя (3.4) в уравнение (3.2) и краевое условие (3.3) и сохраняя слагаемые до необходимой степени малого параметра, получим:

$$\begin{gathered} w(s,r,m) = f_0 s - A(r)m + \varepsilon\left\{-f_{0,m} s^2 + f_1 s\right\} + \varepsilon^2\left\{\frac{2}{3} f_{0,mm} s^3 - \right. \\ \left. - f_{1,m} s^2 + f_2 s\right\} + \varepsilon^3\left\{-\frac{f_{0,mmm}}{3} s^4 + \frac{2}{3} f_{1,mm} s^3 - \frac{\alpha}{2} f_0^2 f_{0,mm} s^3 - \right. \\ \left. - f_{2,m} s^2 + f_3 s + \frac{B(r)}{2} m^2\right\} + \ldots, \quad f_i = f_i(r,m), \quad i = 0,1,2,3. \end{gathered} \tag{3.5}$$

В (3.5) функции f_i остаются неизвестными. Здесь проведено решение до третьего порядка малости по степеням ε включительно. Все неизвестные функции можно будет определить, построив дополнительное решение, в котором будут учтены условия на переднем фронте ударной волны Σ.

4. Внутреннее решение и эволюционное уравнение задачи. Перейдем к новым безразмерным переменным, которые будут в исходных пространственно-временных координатах соответствовать отходу вдоль лучевой координаты от нагружаемой поверхности Φ. С этой целью изменим масштаб, сжимая пространственную переменную и считая $z = \varepsilon^k s (k = 1, 2, \ldots)$. Остановимся на зависимости $z = \varepsilon^4 s$. Переходя к переменным z, r, m, w, из уравнения (2.3) получим:

$$
\begin{gathered}
w_{,mm}\left\{3\alpha\varphi^2+\alpha\varepsilon^6\theta\right\}+\left(2w_{,mz}+\varepsilon^3 w_{,zz}\right)\left\{1+3\alpha\varepsilon^3\varphi^2+\alpha\varepsilon^9\theta\right\}+\frac{R}{g}\varepsilon^3 w_{,rr}\{1+\\
+3\alpha\varepsilon^9\theta+\alpha\varepsilon^3\varphi^2\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{g_{,z}}{g}\varphi-\frac{R}{g^2}g_{,r}\,\varepsilon^3 w_{,r}\right\}\left(1+\alpha\varepsilon^3\varphi^2+\alpha\varepsilon^9\theta\right)+\\
+\alpha\left\{4\frac{R}{g}\varepsilon^6 w_{,r}\,\varphi\varphi_{,r}-\frac{g_{,z}}{g}\varepsilon^9\theta\varphi-\frac{g_{,r}}{R}\varepsilon^{12}\theta^{\frac{3}{2}}\right\}+\ldots=0,\\
g(z,r)=\frac{g_{22}(x^1,x^2)}{g_{22}(X)},\quad R=\frac{l^2}{X^2 g_{22}(X)},\quad \varphi=w_{,m}+\varepsilon^3 w_{,z}\,,\quad \theta=\frac{R}{g}w_{,r}^{\,2}\,.
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

Из краевых условий (1.7), заданных в новых переменных, следует:

$$
\tau|_{m=M(z,r)}=-\varepsilon^{\frac{3}{2}}\varphi,\quad w(z,r,m)|_{m=M(z,r)}=0,
\tag{4.2}
$$

где функция $M(z,r)$ задает положение волнового фронта Σ и пока относится к числу неизвестных. В (4.2) предполагается, что решение строится на тех расстояниях от Φ, где производная от u в направлении нормали из условия (1.7) может быть приближенно заменена частной производной по x^1. Входящие в (4.1), (4.2) неизвестные функции w,τ,M представим степенными рядами по ε, в которых сохраним только слагаемые со степенями ε, кратными трем:

$$
\begin{gathered}
w(r,z,m)\approx w_0(r,z,m)+\varepsilon^3 w_1(r,z,m)+\ldots,\\
\chi=\tau^2(r,z)\approx\varepsilon^3\chi_0(r,z)+\varepsilon^6\chi_1(r,z)+\ldots,\\
M(r,z)\approx M_0(r,z)+\varepsilon^3 M_1(r,z)+\ldots
\end{gathered}
\tag{4.3}
$$

