

О. С. Новикова, В. Б. Пеньков, Л. В. Левина

## МЕТОД ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ КАК СПОСОБ ОРГАНИЗАЦИИ ПОЛНОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ЭЛАСТОСТАТИКИ

*Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия*

**Аннотация.** Классические решения задач математической физики до внедрения в практику вычислений электронно-вычислительных машин имели аналитическую форму и применялись для тел простой геометрии с типовыми граничными условиями (включая метод Шварца). Переориентация на числовые компьютерные технологии породила мощные вычислительные методы: конечно-разностные, граничных интегральных уравнений (метод граничных элементов), энергетические методы Ритца (метод конечных элементов), Галеркина, наименьших квадратов, Канторовича и их модификации. Это позволило отыскивать решения довольно сложных задач. Их недостатком явилась необходимость пересчета решения при изменении параметров задачи. Применение процедур интерполирования неприципиально повысило их уровень гибкости, хотя используемые процедуры Шварца стали более доступными. Создание современных вычислительных систем, базирующихся на «компьютерных алгебрах», позволило получать решения в численно-аналитической форме. Новый вариационный метод граничных состояний позволяет строить полнопараметрические решения (решения, содержащие все параметры задачи в аналитической форме) для произвольной геометрической конфигурации тел, разных типов граничных условий и всех констант физической среды. Для включения параметров среды и геометрических параметров тела в аналитическое решение можно применять интерполирование (ресурсозатратный подход). Метод возмущений в сочетании с методом граничных состояний принципиально снижает затраты вычислительных ресурсов. Актуальность и цель работы определены организацией такого подхода и предполагают решение ряда задач: 1) разработка процедуры использования метода возмущений для включения параметров среды в решение; 2) разработка алгоритма построения полнопараметрического решения задачи методом граничных состояний с возмущениями; 3) полнопараметрическое решение второй основной задачи для односвязного ограниченного тела с несколькими типами граничных условий. Эти результаты достигнуты и проиллюстрированы в аналитической форме и графически для односвязного ограниченного тела с тремя различно параметризуемыми участками границы.

**Ключевые слова:** метод граничных состояний, метод граничных состояний с возмущениями, метод возмущений, полнопараметрическое решение, аналитическое решение.

УДК: 539.3

Исторически развитие классических разделов физики, математики, механики опиралось на построение аналитических решений, поскольку мощные средства вычислительной техники еще не были разработаны. Свидетельства об этом можно обнаружить в ставших классическими научных руководствах на Западе [1, 2, 3], а также в России [4, 5, 6]. Стремление к построению решений более сложных задач (для многополостных тел, со смешанными граничными условиями (ГУ)) проявилось еще в конце девятнадцатого века [7], хотя приближенные аналитические решения выводились для тел простых геометрических конфигураций.

Переход к числовым технологиям, строившимся на внедрении в практику научных и инженерных расчетов средств вычислительной техники, породил новые методы решения: конечно-разностные, метод граничных интегральных уравнений (метод граничных элементов, МГЭ [8, 9]), энергетические методы (Ритца, Галеркина, наименьших квадратов, Канторовича и их дискретные варианты, например, метод конечных элементов [10]). Эти методы позволяют отыскивать численные решения довольно сложных задач математической физики, в том числе «нащупывать» аналитические особенности в задачах [10]. Их общим недостатком является необходимость пересчета решения при изменении хотя бы одного параметра задачи. Возникла необходимость в проведении интерполирования решений (методы Лагранжа, Чебышева, сплайн-интерполяции [11]). Итерационные процессы, порожденные процедурами Шварца или им близкими [12, 13], стали более доступными.

Современные мощные вычислительные системы, опирающиеся на «компьютерные алгебры», например, сравнительно новый вариационный метод граничных состояний (МГС, [14, 15]), предоставляющие результаты решения в численно-аналитической форме, позволяют организовать построение полнопараметрических аналитических решений (решений, содержащих все параметры задачи в аналитической форме, ППР, [16]) для произвольной геометрической конфигурации тел, разнообразных типов ГУ и всех констант физической среды, представленных в символьной форме. При выполнении процедур включения параметров среды и геометрических параметров тела в ППР можно использовать методы интерполирования, но такой подход является

---

© Новикова О. С., Пеньков В. Б., Левина Л. В., 2018

*Новикова Ольга Сергеевна*

e-mail: [\\_o\\_l\\_g\\_a\\_@bk.ru](mailto:_o_l_g_a_@bk.ru), аспирант института машиностроения, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия,

*Пеньков Виктор Борисович*

e-mail: [vbrenkov@mail.ru](mailto:vbrenkov@mail.ru), доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей механики, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия,

*Левина Любовь Владимировна*

e-mail: [satalkina\\_lyubov@mail.ru](mailto:satalkina_lyubov@mail.ru), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект №16-41-480729 „p\_a“).

