

В. С. Чиков

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДИКИ КОНКРЕТИЗАЦИИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБРАЗЦОВ

Тульский Государственный Университет, г. Тула, Россия

Аннотация. В работе предложена программа экспериментов по конкретизации определяющих соотношений для цилиндрически-анизотропного материала. Программа предполагает проведение четырёх экспериментов с использованием цилиндрических образцов: растяжение сплошного цилиндра, задача полого толстостенного цилиндра внутренним давлением, цилиндрический и продольный сдвиги. Получены выражения для определяющих соотношений цилиндрически-ортотропного материала. Рассматриваемый вариант нелинейных определяющих соотношений между напряжениями и деформациями в анизотропных материалах, удовлетворяет предельной форме обобщенного частного постулата А.А. Ильюшина. Функции, входящие в определяющие соотношения предполагаются линейно зависящими от материальных констант. Полученные зависимости связывают измеряемые в ходе опытов характеристики и материальные константы. Разрешающие уравнения могут быть также использованы и для решения более сложной задачи: определения нелинейных функций по результатам измерений по большому числу точек.

Ключевые слова: цилиндрический образец, эксперимент, нелинейные определяющие соотношения, цилиндрическая анизотропия, материальные константы, частный постулат изотропии.

УДК: 539.3

Введение

Современные конструкционные, композиционные и наноматериалы часто обладают выраженной анизотропией механических свойств [1, 2]. В частности криволинейная анизотропия однородного тела характеризуется тем, что для разных его точек эквивалентными являются направления, которые подчинены закономерностям различных криволинейных систем координат [3]. Для наиболее часто встречающейся в практике криволинейной анизотропии – цилиндрической – эквивалентными являются направления цилиндрической системы координат [4, 5, 6]. Если с каждой точкой цилиндрического тела неизменно связана ось анизотропии, совпадающая с осью симметрии

©Чиков В.С., 2018

Чиков Валерий Сергеевич

e-mail: avrelyukvochi@mail.ru, аспирант, Тульский Государственный Университет, г. Тула, Россия

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 15-01-01875_а.

Поступила 10.03.2018

цилиндра таким образом, что все ортогональные ей направления эквивалентны между собой, то такое тело называют цилиндрически-ортотропным. Для описания поведения анизотропных материалов в различных диапазонах нагрузок необходима разработка математических моделей деформирования образцов, из которых определяется связь между напряжениями и деформациями. В работах [7,8] был предложен вариант нелинейных определяющих соотношений между напряжениями и деформациями в анизотропных материалах, удовлетворяющий предельной форме обобщенного частного постулата А.А. Ильюшина

$$\vec{t}_{(\alpha)} = \sum_{i=1}^m A_{(\alpha)}^i \vec{r}_i^{(\alpha)} \quad (1)$$

где $A_{(\alpha)}^i$ – функционал процесса деформирования, m – размерность собственного подпространства, $\vec{r}_i^{(\alpha)}$ – базис собственного подпространства.

В определяющие соотношения модели входят материальные константы материала, которые не всегда известны. В связи с этим возникает задача материальной идентификации постоянных материала.

В данной работе проводится конкретизация соотношений (1) для цилиндрически-ортотропного материала и входящих в них постоянных.

1. Конкретизация нелинейных определяющих соотношений для цилиндрически-ортотропного материала.

Запишем соотношения обобщенного закона Гука на случай конечных деформаций с использованием энергетически сопряженной пары тензоров [9]: энергетического тензора напряжений \mathbf{T} и тензор деформаций Коши-Грина $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\mathbf{T} = \mathbf{N}_{(\varepsilon)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2)$$

где $\mathbf{N}_{(\varepsilon)}$ – тензор упругих постоянных.

Для цилиндрически-ортотропного материала матрица компонент тензора упругости $\mathbf{N}_{(\varepsilon)}$ является симметричной и имеет вид [1]:

$$(\mathbf{N}) = \begin{pmatrix} N_{rrrr} & N_{rr\varphi\varphi} & N_{rrzz} & 0 & 0 & 0 \\ N_{rr\varphi\varphi} & N_{rrrr} & N_{rrzz} & 0 & 0 & 0 \\ N_{rrzz} & N_{rrzz} & N_{zzzz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{r\varphi r\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{zrzr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{zrzr} \end{pmatrix} \quad (3)$$

В теории процессов А.А. Ильюшина [10, 11] процесс деформирования рассматривают в шестимерном пространстве и характеризуют образом процесса, под которым понимают траекторию деформирования (годограф вектора деформаций) с приписанными каждой ее точке вектором напряжений и другими термомеханическими параметрами. Будем рассматривать образы процессов, построенные в пространстве тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$, в котором шестимерные векторы деформаций и напряжений имеют соответственно разложения $\vec{\varepsilon} = \varepsilon_{\alpha} \vec{i}_{\alpha}$, $\vec{t} = t_{\alpha} \vec{i}_{\alpha}$. Базисные векторы шестимерного пространства \vec{i}_{α} представляют собой образы тензоров канонического базиса введенного в

