

Р. И. Непершин

## ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ФЛАНЦА ПРИ ВЫТЯЖКЕ ТОНКОСТЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва,  
Россия

**Аннотация.** Приведено численное решение задачи пластического течения фланца тонкой заготовки с эллиптическим контуром при вытяжке тонкостенной эллиптической оболочки. Используется теория плоского напряженного состояния идеально пластического тела по Соколовскому при условии пластичности Мизеса. Вычислены линии скольжения, напряжения и годограф скоростей пластического течения с контролем неотрицательности диссипативной функции.

В отличие от осесимметричной вытяжки цилиндрической оболочки на эллиптическом контуре матрицы возникают нормальные и касательные напряжения. Предельные формы контуров матрицы и фланца при вытяжке эллиптической оболочки определяются макси-мальными растягивающими напряжениями на контуре матрицы и образованием зон с отрицательной диссипативной функцией, в которых пластическое течение по Мизесу не-возможно.

**Ключевые слова:** плоское напряженное состояние, идеальная пластичность, тонкостенная эллиптическая оболочка, вытяжка, эллиптический фланец, линии скольжения, напряжения, скорости течения, диссипативная функция.

УДК: 539. 374

**Введение.** Теория глубокой вытяжки тонкостенной цилиндрической оболочки из круглой заготовки, основанная на решении обыкновенного дифференциального уравнения при осесимметричном напряженном состоянии идеально пластического и упрочняющегося материала приведена в [1-4]. Моделирование нестационарных осесимметричных процессов вытяжки тонкостенных конических и сферических оболочек с учетом упрочнения материала и изменения толщины листа при условии пластичности Мизеса при плоском напряженном состоянии приведено в [5-7].

При вытяжке тонкостенных оболочек сложной формы из плоской заготовки возникает неоднородное двухмерное пластическое течение фланца, зависящее от контура проема матрицы и контура заготовки. Экспериментально-аналитические исследования таких процессов по теории пластического течения Мизеса при плоском напряженном состоянии с учетом анизотропии приведены в [3]. В той же работе приведены

---

© Непершин Р. И., 2018  
Непершин Ростислав Иванович  
e-mail: nepershin\_ri@rambler.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия.

Поступила 10.03.2018

расчеты пластического течения фланца по теории Теска с учетом перетяжных порогов в предположении отсутствия касательных напряжений по контуру проема матрицы.

В настоящей работе рассматривается двухмерное пластическое течение в плоском фланце на начальной стадии вытяжки эллиптической оболочки. Расчетная модель основана на численном решении краевых задач для гиперболических уравнений пластического течения со смешанными граничными условиями для напряжений и скоростей при условии пластичности Мизеса при плоском напряженном состоянии по Соколовскому [8].

Контур фланца задается в виде эллипса с равным фокусным расстоянием с эллиптическим контуром матрицы. Рассчитываются линии скольжения и годограф скоростей пластического течения с контролем знака диссипативной функции. В рассматриваемой задаче равные нулю нормальные и касательные напряжения определяют граничные условия для линий скольжения на контуре фланца, которые вместе с условиями симметрии по главным осям эллипсов определяют линии скольжения на плоскости фланца и распределение нормальных и касательных напряжений по контуру матрицы. Скорость нормальная к контуру скорости принимается равной скорости перемещения пуансона [3].

Кинематические условия на контуре матрицы и известные линии скольжения определяют граничные условия для скоростей в пластической области фланца, которые вычисляются на плоскости годографа. Совместность напряжений и скоростей пластического течения по теории Мизеса проверяется условием положительности диссипативной функции пластического течения [9]. В зонах с отрицательным значением диссипативной функции пластическое течение по теории Мизеса невозможно при заданных контурах фланца и матрицы.

**Основные уравнения.** Контур матрицы на плоскости фланца задаем каноническим уравнением эллипса с длинами полуосей  $a$  и  $b$  в декартовых координатах  $x$ ,  $y$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Контур фланца задаем эллипсом с равным фокусным расстоянием  $d$  с контуром матрицы. Канонические уравнения эллипсов матрицы и фланца с равным фокусным расстоянием определяются параметрами  $d$  и  $\mu$  по уравнению [10]

$$\frac{x^2}{d^2\mu^2} + \frac{y^2}{d^2(\mu^2 - 1)} = 1, \quad \mu > 1. \quad (2)$$

Длину полуоси контура матрицы по оси  $x$  принимаем за характерный размер  $a = 1$ , и из уравнения (2) находим параметры  $d$  и  $\mu$  на контуре матрицы

$$d = \sqrt{1 - b^2}, \quad \mu = 1/\sqrt{1 - b^2}. \quad (3)$$

Длину  $a_1$  полуоси контура фланца задаем шириной фланца  $H$  по оси  $x$ . Параметр  $\mu_1$  и длину полуоси  $b_1$  контура фланца находим из уравнения (2) по фокусному расстоянию  $d$  из первого уравнения (3)

$$a_1 = 1 + H, \quad \mu_1 = a_1/d, \quad b_1 = \sqrt{a_1^2 + b^2 - 1}. \quad (4)$$

На рис. 1 показана расчетная область с контуром фланца  $AB$  и контуром матрицы  $CD$  в первом квадранте системы координат  $x, y$ , ограниченная осями симметрии  $x = 0$  и  $y = 0$ .

