

В. Д. Кулиев, Т. Н. Алексеева

КРАЕВАЯ ТРЕЩИНА В ДВУХСЛОЙНЫХ МАТЕРИАЛАХ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

Московский государственный открытый университет

Коломенский институт (филиал) Московского государственного открытого университета

Аннотация. Рассматривается задача о краевой трещине в двухслойном материале, находящемся под воздействием внешней температуры. Определен коэффициент интенсивности напряжений. Приведен анализ численного решения.

Ключевые слова: краевая трещина, уравнение Фредгольма второго рода, коэффициент интенсивности напряжений.

УДК: 620.22-419.8:539.3(043)

Проблема прочности многослойных элементов конструкций и сооружений, в частности тепловых воздействий, и необходимость ее практического решения вызывает большой интерес многих исследователей к изучению процесса их деформирования и разрушения. Одна из важнейших задач такого рода – исследование поведения трещин в многослойных материалах с целью повышения прочности и эксплуатационной надежности современных многослойных конструкций при экстремальных условиях их работы.

При исследовании аналитических решений краевых задач многослойные материалы представляют полосами разной толщины и разных упругих свойств. Для плоской задачи теории упругости двухслойных материалов, находящихся под воздействием внешней температуры, общее решение строится с помощью метода Попковича-Нейбера и интегральных преобразований Лапласа и Фурье[2],[5].

1. Многослойные материалы под воздействием внешней температуры. Постановка задачи.

Будем рассматривать двухслойный материал. Предполагается, что две однородные изотропные полосы жестко сцеплены вдоль плоскостей $x = h_1$, $x = H$. Поверхность двухслойного материала подвержена воздействию некоторой заданной температуры. Предполагается, что материал каждого из слоев является термоупругим. Задача считается симметричной относительно плоскости $y = 0$. На бесконечности напряжения отсутствуют, а смещения исчезают. Таким образом, приходим к следующей плоской краевой задаче теории термоупругости для двухслойных материалов.

1. Начальные условия

Поступила 19.09.2011

$$t = 0, \quad T_j(x, y, 0) = 0. \quad (1.1)$$

2. Граничные условия

$$\begin{aligned} x = 0, \quad T_1(0, y, t) = f(y, t), \quad f(y, t) = T_0 \sin \omega t, \\ x = H, \quad T_2(H, y, t) = \varphi(y, t), \quad \varphi(y, t) = 0; \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} x = h_1, \quad T_1(h_1, y, t) = T_2(h_1, y, t), \\ k_1 \left(\frac{\partial T_1(x, y, t)}{\partial x} \right)_{x=h_1} = k_2 \left(\frac{\partial T_2(x, y, t)}{\partial x} \right)_{x=h_1}; \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} v_1(h_1, y, t) = v_2(h_1, y, t), \\ u_1(h_1, y, t) = u_2(h_1, y, t); \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_1(h_1, y, t) = (\sigma_x)_2(h_1, y, t), \\ (\tau_{xy})_1(h_1, y, t) = (\tau_{xy})_2(h_1, y, t). \end{aligned} \quad (1.5)$$

3. Условия на бесконечности

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq H, \quad |y| \rightarrow \infty, \quad T_j(x, y, t) \rightarrow 0, \quad \frac{\partial T_j(x, y, t)}{\partial y} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial T_j^2(x, y, t)}{\partial y^2} \rightarrow 0; \\ (\sigma_x)_j, \quad (\sigma_y)_j, \quad (\tau_{xy})_j \rightarrow 0; \\ \Psi_j \rightarrow 0, \quad v_j \rightarrow 0, \quad u_j \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь k_j – коэффициент теплопроводности j -го слоя, α_j – коэффициент теплопроводности j -го слоя, T_0 – амплитуда, являющаяся постоянной функцией, ω – циклическая частота, Ψ_j – термоупругий потенциал перемещений.

Всюду в дальнейшем считается, что изменения функции $T_j(x, y, t)$ во времени происходят с достаточно малой скоростью, когда влиянием инерционных членов в уравнениях движения теории упругости можно пренебречь, рассматривая движение как последовательность состояний равновесия (принцип Дюамеля) [4].

Решение данной задачи подробно рассмотрено в [1]. В частности, найдено нормальное напряжение

$$\sigma_{y1}(x, 0, t) = -2G_1\alpha_1(1 + \nu_1)T_0 \frac{1}{I_1^2 + I_2^2} [(I_1I_4 - I_2I_3) \cos \omega t + (I_1I_3 + I_2I_4) \sin \omega t]. \quad (1.7)$$

Здесь

$$k = \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}, \quad d_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\omega}{a_2}} (H - h_1), \quad d_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\omega}{a_1}} h_1, \quad d_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\omega}{a_1}} (h_1 - x);$$

$$I_1 = \frac{1}{2} [(k + 1) \operatorname{sh}(d_2 + d_1) \cos(d_2 + d_1) + (k - 1) \operatorname{sh}(d_2 - d_1) \cos(d_2 - d_1)],$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [(k + 1) \operatorname{ch}(d_2 + d_1) \sin(d_2 + d_1) + (k - 1) \operatorname{ch}(d_2 - d_1) \sin(d_2 - d_1)],$$

$$I_3 = \frac{1}{2} [(k + 1) \operatorname{sh}(d_1 + d_3) \cos(d_1 + d_3) + (k - 1) \operatorname{sh}(d_1 - d_3) \cos(d_1 - d_3)],$$

$$I_4 = \frac{1}{2} [(k + 1) \operatorname{ch}(d_1 + d_3) \sin(d_1 + d_3) + (k - 1) \operatorname{ch}(d_1 - d_3) \sin(d_1 - d_3)].$$