монографии [12]:

$$\begin{aligned} I^0 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{a}_1 \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \vec{a}_2 + \vec{a}_3 \vec{a}_3), I^1 = \frac{1}{\sqrt{6}} (2\vec{a}_3 \vec{a}_3 - \vec{a}_1 \vec{a}_1 - \vec{a}_2 \vec{a}_2), \\ I^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{a}_2 \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \vec{a}_1), I^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{a}_1 \vec{a}_2 + \vec{a}_2 \vec{a}_1), \\ I^4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{a}_2 \vec{a}_3 + \vec{a}_3 \vec{a}_2), I^5 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{a}_3 \vec{a}_1 + \vec{a}_1 \vec{a}_3) \end{aligned} \quad (4)$$

Тензоры (4) нормируются соотношениями $I^\alpha \cdot I^\beta = \delta^{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, 5$. Базисные векторы \vec{a}_i полагаются направленными вдоль главных осей анизотропии материала: вектор \vec{a}_3 направлен вдоль главной поворотной оси, вектор \vec{a}_2 – вдоль побочной оси, вектор \vec{a}_1 им перпендикулярен. В начальный момент векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ совпадают с векторами неподвижного базиса $\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3$.

Представим тензоры, входящие в соотношение (2), в пространстве E_6 с помощью шестимерного базиса (4):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_\alpha \mathbf{I}^\alpha, \mathbf{T} = t_\alpha \mathbf{I}^\alpha, \mathbf{N} = \sum_{\alpha, \beta=0}^5 n_{\alpha\beta} \mathbf{I}^{\alpha\beta}, \mathbf{I}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mathbf{I}^\alpha \mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta \mathbf{I}^\alpha), \alpha, \beta = 0, 1, \dots, 5.$$

Коэффициенты разложений $\varepsilon_\alpha, t_\alpha$ связаны с компонентами тензоров $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$ и $\mathbf{T} = T_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$ в неподвижном базисе соотношениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \varepsilon_0 - \frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{\sqrt{3}} \varepsilon_0 - \frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_2, \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \varepsilon_0 + \sqrt{\frac{2}{3}} \varepsilon_1, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{2}}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{\varepsilon_4}{\sqrt{2}}, \quad \varepsilon_{31} = \frac{\varepsilon_5}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Соотношения для тензора \mathbf{T} аналогичны.

В шестимерном пространстве тензору \mathbf{N} ставится в соответствие симметричный тензор второго ранга $\mathbf{n} = n_{\alpha\beta} \mathbf{i}_{\alpha\beta}$, где $\mathbf{i}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\vec{i}_\alpha \vec{i}_\beta + \vec{i}_\beta \vec{i}_\alpha)$ – базисные тензоры второго ранга шестимерного пространства, которые являются образами тензоров (4)

Связь между компонентами $n_{\alpha\beta}$ и N_{ijkl} установлена в монографии [12]:

$$n_{\alpha\beta} = \beta_\alpha^{ij} N_{ijkl} \beta_{kl}^\beta \quad (6)$$

Используя соотношения (6) получим ненулевые компоненты тензора упругости цилиндрически-ортотропного материала (3) в шестимерном пространстве:

$$\begin{aligned} n_{00} &= \frac{1}{3} (2N_{rrrr} + 2N_{rr\varphi\varphi} + 4N_{rrzz} + N_{zzzz}), \\ n_{11} &= \frac{1}{3} (N_{rrrr} + N_{rr\varphi\varphi} - 4N_{rrzz} + 2N_{zzzz}), \\ n_{10} &= n_{01} = -\frac{\sqrt{2}}{3} (N_{rrrr} + N_{rr\varphi\varphi} - N_{rrzz} - N_{zzzz}), \\ n_{22} &= N_{rrrr} - N_{rr\varphi\varphi}, n_{33} = N_{r\varphi r\varphi}, n_{44} = n_{55} = N_{zrzr}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для конкретизации соотношения (1) для цилиндрически-ортотропного материала определим собственные упругие состояния для этого материала [13]:

$$\mathbf{n} \cdot \vec{\omega}_\alpha = \lambda_\alpha \vec{\omega}_\alpha.$$

Закон Гука в соответствии с найденными собственными значениями λ_α и собственными векторами $\vec{\omega}_\alpha$ запишется в виде

$$\vec{t} = \lambda_1 (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\omega}_1) \vec{\omega}_1 + \lambda_2 (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\omega}_2) \vec{\omega}_2 + \lambda_3 \varepsilon_2 \vec{t}_2 + \lambda_4 \varepsilon_3 \vec{t}_3 + \lambda_5 \vec{\varepsilon} \cdot (\vec{t}_4 \vec{t}_4 + \vec{t}_5 \vec{t}_5).$$

Таким образом, цилиндрически-ортотропные материалы имеют пять собственных подпространств: четыре одномерных с базисами $\Omega_1 = \vec{\omega}_1 \vec{\omega}_1$, $\Omega_2 = \vec{\omega}_2 \vec{\omega}_2$, $\Omega_3 = \vec{t}_2 \vec{t}_2$, $\Omega_4 = \vec{t}_3 \vec{t}_3$ и единственное двумерное собственное подпространство с базисом $\Omega_5 = \vec{t}_4 \vec{t}_4 + \vec{t}_5 \vec{t}_5$. В соответствии с этим могут быть определены два линейных и три квадратичных инварианта деформаций. Линейные инварианты относительно группы симметрии материала тензоров деформаций ε_α и напряжений t_α определяются [8, 12] как скалярные произведения их шестимерных образов $\vec{\varepsilon}$ и \vec{t} и единичного собственного вектора $\vec{\omega}_\alpha$. Квадратичными инвариантами $s_{(\gamma)}^2, t_{(\gamma)}^2$ для цилиндрически-ортотропного материала являются длины векторов и определяются проекцией вектора деформаций в квадратичные инвариантные подпространства.