Решение, определяемое (4.1), (4.2) и (4.3), также следуя общепринятой терминологии, назовем внутренним [15]. Для него на нулевом шаге метода относительно функции $w_0(z,r,m)$ получим следующее уравнение:

$$
3\alpha w_{0,m}^2\,w_{0,mm}+2w_{0,mz}+\frac{g_{,z}}{2g}w_{0,m}=0,
\tag{4.4}
$$

которое назовем эволюционным уравнением задачи, по аналогии с [5]. Отличие от процесса объемного деформирования состоит в том, что $w_{0,m}$ входит в (4.4) не в первой степени, а в квадрате. Это, казалось бы, незначительное различие отражает различную геометрию характеристических направлений за Σ в случае, когда ударная волна присутствует с начального момента воздействия. Отметим, что сходное уравнение описывает нелинейные эффекты в среде и в том случае, когда краевые условия не приводят к мгновенному формированию ударной волны. В последнем случае это уравнение показывает, как из исходного гладкого решения формируется разрывное, заменяющее область неоднозначности гладкого решения, то есть может служить для исследования переходных процессов [5]. Последнее слагаемое в (4.4) отражает влияние изменяющейся кривизны волнового фронта на решение за ним. Укажем, на наш взгляд, важное обстоятельство: переменная r, изменяющаяся вдоль волнового фронта, входит в (4.4) только как параметр, что означает фактически одномерный характер решения в прифронтовой области. Это вполне согласуется с механическим смыслом ударной волны, как поверхности, заменяющей тонкий слой, где наибольшее изменения решения происходят по ширине слоя. Также результат согласуется и с математическими следствиями для ударных волн (с формулами Адамара). Решение (4.4) проведем, определив вспомогательную функцию $h_0(z,r,m)=w_{0,m}$ и понизив с ее помощью порядок уравнения (4.4):

$$
3\alpha h_0^2 h_{0,m}+2h_{0,z}+\frac{g_{,z}}{2g}h_0=0.
\tag{4.5}
$$

Интегрируя его в общем виде, получим следующие первые интегралы вдоль характеристических направлений:

$$\Psi_1 = g(z,r)h_0^4, \quad \Psi_2 = 3\alpha\sqrt{g(z,r)}\int g^{-\frac{1}{2}}(r,z)dz - 2m. \tag{4.6}$$

Для нашей краевой задачи оказывается вполне достаточно выбрать $w_0(z,m,r)$ в виде

$$w_0(z,m,r) = D(r)g^{-\frac{1}{4}}(z,r)m + \varphi_0(z,r), \tag{4.7}$$

где $D(r)$ и $\varphi_0(z,r)$ — пока неопределенные функции. Одну из них (φ_0) можно определить совместно с $M_0(z,r)$, задающей положение волны в нулевом приближении. Действительно, опять считая отклонение нормали $\bar{\nu}$ от первоначального положения $\bar{\nu}_0$ достаточно малым, из линейного варианта уравнения эйконала

$$x^1 = \int\limits_0^t G(\xi)d\xi, \tag{4.8}$$

записанного в безразмерных переменных, получим такое уравнение на фронте Σ:

$$M_{,z} = \gamma_1\varphi^2 + \gamma_2\varepsilon^3\varphi^4 - \varepsilon^3\{\gamma_1\varphi^2 + \gamma_2\varphi^4\}^2 + \ldots, \quad \alpha = 2\gamma_1. \tag{4.9}$$