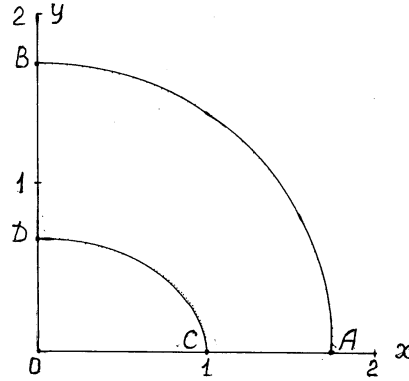


Рис. 1. Эллиптические контуры фланца  $AB$  и матрицы  $CD$

Материал заготовки принимаем идеально пластическим при условии пластичности Мизеса, которое при плоском напряженном состоянии для главных напряжений, отнесенных к напряжению текучести  $\sigma_s$ , имеет вид

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = 1. \quad (5)$$

Напряжения  $\sigma_1, \sigma_2$  записываем в параметрической форме по Соколовскому [8] при тождественном удовлетворении условию пластичности (5)

$$\sigma_1 = (2/\sqrt{3}) \cos(\omega - \pi/6), \quad \sigma_2 = (2/\sqrt{3}) \cos(\omega + \pi/6). \quad (6)$$

Дифференциальные уравнения равновесия при плоском напряженном состоянии при условии пластичности Мизеса относятся к гиперболическому типу при  $\pi/6 \leq \omega \leq 5\pi/6$ , с характеристиками, совпадающими с линиями скольжения  $\xi, \eta$  [8]

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\phi - \psi) \quad \text{для } \xi, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\phi + \psi) \quad \text{для } \eta, \quad (7)$$

где  $\phi$  — угол наклона напряжения  $\sigma_1$  к оси  $x$ ,  $\psi$  — угол наклона касательной к линиям скольжения к направлению  $\sigma_1$ , который связан с  $\omega$  формулой

$$\operatorname{ctg} \omega = -\sqrt{3} \cos 2\psi. \quad (8)$$

Вдоль линий скольжения выполняются соотношения

$$\varphi - \lambda = \operatorname{const} \quad \text{вдоль } \xi, \quad \varphi + \lambda = \operatorname{const} \quad \text{вдоль } \eta, \quad \operatorname{tg} \lambda = \operatorname{tg}^3 \psi. \quad (9)$$

Дифференциальные уравнения (7) и соотношения (9) с учетом формул для  $\psi$  и  $\lambda$ , определяемых параметром  $\omega$ , не зависят от скоростей. Эти уравнения представляют замкнутую систему для координат  $x, y$  линий скольжения, угла наклона  $\varphi$  и переменной  $\lambda$ , определяющей угол  $\psi$ , параметр  $\omega$  и напряжения (6) при задании граничных условий для напряжений на контуре фланца  $AB$ .

Скорости пластического течения определяются дифференциальными уравнениями на плоскости годографа  $V_x, V_y$

$$\frac{dV_x}{dV_y} = -\operatorname{tg}(\phi - \psi) \text{ вдоль } \xi, \quad \frac{dV_x}{dV_y} = -\operatorname{tg}(\phi + \psi) \text{ вдоль } \eta, \quad (10)$$

вследствие ортогональности отображения линий скольжения на плоскость годографа скоростей [8]. На контуре матрицы  $CD$  задаем кинематические граничные условия, определяемые вертикальной скоростью движения пуансона [3]. Так как углы  $\varphi$  и  $\psi$  известны в точках пересечения линий скольжения с контуром матрицы  $CD$ , то на этом контуре определяются граничные для напряжений и скоростей. Скорости  $V_x, V_y$  находим численным интегрированием уравнений (10) с кинематическими и статическими граничными условиями на контуре  $CD$  с известными углами  $\varphi$  и  $\psi$  на линиях скольжения.

**Линии скольжения и распределения напряжений.** Линии скольжения находятся решением задачи Коши для уравнений (7)–(9) с граничными условиями на контуре  $AB$

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = -1. \quad (11)$$

Значения  $\omega, \psi$  и  $\lambda$  на  $AB$  находим подстановкой напряжений (11) в уравнения (6) и (8)

$$\omega = 2\pi/3, \quad \psi = \arccos(1/3), \quad \lambda = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^3 \psi). \quad (12)$$

Координаты  $x, y$  и угол  $\varphi$  наклона нормали к контуру фланца, совпадающей с направлением главного напряжения  $\sigma_1$ , для канонической формы эллипса, определяемой параметром  $\theta$ , вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} x = a_1 \cos \theta, \quad y = b_1 \sin \theta, \quad \varphi = \pi/2 - \operatorname{arctg}[(b_1/a_1) \operatorname{ctg} \nu], \\ \nu = \operatorname{arctg}[(a_1/b_1) \operatorname{tg} \theta], \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\nu$  — угол наклона касательной к эллипсу в точке  $x, y$ .

Задачу Коши с граничными условиями (11)–(13) решаем численным интегрированием уравнений (7) с соотношениями (9). Координаты  $x, y$  и угол  $\varphi$  вычисляются в узловых точках  $1 \leq i \leq N + 1$  контура  $AB$  с шагом  $\Delta\theta = \pi/2N$ . Дифференциальные уравнения (7) аппроксимируем конечно-разностными соотношениями вдоль линий скольжения

$$y - y_1 = (x - x_1) \operatorname{tg} \alpha, \quad \alpha = \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_1 + \psi - \psi_1) \text{ вдоль } \xi, \quad (14)$$

$$y - y_2 = (x - x_2) \operatorname{tg} \beta, \quad \beta = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_2 + \psi + \psi_2) \text{ вдоль } \eta, \quad (15)$$

где нижними индексами 1 и 2 обозначены известные координаты  $x, y$  и углы  $\varphi, \psi$  на пересекающихся линиях скольжения  $\xi$  и  $\eta$ . Уравнения (14) и (15) дополняются соотношениями (9) в виде

$$\varphi - \lambda = \varphi_1 - \lambda_1 \text{ вдоль } \xi, \quad \varphi + \lambda = \varphi_2 + \lambda_2 \text{ вдоль } \eta, \quad (16)$$

