

Ю. В. Астапов, Д. В. Христич

ЧИСЛЕННОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ИНДЕНТИРОВАНИЯ РЕЗИНОВЫХ ОБРАЗЦОВ

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

Аннотация. Опыты по индентированию получают в последнее время широкое распространение благодаря относительной простоте постановки эксперимента и возможности осуществления опытов с образцами, обладающими малым представительным объемом. В данной работе исследуется поведение эластомера при взаимодействии с жестким штампом сферической формы. В качестве определяющих соотношений используются модель материала Генки и ее обобщение для описания физически-нелинейного отклика. Для идентификации модели на стенде с кинематическим приводом была проведена серия опытов с призматическими образцами из натурального каучука с небольшой долей примесей. Определенные из эксперимента на сжатие константы использованы в численной модели, дискретизирующей поставленную задачу методами конечных элементов и пошагового нагружения. Проведено сравнение результатов решения с экспериментальными кривыми, полученными в опытах на однородное сжатие и индентирование. Сравнение опытных и расчетных данных позволяет сделать вывод о применимости реализованной модели.

Ключевые слова: конечные деформации, тензор Генки, индентирование, однородное сжатие, определяющие соотношения, метод конечных элементов

УДК: 539.3

Введение. В настоящее время широкое применение в технике нашли изделия из эластомеров. К ним относятся резины, каучуки, полиуретаны, полиизопрены и прочие. Во многих конструкциях такие изделия часто испытывают большие неоднородные деформации и работают в условиях сложного нагружения. Интерес представляет разработка математических моделей, адекватно описывающих поведение этих изделий при эксплуатационных нагрузках. Целью работы является построение математической модели, описывающей неоднородные конечные деформации нелинейно упругих слабосжимаемых тел, идентификация входящих в неё параметров и оценка достоверности модели путём сравнения результатов расчёта с экспериментальными данными.

© Астапов Ю. В., Христич Д. В., 2018

Астапов Юрий Владимирович

e-mail: ast3x3@gmail.com, аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Христич Дмитрий Викторович

доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Поступила 10.04.2018

В основе таких моделей лежат определяющие соотношения, связывающие напряжения и деформации в эластомерах. Обычно [1, 10, 11, 12] при медленном квазистатическом нагружении эластомеры считают нелинейно упругими слабосжимаемыми материалами. Модели нелинейной теории упругости условно можно разделить на три группы: обобщение закона Гука на случай конечных деформаций путем использования различных мер конечных деформаций и напряжений (например, тело Сетха), модели гипотерупругих и гипертерупругих материалов.

К гипертерупругим материалам обычно относят модели, в которых постулируется существование упругого потенциала, а напряжения определяются через частные производные от упругого потенциала по инвариантам тензора деформаций Коши-Грина. Наиболее известными моделями гипертерупругих тел являются материалы Муни-Ривлина, Мурнагана, Синьорини, Бартенева-Хазановича, Черных-Шубиной и другие [3, 4, 5, 6, 7].

Известно, что в изотропном материале «повернутый» тензор напряжений энергетически сопряжен с логарифмической мерой деформаций Генки. В связи с этим в рамках моделей гипертерупругих тел предлагается связь между этими тензорами записать в линейном и нелинейном видах. Линейный вариант соотношений аналогичен модели неогукковского материала и для изотропного тела содержит две материальные константы. Нелинейный вариант определяющих соотношений получен удержанием в разложении для удельной потенциальной энергии деформации членов третьего порядка.

Для рассмотренных моделей эластомеров важным является вопрос об идентификации определяющих соотношений. В данной статье константы материала определены из опытов на сжатие, проведенных на сконструированном кинематическом стенде, в предположении несжимаемости испытуемого образца. Верификация модели осуществляется на примере решения задачи о внедрении жесткого сферического индентора в нелинейно упругий цилиндр. Эти процессы широко распространены как для определения упругих характеристик материала [8, 9, 13, 14], так и для определения его твердости. Мы проведем сравнение результатов расчетов по различным моделям нелинейной упругости с полученными на кинематическом стенде экспериментальными кривыми. Это позволит сделать вывод об адекватности предложенных моделей и близости результатов расчетов с опытными данными.