В (4.9) входящие в φ частные производные от w вычисляются при условии нахождения на фронте Σ, поэтому, проведя необходимые дополнительные вычисления, получим

$$M_{0,z} = \frac{\alpha}{2}w_{0,m}^2\,. \tag{4.10}$$

Учитывая выбор w_0 в виде (4.7), из уравнения (4.10) приходим к следующему результату:

$$M_0(z,r) = \frac{\alpha}{2}D^2(r)\int\limits_0^z g^{-\frac{1}{2}}(\xi,r)d\xi, \tag{4.11}$$

который получен при начальном условии $M(0,r) = 0$. Теперь, зная положение фронта ударной волны в нулевом приближении, можно установить вид функции $\varphi_0(z,r)$. Для этого из системы краевых условий (4.2) рассмотрим последнее, также записанное в нулевом приближении. С его помощью получим

$$\varphi_0(z,r) = -\frac{\alpha}{2}D^3(r)g^{-\frac{1}{4}}(z,r)\int\limits_0^z g^{-\frac{1}{4}}(\xi,r)d\xi. \tag{4.12}$$

Проводя в (4.12) необходимое интегрирование, из (4.7) и (4.12) получим итоговую формулу для w_0:

$$w_0(z,m,r) = D(r)m\,(1-2lH_0z)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\alpha}{4}\frac{D^3(r)}{lH_0}\,(1-2lH_0z)^{-\frac{1}{2}}\ln(1-2lH_0z)\,, \tag{4.13}$$

где $H_0(r)$ — средняя кривизна поверхности Φ.

Теперь можно провести сращивание внутреннего и внешнего разложений решения в нулевом приближении. Для этого применим правило аддитивного сопоставления [16]. С его помощью окончательно определяются неизвестные функции:

$$f_0(m,r) = 0, \quad D(r) = -A(r). \tag{4.14}$$

Сравнивая w_0 для внешнего и внутреннего разложений, можно заметить, что на этом шаге w_0 из внешнего решения полностью содержится в w_0 внутренней задачи. Ввиду этого здесь нет необходимости строить равномерно пригодное разложение: оно совпадает с функцией (4.13).

Следующий шаг метода хотя и связан с громоздкими вычислениями, но оказывается не слишком сложным, так как во многом повторяет приведенные выше рассуждения. Если возникает необходимость уточнить нулевой шаг метода, то для функции w надо решить следующую краевую задачу:

$$\begin{gathered}
2w_1,_{zm} + 3\alpha w_1,_{mm} w_0^2,_m + \frac{g,_z}{2g}(w_1,_m + w_0,_z) + w_0,_{zz} + 6\alpha w_0,_{rm} w_0^2,_m + \\
+ \frac{\alpha g,_z}{g} w_0^3,_m + \frac{R}{g} w_0,_{rr} - \frac{Rg,_r}{2g^2} w_0,_r = 0, \\
w_0 + \varepsilon^3 w_1\big|_{m=M_0(z,r)+\varepsilon^3 M_1(z,r)} = 0, \\
M_1,_z = \alpha w_0,_m (w_0,_z + w_1,_m) + \left(\gamma_1 - \frac{\alpha^2}{4}\right) w_0^4,_m .
\end{gathered} \tag{4.16}$$

Ограниченность объема статьи не позволяет привести здесь весь алгоритм решения (4.16). Мы покажем, каким будет результат решения при краевом условии (1.3):