из которых находим углы  $\varphi, \psi$  и  $\lambda$  в точке пересечения линий скольжения

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 - \lambda_1 + \varphi_2 + \lambda_2), \quad \lambda = \frac{1}{2}(\varphi_2 + \lambda_2 - \varphi_1 + \lambda_1), \quad \psi = \arctg[(\tg \lambda)^{1/3}]. \quad (17)$$

Углы  $\alpha$  и  $\beta$  определяем подстановкой  $\varphi$  и  $\psi$  в уравнения (14) и (15), и находим координаты точки пересечения линий скольжения

$$x = (y_2 - y_1 + x_1 \tg \alpha - x_2 \tg \beta) / (\tg \alpha - \tg \beta), \quad y = y_1 + (x - x_1) \tg \alpha. \quad (18)$$

Сетка линий скольжения вычисляется от контура Коши  $AB$  с использованием циклического алгоритма численного решения гиперболических уравнений пластического течения, приведенного в [5].

В области, ограниченной линией симметрии  $AC$  и  $\xi$ -линией скольжения, проходящей через точку  $A$ , которая известна после решения задачи Коши от контура  $AB$ , линии скольжения находим решением задачи смешанного типа с граничным условием  $\varphi = 0$ ,  $y = 0$  на  $AC$ . Переменные  $\lambda$  и  $\psi$  и координаты  $x$  в точках пересечения  $\eta$ -линий скольжения с границей  $AC$  находим из соотношений (15) и (16)

$$\lambda = \varphi_2 + \lambda_2, \quad \beta = \frac{1}{2}(\varphi_2 + \psi + \psi_2), \quad x = x_2 - y_2 \ctg \beta, \quad (19)$$

где  $\psi$  вычисляется по третьей формуле (17) и переменные с нижним индексом 2 известны на  $\xi$ -линии скольжения.

В области, ограниченной линией симметрии  $BD$  и  $\eta$ -линией скольжения, проходящей через точку  $B$ , которая известна после решения задачи Коши от контура  $AB$ , линии скольжения находим решением задачи смешанного типа с граничным условием  $\varphi = \pi/2$ ,  $x = 0$  на  $BD$ . Значения переменных  $\lambda$ ,  $\psi$  и координаты  $y$  находим из соотношений (14) и (16) для  $\xi$ -линии скольжения

$$\lambda = \pi/2 + \lambda_1 - \varphi_1, \quad \alpha = \frac{1}{2}(\pi/2 - \varphi_1 + \psi - \psi_1), \quad y = y_1 - x_1 \tg \alpha, \quad (20)$$

где переменные с нижним индексом 1 известны на  $\eta$ -линии скольжения.

Пластическая область фланца ограничена контуром матрицы  $CD$

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 \geq 1. \quad (21)$$

Так как при численном решении сетка линий скольжения вычисляется с дискретным шагом между узловыми точками, то нарушение неравенства (21) используется для идентификации пересечения границы  $CD$  линиями скольжения при изменении знака функции  $g$  между узлами  $i$  и  $i + 1$

$$g = x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1, \quad g_i > 0, \quad g_{i+1} < 0.$$

Координаты  $x, y$  точки пересечения с контуром  $CD$  и значения переменных  $\varphi, \lambda, \psi, V_x, V_y$ , представляемые массивом  $f_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 7$ , находим линейной интерполяцией между точками  $i$  и  $i + 1$ , где известны значения  $f_j^i$  и  $f_j^{i+1}$

$$f_j = f_j^i + k[f_j^{i+1} - f_j^i], \quad k = g_i / (g_i - g_{i+1}), \quad j = 1, 2, \dots, 7. \quad (22)$$

Линии скольжения, углы  $\varphi$  и главные напряжения на границе  $CD$  определяются граничными условиями на контуре  $AB$ . Угол наклона нормали к границе  $CD$  не совпадает с направлением главного напряжения  $\sigma_1$  и касательная к границе  $CD$  не

совпадает с направлением напряжения  $\sigma_2$ . На границе  $CD$  возникают нормальные и касательные напряжения

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \delta + \sigma_2 \sin^2 \delta, \quad \tau = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \sin 2\delta, \quad \delta = \varphi - \varphi_0,$$

где  $\varphi_0$  — угол наклона нормали к границе  $CD$  в точке пересечения с линиями скольжения.

Для решения смешанных краевых задач использованы циклические алгоритмы численного решения гиперболических уравнений, приведенные в [5]. Расчеты линий скольжения и напряжений автоматизированы на ФОРТРАНЕ с применением графических процедур и выводом результатов в табличной и графической формах. На рис. 2 показана сетка линий скольжения, вычисленная для контура матрицы с относительной длиной полуоси  $b = 2/3$  и контура фланца с шириной  $H = 0.914$  по оси  $x$ , определяющей длины полуосей  $a_1 = 1.914$ ,  $b_1 = 1.762$  и общим с контуром матрицы фокусным расстоянием  $d = 0.745$ . На рис. 1 показаны контуры матрицы и фланца с числом точек  $N + 1 = 71$ , использованные для вычисления линий скольжения и годографа скоростей перемещений.