Для цилиндрически-ортотропного материала в соответствии с найденными линейными и квадратичными инвариантами нелинейные определяющие соотношения могут быть записаны в виде

$$\vec{t} = \sum_{\alpha, \beta=0}^{\alpha, \beta=1} \left(n^{\alpha\beta} + \frac{\partial n^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon_\alpha} \varepsilon_\alpha \right) \varepsilon_\beta \vec{t}_\alpha + \sum_{\gamma=3}^5 2 \left(G^\gamma + \frac{\partial G^\gamma}{\partial s_{(\gamma)}^2} s_{(\gamma)}^2 \right) \vec{\varepsilon}_{(\gamma)} \quad (8)$$

Конкретизируем вид функций $n^{\alpha\beta}(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta)$, $\alpha, \beta = 0, 1$, $2G^\gamma(s_{(\gamma)})$, $\gamma = 3, 4, 5$. Наименьшее число констант эти функции содержат, если они зависят от своих аргументов линейным образом:

$$\begin{aligned} n^{\alpha\beta}(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta) &= n_0^{\alpha\beta} + \bar{n}^{\alpha\beta}(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta), \quad \alpha, \beta = 0, 1 \\ G^\gamma(s_{(\gamma)}) &= G_0^\gamma + \bar{G}^\gamma s_{(\gamma)}, \quad \gamma = 3, 4, 5. \end{aligned} \quad (9)$$

В соотношениях (9) $n_0^{\alpha\beta}, \bar{n}^{\alpha\beta}, G_0^\gamma, \bar{G}^\gamma$ – постоянные.

Подставляя (9) в (8), получим выражения для компонент вектора напряжений в шестимерном пространстве в виде:

$$\begin{aligned} t_0 &= (n_0^{00} + 3\bar{n}^{00} \varepsilon_0 + \bar{n}^{01} \varepsilon_1) \varepsilon_0 + (n_0^{01} + \bar{n}^{01} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1)) \varepsilon_1, \\ t_1 &= (n_0^{01} + \bar{n}^{01} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1)) \varepsilon_0 + (n_0^{11} + \bar{n}^{11} \varepsilon_0 + 3\bar{n}^{11} \varepsilon_1) \varepsilon_1, \\ t_2 &= (2G_0^3 + 3\bar{G}^3 |\varepsilon_2|) \varepsilon_2, \quad t_3 = (2G_0^4 + 3\bar{G}^4 |\varepsilon_3|) \varepsilon_3, \\ t_4 &= (2G_0^5 + 3\bar{G}^5 \sqrt{\varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2}) \varepsilon_4, \quad t_5 = (2G_0^5 + 3\bar{G}^5 \sqrt{\varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2}) \varepsilon_5, \end{aligned} \quad (10)$$

где $n_0^{\alpha\beta}, \bar{n}^{\alpha\beta}, G_0^\gamma, \bar{G}^\gamma$ – постоянные материала.

2. Материальная идентификация нелинейных определяющих соотношений для цилиндрически-ортотропного материала

Задача материальной идентификации нелинейных определяющих соотношений (10) состоит в экспериментальном определении пяти функций $n^{\alpha\beta}(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta)$, $\alpha, \beta = 0, 1$, $2G^\gamma(s_{(\gamma)})$, $\gamma = 3, 4, 5$, зависящих от 12 постоянных.

Шесть из этих констант $n_0^{00}, n_0^{01}, n_0^{11}, G_0^3, G_0^4, G_0^5$ связаны с константами упругости, входящими в закон Гука для цилиндрически-ортотропного материала [12]. Предлагается для определения констант, входящих в нелинейные соотношения (10), провести четыре эксперимента с цилиндрическими образцами, ось которых совпадает с осью цилиндрической анизотропии: растяжение сплошного цилиндра, раздачу полого цилиндра внутренним давлением, цилиндрический и продольный сдвиги.

Анализ траекторий деформирования рассматриваемых экспериментов показывает, что в опытах на растяжение и кручение сплошного цилиндра и раздачу полого цилиндра реализуются траектории деформирования, имеющие , имеющие проекции в собственные подпространства $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, и этих экспериментов достаточно для определения материальных функций $n^{00}(\varepsilon_0, \varepsilon_1), n^{01}(\varepsilon_0, \varepsilon_1), n^{11}(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ и $2G^3(s_{(3)})$. В экспериментах на цилиндрический и продольный сдвиги реализуются траектории деформирования, целиком расположенные в собственных подпространствах Ω_4 и Ω_5 соответственно, и из них можно определить материальные функции $2G^4(s_{(4)})$ и $2G^5(s_{(5)})$.