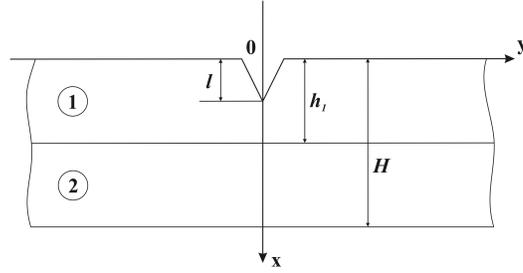


Рис. 1

2. Краевая трещина в двухслойном материале, находящемся под воздействием внешней температуры. Постановка задачи.

Рассмотрим краевую задачу, аналогичную вышеприведенной, для двухслойного материала ($n = 2$; $G_{n+1} = 0$, $\nu_{n+1} = 0$ – $(n + 1)$ -я среда отсутствует).

Пусть упругая полуплоскость $x \geq 0$, составленная из различных материалов с упругими свойствами G_k, ν_k ($k = 1, 2$), жестко сцепленных вдоль плоскостей $x = h_1, x = H$, содержит краевую трещину нормального разрыва.

Трещина перпендикулярна свободной от напряжений границе $x=0$ и границам раздела слоев $x = h_1, x = H$. К берегам трещины приложено заданное нормальное напряжение $\sigma_{y1}(x, 0, t) = -p(x, t) \leq 0$, $(\tau_{xy})_1(x, 0) = 0$, $x \in [0, l]$ ($l < h_1$), где $p(x, t)$ интегрируемая на отрезке $[0, l]$ функция, $\sigma_{y1}(x, 0, t)$ определяется соотношением (1.7).

На бесконечности напряжения отсутствуют, а смещения исчезают.

Таким образом, приходим к симметричной относительно плоскости $y = 0$ краевой задаче плоской теории упругости для двухслойных материалов с краевой трещиной нормального разрыва, находящихся под воздействием внешней температуры.

Граничные условия

$$x = 0, \quad |y| < \infty, \quad (\sigma_x)_1 = 0, \quad (\tau_{xy})_1 = 0, \quad (2.1)$$

$$y = 0, \quad x \in [0, l], \quad \sigma_{y1}(x, 0, t) = -p(x, t) \leq 0, \quad (\tau_{xy})_1 = 0, \quad (2.2)$$

$$y = 0, \quad x \in [l, h_1], \quad (\tau_{xy})_1 = 0, \quad (v)_1 = 0, \quad (2.3)$$

$$y = 0, \quad x \in [h_1, H], \quad (\tau_{xy})_2 = 0, \quad (v)_2 = 0, \quad (2.4)$$

$$x = h_1, \quad |y| < \infty, \quad (\sigma_x)_1 = (\sigma_x)_2, \quad (\tau_{xy})_1 = (\tau_{xy})_2, \\ (u)_1 = (u)_2, \quad (v)_1 = (v)_2, \quad (2.5)$$

$$x = H, \quad |y| < \infty, \quad (\sigma_x)_2 = 0, \quad (\tau_{xy})_2 = 0. \quad (2.6)$$

Условия на бесконечности

$$0 < x < h_1, \quad h_1 < x < H, \\ |y| \rightarrow \infty, \quad h_n < x \rightarrow \infty, \\ \{(\sigma_x)_k, (\sigma_y)_k, (\tau_{xy})_k\} \rightarrow 0 (k = 1, \dots, n + 1), \\ \{(u)_k, (v)_k\} \sim O(r^{-\alpha}) \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}, \alpha > 0). \quad (2.7)$$

Условие на конце трещины (дополнительное условие к краевой задаче (2.1)– (2.7)) при $y = 0$, $x \rightarrow l + 0$ имеет вид

$$\sqrt{2\pi(x-l)}(\sigma_y)_1 \sim K_I.$$

3. Решение краевой задачи

Учитывая симметрию задачи, рассматриваем область $x \geq 0$, $y \geq 0$. Решение задачи в указанной области, согласно представлению Папковича-Нейбера перемещений и напряжений через три гармонические функции, примет вид при $x \in [0, h_1]$, $y \geq 0$ (первая упругая среда: G_1, ν_1)

