Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 4 (38). С. 3–24

Ю. Н. Радаев

К ТЕОРИИ НЕПЛОТНО СВЯЗАННЫХ СРЕД КУЛОНА-МОРА И ОБОБЩЕННЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ ПРАНДТЛЯ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. Рассматриваются трехмерные течения идеально пластических сред, подчиняющихся критерию текучести Кулона—Мора, и обобщенных пластических тел Прандтля. С прикладной точки зрения речь идет о моделировании состояний и достаточно медленных процессов движения сыпучих неплотно связанных сред. Основой математического моделирования выступает представление об асимптотических директорах симметричного тензора напряжений и приращения тензора деформации, а также об ортогональных им направлениях (определяющих ориентацию мгновенно нерастяжимых директоров), расположенных в плоскости ортогональной главной оси приращения тензора деформации, соответствующей промежуточному главному приращению деформации. В асимптотических осях получены канонические диадные представления для тензора напряжений и приращения тензора деформациии и с помощью них — новые формы трехмерных уравнений равновесия. Обсуждаются различные (симметризованный и несимметризованный) варианты представления критерия текучести Кулона—Мора в терминах главных нормальных напряжений и соответствующие формулировки ассоциированного закона течения. Проанализированы уравнения ассоциированного закона течения, которые затем используются при изучении кинематики необратимого течения. Показано, что приращение дилатации всегда положительно (кроме случая, когда среда Кулона—Мора вырождается в идеально пластическую среду без внутреннего трения, подчиняющуюся критерию текучести Треска). Установлено, что в процессе течения сред Кулона—Мора материальные волокна, ориентированные вдоль ортогональных асимптотическим директорам направлений, мгновенно не удлиняются и не укорачиваются. Получено диадное представление приращения тензора деформации в терминах мгновенно нерастяжимых директоров. Рассматривается кинематическое ограничение, которое накладывает ассоциированный закон на течения сред Кулона—Мора. Указанное ограничение трактуется как условие, позволяющее определить величину промежуточного главного напряжения („внеплоского“ главного напряжения в случае плоского деформированного состояния), которое не входит в формулировку критерия Кулона—Мора. Показано, что при отсутствии внутреннего трения в среде промежуточное главное напряжение является точно медианным.

Ключевые слова: среда Кулона—Мора, пластическое тело Прандтля, главное напряжение, асимптотические директоры, сцепление, внутреннее трение, ассоциированный закон течения

УДК: 539.374

1. Предварительные сведения и вводные замечания. Сыпучие среды (пески, грунты, гранулированные среды) состоят из множества отдельных однородных частиц, которые могут взаимодействовать друг с другом. Такие среды способны сопротивляться исключительно сжимающим нормальным напряжениям и не оказывают никакого сопротивления растягивающим. В настоящее время в механике сыпучих сред используются две основные математические модели: сплошная (континуальная) и зернистая (дискретная). Во втором случае среда считается состоящей из соприкасающихся твердых зерен правильной формы, например, сферической или многогранной и обычно называется гранулированной средой. В первом случае, сыпучие среды (их состояния и течения) прекрасно моделируются однородной изотропной сплошной средой с присущей ей в предельном состоянии зависимостью сдвиговых напряжений от нормальных сжимающих напряжений. Среда Кулона—Мора, характеризующаяся взаимным трением и сцеплением элементов, является основной континуальной моделью механики сыпучих сред и традиционно рассматривается как важнейшее обобщение модели идеально пластической среды.

В настоящей работе предложена новая схема моделирования сжимаемых течений среды Кулона—Мора, а также обобщенных пластических тел Прандтля, основанная на представлении об асимптотических направлениях тензора напряжений и приращения тензора деформации. По этой причине при исследовании ее напряженного состояния естественно воспользоваться понятием о непрерывно распределенных на двумерных элементах внутренних силах и классической концепцией симметричного тензора напряжений. Следовательно, можно вести речь о нормальном и касательном напряжениях, действующих на данной двумерной элементарной площадке. В механике сыпучих сред, так же как и в теории идеально пластического тела, для анализа напряженного состояния широко применяются графические построения. Наиболее известными из них следует признать круговые графики напряжений, так называемые круги Мора (см., например, [1]).