Выпишем нелинейные соотношения, связывающие напряжения и деформации при схемах деформирования, соответствующих экспериментальным методикам. Закон движения и кинематические характеристики деформирования найдены в работе [14].

Рассмотрим растяжение сплошного цилиндрического образца (рисунок 1). В этом процессе связь между шестимерными векторами деформаций и напряжений определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} t_0 &= n^{00}(\varepsilon_0, \varepsilon_1) \varepsilon_0 + n^{01}(\varepsilon_0, \varepsilon_1) \varepsilon_1, \\ t_1 &= n^{01}(\varepsilon_0, \varepsilon_1) \varepsilon_0 + n^{11}(\varepsilon_0, \varepsilon_1) \varepsilon_1, \\ t_2 &= 2G^3(|\varepsilon_2|) \varepsilon_2 = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где функции

$$\begin{aligned} n^{00} &= n_0^{00} + 3\bar{n}^{00} \varepsilon_0 + \bar{n}^{01} \varepsilon_1, \\ n^{01} &= n_0^{01} + \bar{n}^{01} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1), \\ n^{11} &= n_0^{11} + \bar{n}^{01} \varepsilon_0 + 3\bar{n}^{11} \varepsilon_1, \\ 2G^3 &= 2G_0^3 + 3\bar{G}^3 |\varepsilon_2|. \end{aligned}$$

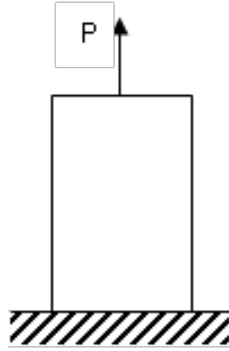


Рис. 1. Растяжение сплошного цилиндра

В пространстве деформаций вектор напряжений, построенный по компонентам энергетического тензора напряжений, имеет вид:

$$t_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\rho' \lambda_\rho}{\lambda_z} \sigma, t_1 = \frac{2}{\sqrt{6}} \frac{\rho' \lambda_\rho}{\lambda_z} \sigma, t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = 0. \quad (12)$$

при растяжении на цилиндр действует сила P

$$P = 2\pi \int_a^b S_{zz} \rho_0 d\rho_0$$

Растягивающие напряжения $S_{zz} = \sigma$ выражаются из соотношений (11) и выражения тензора $\mathbf{T} = \frac{\partial V}{\partial V_0} (\mathbf{\Phi}^{-1})^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{\Phi}^{-1}$ в пространстве меры ϵ :

$$\sigma = \frac{1}{2\sqrt{2}} n^{01} \cdot \frac{2\lambda_\rho^2 + \lambda_z^2 - 3}{\lambda_\rho^2} \lambda_z + \frac{1}{2} n^{11} \cdot \frac{\lambda_z^2 - \lambda_\rho^2}{\lambda_\rho^2} \lambda_z. \quad (13)$$

Из соотношений (12) следует, что при растяжении $t_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} t_1$, тогда из соотношений (11) получаем еще одно уравнение связывающее искомые функции:

$$\sqrt{2} n^{00} \cdot (2\lambda_\rho^2 + \lambda_z^2 - 3) + \sqrt{2} n^{01} \cdot (\lambda_z^2 - 4\lambda_\rho^2 - 3) - n^{11} \cdot (2\lambda_z^2 - \lambda_\rho^2) = 0. \quad (14)$$

В соотношениях (13) и (14) $\lambda_\rho = \frac{\rho}{\rho_0}$ и λ_z изменяемые параметры.

Два соотношения (13) и (14) связывают три искомые материальные функции n^{00}, n^{01}, n^{11} . Для их определения требуется получить еще одно соотношение, связывающее измеряемые в эксперименте силовые и кинематические характеристики. Для этого рассмотрим задачу толстостенного цилиндра (рисунок 2) с неподвижными торцами.

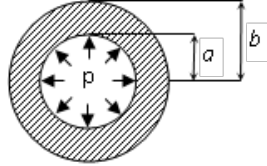


Рис. 2. Раздача давлением толстостенного цилиндра

В эксперименте на раздачу толстостенного цилиндра аналогично случаю с растяжением получена связь в виде (11), из которой получаем выражение для радиальных напряжений:

$$S_{\rho\rho} = \frac{\rho'}{\lambda_\rho} \left(2\sqrt{2} n^{00} - 4n^{01} + \sqrt{2} n^{11} \right) \cdot \frac{1}{12\sqrt{2}} \left((\rho')^2 + \lambda_\rho^2 - 2 \right) + \frac{\rho'}{2\lambda_\rho} G^3 \left((\rho')^2 - \lambda_\rho^2 \right),$$

где для функции $\rho = \rho(\rho_0, t)$ выберем приближенное выражение

$$\rho(\rho_0, t) = A(t)\rho_0 + \frac{B(t)}{\rho_0}.$$

К величинам, измеряемым в эксперименте на раздачу цилиндра, следует отнести давление на внутренней поверхности цилиндра $\rho(t)$, а так же перемещения точек внутренней $u_a(t)$ и внешней $u_b(t)$ поверхности цилиндра, которые входят в функцию $\rho = \rho(\rho_0, t)$.