$$\begin{aligned} 2G_1(u)_1(x, y) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [(\chi_1 A_1^{(1)} - \lambda B_0^{(1)} - \lambda x B_1^{(1)}) \operatorname{ch} \lambda x + \\ & + (\chi_1 B_1^{(1)} - \lambda A_0^{(1)} - \lambda x A_1^{(1)}) \operatorname{sh} \lambda x] \cos \lambda y d\lambda + \\ & + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [\eta y - (1 - 2\nu_1) C_2^{(1)} e^{-\eta y}] \sin \eta x d\eta, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} 2G_1(v)_1(x, y) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \lambda [(A_0^{(1)} + x A_1^{(1)}) \operatorname{ch} \lambda x + (B_0^{(1)} + x B_1^{(1)}) \operatorname{sh} \lambda x] \sin \lambda y d\lambda + \\ & + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [\eta y + 2(1 - \nu_1) C_2^{(1)} e^{-\eta y}] \cos \eta x d\eta, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_1(x, y) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \lambda \{ [(2(1 - \nu_1) B_1^{(1)} - \lambda A_0^{(1)} - \lambda x A_1^{(1)}) \\ & \operatorname{ch} \lambda x + \\ & + [(2(1 - \nu_1) A_1^{(1)} - \lambda B_0^{(1)} - \lambda x B_1^{(1)}) \operatorname{sh} \lambda x] \} \cos \lambda y d\lambda + \\ & + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \eta (\eta y - 1) C_2^{(1)} e^{-\eta y} \cos \eta x d\eta, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_y)_1(x, y) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \lambda [(\lambda A_0^{(1)} + 2\nu_1 B_1^{(1)} + \lambda x A_1^{(1)}) \operatorname{ch} \lambda x + \\ & + (\lambda B_0^{(1)} + 2\nu_1 A_1^{(1)} + \lambda x B_1^{(1)}) \operatorname{sh} \lambda x] \cos \lambda y d\lambda - \\ & - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \eta (\eta y + 1) C_2^{(1)} e^{-\eta y} \cos \eta x d\eta, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} (\tau_{xy})_1(x, y) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \lambda \{ [\lambda B_0^{(1)} - (1 - 2\nu_1) A_1^{(1)} + \lambda x B_1^{(1)}] \operatorname{ch} \lambda x + \\ & + [\lambda A_0^{(1)} - (1 - 2\nu_1) B_1^{(1)} + \lambda x A_1^{(1)}] \operatorname{sh} \lambda x \} \sin \lambda y d\lambda - \\ & - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \eta^2 y C_2^{(1)} e^{-\eta y} \sin \eta x d\eta; \end{aligned} \quad (3.5)$$

при $h_1 \leq x \leq H$, $y \geq 0$ (вторая упругая среда: G_2, ν_2)

$$\begin{aligned} 2G_2(u)_2(x, y) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [(\chi_2 A_1^{(2)} - \lambda B_0^{(2)} - \lambda(x-H) B_1^{(2)}) \operatorname{ch} \lambda(x-H) + \\ & + (\chi_2 B_1^{(2)} - \lambda A_0^{(2)} - \lambda(x-H) A_1^{(2)}) \operatorname{sh} \lambda(x-H)] \cos \lambda y d\lambda, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$2G_2(v)_2(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda [(A_0^{(2)} + (x - H)A_1^{(2)}) \operatorname{ch} \lambda(x - H) + (B_0^{(2)} + xB_1^{(2)}) \operatorname{sh} \lambda(x - H)] \sin \lambda y d\lambda, \quad (3.7)$$

$$(\sigma_x)_2(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda \{ [(2(1 - \nu_2)B_1^{(2)} - \lambda A_0^{(2)} - \lambda(x - H)A_1^{(2)}) \operatorname{ch} \lambda(x - H) + [(2(1 - \nu_2)A_1^{(2)} - \lambda B_0^{(2)} - \lambda(x - H)B_1^{(2)}) \operatorname{sh} \lambda(x - H)] \} \cos \lambda y d\lambda, \quad (3.8)$$

$$(\sigma_y)_2(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda [(\lambda A_0^{(2)} + 2\nu_2 B_1^{(2)} + \lambda(x - H)A_1^{(2)}) \operatorname{ch} \lambda(x - H) + (\lambda B_0^{(2)} + 2\nu_2 A_1^{(2)} + \lambda(x - H)B_1^{(2)}) \operatorname{sh} \lambda(x - H)] \cos \lambda y d\lambda, \quad (3.9)$$

$$(\tau_{xy})_2(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda \{ [\lambda B_0^{(2)} - (1 - 2\nu_2)A_1^{(2)} + \lambda(x - H)B_1^{(2)}] \operatorname{ch} \lambda(x - H) + [\lambda A_0^{(2)} - (1 - 2\nu_2)B_1^{(2)} + \lambda(x - H)A_1^{(2)}] \operatorname{sh} \lambda(x - H) \} \sin \lambda y d\lambda. \quad (3.10)$$

Здесь $\chi_j = 3 - 4\nu_j$.

Из (3.5), (3.7), (3.10) следует, что условия (2.2(2)), (2.3(1)), (2.4) выполняются автоматически. Удовлетворяя граничные условия (2.1) и (2.6), из (3.8), (3.10) и (3.3), (3.5) находим

$$\lambda B_0^{(1)} - (1 - 2\nu_1)A_1^{(1)} = 0 \quad (\tau_{xy_1} = 0), \quad (3.11)$$

$$2(1 - \nu_1)B_1^{(1)} - \lambda A_0^{(1)} = \frac{4\lambda}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\eta^2 C_2^{(1)}(\eta)}{(\eta^2 + \lambda^2)^2} d\eta \quad (\sigma_{x_1} = 0), \quad (3.12)$$

$$\lambda B_0^{(2)} - (1 - 2\nu_2)A_1^{(2)} = 0 \quad (\tau_{xy_2} = 0), \quad (3.13)$$

$$\lambda A_0^{(2)} - 2(1 - \nu_2)B_1^{(2)} = 0 \quad (\sigma_{x_2} = 0). \quad (3.14)$$

Таким образом, остаются девять неизвестных функций: $A_0^{(1)}$, $B_0^{(1)}$, $A_1^{(1)}$, $B_1^{(1)}$, $A_0^{(2)}$, $B_0^{(2)}$, $A_1^{(2)}$, $B_1^{(2)}$, $C_2^{(1)}$.