Теории пластичности, как правило, основываются на представлении о пределе текучести. Весьма показательной в этом смысле является модель идеально пластического тела [2-9]: в состоянии пластического течения главные нормальные напряжения связаны некоторым „конечным“ уравнением (так называемым условием текучести). Все сказанное относится также к моделям неплотно связанных сред, в частности, песку или сухому грунту, которые служат обобщением представлений об идеально пластическом теле и составляют теорию идеально сыпучих сред. Первоначальные исследования в этой области были выполнены Кулоном (C.A. Coulomb, 1776 г.) в его теории давления грунта. В теории Мора (O. Mohr, 1900 г.) в состоянии скольжения идеально

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-01-00844 «Моделирование термомеханических процессов в сложных средах с помощью принципа термомеханической ортогональности»).

Поступила 11.10.2018

сыпучего материала постоянным принималось отношение наибольшего и наименьшего главных нормальных напряжений. Именно развивая подобного рода представления и теории, Прандтль (L. Prandtl, 1921 г.) пришел к понятию обобщенного идеально пластического тела (см., например, [8]); деформация такого тела начинается и продолжается неопределенно долго, если максимальное касательное напряжение достигает предельного значения, зависящего от средней величины (полусуммы) наибольшего и наименьшего главных нормальных напряжений. Стоит заметить, что течения обобщенного идеально пластического тела в принципе являются сжимаемыми. В частности, в процессе течения среды Кулона—Мора скорость дилатации не может принимать отрицательных значений, т.е. среда либо разрыхляется, либо она остается несжимаемой.

Теории и механике сыпучих сред посвящена обширная литература. К сожалению, при их изложении исторически сформировались две различные схемы, требующие постоянного контроля при переходе от одной из них к другой. В стандартных текстах, связанных с механикой сплошных деформируемых сред и механикой деформируемого твердого тела, при анализе напряженного состояния в заданной точке нормальное напряжение отрицательно для сжимающих напряжений и положительно для растягивающих напряжений. Прямо противоположная ситуация наблюдается в „технических теориях“, также оперирующих с понятиями касательного и нормального напряжений; то же самое можно сказать, например, об известной монографии Надаи (A. Nadai) [8], 15 глава которой целиком посвящена механике сыпучих сред.

2. Трехмерный тензор напряжений и его асимптотические направления. Во всех формулировках математической теории пластичности и теории сыпучих сред, как правило, используются специальные представления тензора напряжений и соответствующие формы дивергентного уравнения равновесия [5, 9]. Так, в теориях, основанных на критерии Кулона—Мора, условие начала течения представляет собой набор линейных соотношений, связывающих между собой главные нормальные напряжения, причем „промежуточное“ главное напряжение никак не влияет на это условие. Критерий Кулона—Мора, следовательно, связывает максимальное и минимальное главные напряжения. Можно показать также, что он выражается через касательное и нормальное напряжения, действующие на элементарном плоском элементе, вдоль которого осуществляется скольжение. Если все главные нормальные напряжения являются сжимающими, то применимость указанного критерия хорошо подтверждается в экспериментах с образцами горных пород и грунтов. Важными особенностями критерия Кулона—Мора выступает простота его математической формулировки, ясность его физического содержания и выраженный конвенциональный характер. Кроме этого, в механике разрушения критерий Кулона—Мора часто трактуется с точки зрения прочности твердых тел и в этом смысле выступает как один из критериев прочности.

Обозначим через $\boldsymbol{\sigma}$ трехмерный тензор напряжений Коши. Симметрия тензора напряжений обеспечивает возможность его канонического спектрального представления:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \sigma_2 \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \sigma_3 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \tag{1}$$

где $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ — ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$; σ_1, σ_2, σ_3 — главные нормальные напряжения (собственные значения тензора напряжений). Собственные векторы указывают направления главных осей напряжений.