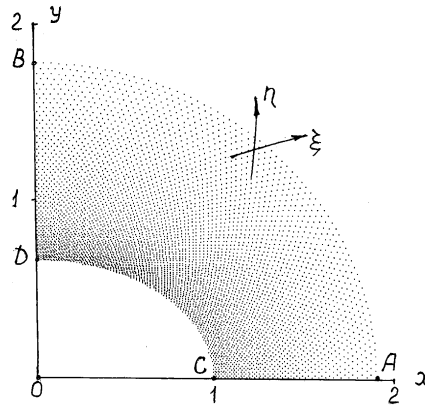


Рис. 2. Линии скольжения на плоскости фланца при  $b = 2/3$ ,  $H = 0.914$

На рис. 3 показано распределение нормальных и касательных напряжений на контуре матрицы  $CD$  с координатами  $x = \cos \theta$ ,  $y = b \sin \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ . Нормальные напряжения  $\sigma_n$  на осях симметрии совпадают с главным напряжением  $\sigma_1$ , имеют минимум 0.774 в точках с максимальными значениями касательных напряжений  $\tau = 0.369$  и увеличиваются от 0.860 в точке  $C$  к точке  $D$ , где принимают максимальное значение 0.903. Приведенные параметры вытяжки эллиптической оболочки на начальной стадии приближаются к критическим значениям по критерию растяжения стенки  $\sigma_n \leq 1$  в точке  $D$ .

Распределения напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  на линиях симметрии  $AC$  и  $BD$  приведены в таблицах 1 и 2. Более высокие растягивающие напряжения возникают на линии симметрии  $BD$ , где ширина фланца максимальна. Максимальное напряжение  $\sigma_1$  в точке  $D$  на контуре матрицы ниже напряжения текучести.

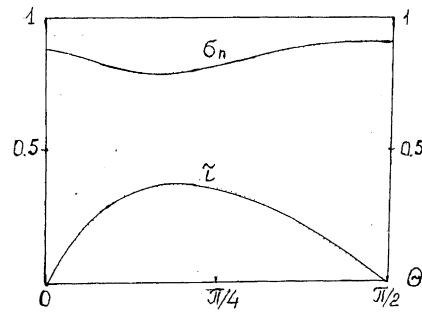


Рис. 3. Распределения нормальных  $\sigma_n$  и касательных  $\tau$  напряжений на контуре матрицы  $CD$  на рис. 2

Таблица 1. Напряжения на границе  $AC$

| $x$   | $\sigma_1$ | $-\sigma_2$ | $x$   | $\sigma_1$ | $-\sigma_2$ |
|-------|------------|-------------|-------|------------|-------------|
| 1.000 | 0.860      | 0.237       | 1.329 | 0.480      | 0.670       |
| 1.003 | 0.856      | 0.243       | 1.357 | 0.450      | 0.696       |
| 1.021 | 0.835      | 0.273       | 1.386 | 0.421      | 0.721       |
| 1.039 | 0.813      | 0.303       | 1.416 | 0.390      | 0.746       |
| 1.057 | 0.791      | 0.333       | 1.448 | 0.360      | 0.770       |
| 1.077 | 0.768      | 0.363       | 1.481 | 0.329      | 0.794       |
| 1.096 | 0.744      | 0.392       | 1.515 | 0.298      | 0.817       |
| 1.116 | 0.720      | 0.421       | 1.551 | 0.266      | 0.840       |
| 1.137 | 0.696      | 0.450       | 1.589 | 0.234      | 0.862       |
| 1.158 | 0.671      | 0.479       | 1.629 | 0.201      | 0.884       |
| 1.180 | 0.645      | 0.507       | 1.670 | 0.168      | 0.905       |
| 1.203 | 0.619      | 0.535       | 1.714 | 0.135      | 0.925       |
| 1.226 | 0.592      | 0.563       | 1.759 | 0.102      | 0.945       |
| 1.251 | 0.564      | 0.590       | 1.808 | 0.068      | 0.964       |
| 1.276 | 0.537      | 0.617       | 1.859 | 0.034      | 0.982       |
| 1.302 | 0.508      | 0.644       | 1.914 | 0.000      | 1.000       |

**Скорости пластического течения.** Поле скоростей на плоскости годографа  $V_x, V_y$  изображается кривыми ортогональными к линиям скольжения, определяемыми дифференциальными уравнениями (10), с граничными условиями для скоростей

$$V_x = -V_0 \cos \varphi_0, \quad V_y = -V_0 \sin \varphi_0, \quad (23)$$

на контуре матрицы  $CD$ , где  $V_0$  — скорость по нормали к границе  $CD$  с углом наклона  $\varphi_0$ , равная скорости жесткого пуансона, и условиями симметрии пластического течения

$$V_y = 0, \quad \varphi = 0, \quad y = 0 \quad \text{на } AC, \quad V_x = 0, \quad \varphi = \pi/2, \quad x = 0 \quad \text{на } BD. \quad (24)$$

Таблица 2. Напряжения на границе  $BD$ 

| $x$   | $\sigma_1$ | $-\sigma_2$ | $x$   | $\sigma_1$ | $-\sigma_2$ |
|-------|------------|-------------|-------|------------|-------------|
| 0.667 | 0.903      | 0.171       | 1.015 | 0.494      | 0.657       |
| 0.667 | 0.903      | 0.172       | 1.044 | 0.468      | 0.680       |
| 0.680 | 0.883      | 0.202       | 1.073 | 0.442      | 0.702       |
| 0.693 | 0.863      | 0.232       | 1.104 | 0.416      | 0.724       |
| 0.707 | 0.843      | 0.262       | 1.136 | 0.390      | 0.746       |
| 0.721 | 0.822      | 0.291       | 1.169 | 0.363      | 0.767       |
| 0.737 | 0.801      | 0.319       | 1.204 | 0.337      | 0.788       |
| 0.753 | 0.780      | 0.348       | 1.240 | 0.310      | 0.808       |
| 0.770 | 0.758      | 0.376       | 1.278 | 0.282      | 0.828       |
| 0.788 | 0.735      | 0.403       | 1.317 | 0.255      | 0.848       |
| 0.806 | 0.713      | 0.431       | 1.359 | 0.227      | 0.867       |
| 0.826 | 0.690      | 0.457       | 1.401 | 0.200      | 0.885       |
| 0.846 | 0.666      | 0.484       | 1.446 | 0.172      | 0.903       |
| 0.867 | 0.642      | 0.510       | 1.493 | 0.144      | 0.920       |
| 0.889 | 0.618      | 0.535       | 1.542 | 0.115      | 0.937       |
| 0.913 | 0.594      | 0.560       | 1.593 | 0.087      | 0.954       |
| 0.937 | 0.569      | 0.585       | 1.647 | 0.058      | 0.970       |
| 0.962 | 0.545      | 0.609       | 1.703 | 0.029      | 0.985       |
| 0.988 | 0.519      | 0.633       | 1.762 | 0.000      | 1.000       |