При помощи формул (3.1)–(3.3), (3.3.5)–(3.8), (3.10) и граничных условий (2.5) получаем систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно восьми неизвестных функций с правыми частями, зависящими от неизвестной функции $C_2^{(1)}$:

при $x = h_1$ (граница раздела 1-го и 2-го слоев)

$$\begin{aligned} & k_{1,2} [(\chi_2 A_1^{(2)} - \lambda B_0^{(2)} + \lambda h_2 B_1^{(2)}) \operatorname{ch} \lambda h_2 - \\ & - (\chi_2 B_1^{(2)} - \lambda A_0^{(2)} + \lambda h_2 A_1^{(2)}) \operatorname{sh} \lambda h_2] = \\ & = (\chi_1 A_1^{(1)} - \lambda B_0^{(1)} - \lambda h_1 B_1^{(1)}) \operatorname{ch} \lambda h_1 + \\ & + (\chi_1 B_1^{(1)} - \lambda A_0^{(1)} - \lambda h_1 A_1^{(1)}) \operatorname{sh} \lambda h_1 - \gamma_1(\lambda), \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} & k_{1,2} [(\lambda A_0^{(2)} - \lambda h_2 A_1^{(2)}) \operatorname{ch} \lambda h_2 - (\lambda B_0^{(2)} - \lambda h_2 B_1^{(2)}) \operatorname{sh} \lambda h_2] = \\ & = (\lambda A_0^{(1)} + \lambda h_1 A_1^{(1)}) \operatorname{ch} \lambda h_1 + (\lambda B_0^{(1)} + \lambda h_1 B_1^{(1)}) \operatorname{sh} \lambda h_1 - \gamma_2(\lambda), \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
& [(2(1 - \nu_2)B_1^{(2)} - \lambda A_0^{(2)} + \lambda h_2 A_1^{(2)}) \operatorname{ch} \lambda h_2 - \\
& - [(2(1 - \nu_2)A_1^{(2)} - \lambda B_0^{(2)} + \lambda h_2 B_1^{(2)}) \operatorname{sh} \lambda h_2 = \\
& = [(2(1 - \nu_1)B_1^{(1)} - \lambda A_0^{(1)} - \lambda h_1 A_1^{(1)}) \operatorname{ch} \lambda h_1 + \\
& + [(2(1 - \nu_1)A_1^{(1)} - \lambda B_0^{(1)} - \lambda h_1 B_1^{(1)}) \operatorname{sh} \lambda h_1 - \gamma_3(\lambda),
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
& [\lambda B_0^{(2)} - (1 - 2\nu_2)A_1^{(2)} - \lambda h_2 B_1^{(2)}] \operatorname{ch} \lambda h_2 - \\
& - [\lambda A_0^{(2)} - (1 - 2\nu_2)B_1^{(2)} - \lambda h_2 A_1^{(2)}] \operatorname{sh} \lambda h_2 = \\
& = [\lambda B_0^{(1)} - (1 - 2\nu_1)A_1^{(1)} + \lambda h_1 B_1^{(1)}] \operatorname{ch} \lambda h_1 + \\
& + [\lambda A_0^{(1)} - (1 - 2\nu_1)B_1^{(1)} + \lambda h_1 A_1^{(1)}] \operatorname{sh} \lambda h_1 - \gamma_4(\lambda).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Здесь $k_{1,2} = \frac{G_1}{G_2}$, $h_2 = H - h_1$;

$$\begin{aligned}
\gamma_1(\lambda) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda y \int_0^\infty [\eta y - (1 - 2\nu_1)] C_2^{(1)}(\eta) e^{-\eta y} \sin \eta h_1 d\eta dy, \\
\gamma_2(\lambda) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin \lambda y \int_0^\infty [\eta y + 2(1 - \nu_1)] C_2^{(1)}(\eta) e^{-\eta y} \cos \eta h_1 d\eta dy, \\
\gamma_3(\lambda) &= -\frac{2}{\lambda\pi} \int_0^\infty \cos \lambda y \int_0^\infty \eta(\eta y - 1) C_2^{(1)}(\eta) e^{-\eta y} \cos \eta h_1 d\eta dy, \\
\gamma_4(\lambda) &= \frac{2}{\lambda\pi} \int_0^\infty \sin \lambda y \int_0^\infty \eta^2 y C_2^{(1)}(\eta) e^{-\eta y} \sin \eta h_1 d\eta dy.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Удовлетворяя оставшимся смешанным граничным условиям (2.2(1)), (2.3(2)), с помощью (3.2) и (3.5) приходим к парным (дуальным) интегральным уравнениям