Поступила 30.03.2018

ресурсозатратным. Применение метода возмущений в сочетании с МГС принципиально снижает затраты вычислительных ресурсов, поскольку основная емкая процедура – ортогонализация базиса, – выполняется ровно один раз. Выбор МГС в качестве опорного метода при построении ППР обусловлено его характерными преимуществами [15]: оперирование компьютерными алгебрами, предоставляющими решение в численно-аналитической форме; МГС исходит из изоморфизма гильбертовых пространств внутренних состояний (множества частных решений, удовлетворяющих определяющим соотношениям среды) и граничных состояний (множества состояний, порожденных внутренними состояниями в точках границы), что любую корректную задачу сводит к расшифровке граничного состояния и, соответственно, внутреннего состояния по информации, содержащейся в граничных условиях; МГС является методом самодостаточным (не требует подтверждения решения иными способами), поскольку определяющие соотношения удовлетворяются тождественно, что не трудно проверить подстановкой в них аналитических решений, получая тождество, а сравнение граничного состояния с заданными ГУ позволяет оценить погрешность расчетов, вызванную вынужденным усечением счетного базиса пространства состояний; основные задачи эластостатики решаются тривиально, поскольку сводятся к рутинному вычислению квадратур, «завязанных» на ГУ. Принципиальный аналитический подход позволяет с минимальными затратами строить ППР. Есть и другие достоинства. Отмеченные особенности являются выигрышными перед широко применяемыми численными методами. МГС является сравнительно новым энергетическим методом, разработанным авторами.

Актуальность темы исследования определена организацией именно такого подхода. Его реализация составляет цель работы. Достижению цели сопутствует решение ряда смежных задач исследования: 1) разработка процедуры использования метода возмущений для включения параметров среды в ППР; 2) разработка алгоритма построения ППР задачи методом граничных состояний с возмущениями; 3) полнопараметрическое решение второй основной задачи эластостатики для односвязного ограниченного тела с несколькими вариантами граничных условий.

### Использование метода возмущений в задачах изотропной эластостатики

Определяющие соотношения изотропной эластостатики (безразмерная форма) содержат соотношения Коши, обобщенный закон Гука, уравнения равновесия [5]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad \theta = \varepsilon_{ii}, \quad (2)$$

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad (3)$$

где  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензоров деформаций и напряжений,  $u_i$  – компонента вектора перемещений,  $\theta$  – объемная деформация,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $X_i$  – компонента вектора объемных сил,  $\lambda = 2\nu\mu/(1 - 2\nu)$  – параметр Ламе. Полагаем модуль сдвига  $\mu$  фиксированным и вводим малый параметр  $\beta$  для коэффициента Пуассона:  $\nu = \nu_0(1 + \beta)$  с целью включения его символического значения в ППР. Технология метода возмущений основательно изложена [17] и во многом в доказательной форме развита в монографии [18]. Ниже демонстрируется ее эффективность в части учета параметров упругости в ППР.

Для модуля объемного расширения получаем представление

$$\lambda = \frac{2\nu_0(1+\beta)\mu}{1-2\nu_0(1+\beta)} = \frac{\lambda_0 + \omega\mu}{1-\omega} = (\lambda_0 + \omega\mu)(1 + \omega + \omega^2 + \dots), \quad (4)$$

где  $\lambda_0 = 2\nu_0\mu/(1-2\nu_0)$ ,  $\omega = 2\nu_0\beta/(1-2\nu_0)$  – малый параметр. Выражение (4) удобно переписать в виде ряда по степеням  $\omega^k$

$$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \omega^k, \quad \lambda_k = \begin{cases} \lambda_0, & k=0 \\ \lambda_*, & k>0 \end{cases}, \quad \lambda_* = \lambda_0/2\nu_0,$$

здесь  $k$  – показатель степени малого параметра и одновременно номер итерации в процессе метода возмущений. Ниже верхний индекс ( $k$ ) или ( $l$ ) означает результат, полученный для соответствующей характеристики на итерации  $k$  или  $l$ .