Углы  $\varphi$  и  $\psi$ , необходимые для решения уравнений (10), определяются при вычислении линий скольжения по уравнениям (7)–(9) с граничными условиями (11)–(13) для напряжений на контуре фланца  $AB$  и условием  $\tau_{xy} = 0$  на линиях симметрии, но скорости на контуре  $AB$  неизвестны.

Расчеты скоростей по уравнениям (10) с граничными условиями (23), (24) выполняются после вычисления линий скольжения от контура фланца  $AB$  и определения напряжений и функций  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $\psi$  на контуре матрицы  $CD$ . Затем выполняется расчет сетки линий скольжения с вычислениями скоростей в обратном направлении от контура  $CD$  к контуру  $AB$  численным решением уравнений (7)–(10).

Известные значения  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $\psi$  и скорости (23) на контуре  $CD$  определяют сетку линий скольжения решением задачи Коши по конечноразностным уравнениям (14)–(18). Скорости  $V_x$ ,  $V_y$  в узловых точках сетки линий скольжения вычисляем с использованием конечноразностной аппроксимации уравнений (10)

$$V_x - V_{x1} = (V_{y1} - V_y) \operatorname{tg} \alpha, \quad V_x - V_{x2} = (V_{y2} - V_y) \operatorname{tg} \beta, \quad (25)$$

где нижними индексами 1 и 2 обозначены известные скорости в точках 1 и 2 на  $\xi$ - и  $\eta$ - линиях скольжения, и средние углы наклона  $\alpha$  и  $\beta$  к линиям скольжения определяются формулами (14), (15). Решение системы уравнений (25) имеет вид

$$V_x = (a_1 \operatorname{tg} \beta - a_2 \operatorname{tg} \alpha) / (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha), \quad V_y = (a_1 - V_x) / \operatorname{tg} \alpha, \\ a_1 = V_{x1} + V_{y1} \operatorname{tg} \alpha, \quad a_2 = V_{x2} + V_{y2} \operatorname{tg} \beta.$$



Известные после решения задачи Коши значения функций на  $\eta$ - линии скольжения, проходящей через точку  $C$ , и граничные условия (24) на линии симметрии  $AC$  определяют скорости с использованием соотношений (16) вдоль  $\xi$ - линии скольжения

$$V_x = V_{x1} + V_{y1} \operatorname{tg} \alpha, \quad V_y = 0, \quad \alpha = \frac{1}{2}(\varphi_1 - \psi_1 - \psi), \quad \lambda = \lambda_1 - \varphi_1, \quad \psi = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^{\frac{1}{3}} \lambda) \text{ на } AC.$$

Известные значения функций на  $\xi$ -линии скольжения, проходящей через точку  $D$ , и граничные условия (24) на линии симметрии  $BD$  определяют скорости с использованием соотношений (16) вдоль  $\eta$ -линии скольжения

$$V_y = V_{y2} + V_{x2} \operatorname{tg} \beta, \quad V_x = 0, \quad \beta = \frac{1}{2}(\pi/2 + \varphi_2 + \psi_2 + \psi), \quad \lambda = \lambda_2 + \varphi_2 - \pi/2 \text{ на } BD.$$

Значения функций  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $\psi$  и скоростей  $V_x$ ,  $V_y$  на контуре фланца  $AB$  вычисляются в точках пересечения с линиями скольжения, которые находятся при изменении знака функции  $g$ , определяющей границу  $AB$

$$g = 1 - (x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2).$$

Точки  $i$  и  $i + 1$  линии скольжения, пересекающей границу  $AB$ , находятся по условиям  $g_i > 0$ ,  $g_{i+1} < 0$  с последующим вычислением переменных в точке пересечения линейной интерполяцией (22). При этом выполняются граничные условия (11), (12), так как линии скольжения однозначно определяются граничными условиями на контуре  $AB$ . Результаты расчета скоростей в регулярных точках линий скольжения и на границах  $AB$ ,  $AC$ ,  $CD$ ,  $BD$  выводятся в графическом виде на плоскости годографа скоростей  $V_x$ ,  $V_y$  и таблицами численных значений.

Вычислительная программа расчета пластического течения фланца включает процедуру контроля знака диссипативной функции для направлений главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и главных скоростей деформаций  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$

$$D = \sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 \geq 0. \quad (26)$$

Отрицательное значение диссипативной функции противоречит условию положительности множителя в соотношениях между скоростями деформаций и девиаторами напряжений по теории пластического течения [8,9]. Нарушение неравенства (26) идентифицирует зоны расчетной области, в которых пластическое течение при заданных граничных условиях для напряжений и скоростей по теории пластического течения Мизеса невозможно. Изменение граничных условий, при которых неравенство (26) выполняется, с инженерной точки зрения означает изменение формы контуров матрицы и фланца для исключения возможных дефектов вытяжки.