Из условия на внутренней поверхности цилиндра $S_{\rho\rho}|_{\rho_0=a} = -p$ следует:

$$\begin{aligned}
& \left(2\sqrt{2}n^{00} - 4n^{01} + \sqrt{2}n^{11}\right) \cdot \frac{1}{12\sqrt{2}} \left((\rho')^2 + \lambda_\rho^2 - 2\right) \frac{\rho'}{\lambda_\rho} \Big|_{\rho_0=a} + \\
& + G^3 \left((\rho')^2 - \lambda_\rho^2\right) \frac{\rho'}{2\lambda_\rho} \Big|_{\rho_0=a} = -p
\end{aligned} \tag{15}$$

а из условий на внешней поверхности $S_{\rho\rho}|_{\rho_0=b} = 0$

$$\begin{aligned}
& \left(2\sqrt{2}n^{00} - 4n^{01} + \sqrt{2}n^{11}\right) \cdot \frac{1}{12\sqrt{2}} \left((\rho')^2 + \lambda_\rho^2 - 2\right) \frac{\rho'}{\lambda_\rho} \Big|_{\rho_0=b} + \\
& + G^3 \left((\rho')^2 - \lambda_\rho^2\right) \frac{\rho'}{2\lambda_\rho} \Big|_{\rho_0=b} = 0
\end{aligned} \tag{16}$$

При раздаче цилиндра внутренним давлением определению подлежат функции $n^{00}(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$, $n^{01}(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$, $n^{11}(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ и $2G^3(s_3)$, которые входят в соотношения (15) и (16).

Таким образом, из опытов на растяжение и раздачу цилиндра четыре искомые материальные функции можно выразить через растягивающие напряжения $\sigma(t)$ (осевую силу), осевое удлинение $\lambda_z(t)$ и перемещения точек наружной поверхности $C(t) = 1 + \frac{u_b(t)}{b}$ при растяжении, а так же через внутреннее давление $\rho(t)$ и перемещения точек внутренней $u_a(t)$ и внешней $u_b(t)$ поверхностей цилиндра при раздаче. Из соотношений (13), (14), (15) и (16) получим систему разрешающих уравнений:

$$\begin{aligned}
& n^{01} \left({}^{(1)}\varepsilon_0, {}^{(1)}\varepsilon_1 \right) \cdot \left(2C(t)^2 + \lambda_z(t)^2 - 3 \right) \lambda_z(t) + \sqrt{2}n^{11} \left({}^{(1)}\varepsilon_0, {}^{(1)}\varepsilon_1 \right) \times \\
& \times \left(\lambda_z(t)^2 - C(t) \right) \lambda_z(t) = 2\sqrt{2}C(t)^2 \sigma(t), \\
& n^{00} \left({}^{(1)}\varepsilon_0, {}^{(1)}\varepsilon_1 \right) \cdot \left(2C(t)^2 + \lambda_z(t)^2 - 3 \right) + n^{01} \left({}^{(1)}\varepsilon_0, {}^{(1)}\varepsilon_1 \right) \times \\
& \times \left(\lambda_z(t)^2 - 4C(t)^2 - 3 \right) + n^{11} \left({}^{(1)}\varepsilon_0, {}^{(1)}\varepsilon_1 \right) \cdot \left(2\lambda_z(t)^2 - C(t)^2 \right) = 0, \\
& \left(n^{00} \left({}^{(2)}\varepsilon_0, {}^{(2)}\varepsilon_1 \right) - \sqrt{2}n^{01} \left({}^{(2)}\varepsilon_0, {}^{(2)}\varepsilon_1 \right) + \frac{1}{2}n^{11} \left({}^{(2)}\varepsilon_0, {}^{(2)}\varepsilon_1 \right) \right) \times \\
& \times \frac{1}{6} \left((\rho')^2 + \lambda_\rho^2 - 2 \right) \frac{\rho'}{\lambda_\rho} \Big|_{\rho_0=a} + 2\sqrt{3}G^3 \left({}^{(2)}s_3 \right) \left((\rho')^2 - \lambda_\rho^2 \right) \frac{\rho'}{\lambda_\rho} \Big|_{\rho_0=a} = 0, \\
& \left(n^{00} \left({}^{(3)}\varepsilon_0, {}^{(3)}\varepsilon_1 \right) - \sqrt{2}n^{01} \left({}^{(3)}\varepsilon_0, {}^{(3)}\varepsilon_1 \right) + \frac{1}{2}n^{11} \left({}^{(3)}\varepsilon_0, {}^{(3)}\varepsilon_1 \right) \right) \times \\
& \times \frac{1}{6} \left((\rho')^2 + \lambda_\rho^2 - 2 \right) \frac{\rho'}{\lambda_\rho} \Big|_{\rho_0=b} + 2\sqrt{3}G^3 \left({}^{(3)}s_3 \right) \left((\rho')^2 - \lambda_\rho^2 \right) \frac{\rho'}{\lambda_\rho} \Big|_{\rho_0=b} = 0,
\end{aligned} \tag{17}$$