В механике идеально пластических и обобщенных идеально пластических тел особую роль играют промежуточное главное нормальное напряжение и максимальное (минимальное) главное нормальное напряжение. Занумеруем главные оси тензора напряжений так, чтобы для актуального напряженного состояния соответствующие главные нормальные напряжения σ_1, σ_2, σ_3 расположились бы в порядке убывания

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \tag{2}$$

Здесь необходимо сразу же отметить, что включение в теорию данных неравенств значительно упрощает формулировки критериев текучести и ассоциированного закона течения. Однако оно имеет один весьма существенный недостаток: нарушается свойство симметрии уравнений и соотношений при перестановках индексов 1, 2, 3, а это не вписывается в теории изотропных тел, когда все направления в пространстве равноправны и уравнения обязаны сохранять свою форму при перестановках индексов.

Каноническое разложение (1) для тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ хорошо известно и достаточно широко используется в современной механике деформируемого твердого тела в различных вопросах, связанных с анализом напряженного состояния тела в данной точке [1]. Однако можно установить новые важные представления тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, которые отличаются от канонического (1), но тем не менее обладают чрезвычайно простой алгебраической структурой [10]. Для этого требуется ввести два новых направления в плоскости, ортогональной собственному вектору $\mathbf{m}$. Этот вектор соответствует „промежуточному“ главному нормальному напряжению σ_2 (the intermediate principal stress).

С помощью алгебраического тензорного разбиения единицы

$$\mathbf{I} = \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \tag{3}$$

где $\mathbf{I}$ — единичный тензор, исключаем в спектральном представлении (1) тензорную диаду, образованную собственным вектором $\mathbf{m}$:

$$\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} = \mathbf{I} - \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \tag{4}$$

следовательно, для тензора напряжений получим

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_2 \mathbf{I} + 2\tau_{\max} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3} \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} - \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right), \tag{5}$$

где полуразность крайних главных напряжений

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \tag{6}$$

есть максимальное касательное напряжение, выступающее в качестве важнейшей характеристики напряженного состояния в математических теориях пластичности.

Обозначая далее

$$g_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3}, \quad g_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3},$$

формулу (5) перепишем в следующем виде:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_2 \mathbf{I} + 2\tau_{\max} \left(g_1 \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} - g_2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right). \tag{7}$$

В плоскости, ортогональной собственному вектору $\mathbf{m}$, выполним линейное преобразование векторов $\mathbf{l}$, $\mathbf{n}$, трансформировав их в новые единичные векторы ${}^\backprime\mathbf{l}$, ${}^\backprime\mathbf{n}$ согласно

$$\begin{aligned}
\mathbf{l} &= \frac{1}{\sqrt{2(1+\cos{}^\backprime\iota)}}({}^\backprime\mathbf{l}+{}^\backprime\mathbf{n}),\\
\mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos{}^\backprime\iota)}}(-{}^\backprime\mathbf{l}+{}^\backprime\mathbf{n}),
\end{aligned} \tag{8}$$

где ${}^\backprime\iota$ — угол между векторами ${}^\backprime\mathbf{l}$, ${}^\backprime\mathbf{n}$. В отличии от пары собственных $\mathbf{l}$, $\mathbf{n}$, директоры ${}^\backprime\mathbf{l}$, ${}^\backprime\mathbf{n}$, вообще говоря, не ортогональны друг другу. Можно заметить, что собственный вектор $\mathbf{l}$ всегда делит пополам угол между директорами ${}^\backprime\mathbf{l}$, ${}^\backprime\mathbf{n}$. Если смотреть на плоскость, ортогональную второму главному направлению, со стороны оперения вектора $\mathbf{m}$, то асимптотический директор ${}^\backprime\mathbf{l}$ получается в результате поворота собственного вектора $\mathbf{l}$ на угол ${}^\backprime\iota/2$ по ходу часовой стрелки, а асимптотический директор ${}^\backprime\mathbf{n}$ — поворотом на тот же самый угол, но против хода часовой стрелки.

Оказывается, что угол ${}^\backprime\iota$ можно подобрать так, чтобы тензор напряжений содержал только смешанные диады, образованные новыми векторами ${}^\backprime\mathbf{l}$, ${}^\backprime\mathbf{n}$. В этом случае директоры ${}^\backprime\mathbf{l}$, ${}^\backprime\mathbf{n}$ будут указывать асимптотические направления симметричного тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$. Достаточно положить [10]

$$\cos{}^\backprime\iota = \frac{\sigma_1+\sigma_3-2\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_3},$$

или

$$\cos{}^\backprime\iota = -\mu, \tag{9}$$

где μ есть параметр Лоде (W. Lode)

$$\mu = \frac{2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3}. \tag{10}$$

В силу своего определения абсолютное значение параметра Лоде не может превосходить единицу

$$-1 \le \mu \le 1, \tag{11}$$

откуда следует, что уравнение (9) всегда разрешимо относительно угла ${}^\backprime\iota$.