Постановка задачи в терминах текущей конфигурации. В качестве уравнения движения используем условие равновесного протекания процесса деформирования [4], требующее равенства нулю не только главного вектора приложенных к телу нагрузок, но и скорости его изменения. После исключения из рассмотрения массовых сил получим уравнение в вариационной форме:

$$\int_V (\dot{\mathbf{S}} + \mathbf{S}\dot{\theta} - \mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{S}) \cdot \delta(\mathbf{v}\nabla) dV = \int_{\Sigma} (\dot{\mathbf{P}}^{(n)} + \mathbf{P}^{(n)} (\dot{\theta} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{n})) \cdot \delta \mathbf{v} d\Sigma, \quad (1)$$

которое должно быть дополнено соотношениями, связывающими скорость изменения напряжений со скоростью деформаций, а также начальными и граничными условиями в виде:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Sigma_P \quad \forall t > t_0. \quad (2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Sigma_u \quad \forall t > t_0. \quad (3)$$

В изотропном материале энергетически сопряженными являются обобщенный «повернутый» тензор напряжений $\Sigma_{\mathbf{R}} = \frac{dV}{dV_0} \mathbf{R} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}^{-1}$ и тензор логарифмических деформаций Генки $\mathbf{\Gamma}$. Связь меры Генки с другими мерами деформаций имеет следующий вид: $\mathbf{\Gamma} = \ln \mathbf{U} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{G} = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{E} + 2\boldsymbol{\varepsilon})$, где $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{E})$ – тензор деформаций Коши, $\mathbf{G} = \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{\Phi}^T$ – мера деформаций Коши, а $\boldsymbol{\Phi}$ – аффино́р деформации. Дифференциал удельной потенциальной энергии деформаций среды в этом случае запишется как свертка $dW = \Sigma_{\mathbf{R}} \cdot d\mathbf{\Gamma}$. Если считать потенциальную энергию деформаций аналитической функцией тензора деформаций Генки, получим разложение вида:

$$W = W_0 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{\Gamma} + \frac{1}{2!} \mathbf{N} \cdot \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma} + \frac{1}{3!} \mathbf{L} \cdot \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma} + \dots, \quad (4)$$

где $W_0 = 0$, $\mathbf{A} = 0$ для начального ненапряженного состояния, а тензоры $\mathbf{N}$ и $\mathbf{L}$ – тензоры упругих констант материала. Если в разложении (4) сохранить только член второго порядка относительно тензора логарифмических деформаций, то, воспользовавшись тем, что $\Sigma_{\mathbf{R}} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{\Gamma}}$, и с учетом выражения для компонент тензора $\mathbf{N}$ через константы K и G в изотропном материале, получим:

$$\Sigma_{\mathbf{R}} = K\theta\mathbf{E} + 2G \left(\mathbf{\Gamma} - \frac{1}{3}\theta\mathbf{E} \right), \quad (5)$$

где $\theta = I_1(\mathbf{\Gamma})$ – первый инвариант тензора Генки. Из (5) следует вариант определяющих соотношений, записанный в терминах скоростей, в предположении неизменности упругих констант:

$$\dot{\Sigma}_{\mathbf{R}} = K\dot{\theta}\mathbf{E} + 2G \left(\dot{\mathbf{\Gamma}} - \frac{1}{3}\dot{\theta}\mathbf{E} \right). \quad (6)$$

Удержание в разложении удельной потенциальной энергии (4) двух первых ненулевых членов приводит к следующему виду определяющих соотношений [4]:

$$\Sigma_{\mathbf{R}} = \sigma_0\mathbf{E} + \tau_e\tilde{\mathbf{\Gamma}} + \tau_q\mathbf{Q}, \quad (7)$$

где σ_0 , τ_e , τ_q – функции инвариантов меры деформации: θ – относительного изменения объема, и $e = \sqrt{\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{\Gamma}}$ – интенсивности формоизменения, определенные следующим образом: $\sigma_0 = K\theta + \frac{C_1}{6\sqrt{3}}\theta^2 + \frac{C_2}{6\sqrt{3}}e^2$, $\tau_e = 2G + \frac{C_2}{3\sqrt{3}}\theta$, $\tau_q = C_3$. Тензор $\tilde{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{\Gamma} - \frac{1}{3}\theta\mathbf{E}$ – девиатор тензора логарифмических деформаций, а тензор $\mathbf{Q}$ определяется как девиатор тензора $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^2$. Формальное дифференцирование (7) приводит к следующей форме определяющих соотношений, записанной в скоростях:

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma}_{\mathbf{R}} = & \left((K - \frac{2}{3})\dot{\theta} + (\frac{C_1}{3\sqrt{3}} - 2\frac{C_2}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{3}C_3)\theta\dot{\theta} + (\frac{C_1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3}C_3)e\dot{e} \right) \mathbf{E} + \\ & + (\frac{C_1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3}C_3)\dot{\theta}\mathbf{\Gamma} + (2G + (\frac{C_1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3}C_3)\theta)\mathbf{\Gamma} + C_3(\dot{\mathbf{\Gamma}} \cdot \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma} \cdot \dot{\mathbf{\Gamma}}). \end{aligned} \quad (8)$$

Окончательный вид разрешающих уравнений может быть записан в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_V \left(\frac{dV_0}{dV} \mathbf{R}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{\Sigma}}_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{S} \right) \cdot \delta(\mathbf{v} \nabla) dV = \\ = \int_{\Sigma} \left(\dot{\mathbf{P}}^{(n)} + \mathbf{P}^{(n)} \left(\dot{\theta} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \right) \right) \cdot \delta \mathbf{v} d\Sigma, \end{aligned} \quad (9)$$

Определяющие соотношения (5) являются известной моделью Генки, а соотношения (7) представляют собой формальное обобщение модели Мурнагана, в которой инварианты тензора деформаций Коши заменены на инварианты логарифмической меры. Компоненты тензора Генки вычисляются с помощью специального разложения в ряд по степеням тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ [2].

Краевая задача (2)-(3), (6), (8) и (9) решается методом конечных элементов и интегрируется по времени в рамках метода пошагового нагружения. С учетом того, что в процессе индентирования изменяется зона контакта жесткой матрицы и упругой области, был использован алгоритм, позволяющий производить коррекцию смешанных граничных условий при решении. Схема алгоритма, учитывающего данное изменение приведена на рисунке 1.

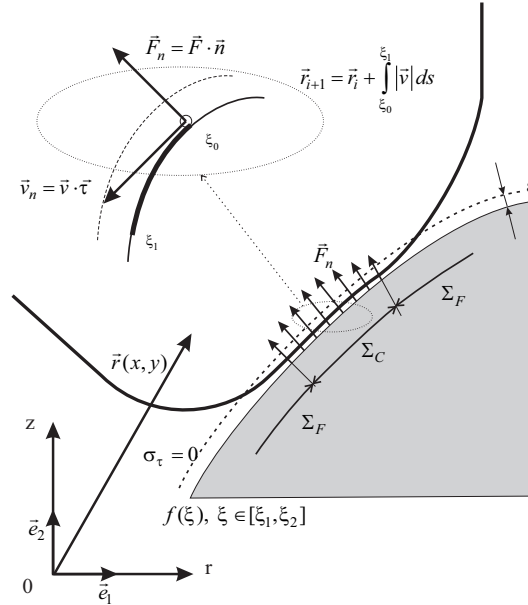


Рис. 1. Алгоритм учета изменяющейся зоны контакта

Абсолютно жесткий штамп задается кусочно-гладкой кривой $f(\xi)$, где ξ – монотонный параметр. Условия взаимного непроникновения упругой области и штампа $f(\mathbf{x}) > 0$, $\mathbf{x} \in V$, а также неотрицательности контактного давления отслеживаются на каждом шаге нагружения. Граничный узел считается взаимодействующим с матрицей, если он попал в полосу скольжения достаточно малой ширины. Перемещения контактных узлов находятся путем интегрирования скоростей вдоль образующей в предположении достаточной малости изменения кривизны функции $f(\xi)$ за один шаг.

Определение констант материала из опыта на сжатие. Рассматриваемые в рамках данной работы натуральные каучуки с малым объемным содержанием примесей можно отнести к классу несжимаемых материалов. В этом случае идентификация

материала сводится к определению констант G и C_3 . Для проведения опытов с натурными образцами был сконструирован кинематический стенд, позволяющий проводить эксперименты по сжатию и индентированию призматических образцов. Внешний вид установки показан на рисунке 2а. Конструкция состоит из двух направляющих, на которых жестко закреплена рабочая поверхность с одной стороны и организовано перемещение штока со сменными головками с другой стороны. Рабочий ход штока составляет 78 мм. Со штоком жестко связаны тензометрические датчики и оптический датчик перемещений. Разрешение АЦП тензодатчиков эквивалентно 100 ед/Н, а разрешение линейного энкодера – 48 ед/мм. Максимальное допустимое усилие составляет 0.75 кН.