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty C_2^{(1)}(\eta) \cos \eta x d\eta = 0, \quad l < x < h_1, \tag{3.20}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \eta C_2^{(1)}(\eta) \cos \eta x d\eta = f(x), \quad 0 < x < l. \tag{3.21}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
f(x) &= p(x) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \lambda [(\lambda A_0^{(1)} + 2\nu_1 B_1^{(1)} + \lambda x A_1^{(1)}) \operatorname{ch} \lambda x + \\
& + (\lambda B_0^{(1)} + 2\nu_1 A_1^{(1)} + \lambda x B_1^{(1)}) \operatorname{sh} \lambda x] d\lambda.
\end{aligned}$$

Учитывая (3.11)–(3.14) соотношения (3.19) примут вид

$$\begin{aligned}
\gamma_j(\lambda) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^l t \psi(t) \Phi_j(\lambda t) dt \quad (j = 1, \dots, 5), \\
\lambda B_0^{(1)} - (1 - 2\nu_1)A_1^{(1)} &= 0, \\
\lambda A_0^{(1)} &= 2(1 - \nu_1)B_1^{(1)} - \gamma_5(\lambda), \\
\lambda B_0^{(2)} - (1 - 2\nu_2)A_1^{(2)} &= 0, \\
\lambda A_0^{(2)} - 2(1 - \nu_2)B_1^{(2)} &= 0.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(\lambda t) &= \Phi_0(\lambda t) - \Phi_4(\lambda t), \\
 \Phi_2(\lambda t) &= -\Phi_0(\lambda t) - \Phi_3(\lambda t), \\
 \Phi_0(\lambda t) &= 2(1 - \nu_1^2)e^{-\lambda h_1}I_0(\lambda t), \\
 \Phi_3(\lambda t) &= e^{-\lambda h_1}[(1 - \lambda h_1)I_0(\lambda t) + \lambda t I_1(\lambda t)], \\
 \Phi_4(\lambda t) &= e^{-\lambda h_1}[(2 - \lambda h_1)I_0(\lambda t) + \lambda t I_1(\lambda t)], \\
 \Phi_5(\lambda t) &= I_0(\lambda t) - L_0(\lambda t) + \lambda t [I_1(\lambda t) - L_1(\lambda t) - \frac{2}{\pi}], \quad (t \in [0, l]).
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Здесь $I_0, I_1, L_0, L_1, L_{-1}$ – модифицированные функции Бесселя первого рода и модифицированные функции Струве.

После соответствующих преобразований [2] получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\begin{aligned}
 \psi(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{p(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \lambda \{B_1^{(1)}(\lambda)[\lambda x I_1(\lambda x) + 2I_0(\lambda x)] + \\
 &+ A_1^{(1)}(\lambda)[\lambda x L_{-1}(\lambda x) + L_0(\lambda x)] - \gamma_5(\lambda)I_0(\lambda x)\} d\lambda \quad (x \in [0, l]).
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

В дальнейшем для решения задачи необходимо произвести следующие действия:

- 1) из системы алгебраических уравнений (3.15)–(3.18) с учетом (3.22) все искомые функции $A_1^{(1)}, B_1^{(1)}, A_1^{(2)}, B_1^{(2)}$ выразить через интегралы $\gamma_j(\lambda)$ ($j = 1, \dots, 5$);
- 2) определенные таким образом функции $A_1^{(1)}, B_1^{(1)}$ подставить в (3.23);
- 3) изменить порядок интегрирования (получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода для нахождения неизвестной функции $\psi(x)$ ($x \in [0, l]$)).

Представим искомые функции в виде

$$\begin{aligned}
 A_1^{(1)} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^l t \psi(t) a_1^{(1)}(\lambda t) dt, \\
 B_1^{(1)} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^l t \psi(t) b_1^{(1)}(\lambda t) dt, \\
 A_1^{(2)} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^l t \psi(t) a_1^{(2)}(\lambda t) dt, \\
 B_1^{(2)} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^l t \psi(t) b_1^{(2)}(\lambda t) dt \quad (\lambda \in]0, \infty[).
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Здесь $a_1^{(1)}, b_1^{(1)}, a_1^{(2)}, b_1^{(2)}$ – новые неизвестные функции.

С помощью (3.15)–(3.18), (3.22) и (3.24) приходим к следующей системе, состоящей из четырех линейных неоднородных алгебраических уравнений с уже известными правыми частями $\Phi_j(\lambda t)$ ($j = 1, \dots, 5$, $\lambda \in]0, \infty[$, $t \in [0, l]$) относительно новых неизвестных функций:

при $x = h_1$ (граница раздела 1-го и 2-го слоев)

$$\begin{aligned}
 k_{1,2} e^{-\lambda(h_2 - h_1)} &\left[(2(1 - \nu_2) a_1^{(2)} + \lambda h_2 b_1^{(2)}) \frac{1 + e^{-2\lambda h_2}}{2} - \right. \\
 &\left. - ((1 - 2\nu_2) b_1^{(2)} + \lambda h_2 a_1^{(2)}) \frac{1 - e^{-2\lambda h_2}}{2} \right] = \\
 &= (2(1 - \nu_1) a_1^{(1)} - \lambda h_1 b_1^{(1)}) \frac{1 + e^{-2\lambda h_1}}{2} + \\
 &+ ((1 - 2\nu_1) b_1^{(1)} + \Phi_5 - \lambda h_1 a_1^{(1)}) \frac{1 - e^{-2\lambda h_1}}{2} - \Phi_1(\lambda t) e^{-\lambda h_1},
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
& k_{1,2}e^{-\lambda(h_2-h_1)} \left[(2(1-\nu_2)b_1^{(2)} - \lambda h_2 a_1^{(2)}) \frac{1+e^{-2\lambda h_2}}{2} - \right. \\
& \quad \left. ((1-2\nu_2)a_1^{(2)} - \lambda h_2 b_1^{(2)}) \frac{1-e^{-2\lambda h_2}}{2} \right] = \\
& = (2(1-\nu_1)b_1^{(1)} + \lambda h_1 a_1^{(1)} - \Phi_5) \frac{1+e^{-2\lambda h_1}}{2} + \\
& + ((1-2\nu_1)a_1^{(1)} + \lambda h_1 b_1^{(1)}) \frac{1-e^{-2\lambda h_1}}{2} - \Phi_2(\lambda t) e^{-\lambda h_1},
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
& e^{-\lambda(h_2-h_1)} \left[\lambda h_2 a_1^{(2)} \frac{1+e^{-2\lambda h_2}}{2} - (a_1^{(2)} + \lambda h_2 b_1^{(2)}) \frac{1-e^{-2\lambda h_2}}{2} \right] = \\
& = (\Phi_5 - \lambda h_1 a_1^{(1)}) \frac{1+e^{-2\lambda h_1}}{2} + (a_1^{(1)} - \lambda h_1 b_1^{(1)}) \frac{1-e^{-2\lambda h_1}}{2} - \Phi_3(\lambda t) e^{-\lambda h_1},
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
& e^{-\lambda(h_2-h_1)} \left[-\lambda h_2 b_1^{(2)} \frac{1+e^{-2\lambda h_2}}{2} - (b_1^{(2)} - \lambda h_2 a_1^{(2)}) \frac{1-e^{-2\lambda h_2}}{2} \right] = \\
& = \lambda h_1 b_1^{(1)} \frac{1+e^{-2\lambda h_1}}{2} + (b_1^{(1)} + \lambda h_1 a_1^{(1)} - \Phi_5) \frac{1-e^{-2\lambda h_1}}{2} - \Phi_4(\lambda t) e^{-\lambda h_1}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Подставляя (3.24) в (3.23) и изменяя порядок интегрирования, приходим к интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода:

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{p(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau + \int_0^l \psi(t) K(x, t) dt, \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
K(x, t) = & \int_0^\infty \lambda t \{ b_1^{(1)}(\lambda t) [\lambda x I_1(\lambda x) + 2I_0(\lambda x)] + \\
& + a_1^{(1)}(\lambda t) [\lambda x L_{-1}(\lambda x) + L_0(\lambda x)] - \Phi_5(\lambda t) I_0(\lambda x) \} d\lambda \quad (x \in [0, l], \quad l < h_1).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Здесь $a_1^{(1)}(\lambda t)$, $b_1^{(1)}(\lambda t)$ определяются из (3.25)–(3.28).

Коэффициент интенсивности напряжений будем искать в виде

$$K_I = \sqrt{\pi l} \psi(l), \tag{3.31}$$

$$\psi(\cdot) = \psi_1(x, l, h_1, H, a_1, a_2, k_1, k_2, k_{1,2}, \nu_1, \nu_2) | x = l. \tag{3.32}$$

Здесь $\psi(l)$ определяется из фредгольмова уравнения с непрерывным ядром (3.30).

Для нахождения коэффициента интенсивности напряжений K_I в вершине краевой трещины $y = 0$, $0 \leq x \leq l$, находящейся в двухслойной среде под воздействием внешней температуры, достаточно выполнить следующие действия:

- 1) в уравнении (3.30) выполнить замену $t = \xi$,
- 2) в найденном ранее напряжении (1.7) поменять знак и принять $x = \tau$,
- 3) полученное соотношение подставить в измененное уравнение (3.30).

Будем искать $\psi(x)$ в виде

$$\psi(x) = F_0(x) \cos \omega t + F_1(x) \sin \omega t, \tag{3.33}$$

$$F_0(x) = \frac{4}{\pi} \frac{G_1(1+\nu_1)\alpha_1 T_0}{I_1^2 + I_2^2} [I_1 A(x) - I_2 B(x)] + \int_0^l F_0(\xi) K(x, \xi) d\xi, \tag{3.34}$$

$$F_1(x) = \frac{4}{\pi} \frac{G_1(1+\nu_1)\alpha_1 T_0}{I_1^2 + I_2^2} [I_1 B(x) + I_2 A(x)] + \int_0^l F_1(\xi) K(x, \xi) d\xi. \tag{3.35}$$