Несложные вычисления, выполненные с привлечением (9), позволяют последовательно получить сначала

$$\frac{g_1}{1+\cos{}^\backprime\iota} + \frac{g_2}{1-\cos{}^\backprime\iota} = 4\frac{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_2-\sigma_3)}{(1-\mu^2)(\sigma_1-\sigma_3)^2},$$

а затем —

$$\frac{g_1}{1+\cos{}^\backprime\iota} + \frac{g_2}{1-\cos{}^\backprime\iota} = 4\frac{(\sigma_2-\sigma_3)^2}{(1+\mu)^2(\sigma_1-\sigma_3)^2} = 1.$$

В итоге приходим к формуле[1] для тензора напряжений в смешанных диадах асимптотических директоров [10]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_2\mathbf{I} + \tau_{\max}({}^\backprime\mathbf{l}\otimes{}^\backprime\mathbf{n} + {}^\backprime\mathbf{n}\otimes{}^\backprime\mathbf{l}), \tag{12}$$

или

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_2\mathbf{I} + 2\tau_{\max}\mathrm{sym}\,({}^\backprime\mathbf{l}\otimes{}^\backprime\mathbf{n}), \tag{13}$$

пригодной, вообще говоря, для всех трехмерных напряженных состояний.

---

[1]Приводимая ниже формула и схема ее вывода пригодны для любого симметричного тензора второго ранга и, в частности, для приращения тензора деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}$.

Заметим, что „промежуточное“ главное напряжение σ_2 вычисляется как

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \cos {}^\backprime\iota\, \tau_{\max} \tag{14}$$

или

$$\sigma_2 = s - \cos {}^\backprime\iota\, \tau_{\max}, \tag{15}$$

где

$$s = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \tag{16}$$

есть точно „медианное“ напряжение (the mean stress).

„Крайние“ главные напряжения $\sigma_{1,\,3}$ (the major and minor principal stresses) могут быть вычислены по следующей формуле:

$$\sigma_{1,\,3} = \sigma_2 \pm \tau_{\max}(1 \mp \mu).$$

Отношение „крайних“ главных напряжений определяется согласно

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{\sigma_2 + \tau_{\max}(1-\mu)}{\sigma_2 - \tau_{\max}(1+\mu)}.$$

Уравнение равновесия с учетом данных выше представлений можно получить в следующей форме:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\nabla}\sigma_2 + {}^\backprime\mathbf{l}({}^\backprime\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\tau_{\max} + {}^\backprime\mathbf{n}({}^\backprime\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla})\tau_{\max} - \tau_{\max}\sin{}^\backprime\iota\,\boldsymbol{\nabla}{}^\backprime\iota + \\ + \tau_{\max}({}^\backprime\mathbf{l}(\boldsymbol{\nabla}\cdot{}^\backprime\mathbf{n}) + {}^\backprime\mathbf{n}(\boldsymbol{\nabla}\cdot{}^\backprime\mathbf{l}) - {}^\backprime\mathbf{l}\times(\boldsymbol{\nabla}\times{}^\backprime\mathbf{n}) - {}^\backprime\mathbf{n}\times(\boldsymbol{\nabla}\times{}^\backprime\mathbf{l})) = \mathbf{0}.\end{gathered} \tag{17}$$

Здесь $\boldsymbol{\nabla}$ обозначает трехмерный дифференциальный оператор Гамильтона (наблу Гамильтона).