Была произведена серия опытов с образцами, имеющими форму параллелепипеда размером 20х5х5мм. Поверхности плит, между которыми происходит сжатие, смазывались минеральным маслом для уменьшения трения и уменьшения влияния сдвиговых напряжений в граничных областях. Напряженное состояние приближенно считалось однородным и описывалось следующими полями напряжений и деформаций: $S_2 = S_3 = 0$, $\Gamma_1 = \ln(\lambda)$, $\Gamma_2 = \Gamma_3 = -\frac{1}{2} \ln(\lambda)$. Воспользовавшись соотношением (7), получим связь между истинным напряжением и кратностью удлинения для нелинейной модели Генки:

$$S_1 = 3G \ln(\lambda) + \frac{3}{4} C_3 \ln(\lambda)^2. \quad (10)$$

На рисунке 2б приведены результаты проведенных опытов в виде аппроксимирующей кривой. С помощью метода наименьших квадратов было найдено приближение к экспериментальным данным с использованием соотношений (10).

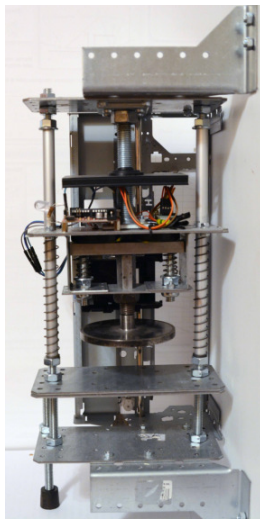


Рис. 2а. Стенд для проведения опытов на сжатие и индентирование образцов из мягких резин

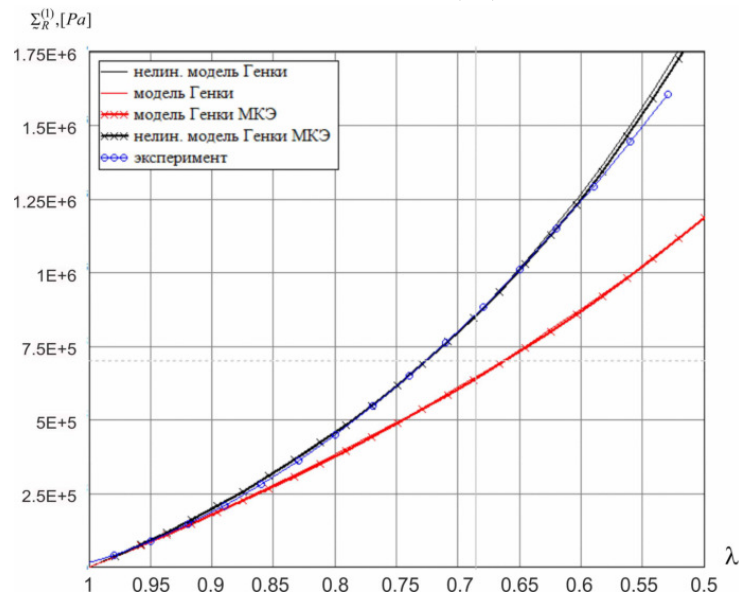


Рис. 2б. Зависимость осевого усилия от кратности удлинения в опыте на сжатие

Красная кривая на графике соответствует частному случаю (10), когда $C_3 = 0$, то есть линейной модели Генки. Соотношения (10) наилучшим образом аппроксимируют

экспериментальную кривую. Приведенные на графике результаты численного расчета МКЭ с использованием постановки (9) с большой степенью точности совпадают с аналитической кривой (10), асимптотически приближаясь к ней при измельчении сетки.

Верификация численной модели в опыте по индентированию. Схема нагружения соответствует осесимметричному вдавливанию гладкого стального сферического штампа в прямоугольную пластину [2]. На рисунке 3 точками представлены экспериментальные данные, полученные в серии опытов по индентированию каучуковых образцов 50x50x12мм головкой радиусом $R=3\text{мм}$, в виде зависимости величины действующей силы P , приложенной к штампу, от глубины внедрения D . Синяя кривая аппроксимирует массив опытных данных полиномом второго порядка. Численное решение задачи было осуществлено по определяющим соотношениям (6) и (8) в предположении слабой сжимаемости материала и с использованием описанных выше вычислительных процедур. В моделях (6) и (8) были использованы значения упругих констант, определенные из опытов на сжатие.