Из (1) следует:

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2}(u_{i,j}^{(k)} + u_{j,i}^{(k)}).$$

Анализ (2) после асимптотического разложения приводит к выражению

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{ij}^{(k)} \omega^k = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m \omega^m \sum_{l=0}^{\infty} \theta^{(l)} \omega^l \delta_{ij} + 2\mu \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{ij}^{(k)} \omega^k.$$

Изменение порядка суммирования

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m \omega^m \sum_{l=0}^{\infty} \theta^{(l)} \omega^l \delta_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \lambda_m \theta^{(k-m)} \omega^k$$

после введения обозначения для части, обусловленной предыдущими по отношению к  $k$  итерациями, приводит к форме обобщенного закона Гука

$$s_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} - \tilde{\sigma}_{ij}^{(k)} = \lambda_k \theta^{(k)} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^{(k)},$$

где

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 0, & k=0, \\ \lambda_* \sum_{l=0}^{k-1} \theta^{(l)} \delta_{ij}, & k>0 \end{cases}$$

Уравнения равновесия (3) после использования разложения

$$X_i = \sum_{k=0}^{\infty} X_i^{(k)} \omega^k$$

и введения обозначения

$$\tilde{X}_i^{(k)} = X_i^{(k)} + \tilde{\sigma}_{ij,j}^{(k)} = \lambda_* \sum_{l=0}^{k-1} \theta^{(l)} \quad (5)$$

приводится к «классическому» виду:

$$s_{ij,j}^{(k)} + \tilde{X}_i^{(k)} = 0.$$

Таким образом, на каждом шаге асимптотического разложения ставится традиционная по форме задача линейной изотропной эластостатики, причем при фиксированном значении  $\nu_0$  коэффициента Пуассона.

Метод граничных состояний совместно с вышеизложенным механизмом применения метода возмущений к задачам теории упругости получил название «метод граничных состояний с возмущениями» (МГСВ) [14]. Алгоритм решения задачи не является

тривиальным, поэтому ниже описан подробно. В представленной форме он реализован в вычислительной среде.

### Алгоритм построения полнопараметрического решения задачи методом граничных состояний с возмущениями

0. Описание геометрии тела, материала. Задание граничных условий, массовых сил,  $g = 0$  – номер итерации асимптотического разложения.

1. Решение задачи с массовыми силами осуществляется в случае их наличия в постановке задачи либо в случае их фиктивного возникновения в итерациях  $g > 0$ , иначе переходим к п. 2.

Для односвязной конечной области уместно общее решение Палковича - Нейбера в форме Аржаных - Слободянского [5]:

$$u_i = 4(1 - \nu)B_i + x_j B_{i,j} - x_i B_{j,j} + u_i^P, \quad (6)$$

где величины  $u_i^P$  отвечают за перемещения, вызванные объемными силами.

Решение (6) ищем в форме декомпозиции

$$u_i = u_i^L + u_i^P, \quad (7)$$

где второе слагаемое разыскивается универсальным алгоритмом расчета напряженно-деформированного состояния тела от непотенциальных объемных сил, а первое слагаемое  $u_i^L$  строится методом граничных состояний [14] как результат решения краевой задачи для однородных уравнений Ламе, в которой ГУ содержат поправку относительно известной величины, последовательно по шагам 2, 3, 4, 5, 6 алгоритма.

Вносятся поправки в ГУ. В случае первой основной задачи корректируются поверхностные усилия:

$$p_i^L|_{\partial V} = p_i|_{\partial V} - p_i^P|_{\partial V}, \quad p_i^P|_{\partial V} = \sigma_{ij}^P|_{\partial V} n_j, \\ \sigma_{ij}^P = \lambda \vartheta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^P, \quad \vartheta = \varepsilon_{kk}^P, \quad \varepsilon_{ij}^P = 1/2(u_{i,j}^P + u_{j,i}^P);$$

в случае второй основной задачи корректируются перемещения:

$$u_i^L|_{\partial V} = u_i|_{\partial V} - u_i^P|_{\partial V}.$$

2. Шаг выполняется только при  $g = 0$ . Построение исходного базиса для пространства внутренних состояний изотропного ограниченного тела выполняется на основе (6) при условии  $u_i^P = 0$ , либо пространства внутренних состояний для внешности изотропной полости (форма Аржаных-Слободянского)

$$u_i = 4(1 - \nu)B_i - (x_j B_j)_{,i},$$

где  $B_i$  - компонента произвольного гармонического вектора  $\mathbf{B} \in \{\{\varphi, 0, 0\}, \{0, \varphi, 0\}, \{0, 0, \varphi\}\}$ . В случае ограниченного односвязного тела следует принять  $\varphi$  как элемент множества линейно независимых гармонических многочленов [14], т.е.