$$\begin{gathered}
w_1 = -\frac{m^2}{2}\sum_{k=0}^{3} C_k(r) H_1^{-\frac{1}{2}-k} + m\sum_{k=0}^{3} H_1^{-\frac{1}{2}-k}\left\{E_k(r)\ln H_1 + F_k(r)\right\} + \\
+ \sum_{k=0}^{3} H_1^{-\frac{1}{2}-k}\left\{N_k(r)\ln^2 H_1 + S_k(r)\ln H_1 + T_k(r)\right\}, \\
H_1 = 1 - 2lH_0 z, \quad C_0 = -B(r), \\
C_1 = -\frac{1}{4lH_0}\left(RA,_{rr} + Al^2H_0^2 + \frac{5RAH_0'^2}{4H_0^2} - \frac{2RA,_r H_0'}{H_0} - \frac{RAH_0''}{2H_0}\right), \\
C_2 = -\frac{RA,_r H_0'}{4lH_0^2} - \frac{RAH_0''}{16lH_0^2} + \frac{5RAH_0'^2}{16lH_0^3}, \quad C_3 = -\frac{5RAH_0'^2}{48lH_0^3}, \\
E_0 = -\frac{3\alpha B(r)}{4lH_0}, \quad E_1 = -\frac{3\alpha RA^2 A,_r H_0'}{8l^2H_0^3} + \frac{\alpha RA^3 H_0''}{16l^2H_0^3} - \frac{5\alpha RA^3 H_0'^2}{64l^2H_0^4}, \\
E_2 = \frac{3\alpha RA^2 A,_r H_0'}{16l^2H_0^3} - \frac{\alpha RA^3 H_0''}{32l^2H_0^3} + \frac{3\alpha RA^3 H_0'^2}{64l^2H_0^4}, \quad E_3 = -\frac{\alpha RA^3 H_0'^2}{192l^2H_0^4}, \\
F_0 = -\alpha A^3 + \frac{3\alpha RA^2 A,_r H_0'}{32l^2H_0^3} - \frac{5\alpha RA^3 H_0''}{64l^2H_0^3} + \frac{109\alpha RA^3 H_0'^2}{576l^2H_0^4}. \\
F_1 = \alpha A^3 + \frac{\alpha RA^3 H_0''}{8l^2H_0^3} - \frac{5\alpha RA^3 H_0'^2}{16l^2H_0^4}, \quad F_3 = -\frac{35\alpha RA^3 H_0'^2}{576l^2H_0^4}, \\
F_2 = -\frac{3\alpha RA^2 A,_r H_0'}{32l^2H_0^3} - \frac{3\alpha RA^3 H_0''}{64l^2H_0^3} + \frac{35\alpha RA^3 H_0'^2}{128l^2H_0^4}, \\
N_0 = \frac{3\alpha^2 A^4}{32l^2H_0^2}\left(3B - \frac{A,_r RH_0'}{4lH_0^2} + \frac{A,_{rr} R}{4lH_0} + \frac{AlH_0}{4} - \frac{ARH_0''}{16lH_0^2} + \frac{5ARH_0'^2}{48lH_0^3}\right), \\
N_1 = -\frac{\alpha^2 A^5}{526lH_0} - \frac{11\alpha^2 A^4 A,_r RH_0'}{128l^3H_0^4} + \frac{9\alpha^2 A^5 RH_0''}{512l^3H_0^4} - \frac{\alpha^2 A^4 A,_{rr} R}{64l^3H_0^3} - \frac{25\alpha^2 A^5 RH_0'^2}{1024l^3H_0^5},
\end{gathered} \tag{4.17}$$