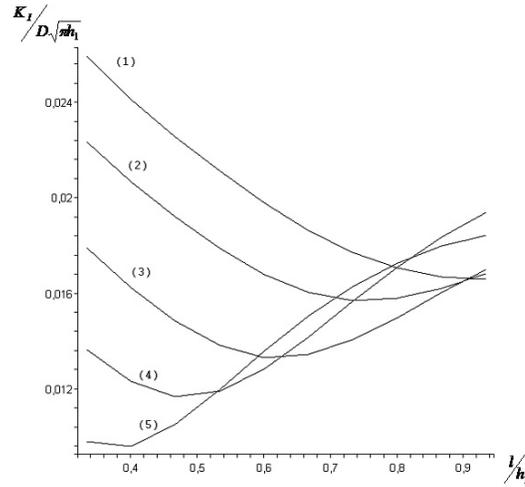


Рис. 2

Здесь

$$A(x) = \int_0^x \frac{I_4(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau, \quad B(x) = \int_0^x \frac{I_3(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau.$$

Коэффициент интенсивности напряжений примет вид:

$$K_I = K_I^0 \cos \omega t + K_I^1 \sin \omega t, \quad K_I = \sqrt{K_I^{0^2} + K_I^{1^2}} \sin(\omega t + \varphi). \quad (3.36)$$

Здесь

$$K_I^0 = \frac{4}{\pi} G_1 (1 + \nu_1) \alpha_1 T_0 \sqrt{\pi l} F_0(l), \quad K_I^1 = \frac{4}{\pi} G_1 (1 + \nu_1) \alpha_1 T_0 \sqrt{\pi l} F_1(l), \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{K_I^0}{K_I^1}.$$

Введем следующие обозначения

$$K_I^* = \sqrt{K_I^{0^2} + K_I^{1^2}}, \quad D = \frac{4}{\pi} G_1 (1 + \nu_1) \alpha_1 T_0,$$

тогда

$$K_I = K_I^* \sin(\omega t + \varphi).$$

4. Анализ решения

Благодаря представлению искомых функций в виде (3.24) появилась практическая возможность вычисления значений $\psi(\cdot)$ для любых комбинаций свойств материалов и тем самым в оптимальном проектировании многослойных конструкций. Для этого средствами аналитической системы Maple [3] разработана вычислительная программа, в которой решение уравнения (3.30) сведено к решению системы линейных неоднородных уравнений.

Рассмотрим частные случаи общего решения. Пусть $H = 1$, $h_1 = 0.3$, $T_0 = 1$, $\omega = 2\pi$. Результаты численного расчета зависимости $\frac{K_I^*}{D\sqrt{\pi h_1}}$ от $\frac{l}{h_1}$ ($l < h_1$) при различных теплофизических свойствах материалов представлены на рис. 2,3,4.

На рис. 2 построены графики для двухслойных конструкций, в которых первый слой представлен различными марками бронзы, а второй – конструкционной сталью 20.

На первом графике с увеличением длины трещины безразмерный коэффициент интенсивности напряжений K_I падает, т. е. происходит торможение трещины.

На втором, третьем и четвертом графике коэффициент интенсивности напряжений K_I с увеличением длины трещины падает до некоторой величины, затем постепенно увеличивается с ростом длины трещины.

На пятом графике коэффициент интенсивности напряжений K_I монотонно увеличивается, т. е. при определенных значениях $\frac{\ell}{h_1}$ может происходить неустойчивый рост трещины.

№ п/п	Материал	ρ	k	c	ν	E	G
Первый слой – различные марки бронзы							
1.	Кадмиевая бронза	8.890	329	385	0,32-0,35	123,6	41,2
2.	Магниева бронза Бр Мг 0,3	8.910	242,8	381	0,32-0,35	120,7	45,4
3.	Хромовая бронза Бр Х 0,5	8.900	176,5	385	0,32-0,35	109,9	41,2
4.	Бериллиевая бронза Бр Б2	8.230	104,7	418,7	0,32-0,35	128,5	50
5.	Алюминиевожелезная бронза АЖ9-4	7.500	58,6	423	0,32-0,35	110,7	41,6
Второй слой – конструкционная сталь 20							
		7.859	52	486	0,24-0,31	213	83,9

Теплофизические свойства:

- 1) ρ – плотность $[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}]$;
- 2) k – коэффициент теплопроводности $[\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot^\circ\text{C}}]$;
- 3) c – удельная теплоемкость $[\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot^\circ\text{C}}]$;
- 4) ν – коэффициент Пуассона;
- 5) E – модуль продольной упругости [МПа];
- 6) G – модуль сдвига [МПа].

На рис. 3 построены графики для двухслойных конструкций, в которых первый слой представлен различными сплавами легких металлов, а второй – конструкционной сталью 20.

На первом графике с увеличением длины трещины безразмерный коэффициент интенсивности напряжений K_I монотонно уменьшается, т. е. происходит торможение трещины.

На втором и третьем графике коэффициент интенсивности напряжений K_I с увеличением длины трещины падает до некоторой величины, затем постепенно увеличивается с ростом длины трещины.

На четвертом графике коэффициент интенсивности напряжений K_I монотонно увеличивается, т.е. при определенных значениях $\frac{\ell}{h_1}$ может происходить неустойчивый рост трещины.