Заменяя в полученном уравнении „промежуточное“ главное напряжение σ_2 согласно (15), приходим к:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\nabla}s - \cos{}^\backprime\iota\,\boldsymbol{\nabla}\tau_{\max} + {}^\backprime\mathbf{l}({}^\backprime\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\tau_{\max} + {}^\backprime\mathbf{n}({}^\backprime\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla})\tau_{\max} + \\ + \tau_{\max}({}^\backprime\mathbf{l}(\boldsymbol{\nabla}\cdot{}^\backprime\mathbf{n}) + {}^\backprime\mathbf{n}(\boldsymbol{\nabla}\cdot{}^\backprime\mathbf{l}) - {}^\backprime\mathbf{l}\times(\boldsymbol{\nabla}\times{}^\backprime\mathbf{n}) - {}^\backprime\mathbf{n}\times(\boldsymbol{\nabla}\times{}^\backprime\mathbf{l})) = \mathbf{0}.\end{gathered} \tag{18}$$

3. Предельные состояния и течения сыпучих сред. Условие Кулона—Мора.

Моделирование механического поведения идеально пластических тел в значительной степени опирается на анализ локального напряженного состояния. Нас будут интересовать трехмерные напряженные состояния в заданной точке, касательные и нормальные напряжения, действующие на двумерный плоский элемент, ориентация которого в трехмерном пространстве определяется единичным нормальным вектором $\boldsymbol{\nu}$. Считается, что противоположные ориентации $\boldsymbol{\nu}$ и $-\boldsymbol{\nu}$ определяют один и тот же плоский элемент.

Концепция внутренних напряжений подразумевает оперирование с вектором напряжений $\mathbf{t}$, который ассоциируется с двумерным плоским элементом и в силу этого зависит от его ориентации, т.е. от директора $\boldsymbol{\nu}$:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\boldsymbol{\nu}).$$

Фундаментальный результат Коши, как известно, устанавливает, что вектор напряжений $\mathbf{t}$ линейно зависит от директора $\boldsymbol{\nu}$:

$$\mathbf{t}(\boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\sigma}.$$

Введем касательное и нормальное напряжения
$$t_\perp = t_\perp(\boldsymbol{\nu}) = \sqrt{\mathbf{t}\cdot\mathbf{t} - t_\parallel^2}, \quad t_\parallel = t_\parallel(\boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{t}, \tag{19}$$
также функционально зависящие от единичного директора $\boldsymbol{\nu}$. Согласно только что данным определениям касательное напряжение может быть лишь неотрицательным ($t_\perp \geq 0$); $t_\parallel < 0$ для сжимающих напряжений, $t_\parallel > 0$ для растягивающих напряжений.[2]

Обозначим через $t_\perp^*$, $t_\parallel^*$ значения касательного и нормального напряжений в состоянии предельного равновесия, т.е. связанные с площадкой, вдоль которой в предельном состоянии происходит сдвиг.

Изучение картин разрушения образований из природных сыпучих сред показывает, что во всех случаях нарушение равновесия происходит в форме сдвига одной части массива относительно другой, остающейся неподвижной части. Сдвиг реализуется вдоль так называемых поверхностей скольжения, состоящих из элементарных площадок скольжения. Указанное нарушение равновесия происходит потому, что на поверхности скольжения действующие касательные напряжения превышают внутренние силы сопротивления среды деформации сдвига. Установленные, например, для грунтов по результатам испытаний образцов на сдвиг зависимости между касательной $t_\perp^*$ и нормальной $t_\parallel^*$ составляющими вектора напряжений, действующего на элементарной площадке образца в момент сдвига, имеют форму пологой кривой (которая имеет значительную кривизну лишь на малом начальном участке, а затем, с возрастанием нормальной составляющей напряжений, ее кривизна быстро уменьшается). Такая кривая может быть заменена прямой и, таким образом, ее уравнение будет иметь следующий вид:
$$t_\perp^* = c_2 - c_1 t_\parallel^*, \tag{20}$$
где c_1, c_2 — материальные постоянные. Очевидно, что выражение в правой части (20) характеризует величину внутренних сил сопротивления среды деформации сдвига; она возрастает с увеличением величины сжимающих напряжений. Условие предельного равновесия (20) первоначально было предложено Кулоном в исследованиях о давлении грунта на подпорные стенки. Следует также принимать во внимание, что для многих типов горных пород вместо (20) на площадках скольжения наблюдается существенно нелинейная функциональная связь
$$t_\perp^* = F(t_\parallel^*). \tag{21}$$

Заметим, что зависимость внутреннего сопротивления сыпучей среды деформации сдвига от нормальной составляющей напряжений собственно и отличает ее от идеально пластической среды, подчиняющейся условию текучести Треска. Говорят также, что в сыпучей среде имеются два механизма сопротивления деформации сдвига: сцепление (характеризующее так называемое начальное сопротивление сдвигу, существующее даже при отсутствии нормальной составляющей напряжений) и внутреннее трение (происхождение которого обусловлено нормальными сжимающими напряжениями). Поэтому материальные постоянные c_2, c_1 в (20) можно называть коэффициентом сцепления (the inherent shear stress, cohesion) и коэффициентом внутреннего трения (the coefficient of internal friction) соответственно.