$$
\begin{aligned}
N_2 &= \frac{5\alpha^2 A^4 A_{,r} RH_0'}{128 l^3 H_0^4} - \frac{5\alpha^2 A^5 RH_0''}{512 l^3 H_0^4} + \frac{11\alpha^2 A^5 R{H_0'}^2}{512 l^3 H_0^5}, \quad N_3 = -\frac{7\alpha R{H_0'}^2 A^5}{1536 l^3 H_0^5},\\
S_0 &= -\frac{3\alpha A^2}{4lH_0}\left(\alpha A^3 - \frac{\alpha A^2 A_{,r} RH_0'}{4l^2 H_0^3} + \frac{\alpha A^3 RH_0''}{32 l^2 H_0^3} - \frac{109\alpha A^3 R{H_0'}^2}{576 l^3 H_0^4}\right),\\
S_1 &= \frac{9\alpha^2 A^5}{32 l H_0} - \frac{\alpha^2 A^5 RH_0''}{64 l^3 H_0^4} + \frac{\alpha^2 A^4 A_{,r} RH_0'}{8 l^3 H_0^4} + \frac{\alpha^2 A^4 A_{,rr} R}{32 l^3 H_0^3},\\
S_2 &= -\frac{7\alpha^2 A^4 A_{,r} RH_0'}{128 l^3 H_0^4} + \frac{19\alpha^2 A^5 R{H_0'}^2}{512 l^3 H_0^5},\\
S_3 &= -\frac{43\alpha^2 A^5 R{H_0'}^2}{2304 l^3 H_0^5} + \frac{5\alpha^2 A^5 RH_0''}{192 l^3 H_0^4},\\
T_0 &= \frac{\gamma_2 A^5}{2lH_0} - \frac{27\alpha A^5}{32 l H_0} + \frac{25\alpha^2 A^5 RH_0''}{256 l^3 H_0^4} + \frac{7\alpha^2 A^4 A_{,r} RH_0'}{128 l^3 H_0^4} + \frac{2693\alpha^2 A^5 R{H_0'}^2}{13824 l^3 H_0^5} + \frac{\alpha^2 A^4 A_{,rr} R}{32 l^3 H_0^3},\\
T_1 &= -\frac{A^5}{2lH_0}\left(\frac{27}{16}\alpha^2 - \gamma_2\right) - \frac{7\alpha^2 A^5 RH_0''}{64 l^3 H_0^4} + \frac{15\alpha^2 A^5 R{H_0'}^2}{64 l^3 H_0^5} +\\
&\quad + \frac{\alpha^2 A^4 A_{,rr} R}{32 l^3 H_0^3} + \frac{\alpha^2 A^4 A_{,r} RH_0'}{8 l^3 H_0^4},\\
T_2 &= \frac{\alpha^2 A^4 A_{,r} RH_0'}{32 l^3 H_0^4} + \frac{7\alpha^2 A^5 RH_0''}{512 l^3 H_0^4} - \frac{119\alpha^2 A^5 R{H_0'}^2}{1536 l^3 H_0^5}, \quad T_3 = \frac{41\alpha^2 A^5 R{H_0'}^2}{3456 l^3 H_0^5}.
\end{aligned}
$$

При записи (4.17) уже были учтены краевые условия на нагружаемой поверхности и проведено сращивание с внешним решением до третьего порядка по ε включительно. Что касается внешнего решения, то все его функции $f_i(m, r)$ обращаются в нуль тождественно. Поэтому можно сказать, что внешнее решение до ε^3 включительно содержится во внутреннем. Их различие при выбранных масштабах координат начинает проявляться с более высоких степеней ε. Это не исключает самостоятельной значимости внешнего решения, так как оно значительно проще формально и справедливо для расстояний и времен, когда кривизна волнового фронта отражается на решении незначительно. Следовательно, построенное решение справедливо только для моментов времени, близких к моменту начала деформирования, и в своем общем виде обязано рассматриваться в качестве прифронтового асимптотического разложения.

Для уточнения положения волнового фронта Σ можно использовать функцию $M_1(z, r)$:

$$
\begin{aligned}
M_1(r,z) &= O\ln^2 H_1 + \sum_{k=0}^{3} J_k H_1^{-k}\ln H_1 + \sum_{k=0}^{3} Q_k H_1^{-k},\\
O &= \frac{\alpha^2 A^3}{8 l^2 H_0^2}\left(B + \frac{RA_{,rr}}{8lH_0} + \frac{AlH_0}{8} - \frac{RA_{,r} H_0'}{8 l H_0^2} - \frac{RVH_0''}{32 l H_0^2} + \frac{5RA{H_0'}^2}{96 l^2 H_0^3}\right),\\
J_0 &= \frac{\alpha A}{2lH_0}F_0, \quad J_1 = -\frac{\alpha A}{2lH_0}\left(E_1 + \frac{\alpha A^2 C_1}{4lH_0}\right),\\
J_2 &= -\frac{\alpha A}{4lH_0}\left(E_2 + \frac{\alpha A^2 C_2}{4lH_0}\right), \quad J_3 = -\frac{\alpha A}{6lH_0}\left(E_3 + \frac{\alpha A^2 C_3}{4lH_0}\right),
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