$$\varphi \in \{x, y, z, yz, xz, xy, x^2 - z^2, y^2 - z^2 \dots\},$$

в случае неограниченного однополостного тела следует назначать базис гармонических функций вида [15]:

$$\varphi \in \{1/r, x/r^3, y/r^3, z/r^3, yz/r^5, xz/r^5, xy/r^5 \dots\},$$

где радиус-вектор отсчитывается от центра сферической полости  $\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ .

По соотношениям Коши и обобщенному закону Гука для каждого вектора перемещения  $\mathbf{u}^{(k)}$  строятся деформации (1) и напряжения (2), в совокупности составляющие  $k$ -ое внутреннее состояние  $\xi^{(k)} = \{u_i^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)}\}$ . После исключения линейно-зависимых элементов из списка  $\{\xi^{(k)}\}, k \in \{1, \dots, \infty\}$  (если таковые имеют место) получаем базис пространства внутренних состояний изотропного эластостатического тела. Базис внутренних состояний  $\Xi = \{\xi^{(k)}\}_\infty$  индуцирует на границе изоморфный базис граничных состояний  $\Gamma = \{\gamma^{(k)}\}_\infty$ ,  $\gamma^{(k)} = \{u_i^{(k)}, p_i^{(k)}\}$ ,  $p_i^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} n_j$ , где  $n_j$  – компонента единичного вектора внешней нормали к границе.

3. Ортогонализация исходных базисов выполняется единожды при  $g = 0$ , причем в двух вариантах. А именно, для итерации 0 используется ортонормированный базис с коэффициентом Пуассона  $\nu_0$ , для последующих итераций – с коэффициентом  $\nu_* = 0.5(\lambda_0 + \mu_0)/(\lambda_0 + 2\mu_0)$ .

4. В общем случае построение «скелета задачи», т.е. матрицы бесконечной системы уравнений (БСУ)  $Q$ , и вектора правых частей  $q$  выполняются для каждого типа задачи в отдельности:  $Q\mathbf{c} = \mathbf{q}$ ,  $\mathbf{c} = \{c_k\}_\infty$ ,  $\mathbf{q} = \{q_k\}_\infty$ . Для первой и второй основных задач «скелетом» будет являться единичная матрица [14]:  $Q = E$ , причем коэффициенты Фурье  $c_k$  совпадают с компонентами вектора правых частей БСУ  $c_k = q_k$ . Для первой и второй основных задач имеем соответственно:

$$c_k = \int_{\partial V} p_i^L u_i^{(k)} dS; c_k = \int_{\partial V} u_i^L p_i^{(k)} dS.$$

5. В общем случае коэффициенты Фурье определяются традиционно из решения усеченной БСУ:

$$\mathbf{c} = Q^{-1}\mathbf{q}.$$

6. Состояния, помеченные символом "L", определяем рядами Фурье

$$u_i^L = \sum_k c_k u_i^{(k)}, \quad \sigma_{ij}^L = \sum_k c_k \sigma_{ij}^{(k)}, \quad \varepsilon_{ij}^L = \sum_k c_k \varepsilon_{ij}^{(k)},$$

$$u_i^L|_{\partial V} = \sum_k c_k u_i^{(k)}|_{\partial V}, \quad p_i^L = \sum_k c_k p_i^{(k)}.$$

Результирующие поля  $g$ -той итерации асимптотического разложения получаем суммированием полей, помеченных символами "L" и "P"(7).

7. Принятие решения о необходимости перехода к следующей итерации («Да» или «Нет»).

Если «Да», то переходим к шагу 8.

Если «Нет», то завершаем расчеты, переходя к шагу 9.

8. Подготовка к очередной итерации:  $g := g + 1$ . Базисы пространств внутренних и граничных состояний не меняются; при  $g = 0$  «скелет» тела  $Q$  отвечает реальному типу ГУ. При  $g \geq 1$  полагаем  $Q \equiv E$  (первая основная задача) для экономии ресурсов вычисления. ГУ следующей итерации принимаем соответствующими первой основной задаче:  $\mathbf{p} = 0$ . Возникают фиктивные массовые силы текущей итерации в соответствии с (5) и далее решается задача с учетом коррекции ГУ от их воздействий. Переходим к шагу 1.