[2]В технических теориях (например, в механике грунтов) обычно используется прямо противоположное соглашение о знаке нормальных напряжений. Мы по понятным причинам не будем следовать традициям технических теорий.

Условие предельного равновесия сыпучей среды (20), выполняющееся на элементарных площадках скольжения, означает, что для всех остальных площадок должно соблюдаться условие
$$t_\perp \leq c_2 - c_1 t_\parallel. \tag{22}$$
Таким образом, вычисляя точную верхнюю границу суммы
$$t_\perp + c_1 t_\parallel \tag{23}$$
по всем возможным ориентациям в пространстве, можно определить площадки скольжения, если сама сумма (23) оказывается равной коэффициенту сцепления c_2.

Как известно, точная верхняя граница значений касательного напряжения $t_\perp$ по всем возможным ориентациям в пространстве оказывается равной полуразности крайних главных напряжений (6).

Заметим, что сумма (23) проще всего вычисляется в локальном триэдре главных направлений тензора напряжений. Действительно, исходя из (19), нетрудно видеть, что
$$\begin{aligned} &t_\parallel = \sigma_1\nu^2_{<1>} + \sigma_2\nu^2_{<2>} + \sigma_3\nu^2_{<3>},\\ &t^2_\perp = (\sigma_1-\sigma_2)^2\nu^2_{<1>}\nu^2_{<2>} + (\sigma_2-\sigma_3)^2\nu^2_{<2>}\nu^2_{<3>} + (\sigma_3-\sigma_1)^2\nu^2_{<1>}\nu^2_{<3>}. \end{aligned} \tag{24}$$
В этих формулах через $\nu_{<1>}$, $\nu_{<2>}$, $\nu_{<3>}$ обозначены компоненты единичного директора $\boldsymbol{\nu}$ относительно базиса $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$.

Поиск точной верхней грани суммы (23) осуществляется с учетом условия нормировки директора $\boldsymbol{\nu}$:
$$\nu^2_{<1>} + \nu^2_{<2>} + \nu^2_{<3>} = 0.$$
Кроме того, поиск следует также ограничить физически очевидным условием
$$\nu^2_{<2>} = 0,$$
устанавливающим, что директор, указывающий на плоский элемент с наибольшим значением суммы (23), имеет нулевую проекцию на главную ось напряжений, соответствующую промежуточному главному нормальному напряжению σ_2. Поэтому выражения (24) еще упрощаются
$$\begin{aligned} &t_\parallel = (\sigma_1-\sigma_3)\nu^2_{<1>} + \sigma_3,\\ &t^2_\perp = (\sigma_3-\sigma_1)^2\nu^2_{<1>}(1-\nu^2_{<1>}). \end{aligned} \tag{25}$$

Сумма (23), таким образом, оказывается не зависящей от промежуточного главного нормального напряжения σ_2.

Наконец, ограничимся только значениями $\nu_{<1>} > 0$, поскольку от ориентации, характеризующейся условием $\nu_{<1>} < 0$, всегда можно перейти к противоположной (и в силу этого не отличимой от исходной) ориентации с $\nu_{<1>} > 0$.