$$Q_0 = -\frac{\gamma_2 A^4}{2lH_0} + \frac{3}{8}\frac{\alpha^2 A^4}{lH_0} + \frac{\alpha A F_1}{2lH_0} + \frac{\alpha A E_1}{2lH_0} + \frac{\alpha^2 A^3 C_1}{8l^2 H_0^2} + \frac{13\alpha^2 A^3 C_3}{288 l^2 H_0^2} + \\ + \frac{\alpha A F_2}{4lH_0} + \frac{\alpha A F_3}{6lH_0} + \frac{13\alpha A E_3}{72 l H_0},$$

$$Q_1 = -\frac{\alpha A F_1}{2lH_0} - \frac{3}{8}\frac{\alpha^2 A^4}{lH_0} + \frac{\gamma_2 A^4}{2lH_0} - \frac{\alpha A E_1}{2lH_0} - \frac{\alpha^2 A^3 C_1}{8l^2 H_0^2},$$

$$Q_2 = -\frac{\alpha A F_2}{4lH_0} - \frac{\alpha A F_3}{8lH_0} - \frac{\alpha^2 A^3 C_2}{32 l^2 H_0^2}, \quad Q_3 = -\frac{\alpha A F_3}{6lH_0} + \frac{\alpha A E_3}{18 lH_0} - \frac{\alpha^2 A^3 C_3}{72 l^2 H_0^2}.$$

Из (4.11), (4.13), а также (4.17), (4.18) легко вычисляется интенсивность волны, если она необходима для определения скорости волны. Обсудим теперь некоторые возможности использования полученных решений. Из приведенных выше рассуждений следует, что решение было построено с аппроксимацией реальных лучевых координат их линейным аналогом, поэтому оно будет удобным начальным приближением для малых послеударных времен в схемах численного счета. Если при этом считать, что вдоль каждой прямой проходится различное расстояние за счет включения в формулу для G интенсивности волны (а она вычисляется на основе (4.11), (4.17)), то можно для малого интервала времени $\triangle t$ определить итоговое положение ударной волны. Оно, вообще говоря, не будет совпадать с линейным аналогом, и для него вычисляется новый вектор нормали $\bar{\nu}_1$. Геометрия Σ_1 и распределение перемещений на ней известны из предыдущего шага. Далее, отталкиваясь от Σ_1, можно построить новую координатную сетку x^i и определить перемещения в следующем интервале времени. Если же просто остановиться на решении (4.11), (4.17), не связывая его неизвестные функции краевым условием на нагружаемой границе Φ, то его можно считать задающим прифронтовое поведение решения, а неизвестные функции определять на основании численных расчетов в остальной области деформирования. Этот метод раньше применялся к одномерным нелинейным волновым процессам [17]. Следует ожидать, что предлагаемое здесь решение найдет место при разработке схем численного счета для неодномерных нестационарных задач.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Бленд, Д. Р.* Нелинейная динамическая теория упругости / Д. Р. Бленд. – М. : Мир, 1972. – 183 с.

[2] *Уизем, Дж.* Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. – М. : Мир, 1977. – 622 с.

[3] *Куликовский, А. Г.* Об ударных волнах, распространяющихся по напряженному состоянию в изотропных нелинейно упругих средах / А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова // ПММ. – 1980. – Т. 44. – Вып. 3. – С. 523–534.