На рис. 4 построены графики для двухслойных конструкций, в которых первый слой представлен различными жаростойкими никелевыми сплавами, а второй – конструкционной сталью 20.

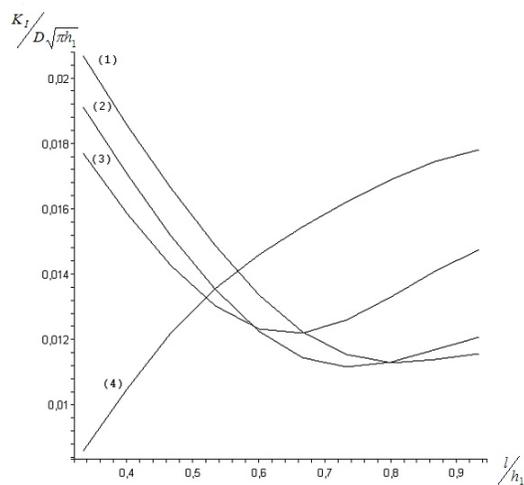


Рис. 3

№ п/п	Материал	ρ	k	c	ν	E	G
Первый слой – различные сплавы легких металлов							
1.	Магний деформируемый МА8	1.780	133,9	1046,7	0,31-0,35	40,2	15,7
2.	Магний литейный МЛ11	1.800	117,2	1044,7	0,31-0,35	41,2	15,7
3.	Сплав алюминия D16	2.770	130	992	0,32-0,36	720	26,5
4.	Титан технический ВТ1-00	4.500	19,3	503	0,31	110	39,2
Второй слой – конструкционная сталь 20							
		7.859	52	486	0,24-0,31	213	83,9

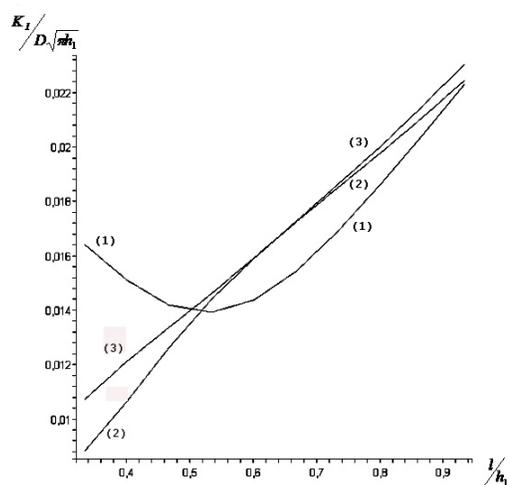


Рис. 4

На первом графике коэффициент интенсивности напряжений K_I с увеличением длины трещины падает до некоторой величины, затем постепенно увеличивается с ростом длины трещины.

На втором и третьем графике коэффициент интенсивности напряжений K_I монотонно увеличивается, т. е. при определенных значениях $\frac{\ell}{h_1}$ может происходить неустойчивый рост трещины.

№ п/п	Материал	ρ	k	c	ν	E	G
Первый слой – различные жаростойкие никелевые сплавы							
1.	Жаростойкий сплав Ni-Fe(617)	8.400	13,4	420	0,31	212	80,9
2.	Никель марганцевый НМц 5	8760	48	544	0,31	206	78,6
3.	Жаростойкий сплав Ni-Fe(263)	8.400	11,7	426	0,31	222	84,7
Второй слой – конструкционная сталь 20							
		7.859	52	486	0,24-0,31	213	83,9

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кулиев, В. Д. Многослойные материалы под воздействием внешней температуры / В. Д. Кулиев, Т. Н. Алексеева // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2011. – № 1(9). – С. 143–149.
- [2] Кулиев, В. Д. Сингулярные краевые задачи / В. Д. Кулиев. – М. : Физматлит, 2005. – 720 с.
- [3] Матросов, А. В. Марле 6. Решение задач высшей математики и механики / А. В. Матросов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2001. – 528 с.
- [4] Папкович, П. Ф. Теория упругости / П. Ф. Папкович. – М. : Оборонгиз, 1939. – 643 с.
- [5] Свешников, А. Г. Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – М. : Физматлит, 2001. – 320 с.

V. D. Kuliev, T. N. Alekseeva

INFLUENCE OF AMBIENT TEMPERATURE FOR EDGE CRACK IN A TWO-LAYER MATERIALS

Moscow State Open University

Kolomna Institute (branch) of Moscow State Open University

Abstract. The problem of edge crack in a two-layer material which is under the influence of ambient temperature is considered. The stress intensity factor is calculated. It is given the analysis of the numerical solution.

Keywords: boundary fracture, Fredholm second order equation, stress intensity factor.

Кулиев Валех Джафарович

доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики МГОУ, г. Москва

e-mail: alexeevatn75@rambler.ru

Алексеева Татьяна Николаевна

старший преподаватель кафедры высшей и прикладной математики КИ(ф)МГОУ, г. Коломна

e-mail: alexeevatn75@rambler.ru

Kuliev, Valekh Dzhafarovich

Dr. of Phys. & Math. Sci., Professor, Department of Mathematics, Moscow State Open University, Moscow

Alekseeva, Tatyana Nikolaevna

Senior Lecturer, Department of Applied Mathematics, Kolomna Institute (branch) of Moscow State Open University, Kolomna