В пластической области вне линий симметрии и контура фланца диссипативная функция  $D$  вычисляется для элемента ограниченного двумя парами соседних линий скольжения по средним напряжениям  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  для четырех узлов линий скольжения и скоростям деформаций  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  вычисляемым с учетом кривизны траекторий главных направлений 1 и 2

$$\varepsilon_1 = (dV_1 - V_2 d\varphi)/ds_1, \quad \varepsilon_2 = (dV_2 + V_1 d\varphi)/ds_2, \quad (27)$$

$$V_1 = V_x \cos \varphi + V_y \sin \varphi, \quad V_2 = V_y \cos \varphi - V_x \sin \varphi \quad (28)$$

где  $V_1, V_2$  — проекции вектора скорости на главные направления;  $ds_1, ds_2$  — элементы длины дуги,  $dV_1, dV_2$  — приращения скоростей и  $V_1, V_2$  — средние значения скоростей по главным направлениям. На линиях симметрии  $AC$  и  $BD$  с граничными условиями (24) уравнения (27) и (28) используются для треугольных элементов сетки линий скольжения

$$\varepsilon_1 = dV_x/dx, \quad \varepsilon_2 = V_x d\varphi/dy \text{ на } AC, \quad \varepsilon_1 = dV_y/dy, \quad \varepsilon_2 = V_y d\varphi/dx \text{ на } BD \quad (29)$$

На контуре фланца  $AB$  с граничными условиями (11) диссипативная функция вычисляется для линейного элемента между соседними узловыми точками линий скольжения, совпадающего со вторым главным направлением

$$D = -\varepsilon_2 = -(dV_2 + V_1 d\varphi)/ds_2 \text{ на } AB, \quad (30)$$

где скорости  $V_1, V_2$  вычисляются по формулам (28) в узловых точках линейного элемента в направлении от  $A$  к  $B$ .

На рис. 4 показан годограф скоростей для сетки линий скольжения, приведенной на рис. 2. Контур матрицы  $CD$  с граничными условиями (23) отображается на плоскости годографа дугой окружности с радиусом  $V_0 = 1$ , принятым за единицу скорости. Линии скольжения  $\eta$  и  $\xi$ , проходящие через точки  $C$  и  $D$  (рис. 2), при отображении на плоскости годографа на рис. 4 ограничивают области поля скоростей, определяемые решением задачи Коши от контура  $CD$ , задачи смешанного типа с линией симметрии  $AC$  и задачи смешанного типа с линией симметрии  $BD$ . Вектор скорости точек границы  $AB$  возрастает от точки  $A$  к точке  $B$  при малых углах наклона к оси  $y$  в окрестности точки  $B$ . На рис. 5 показано смещение контура фланца, вычисленное по скорости точек границы  $AB$  при малом перемещении пунсона  $ds = V_0 dt = 0.1$ .

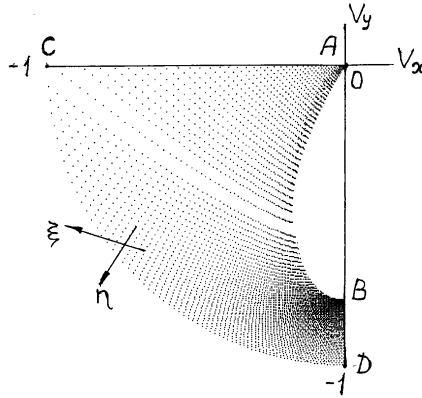


Рис. 4. Годограф скоростей для линий скольжения на рис. 2

$$x = x_0 V_x ds, \quad y = y_0 V_y ds,$$

где  $x_0, y_0$  — координаты границы  $AB$  при  $ds = 0$ , для которой вычислены линии скольжения и годограф скоростей.

Таблица 3. Скорости  $V_x$  на границе  $AC$ 

| $x$   | $-V_x$ | $x$   | $-V_x$ | $x$   | $-V_x$ |
|-------|--------|-------|--------|-------|--------|
| 1.000 | 1.000  | 1.243 | 0.379  | 1.492 | 0.094  |
| 1.031 | 0.901  | 1.260 | 0.351  | 1.514 | 0.081  |
| 1.048 | 0.849  | 1.276 | 0.324  | 1.535 | 0.069  |
| 1.065 | 0.800  | 1.293 | 0.299  | 1.558 | 0.059  |
| 1.081 | 0.752  | 1.309 | 0.274  | 1.582 | 0.049  |
| 1.098 | 0.707  | 1.326 | 0.251  | 1.607 | 0.040  |
| 1.114 | 0.663  | 1.343 | 0.229  | 1.633 | 0.032  |
| 1.130 | 0.622  | 1.360 | 0.209  | 1.661 | 0.025  |
| 1.147 | 0.582  | 1.378 | 0.189  | 1.690 | 0.018  |
| 1.163 | 0.544  | 1.396 | 0.171  | 1.721 | 0.013  |
| 1.179 | 0.508  | 1.414 | 0.153  | 1.754 | 0.009  |
| 1.195 | 0.473  | 1.433 | 0.137  | 1.789 | 0.005  |
| 1.211 | 0.440  | 1.452 | 0.122  | 1.827 | 0.002  |
| 1.227 | 0.409  | 1.472 | 0.107  | 1.867 | 0.001  |
|       |        |       |        | 1.914 | 0.000  |