где обозначено при растяжении

$$\begin{aligned}
{}^{(1)}\varepsilon_0 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(2C(t)^2 + \lambda_z(t)^2 - 3 \right) \\
{}^{(2)}\varepsilon_1 &= \frac{1}{\text{sqrt}6} \left(\lambda_z(t)^2 - C(t)^2 \right);
\end{aligned}$$

при раздаче на внешней поверхности

$$\begin{aligned} {}^{(3)}\varepsilon_0 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left((\rho')^2 + \lambda_\rho^2 - 2 \right) \Big|_{\rho_0=b}, \\ {}^{(3)}\varepsilon_1 &= \frac{-1}{2\sqrt{6}} \left((\rho')^2 + \lambda_\rho^2 - 2 \right) \Big|_{\rho_0=b}, \\ {}^{(3)}s_e &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left| (\rho')^2 - \lambda_\rho^2 \right| \Big|_{\rho_0=b}, \\ \rho'(b, t) &= A(t) - \frac{B(t)}{b^2}, \\ \lambda_\rho(b, t) &= A(t) + \frac{B(t)}{b^2}. \end{aligned}$$

Будем считать, что для материальных функций $n^{00}(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$, $n^{01}(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$, $n^{11}(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ и $2G^3(s_{(3)})$ принято представление (10). Если упругие константы материала известны, то по ним из соотношений (7) определяются константы n_0^{00} , n_0^{01} , n_0^{11} , G_0^3 . Тогда разрешающие соотношения (17) служат для определения четырех констант \bar{n}^{00} , \bar{n}^{01} , \bar{n}^{11} , \bar{G}^3 . Причем в каждом из опытов достаточно привести по одному измерению перечисленных силовых и кинематических характеристик. Если же константы n_0^{00} , n_0^{01} , n_0^{11} , G_0^3 заранее не известны, то в каждом эксперименте требуется провести по два измерения, для каждого из которых будут записаны разрешающие уравнения (17). Отметим, что константы в полученную систему войдут линейным образом и легко могут быть определены.

Для определения материальных функций $2G^4(s_{(4)})$ и $2G^5(s_{(5)})$, входящих в нелинейные определяющие соотношения (10) для цилиндрически-ортотропного материала, требуется проведение дополнительных экспериментов на цилиндрический и продольный сдвиги. Схемы этих экспериментов приведены на рисунках 3 и 4. методика этих экспериментов подробно рассмотрена в работе [15].

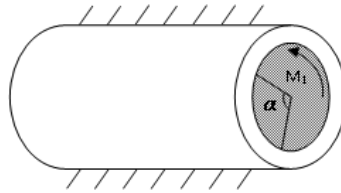


Рис. 3. Цилиндрический сдвиг

В опыте на цилиндрический сдвиг измеряемыми параметрами являются угол поворота обоймы $\alpha(t)$ и момент на обойме $M_1(t)$, связанный с касательными напряжениями $S_{\rho\varphi} = \frac{M_1}{2\pi\alpha^2}$. Вектор напряжений находится из определяющих соотношений (10):

$$\begin{aligned} t_0 &= \left(n^{00} - \frac{1}{\sqrt{2}} n^{01} \right) \varepsilon_0, \quad t_1 = \left(n^{01} - \frac{1}{\sqrt{2}} n^{11} \right) \varepsilon_1, \\ t_2 &= 2G^3(|\varepsilon_2|) \varepsilon_2, \quad t_3 = 2G^4(|\varepsilon_3|) \varepsilon_3, \end{aligned}$$

где функция $2G^4(|\varepsilon_3|) = 2G_0^4 + 3\bar{G}^4|\varepsilon_3|$ содержит две константы.

Функцию $v(\rho_0, t)$, входящую в закон движения, используем в виде

$$v(\rho, t) = \frac{C_1(t)}{(1 - \tilde{k}) \rho_0^{\tilde{k}-1}} + C_2(t),$$

определенном для линейной связи между напряжениями и деформациями. Входящий в выражения для этой функции показатель \tilde{k} определяется через константы, которые можно найти из системы (17).

Запишем соотношения, связывающие напряжения $S_{\rho\varphi}$ на внутренней поверхности цилиндра с углом поворота $\alpha(t)$:

$$S_{\rho\varphi}|_{\rho_0=a} = G^4 \left(|\varepsilon_3| |_{\rho_0=a} \right) \cdot a v'|_{\rho_0=a'} \quad (18)$$

где $v'|_{\rho_0=a} = C_1(t) a^{-\tilde{k}}$.

Тогда выражение для момента на обойме примет вид:

$$M_1 = 2\pi G^4 \left(|\varepsilon_3| |_{\rho_0=a} \right) \frac{(1 - \tilde{k}) a^2 b^{\tilde{k}-1}}{b^{\tilde{k}-1} - a^{\tilde{k}-1}} \alpha(t). \quad (19)$$

Если упругие константы материала известны, то из соотношения (18) определяется константа \bar{G}^4 по одному измерению. Если же упругие константы заранее неизвестны, то по двум измерениям из (19) можно определить значения констант материала G_0^4 и \bar{G}^4 .