9. Выписываем ППР:

$$\xi = \xi^{(0)} + \beta \xi^{(1)} + \beta^2 \xi^{(2)} + \dots; \gamma = \gamma^{(0)} + \beta \gamma^{(1)} + \beta^2 \gamma^{(2)} + \dots,$$

где  $\beta = 2(\nu - \nu_0)(1 - 2\nu_0)$ .

10. Интерпретация результатов. Построение купюр, эпюр механических характеристик.

**Пример решения второй основной задачи для односвязного ограниченного тела с несколькими типами граничных условий**

В качестве примера эффективного применения разработанного аппарата рассмотрим осесимметричную задачу для тела (рис.1), допускающую различные сочетания параметров нагружения трех типов постановок (табл. 6, наборы параметров, участвующих в граничных условиях, определены параметризацией): 1) равномерное осесимметричное деформирование тела; 2) равномерное осевое растяжение; 3) равномерное закручивание тела вокруг оси (примерно такому сочетанию нагружения подвергается пуля в канале ствола). Будем предполагать, что геометрические пропорции зафиксированы ( $R$  – параметр геометрического подобия), материал тела, как и его упругие модули, варьируется произвольным образом. Требуется выписать ППР, учитывающее произвольное сочетание параметров нагружения.

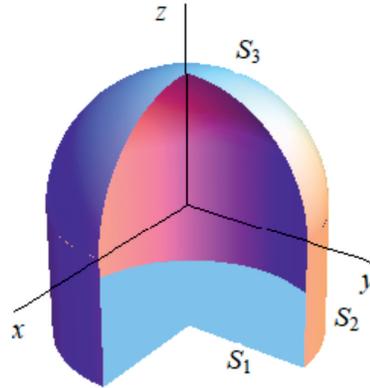


Рис. 1. Деформируемое тело

	$\mathbf{u} _{S_1}$	$\mathbf{u} _{S_2}$	$\mathbf{u} _{S_3}$
Задача 1	$-\begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ -\cos \theta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$
Задача 2	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix}$
Задача 3	$\begin{pmatrix} r \sin \varphi \\ -r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -z \sin \varphi \\ z \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \theta \cos \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$

Таблица 6. Граничные условия

На рис. 2 представлены линии уровня напряжений в сечении  $y = 0$  для линейной комбинации состояний  $\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}$ , соответствующих задачам 1, 2, 3, т.е. результирующим состоянием является

$$\xi = a\xi^I + b\xi^{II} + c\xi^{III},$$

при значениях параметров  $a = 0.02, b = 0.03, c = 0.01$  (безразмерная постановка).