Таблица 4. Скорости  $V_y$  на границе  $BD$ 

| $y$   | $-V_y$ | $y$   | $-V_y$ | $y$   | $-V_y$ |
|-------|--------|-------|--------|-------|--------|
| 0.667 | 1.000  | 0.867 | 0.883  | 1.204 | 0.818  |
| 0.680 | 0.987  | 0.890 | 0.876  | 1.240 | 0.814  |
| 0.693 | 0.975  | 0.913 | 0.869  | 1.278 | 0.810  |
| 0.707 | 0.964  | 0.937 | 0.863  | 1.318 | 0.807  |
| 0.721 | 0.953  | 0.962 | 0.857  | 1.359 | 0.803  |
| 0.737 | 0.943  | 0.988 | 0.851  | 1.401 | 0.800  |
| 0.753 | 0.933  | 1.015 | 0.846  | 1.446 | 0.797  |
| 0.770 | 0.924  | 1.044 | 0.840  | 1.493 | 0.794  |
| 0.788 | 0.915  | 1.073 | 0.835  | 1.542 | 0.792  |
| 0.806 | 0.906  | 1.104 | 0.830  | 1.593 | 0.789  |
| 0.826 | 0.898  | 1.136 | 0.826  | 1.647 | 0.787  |
| 0.846 | 0.891  | 1.169 | 0.822  | 1.762 | 0.782  |

Распределения скоростей  $V_x$  на линии симметрии  $AC$  и  $V_y$  на линии симметрии  $BD$  приведены в табл. 3 и 4. Скорость  $-V_x$  на линии  $AC$  быстро снижается от точки  $C$  к точке  $A$ . Скорость  $-V_y$  на линии  $BD$  изменяется незначительно при приближении к контуру фланца. В этой области плотность узловых точек годографа скоростей на рис. 4 максимальна.

В окрестности точки  $A$  скорости пластического течения стремятся к нулю при ширине фланца  $H = 0.9135$  на линии симметрии  $AC$ , определяющего контур  $AB$  на рис. 1 и 2. При большей ширине  $H$  расчеты линий скольжения и поля скоростей показывают положительные значения скорости точки  $A$ , которые приводят к отрицательной

Таблица 5. Влияние параметра  $b$  на напряжения и скорости пластического течения при  $H = 0.9135$

| $b$  | $CD$       |              | $C$        | $D$        | $A$    | $B$    |
|------|------------|--------------|------------|------------|--------|--------|
|      | $\sigma_n$ | $\tau_{max}$ | $\sigma_1$ | $\sigma_1$ | $-V_x$ | $-V_y$ |
| 2/3  | 0.788      | 0.369        | 0.860      | 0.903      | 0.000  | 0.784  |
| 0.70 | 0.786      | 0.329        | 0.848      | 0.876      | 0.095  | 0.760  |
| 0.75 | 0.785      | 0.267        | 0.829      | 0.841      | 0.220  | 0.728  |
| 0.80 | 0.784      | 0.206        | 0.809      | 0.814      | 0.324  | 0.700  |
| 0.85 | 0.773      | 0.147        | 0.788      | 0.783      | 0.412  | 0.672  |
| 0.90 | 0.758      | 0.094        | 0.765      | 0.760      | 0.485  | 0.648  |
| 0.95 | 0.740      | 0.044        | 0.743      | 0.736      | 0.546  | 0.626  |
| 1.0  | 0.719      | 0.000        | 0.719      | 0.719      | 0.597  | 0.597  |

диссипативной функции, так как при граничных условиях (11) и  $V_x > 0$  скорость деформации  $\varepsilon_2$  в точке  $A$  положительна.

Неравенство  $V_x < 0$  в точке  $A$  определяет предельные размеры фланца при вытяжке эллиптической оболочки с заданной формой контура матрицы по условию положительности диссипативной функции пластического течения. Увеличение ширины фланца  $H > 0.9135$  при  $b = 2/3$  и уменьшение  $b < 2/3$  при  $H = 0.9135$  приводят к расширению области с отрицательными значениями диссипативной функции в окрестности точки  $A$ . При уменьшении параметра  $b$  эллипса матрицы допускаемая ширина фланца  $H$  и высота эллиптической оболочки, получаемые вытяжкой из плоской заготовки, уменьшаются.

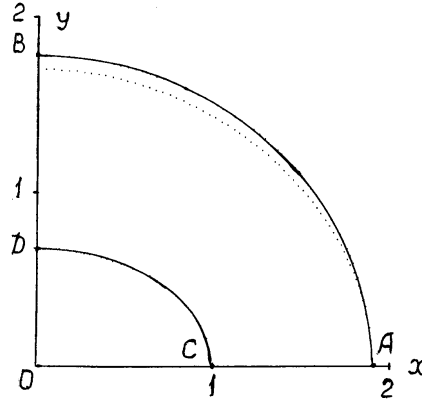


Рис. 5. Смещение точек границы фланца  $AB$  на рис. 2 при перемещении пуансона  $ds = 0.1$

На рис. 6 показаны годографы скоростей границ пластической области для  $b = 2/3, 0.7, 0.75, 0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 1$  при постоянной ширине фланца  $H = 0.9135$  по оси  $x$ . В табл. 5 приведены численные значения  $\sigma_1$  в точках  $C, D$ , нормальных напряжений  $\sigma_n$ , максимальных касательных напряжений  $\tau$  на контуре матрицы  $CD$  и скоростей  $V_x, V_y$  в точках  $A$  и  $B$  контура фланца в зависимости от  $b$ .