В результате можно быстро выписать уравнение, из которого находятся экстремальные ориентации:
$$1 - 2\nu^2_{<1>} + 2c_1\nu_{<1>}\sqrt{1-\nu^2_{<1>}} = 0. \tag{26}$$

Полученное уравнение корректно определяет ориентации, которым соответствуют экстремальные значения суммы (23), только если компонента $\nu_{<1>}$ директора $\boldsymbol{\nu}$ удовлетворяет ограничениям
$$\frac{1}{2} < \nu^2_{<1>} < 1. \tag{27}$$

Устраняя в уравнении (26) радикал, приходим к биквадратному уравнению

$$\nu^4_{<1>} - \nu^2_{<1>} + \frac{1}{4(1+c_1)} = 0. \tag{28}$$

Это уравнение позволяет найти единственное значение $\nu^2_{<1>}$, которое удовлетворяет ограничениям (27):

$$\nu^2_{<1>} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}$$

и затем определить в точности два *различных* пространственных направления $\boldsymbol{\nu}$, характеризующиеся наибольшим значением суммы (23), в виде

$$\begin{aligned}
&\nu_{<1>} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}}, && \nu_{<1>} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}},\\
&\nu_{<2>} = 0, && \nu_{<2>} = 0,\\
&\nu_{<3>} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}}; && \nu_{<3>} = -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}}.
\end{aligned} \tag{29}$$

Несложные вычисления показывают, что точная верхняя грань суммы (23) есть

$$\sup\,(t_\perp + c_1 t_\parallel) = c_1\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} + \sqrt{1+c_1^2}\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2},$$

и, следовательно, критерий предельного равновесия Кулона—Мора для сыпучей среды в пространстве главных напряжений имеет форму несимметричного по отношению к нумерации главных осей тензора напряжений конечного уравнения:

$$c_1\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} + \sqrt{1+c_1^2}\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} = c_2.$$

Введем вместо c_1, c_2 материальные постоянные γ и c (c — коэффициент сцепления, γ — угол внутреннего трения) согласно

$$c_1 = \operatorname{tg}\gamma, \quad c_2 = c.$$

В результате получается следующая форма критерия Кулона—Мора:

$$\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} = c\cos\gamma - \sin\gamma\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}, \tag{30}$$

или, вводя максимальное касательное напряжение $\tau_{\max}$ и медианное напряжение s, —

$$\tau_{\max} = c\cos\gamma - \sin\gamma s. \tag{31}$$

Площадки скольжения ортогональны директорам, компоненты которых относительно триэдра главных осей тензора напряжений приводятся ниже (см. (29))

$$\begin{aligned}
&\nu_{<1>} = \sqrt{\frac{1+\sin\gamma}{2}}, && \nu_{<1>} = \sqrt{\frac{1+\sin\gamma}{2}},\\
&\nu_{<2>} = 0, && \nu_{<2>} = 0,\\
&\nu_{<3>} = \sqrt{\frac{1-\sin\gamma}{2}}; && \nu_{<3>} = -\sqrt{\frac{1-\sin\gamma}{2}}.
\end{aligned} \tag{32}$$

Хорошо известно, что главные нормальные напряжения σ_1, σ_2, σ_3 могут быть вычислены в терминах второго инварианта девиатора тензора напряжений J_2', параметра Лоде—Надаи μ и гидростатического давления p:

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 &= -p + \frac{3-\mu}{\sqrt{3(3+\mu^2)}}\sqrt{J_2'},\\
\sigma_2 &= -p + \frac{2\mu}{\sqrt{3(3+\mu^2)}}\sqrt{J_2'},\\
\sigma_3 &= -p - \frac{3+\mu}{\sqrt{3(3+\mu^2)}}\sqrt{J_2'},
\end{aligned}
\tag{33}
$$

где

$$
\begin{aligned}
6J_2' &= (\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2,\\
\mu &= \frac{2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3},\\
-3p &= \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

С учетом данных выше уравнений критерий (30) преобразуется к следующей форме:

$$
\frac{3-\mu\sin\gamma}{\sqrt{3(3+\mu^2)}\sin\gamma}\sqrt{J_2'} - p = c\operatorname{ctg}\gamma. \tag{35}
$$

Определяя затем угол Лоде ϑ согласно

$$
\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\mu}{\sqrt{3}} = -\frac{\cos \grave{\iota}}{\sqrt{3}}, \tag{36}
$$

можно утверждать, что будет справедливо равенство

$$
\left[\frac{3-\mu\sin\gamma}{\sqrt{3(3+\mu^2)}}\right]^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos\vartheta - \sin\gamma\sin\vartheta}, \tag{37}
$$