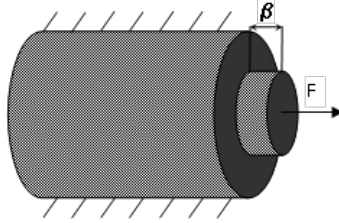


Рис. 4. Продольный сдвиг

В опыте на продольный сдвиг измеряемыми параметрами являются смещение обоймы $\beta(t)$ и осевая сила F , связанная с напряжениями $S_{\rho z}$ соотношением

$$F = S \cdot 2\pi\rho_0. \quad (20)$$

Определяющие соотношения (10) имеют вид:

$$\begin{aligned} t_0 &= \left(n^{00} - \frac{1}{\sqrt{2}} n^{01} \right) \varepsilon_0, \quad t_1 = \left(n^{01} - \frac{1}{\sqrt{2}} n^{11} \right) \varepsilon_1, \\ t_2 &= 2G^3 (|\varepsilon_2|) \varepsilon_2, \quad t_4 = 2G^5 (|\varepsilon_4|) \varepsilon_4, \end{aligned} \quad (21)$$

где функция $2G^5 (|\varepsilon_4|) = 2G_0^5 + 3\bar{G}^5 |\varepsilon_4|$ содержит 2 константы.

Функцию $W(\rho, t)$, входящую в закон движения, используем в виде, полученном в (9). Как и в случае цилиндрического сдвига, функция $W(\rho, t)$ не зависит от констант, определяемых из эксперимента на продольный сдвиг.

Из соотношений (20), (21) получим выражение для напряжений $S_{\rho z}$:

$$S_{\rho z}|_{\rho_0=a} = G^5 \left(|\varepsilon_4|_{\rho_0=a} \right) \cdot W'|_{\rho=a}, \quad (22)$$

где $W'|_{\rho_0=a} = \tilde{C}_1(t)a^{2-\tilde{k}}$

Из (22) и (20) следует:

$$F = 2\pi G^5 \left(|\varepsilon_4|_{\rho_0=a} \right) \cdot \frac{(2 - \tilde{k})a^{2-\tilde{k}}}{a^{2-\tilde{k}} - b^{2-\tilde{k}}} \beta(t). \quad (23)$$

Если упругие константы материала известны, то из соотношения (23) определяется константа \overline{G}^5 по одному измерению. Если же упругие константы заранее неизвестны, то по двум измерениям из (23) можно определить значения констант материала G_0^5 и \overline{G}^5 .

Заключение

Таким образом, для определения 12 констант, входящих в нелинейные определяющие соотношения для цилиндрически-ортотропного материала (10), достаточно провести 4 эксперимента с цилиндрическими образцами, в каждом из которых провести по два измерения. Искомые константы в этом случае можно найти из разрешающей системы уравнений (17), (19), (23). Полученные уравнения могут быть использованы и для решения более сложной задачи: определения нелинейных функций $n^{00}(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$, $n^{01}(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$, $n^{11}(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$, $2G^3(s_{(3)})$, $2G^4(s_{(4)})$ и $2G^5(s_{(5)})$ по результатам измерений по большему числу точек.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ашкенази Е. К., Ганов Э. В. Анизотропия конструкционных материалов: Справочник. Л.: Машиностроение, 1980. 247 с.
- [2] Кобаяси Н. Введение в нанотехнологию. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 134 с.
- [3] Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
- [4] Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. К описанию многослойных нанотрубок в рамках моделей цилиндрически анизотропной упругости // Физическая мезомеханика. 2009. Т. 12. № 5. С. 5–14.
- [5] Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Кручение цилиндрически анизотропных нано/микротрубок из 7-константных тетрагональных кристаллов. Эффект Пойнтинга // Физическая мезомеханика. 2015. Т. 18. № 6. С. 5–11.
- [6] Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Эффект Пойнтинга для цилиндрически-анизотропных нано/микротрубок // Физическая мезомеханика. 2016. Т. 19. № 1. С. 5–14.
- [7] Христич Д. В. Варианты нелинейной связи между напряжениями и деформациями в анизотропных материалах // Известия ТулГУ. Естественные науки. Вып. 1. Ч. 1. Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. С. 216–224.
- [8] Христич Д. В. Идентификация анизотропных материалов и моделирование процессов конечного деформирования гипоупругих тел / дис. . . д.ф.-м.н.: 01.02.04 : Тула, 2015. 252 с.

- [9] Черных К. Ф. Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 192 с.
- [10] Ильюшин А. А. Вопросы общей теории пластичности // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24. В. 3. С. 399–411.
- [11] Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.
- [12] Маркин А. А., Соколова М. Ю. Термомеханические модели обратимого конечного деформирования. Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. 268 с.
- [13] Рыхлевский Я. О законе Гука // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 420–435.
- [14] Чиков В. С. Дифференциальные уравнения для функций, входящих в закон движения при комбинированном нагружении цилиндрических тел // Вестник ТулГУ. Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. Вып. 1. Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. С. 93–99.
- [15] Иксарь А. В. Элементы теории эксперимента для термовязкопластических тел при конечных деформациях / дис. . . к.ф.-м.н.: 01.02.04 : М., 2006. 110 с.