[4] *Буренин, А. А.* Ударные волны в изотропном упругом пространстве / А. А. Буренин, А. Д. Чернышов // ПММ. – 1978. – Т. 42. – Вып. 4. – С. 711–717.

[5] *Пелиновский, Е. Н.* Нелинейные эволюционные уравнения / Е. Н. Пелиновский, В. Е. Фридман, Ю. К. Энгельбрехт. – Таллин : Валгус, 1984. – 156 с.

[6] *Буренин, А. А.* Косой удар по упругому полупространству / А. А. Буренин, В. А. Шаруда // Изв. АНСССР. МТТ. – 1984. – № 6. – С. 172–174.

[7] *Бабичева, Л. А.* Лучевой метод решения динамических задач в упруго-вязкопластических средах / Л. А. Бабичева, Г. И. Быковцев, Н. Д. Вервейко // ПММ. – 1973. – Т. 37. – № 1. – С. 145–155.

[8] *Rossikhin, Y. A.* Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities / Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Appl. Mech. Rev. – 1995. – V. 48. – № 1. – P. l–39.

[9] *Буренин, А. А.* О прифронтовых асимптотиках в нелинейной динамической теории упругости / А. А. Буренин, В. Е. Рагозина // Проблемы механики сплошных сред и элементов конструкций : сб. науч. тр.(к 60-летию со дня рожд. проф. Г. И. Быковцева). – Владивосток : Дальнаука, 1998. – С. 225–242.

[10] *Иванова, Ю. Е.* Об ударных осесимметрических движениях несжимаемой упругой среды при ударных воздействиях / Ю. Е. Иванова, В. Е. Рагозина // ПМТФ. – 2006. – Т. 47. – № 6. – С. 144–151.

[11] *Рагозина, В. Е.* Об эволюционных уравнениях задач ударного деформирования с плоскими поверхностями разрывов / В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т. 2. – № 3. – С. 82–95.

[12] *Лурье, А. И.* Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.

[13] *Томас, Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас. – М. : Мир, 1964. – 308 с.

[14] *Быковцев, Г. И.* Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.

[15] *Герасименко, Е. А.* Лучевые разложения в изучении закономерностей распространения неплоских ударных волн / Е. А. Герасименко, В. Е. Рагозина // Вестник Самарского государственного университета — Естественнонаучная серия. – 2006.– № 6/1(46). – С. 94–113.

[16] *Ван-Дайк, М.* Методы возмущений в механике жидкости / М. Ван-Дайк. – М. : Мир, 1967. – 239 с.

[17] *Буренин, А. А.* К проблеме выделения поверхностей разрывов в численных методах динамики деформируемых сред / А. А. Буренин, П. В. Зиновьев // Проблемы механики : сб. статей к 90-летию А. Ю. Ишлинского. – М. : Физматлит, 2003. – С. 146–155.

Рагозина Виктория Евгеньевна,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Владивосток

e-mail: ragozina@vlc.ru

Иванова Юлия Евгеньевна,

кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Владивосток

e-mail: ivanova@iacp.dvo.ru

V. E. Ragozina, Y. E. Ivanova

ON THE ASYMPTOTIC REPRESENTATION OF MULTIDIMENSIONAL PROBLEMS SOLUTIONS OF SHOCK DYNAMICS OF NONLINEAR ELASTIC MEDIUM

Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences

Abstract. The paper presents a generalization of the asymptotic analysis method of frontline areas for problems of impact deformation of nonlinear elastic medium, based on the derivation of the evolution equation. This method can be extended from one-dimensional boundary value problems on multi-dimensional ones due to the transition to the linear approximation of the ray coordinate. It is shown that the evolution equation contains a eikonal coordinate only as a parameter, ie, the ray coordinate of frontal area has a dominant significance in the assessment of the rate of deformation change. The solution of two-dimensional problem of antiplane deformation of an incompressible nonlinear elastic medium is constructed as a model example.