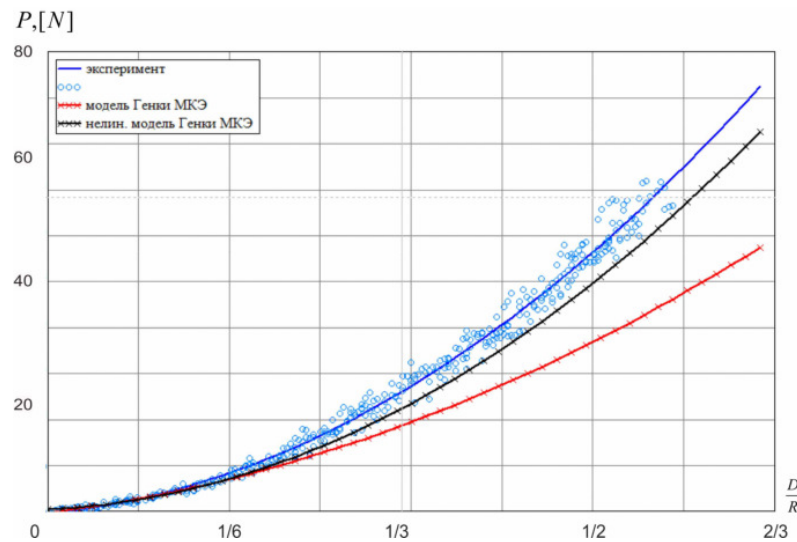


Рис. 3. Зависимость главного вектора действующей нагрузки от величины относительной осадки

На рисунке 3 красная кривая соответствует численному решению для материала Генки (6), а черной кривой соответствует решение с использованием определяющих соотношений (8). Из графиков видно, что зависимости, полученные в статье с использованием физически-нелинейной постановки (8), вносят существенные поправки к линейному решению для больших деформаций и в лучшей степени описывают экспериментальные данные.

Выводы. Показано, что используемые в настоящей работе физически-нелинейные определяющие соотношения (8) качественно верно описывают поведение материала при индентировании. Конечные деформации среды в этом процессе наблюдаются в весьма ограниченной по сравнению с остальной расчетной областью зоне. Несмотря на это, в зоне контакта, интенсивности деформаций достигают существенных величин и оказывают значительное влияние на макрохарактеристики процесса, что может быть использовано для идентификации материала.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Адамов А. А., Матвеев В. П., Труфанов Н. А., Шардаков И. Н. Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 412 с.
- [2] Астапов Ю. В. Внедрение сферического индентора в основание упругого и гипопругого круговых цилиндров при конечных деформациях // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. №2. Т. 32. С. 106-116.
- [3] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [4] Маркин А. А., Соколова М. Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 320 с.
- [5] Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
- [6] Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
- [7] Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
- [8] Ding Y., Xu G.-K., Wang G.-F. On the determination of elastic moduli of cells by AFM based indentation // Scientific Reports. 2017. V. 7, 8 pages.
- [9] Giannakopoulos A. E., Triantafyllou A. Spherical indentation of incompressible rubber-like materials // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2007. V. 55. P. 1196–1211.
- [10] Korba A. G., Barkey M. E. New model for hyper-elastic materials behavior with an application on natural rubber // Proceedings of the ASME 2017 12th International Manufacturing Science and Engineering Conference MSEC2017. June 4-8, 2017, Los Angeles, CA, USA, 10 pages.
- [11] Lin D. C., Shreiber D. I., Dimitriadis E. K., Horkay F. Spherical indentation of soft matter beyond the Hertzian regime: numerical and experimental validation of hyperelastic models // Biomech Model Mechanobiol. 2009. V. 8. P. 345-358.
- [12] Mansouri M. R., Darijani H., Baghani M. On the correlation of FEM and experiments for hyperelastic elastomers // Experimental Mechanics. 2017. V. 57. P. 195–206.
- [13] Suzuki R., Ito K., Lee T., Ogihara N. Parameter identification of hyperelastic material properties of the heel pad based on an analytical contact mechanics model of a spherical indentation // Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials. 2017. V. 65. P. 753–760.
- [14] Zhang M. G., Cao Y. P., Li G. Y., Feng X. Q. Spherical indentation method for determining the constitutive parameters of hyperelastic soft materials // Biomech Model Mechanobiol. 2014. V. 13. P. 1–11.