V. S. Chikov

EXPERIMENTAL METHODS OF CONCERNING THE DETERMINING RELATIONS WITH THE USE OF CYLINDRICAL SAMPLES

Tula State University, Tula, Russia.

Abstract. A program of experiments is proposed for specifying the defining relations for a cylindrically anisotropic material. The program assumes four experiments using cylindrical samples: extension of a solid cylinder, distribution of a hollow, thick-walled cylinder with internal pressure, cylindrical and longitudinal shear. Expressions for the defining relations of a cylindrically-orthotropic material are obtained. The considered variant of nonlinear defining relations between stresses and deformations in anisotropic materials satisfies the limiting form of the generalized particular postulate AA. Ilyushin. The functions in the defining relations are assumed to be linearly dependent on the material constants. The obtained dependencies relate the characteristics and material constants measured during the experiments. Solving equations can also be used to solve a more complex problem: the determination of nonlinear functions from the results of measurements from a larger number of points.

Keywords: cylindrical sample, experiment, nonlinear determining relations, cylindrical anisotropy, material constants, particular isotropy postulate.

REFERENCES

- [1] Ashkenazi E. K., Ganov E.H. V. Anizotropiya konstrukcionnyh materialov: Spravochnik. L.: Mashinostroenie, 1980. 247 s. (in Russian)
- [2] Kobayasi N. Vvedenie v nanotekhnologiyu. M.: BINOM. Laboratoriya znaniy, 2008. 134 s. (in Russian)

Chikov Valeriy Sergeevich

e-mail: avrelykvochi@mail.ru, Postgraduate student, Tula State University, Tula, Russia.

- [3] Lekhnickij S. G. Teoriya uprugosti anizotropnogo tela. M.: Nauka, 1977. 416 s. (in Russian)
- [4] Gol'dshtejn R. V., Gorodcov V. A., Lisovenko D. S. K opisaniyu mnogoslujnyh nanotrubok v ramkah modelej cilindricheski anizotropnoj uprugosti // Fizicheskaya mezomekhanika. 2009. T. 12. № 5. S. 5–14. (in Russian)
- [5] Gol'dshtejn R. V., Gorodcov V. A., Lisovenko D. S. Kruchenie cilindricheski anizotropnyh nano/mikrotrubok iz 7-konstantnyh tetragonal'nyh kristallov. EHffekt Pojntinga // Fizicheskaya mezomekhanika. 2015. T. 18. № 6. S. 5–11. (in Russian)
- [6] Gol'dshtejn R. V., Gorodcov V. A., Lisovenko D. S. EHffekt Pojntinga dlya cilindricheski-anizotropnyh nano/mikrotrubok // Fizicheskaya mezomekhanika. 2016. T. 19. № 1. S. 5–14. (in Russian)
- [7] Hristich D. V. Varianty nelinejnoj svyazi mezhdru napryazheniyami i deformacijami v anizotropnyh materialah // Izvestiya TulGU. Estestvennye nauki. Vyp. 1. CH. 1. Tula: Izd-vo TulGU, 2014. S. 216–224. (in Russian)
- [8] Hristich D. V. Identifikaciya anizotropnyh materialov i modelirovanie processov konechnogo deformirovaniya gipouprugih tel / dis. . . d.f.-m.n.: 01.02.04 : Tula, 2015. 252 s. (in Russian)
- [9] CHernyh K. F. Vvedenie v anizotropnuyu uprugost'. M.: Nauka, 1988. 192 s. (in Russian)
- [10] Il'yushin A. A. Voprosy obshchej teorii plastichnosti // Prikladnaya matematika i mekhanika. 1960. T. 24. V. 3. S. 399–411. (in Russian)
- [11] Il'yushin A. A. Plastichnost'. Osnovy obshchej matematicheskoy teorii. M.: Izd-vo AN SSSR, 1963. 272 s. (in Russian)
- [12] Markin A. A., Sokolova M. YU. Termomekhanicheskie modeli obratimogo konechnogo deformirovaniya. Tula: Izd-vo TulGU, 2010. 268 s. (in Russian)
- [13] Ryhlevskij YA. O zakone Guka // Prikladnaya matematika i mekhanika. 1984. T. 48. Vyp. 3. S. 420–435. (in Russian)
- [14] CHikov V. S. Differencial'nye uravneniya dlya funkcij, vbodyashchih v zakon dvizheniya pri kombinirovannom nagruzhenii cilindricheskih tel // Vestnik TulGU. Differencial'nye uravneniya i prikladnye zadachi. Vyp. 1. Tula: Izd-vo TulGU, 2016. S. 93–99. (in Russian)
- [15] Iksar' A. V. EHlementy teorii ehksperimenta dlya termovyazkoplasticheskikh tel pri konechnyh deformacijah / dis. . . k.f.-m.n.: 01.02.04 : M., 2006. 110 s. (in Russian)