Keywords: nonlinear elastic incompressible inhomogeneous medium, transverse shock waves, shear load with variable directivity, the evolution equations system, the evolution equation for the change of shear intensity, the evolution equation for the change of shear direction.

REFERENCES

[1] *Bland, D. R.* Nonlinear dynamic theory of elasticity / D. R. Bland. – M. : Mir, 1972. – 183 p.

[2] *Whitham, G. B.* Linear and Nonlinear Waves / G. B. Whitham. – M. : Mir, 1977. – 622 p.

[3] *Kulikovskii, A. G.* On shock wave propagation in stressed isotropic nonlinearly elastic media / A. G. Kulikovskii, E. I. Sveshnikova // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1980. – Vol. 44 – No. 3. – P. 367–374.

[4] *Burenin, A. A.* Shock waves in an isotropic elastic space / A. A. Burenin, A. D. Chernyshov // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1978. – Vol. 42. – No. 4. – P. 758–765.

[5] *Pelinovsky, E. N.* Nonlinear evolution equation / E. N. Pelinovsky, V. E. Fridman, J. K. Engelbrecht. – Tallinn : Valgus, 1984. – 156 p.

[6] *Burenin, A. A.* Oblique impact against an elastic half-space / A. A. Burenin, V. A. Sharuda // Mechanics of solids. – 1984. – Vol. 19. – No. 6. – P. 166–170.

[7] *Babicheva, L. A.* Ray method of solving dynamic problems in elastic-viscoplastic media / L. A. Babicheva, G. I. Bykovtsev, N. D. Verveiko // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1973. – Vol. 37. – No. 1. – P. 132–141.

[8] *Rossikhin, Y. A.* Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities / Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Appl. Mech. Rev. – 1995. – Vol. 48. – № 1. – P. 1–39.

[9] *Burenin, A. A.* About the frontline asymptotics in nonlinear dynamical elasticity theory / A. A. Burenin, V. E. Ragozina // Problems of continuum mechanics and structural elements. – Vladivostok : Dal'nauka, 1988. – P. 225–240.

[10] *Ivanova, Yu. E.* On axisymmetric motion of an incompressible elastic medium under impact loading / Yu. E. Ivanova, V. E. Ragozina // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2006. – Vol. 47. – No. 6. – P. 892–898.

[11] *Ragozina, V. E.* About the evolutionary equations of flat problems of a shock straining of solids / V. E. Ragozina, Yu. E. Ivanova // Computational Continuum Mechanics. – 2009. – Vol. 2. – No 3. – P. 82–95.

[12] *Lurie, A. I.* Nonlinear theory of elasticity / A. I. Lurie. – M. : Nauka, 1980. – 512 p.

[13] *Tomas, T.* Plastic Flow and Fracture in Solids / T. Y. Thomas. – Academic Press, 1961. – 267 p.

[14] *Bykovtsev, G. I.* Theory of Plasticity / G. I. Bykovtsev, D. D. Ivlev. – Vladivostok : Dal'nauka, 1998. – 528 p.

[15] *Gerasimenko, E. A.* Лучевые разложения в изучении закономерностей распространения неплоских ударных волн / E. A. Gerasimenko, V. E. Ragozina // Vestnik of Samara State University. Natural Science Series. – 2006. – № 6/1(46). – P. 94–113.

[16] *Van Dyke, M.* Perturbation methods in fluid mechanics / M. Van Dyke.– M. : Mir, 1967. – 239 p.

[17] *Burenin, A. A.* On the problem of allocation of discontinuity surfaces in the numerical methods for the dynamics of deformable medium / A. A. Burenin, P. V. Zinoviev // Problems of Mechanics : the collection of articles on the 90th anniversary of A. Yu. Ishlinskii. – M. : Fizmatlit, 2003. – P. 146–155.

Ragozina Victoria Evgenevna

Candidate of Phys.&Math., Senior Researcher, Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Vladivostok

Ivanova Yulia Evgenevna

Candidate of Phys.&Math., Researcher, Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Vladivostok