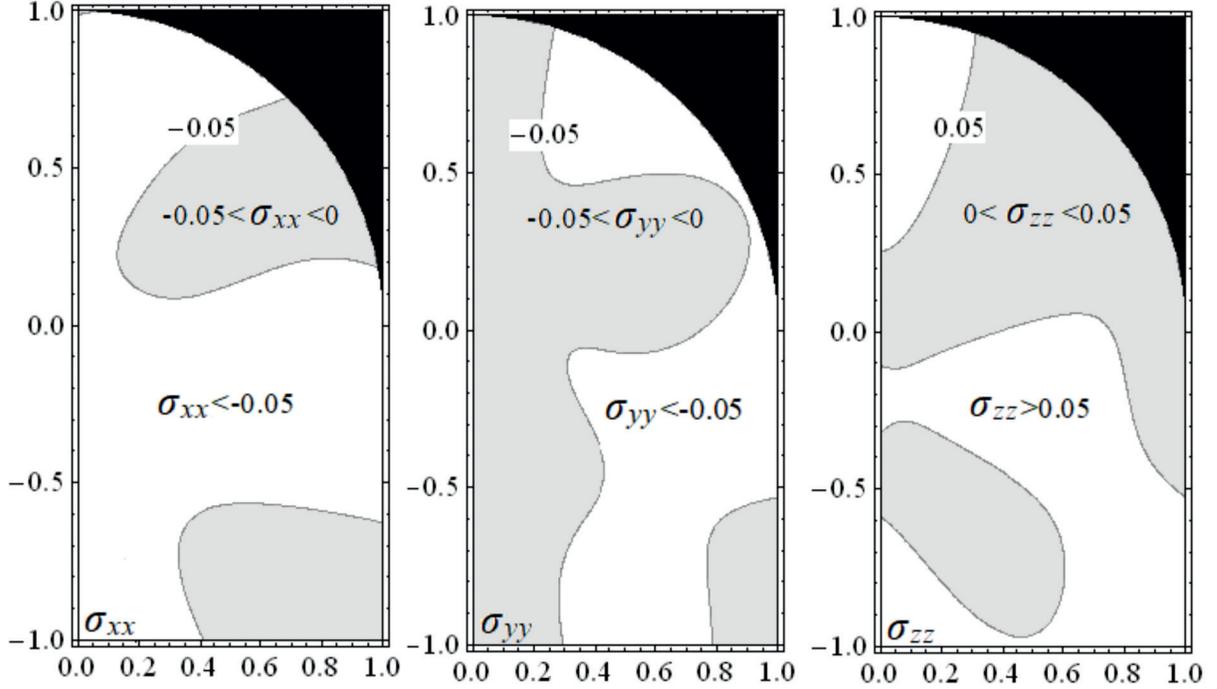


Рис. 2. Линии уровня безразмерных напряжений  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$

Переход к размерным величинам позволил выписать ППР задачи:

$$\begin{aligned} u_x \approx & -ax + b[(0.021x^4z^4/R^7 + 0.039x^4z^5/R^8 - 0.017x^2z^7/R^8 + \dots)(\nu - 0.25) + \\ & + (0.046x^4y^2/R^5 - 0.025x^6y^2/R^7 - 0.044x^2y^4/R^5 + 0.033x^2y^6/R^5 + \dots)(\nu - 0.25)^2] + \\ & + c[-yz/R + (-0.015x^2y^5/R^6 - 0.020x^5z^4/R^8 + 0.018x^3z^6/R^8 + \dots)(\nu - 0.25) + \\ & + (0.116xy^3z^3/R^6 - 0.131x^5z^4/R^8 - 0.155xy^3z^5/R^8 + 0.125x^3z^6/R^8 + \dots)(\nu - 0.25)^2]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_y \approx & -ay + b[(0.012y^4z^4/R^7 + 0.022y^4z^5/R^8 - 0.009y^2z^7/R^8 + \dots)(\nu - 0.25) + \\ & + (-0.091x^5z^3/R^7 - 0.155x^5z^4/R^8 + 0.078x^3z^5/R^7 + 0.104x^3z^6/R^8 + \dots)(\nu - 0.25)^2] + \\ & + c[xz/R + 0.028y^4z^4/R^7 + 0.053y^4z^5/R^8 - 0.023y^2z^7/R^8 + \dots)(\nu - 0.25) + \\ & + (0.090x^4y^2z^3/R^8 - 0.136y^5z^4/R^8 - 0.129x^2y^2z^5/R^8 + 0.126y^3z^6/R^8 + \dots)(\nu - 0.25)^2]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_z \approx & b[z + (0.019x^2y^4z^2/R^7 + 0.014x^3z^4/R^6 - 0.020x^3z^6/R^8 + \dots)(\nu - 0.25) + \\ & + (0.073x^3y^4/R^6 - 0.146x^3y^2z/R^5 + 0.081x^5y^2z/R^7 - 0.054y^3z^6/R^8 + \dots)(\nu - 0.25)^2] + \\ & + c[(0.018x^4y^4/R^7 + 0.016y^3z^4/R^6 - 0.020y^3z^5/R^7 - 0.027y^3z^6/R^8 + \dots)(\nu - 0.25) + \\ & + (-0.158x^2y^3z/R^5 + 0.101x^2y^5z/R^7 + 0.116x^4z^5/R^8 + 0.105y^4z^5/R^8 + \dots)(\nu - 0.25)^2]. \end{aligned}$$

Выражения для тензоров деформаций и напряжений технически легко получаются из таковых для перемещений. Здесь они не приведены из-за их необозримости.

### Выводы

Новизна полученных результатов содержится в следующих положениях.