Yu. V. Astapov, D. V. Khristich

NUMERICAL AND EXPERIMENTAL MODELING OF INDENTATION PROCESS OF RESIN SPECIMENS

Tula State University, Tula, Russia

Abstract. Indentation tests are widely developed last decade due to relative simplicity of experimental setup. At the same time one has an opportunity to perform tests with small specimens. The behavior of elastomer during an interaction with rigid spherical stamp is examined within current investigation. The model of Hencky media and the generalization of this model to describe physically nonlinear response are used as constitutive relations. The series of tests with prismatic specimens made of natural rubber with low impurity content was performed on kinematical loading experimental setup to identify proposed model. The material constants which were determined from compression test are substituted into numerical model with finite element spatial discretization. The obtained solutions were compared with experimental compression and indentation curves. The comparison reveals the applicability of proposed model.

Keywords: finite elastic deformations, Hencky tensor, indentation, uniform compression, constitutive relations, finite element method

REFERENCES

- [1] Adamov A. A., Matvienko V. P., Trufanov N. A., Shardakov I. N. Methods of applied viscoelasticity. Yekaterinburg: UrO RAN, 2003. 412 p. (in Russian)
- [2] Astapov Yu. V. The rigid spherical indentation into the bottom of elastic and hypoelastic circular cylinders under finite deformations // Vestnik ChGPU Yakovleva. Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2017. No. 2. V. 32. P. 106-116. (in Russian)
- [3] Lurie A. I. Nonlinear Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1980. 512 p. (in Russian)
- [4] Markin A. A. Sokolova M. Yu. Thermomechanics of elastoplastic deformation. Moscow.: FizMatLit, 2013. 320 p. (in Russian)
- [5] Sedov L. I. Introduction into mechanics of continuous media. Moscow.: FizMatGiz, 1962. 284 p. (in Russian)
- [6] Truesdell C. A First Course in Rational Continuum Mechanics, Academic Press, 1977. 304 p.
- [7] Chernykh K. F. Nonlinear theory of elasticity in machine design. Leningrad: Mashinostroyeniye, 1986. 336 p. (in Russian)
- [8] Ding Y., Xu G.-K., Wang G.-F. On the determination of elastic moduli of cells by AFM based indentation // Scientific Reports. 2017. V. 7, 8 pages.
- [9] Giannakopoulos A. E., Triantafyllou A. Spherical indentation of incompressible rubber-like materials // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2007. V. 55. P. 1196–1211.
- [10] Korba A. G., Barkey M. E. New model for hyper-elastic materials behavior with an application on natural rubber // Proceedings of the ASME 2017 12th International

Astapov Yuri Vladimirovich

e-mail: ast3x3@gmail.com, Postgraduate student, Tula State University, Tula, Russia.

Khristich Dmitrii Victorovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tula State University, Tula, Russia.

Manufacturing Science and Engineering Conference MSEC2017. June 4-8, 2017, Los Angeles, CA, USA, 10 pages.

[11] Lin D. C., Shreiber D. I., Dimitriadis E. K., Horkay F. Spherical indentation of soft matter beyond the Hertzian regime: numerical and experimental validation of hyperelastic models // *Biomech Model Mechanobiol.* 2009. V. 8. P. 345-358.

[12] Mansouri M. R., Darijani H., Baghani M. On the correlation of FEM and experiments for hyperelastic elastomers // *Experimental Mechanics.* 2017. V. 57. P. 195-206.

[13] Suzuki R., Ito K., Lee T., Ogihara N. Parameter identification of hyperelastic material properties of the heel pad based on an analytical contact mechanics model of a spherical indentation // *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials.* 2017. V. 65. P. 753-760.

[14] Zhang M. G., Cao Y. P., Li G. Y., Feng X. Q. Spherical indentation method for determining the constitutive parameters of hyperelastic soft materials // *Biomech Model Mechanobiol.* 2014. V. 13. P. 1-11.