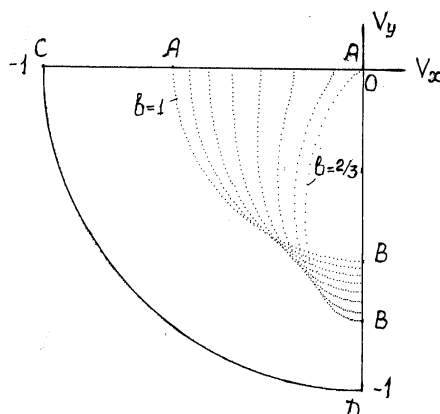


Рис. 6. Годографы скоростей границы фланца АВ при  $H = 0.9135$  и  $b = 2/3, 0.7, 0.75, 0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 1$

Эллиптическая форма контура матрицы существенно влияет на напряжения и скорости пластического течения фланца. Приближение к предельному значению  $b = 1$  для кругового контура приводит к снижению касательного напряжения на контуре матрицы до нуля. В этом случае траектории радиального пластического течения материальных точек совпадают с направлением напряжения  $\sigma_1$ , величина которого снижается от максимального значения 0.903 в точке  $D$  при  $b = 2/3$  до 0.719 при  $b = 1$  с постоянным значением на круговом контуре матрицы. Это позволяет увеличить ширину фланца до значения  $H = 1.48$  при увеличении напряжения  $\sigma_1$  до единицы и положительной диссипативной функции при скорости  $V_x = -0.403$  на контуре матрицы.

**Заключение.** Получено численное решение задачи двумерного пластического течения широкого фланца по теории плоского напряженного состояния со смешанными граничными условиями для напряжений и скоростей при вытяжке тонкостенной оболочки с эллиптическим контуром матрицы и фланца. Получены распределения нормальных и касательных напряжений по контуру матрицы и годограф скоростей пластического течения фланца с контролем знака диссипативной функции.

Для рассмотренных эллиптических контуров матрицы и фланца получены нормальные растягивающие напряжения на контуре матрицы, близкие к напряжению текучести и ограничивающие процесс вытяжки по критерию локального разрушения заготовки. Допустимая ширина фланца ограничена также условием положительности диссипативной функции пластического течения по теории Мизеса.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
- [2] Попов Е. А. Основы теории листовой штамповки. М: Машиностроение, 1977. 278 с.
- [3] Томленов А. Д. Теория пластического деформирования металлов. М : Металлургия, 1972. 408 с.
- [4] Романовский В. П. Справочник по холодной штамповке. Л.: Машиностроение, 1979. 520 с.

- [5] Nepershin R. I. Applied Problems of Plasticity. Moscow: MSTU “STANKIN”, 2016. 310 p.
- [6] Непершин Р. И. Вытяжка тонкостенной конической оболочки из плоской заготовки // Известия РАН. МТТ. 2010. № 1. С. 139–153.
- [7] Непершин Р. И. Глубокая вытяжка тонкостенной полусферы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 1. С. 74–84.
- [8] Соколовский В. В. Теория пластичности. М. : Высшая школа, 1969. 608 с.
- [9] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. 704 с.
- [10] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М. : Наука, Физматлит, 1968. 720 с.

*R. I. Nepershin*

### PLASTIC FLOW OF THE ELLIPTIC WORKPIECE FLANGE DURING THIN-WALLED ELLIPTIC SHELL DEEP DRAWING

*Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia*

**Abstract.** Numerical solution of the workpiece elliptic flange plastic flow during thin-walled elliptic shell deep drawing is presented. Plane stress theory of the ideal plastic flow with Mises yield criterion, developed by V.V. Sokolovskii, is used. The slip lines, stresses and plastic flow velocities on the hodograph plane with non-negative dissipative function control are calculated.

Normal and shear stresses on the elliptic matrix contour are calculated, compared with zero shear stresses in the case of axisymmetrical deep drawing of the cylinder shell. The limit forms of the matrix and workpiece for the elliptic shell deep drawing are constrained by maximal tension stresses on the matrix counter, and flange regions generation with negative dissipative function where plastic flow with Mises yield criterion is impossible.

**Keywords:** plane stress theory, ideal plasticity, thin-walled elliptic shell, deep drawing, elliptic workpiece flange, slip lines, stresses, plastic flow velocities, dissipative function.

### REFERENCES

- [1] Hill R. Matematicheskaya teoriya plastichnosti. M.: Gostekhizdat, 1956. 407 s (In Russian)
- [2] Попов Е. А. Основы теории листового штамповки. М: Mashinostroenie, 1977. 278 s (In Russian)
- [3] Tomlenov A. D. Teoriya plasticheskogo deformirovaniya metallov. M : Metallurgiya, 1972. 408 s. (In Russian)
- [4] Romanovskij V. P. Spravochnik po holodnoj shtampovke. L.: Mashinostroenie, 1979. 520 s. (In Russian)
- [5] Nepershin R. I. Applied Problems of Plasticity. Moscow: MSTU “STANKIN”, 2016. 310 p.
- [6] Nepershin R. I. Vytyazhka tonkostennoj konicheskoy obolochki iz ploskoj zagotovki // Izvestiya RAN. MTT. 2010. № 1. S. 139–153. (In Russian)

---

*Nepershin Rostislav Ivanovich* ,

e-mail: nepershin\_ri@rambler.ru, Dr. Sci. Eng., Professor, Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia.

- 
- [7] Nepershin R. I. Glubokaya vytyazhka tonkostennoj polusfery // Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin. 2014. № 1. S. 74—84. (In Russian)
- [8] Sokolovskij V. V. Teoriya plastichnosti. M. : Vysshaya shkola, 1969. 608 s. (In Russian)
- [9] Ishlinskij A. YU., Ivlev D. D. Matematicheskaya teoriya plastichnosti. M. : FIZMATLIT, 2001. 704 s. (In Russian)
- [10] Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlya nauchnyh rabotnikov i inzhenerov. M. : Nauka, Fizmatlit, 1968. 720 s. (In Russian)