1. МГСВ заявил себя как эффективный аппарат построения аналитических решений для тел произвольной формы.
2. Разработан эффективный алгоритм использования МГСВ для организации полнопараметрических решений задач эластостатики односвязного тела.
3. Построено ППР в конкретной задаче эластостатики при произвольном наборе параметров упругости и трех произвольных параметрах геометрического характера на границе.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Green A. E., Zerna W. *Theoretical Elasticity*. Second Edition. New York: Dover Publications, Inc., 2012. 478 p.
- [2] Truesdell C., Noll W. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. 3rd ed. Springer, 2004. 602 p. DOI: 10.1007/978-3-662-10388-3.
- [3] Arfken G. B., Weber H. J. *Mathematical Methods for Physicists*. Sixth Edition. Elsevier Academic Press, 2005. 1182 p.
- [4] Мусхелишвили Н. И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. М.: Наука, 1966. 708 с.
- [5] Лурье А. И. *Теория упругости*. М.: Наука, 1970. 940 с.
- [6] Работнов Ю. Н. *Механика деформируемого твердого тела*. М.: Наука, 1988. 712 с.
- [7] Schwarz H. A. *Über einige Abbildungsaufgaben*, *Ges. Math. Abh.* 1869. No. 2. P. 65–83.
- [8] Gaul L., Kogl M., Wagner M. *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. 488 p. DOI: 10.1007/978-3-662-05136-8
- [9] Игумнов Л. А., Марков И. П., Пазин В. П. *Гранично-элементное решение краевых задач трехмерной анизотропной теории упругости // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2013. № 1(3). С. 115–119.
- [10] Корепанова Т. О., Севодина Н. В. *Метод и результаты расчета характера сингулярности напряжений в трехмерных задачах теории упругости // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2011. № 4 (4). С. 1539–1541.
- [11] Иваньшин П. Н. *Сплайн-интерполяционное решение задач теории упругости // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*. 2015. Т. 157, кн. 4. С. 24–41.
- [12] Стружанов В. В. *Об одном итерационном методе расчета напряжений в неодносвязных телах // Вычисл. технологии*. 2006. Т. 11. № 6. С. 118–124.
- [13] Агаханов Э. К., Агаханов М. К. *О возможности применения эквивалентности воздействий в аналитических решениях задач теории упругости // Вестник МГСУ*. 2010. Т. 3. № 4. С. 144–148.
- [14] Пеньков В. Б., Саталкина Л. В. *Метод граничных состояний с возмущениями: неоднородные и нелинейные задачи теории упругости и термоупругости*. (Монография). LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co., Germany, 2012. 108 с.

[15] Пеньков В. Б., Саталкина Л. В., Шульмин А. С. Применение метода граничных состояний для анализа упругой среды с полостями и включениями // ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 4. С. 542–556.

[16] Левина Л. В., Новикова О. С., Пеньков В. Б. Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела. // Вестник ЛГТУ. 2016. № 2 (28). С. 16–24

[17] Nayfeh A. H. Introduction to perturbation techniques. New York: A wiley-interscience publication. John Wiley & Sons, Inc , 1993. 519 p.

[18] Минаева Н. В. Метод возмущений в механике деформируемых тел. -М.: Научная книга, 2002. 156 с.

O. S. Novikova, V. B. Penkov, L. V. Levina

**METHOD OF BOUNDARY STATES WITH THE PERTURBATION AS A WAY  
OF ORGANIZING FULL PARAMETRIC ANALYTICAL SOLUTION SOLVING  
OF THE SECOND BASIC PROBLEM OF LINEAR ELASTOSTATICS**

*Lipetsk state technical university, Lipetsk, Russia*

**Abstract.** Classical solutions of problems of mathematical physics before introduction of electronic computing machines into computing practice had analytical form and used for bodies of simple geometry with the typical boundary conditions (including the method of Schwarz). The reorientation to numerical computer technology has created powerful computational methods (finite-difference, boundary integral equations (boundary element method), the Ritz energy methods (finite element method), Galerkin's method, least squares, Kantorovich's method and their modifications. This has allowed them to find solutions to quite complex tasks. Their disadvantage was the need of the recalculation of the solutions when changing the parameters of the problem. The use of interpolation procedures can be successfully increased their level of flexibility, although the procedures of Schwarz become more accessible. The creation of modern computing systems based on "computer algebra allowed us to obtain the solution in numerical form. New variational method of boundary states allows us to construct full parametric analytical solution (solutions that contains all task parameters) for an arbitrary geometric configuration of bodies, different types of boundary conditions and all the constants of the physical medium. For including medium parameters and geometrical parameters of the body in an analytical solution it is possible to apply interpolation (resource-intensive approach). The perturbation method in combination with the method of boundary states were fundamentally reduces the cost of computing resources. The relevance and purpose of the work as defined by the organization of this approach and suggest a number of tasks: 1) development of procedures for the use of the perturbation method to include medium parameters in the solution; 2) development of algorithm for constructing full parametric solution of the problem by the method of boundary states with perturbation; 3) full parametric solution of the second basic problem for a single finite body with several types of boundary conditions. These results have been achieved and illustrated in an analytical form and graphically for a single finite body with three different generic parts of the border.

**Keywords:** method of boundary states, method of boundary states with the perturbation, the perturbation method, full parametric solution, analytical solution.

## REFERENCES

[1] Green A. E., Zerna W. Theoretical Elasticity. Second Edition. New York: Dover Publications, Inc., 2012. 478 p.

---

*Novikova Olga Sergeevna*

e-mail: [\\_o\\_l\\_g\\_a\\_@bk.ru](mailto:_o_l_g_a_@bk.ru), Postgraduate student, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia,

*Penkov Viktor Borisovich*

e-mail: [vbpenkov@mail.ru](mailto:vbpenkov@mail.ru), Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia,

*Levina Lyubov Vladimirovna*

e-mail: [satalkina\\_lyubov@mail.ru](mailto:satalkina_lyubov@mail.ru), Ph.D., Associate Professor, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia.

- [2] Truesdell C., Noll W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. 3rd ed. Springer, 2004. 602 p. DOI: 10.1007/978-3-662-10388-3.
- [3] Arfken G. B., Weber H. J. Mathematical Methods for Physicists. Sixth Edition. Elsevier Academic Press, 2005. 1182 p.
- [4] Muskhelishvili N. I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti. M.: Nauka, 1966. 708 s. (in Russian)
- [5] Lur'e A. I. Teoriya uprugosti. M.: Nauka, 1970. 940 s. (in Russian)
- [6] Rabotnov YU. N. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela. M.: Nauka, 1988. 712 s. (in Russian)
- [7] Schwarz H. A. Uber einige Abbildungsaufgaben, Ges. Math. Abh. 1869. No. 2. P. 65–83.
- [8] Gaul L., Kogl M., Wagner M. Boundary Element Methods for Engineers and Scientists. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. 488 p. DOI: 10.1007/978-3-662-05136-8
- [9] Igumnov L. A., Markov I. P., Pazin V. P. Granichno-ehlementnoe reshenie kraevykh zadach trekhmernoj anizotropnoj teorii uprugosti // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. 2013. № 1(3). S. 115–119. (in Russian)
- [10] Korepanova T. O., Sevodina N. V. Metod i rezul'taty rascheta haraktera singulyarnosti napryazhenij v trekhmernykh zadachah teorii uprugosti // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. 2011. № 4 (4). S. 1539–1541. (in Russian)
- [11] Ivan'shin P. N. Splajn-interpolyacionnoe reshenie zadach teorii uprugosti // Uchen. zap. Kazan. un-ta. Ser. Fiz.-matem. nauki. 2015. T. 157, kn. 4. S. 24–41. (in Russian)
- [12] Struzhanov V. V. Ob odnom iteracionnom metode rascheta napryazhenij v neodnosvyaznykh telakh // Vychisl. tekhnologii. 2006. T. 11. № 6. S. 118–124. (in Russian)
- [13] Agahanov EH. K., Agahanov M. K. O vozmozhnosti primeneniya ehkvivalentnosti vozdeystvij v analiticheskikh resheniyah zadach teorii uprugosti // Vestnik MGSU. 2010. T. 3. № 4. S. 144–148. (in Russian)
- [14] Pen'kov V. B., Satalkina L. V. Metod granichnykh sostoyanij s vozmushcheniyami: neodnorodnye i nelinejnye zadachi teorii uprugosti i termouprugosti. (Monografiya). LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co., Germany, 2012. 108 s. (in Russian)
- [15] Pen'kov V. B., Satalkina L. V., SHul'min A. S. Primenenie metoda granichnykh sostoyanij dlya analiza uprugoj sredy s polostyami i vklyucheniyami // PMM. 2014. T. 78. Vyp. 4. S. 542–556. (in Russian)
- [16] Levina L. V., Novikova O. S., Pen'kov V. B. Polnparametricheskoe reshenie zadachi teorii uprugosti odnosvyaznogo ogranichennogo tela. // Vestnik LGTU. 2016. № 2 (28). S. 16–24 (in Russian)
- [17] Nayfeh A. H. Introduction to perturbation techniques. New York: A wiley-interscience publication. John Wiley & Sons, Inc , 1993. 519 p.
- [18] Minaeva N. V. Metod vozmushchenij v mekhanike deformiruemyykh tel. -M.: Nauchnaya kniga, 2002. 156 s. (in Russian)