которое, в свою очередь, позволяет сформулировать критерий (35) в следующем замечательном виде:

$$
\sqrt{J_2'} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos\vartheta - \sin\gamma\sin\vartheta}(p\sin\gamma + c\cos\gamma). \tag{38}
$$

Стоит отметить еще одну форму критерия Кулона—Мора (30) для сыпучих сред с трением и сцеплением, приближающую его по форме к критерию текучести Треска, широко распространенному в механике идеально пластического тела

$$
\sigma_1 - a\sigma_3 = 2k. \tag{39}
$$

Здесь материальные постоянные a и k связаны с c и γ соотношениями

$$
a = \frac{1-\sin\gamma}{1+\sin\gamma}, \quad k = \frac{c\cos\gamma}{1+\sin\gamma}.
$$

Поэтому сыпучая среда Кулона—Мора с позиций теории течения идеально пластических сред определяется кусочно-линейной функцией текучести

$$
f(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = \sigma_1 - a\sigma_3, \tag{40}
$$

в запись которой входят лишь „крайние“ главные напряжения и не входит промежуточное главное нормальное напряжение σ_2.

Если в среде отсутствует внутреннее трение ($\gamma \to 0$), то $a \to 1$, $k \to c$ и критерий текучести Кулона—Мора переходит в критерий максимального касательного напряжения Треска (H. Tresca)

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k. \tag{41}$$

Из (39) следует формулировка критерия предельного состояния идеально сыпучей среды, т.е. среды с нулевым внутренним сцеплением ($c = 0$), восходящая к Мору:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = a. \tag{42}$$

Дальнейшее обобщение модели сыпучей среды Кулона—Мора было выполнено в работах Л. Прандтля. Оно получается из формы (31), если считать зависимость максимального касательного напряжения от медианного напряжения заданной с помощью неопределенно общей функции:

$$\tau_{\max} = f(s). \tag{43}$$

Надо сказать, что моделирование течений обобщенного пластического тела Прандтля лучше всего осуществляется с помощью векторного дифференциального уравнения (18), которое в качестве неизвестных содержит асимптотические директоры тензора напряжений ${}^{\backprime}\mathbf{l}$, ${}^{\backprime}\mathbf{n}$ и одну из величин $\tau_{\max}$ или s, поскольку одна из них всегда может быть исключена на основании связывающего их уравнения (43).

4. Приращения перемещений и деформаций. Мгновенно нерастяжимые директоры.

Анализ течения среды Кулона—Мора основывается на общих кинематических уравнениях механики сплошных деформируемых сред и определяющем законе, связывающем инкремент тензора деформаций с тензором напряжений. В качестве определяющего примем ассоциированный с критерием (39) закон течения.

Течение среды Кулона—Мора с точки зрения кинематики характеризуется приращением вектора перемещений $d\mathbf{u}$ и приращением тензора (пластической) деформации (инкрементом тензора деформации) $d\boldsymbol{\varepsilon}$. Указанные приращения связаны между собой формулами Коши:

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\nabla} \otimes d\mathbf{u} + (\boldsymbol{\nabla} \otimes d\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\right]. \tag{44}$$

В изотропных средах можно вести речь о, по крайней мере, одном общем триэдре главных осей тензоров $\boldsymbol{\sigma}$ и $d\boldsymbol{\varepsilon}$, следовательно, спектральное представление приращения тензора деформации лучше всего взять в форме

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}d\varepsilon_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}d\varepsilon_2 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}d\varepsilon_3, \tag{45}$$

где $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ — ортонормированный базис из собственных векторов, общих как для тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, так и для приращения тензора деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}$; $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$, $d\varepsilon_3$ — главные приращения (пластической) деформации (собственные значения тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$).

Для течений, для которых второй главной оси соответствуют промежуточные главное нормальное напряжение и главное приращение деформации, мы введем особую нумерацию осей главного триэдра так, чтобы наряду с (2) выполнялись неравенства

$$d\varepsilon_1 \geq d\varepsilon_2 \geq d\varepsilon_3. \tag{46}$$

Ниже мы увидим, что для сред Кулона—Мора в силу ассоциированного закона течения упорядоченным главным нормальным напряжениям (2) соответствуют главные приращения деформации, которые также оказываются упорядоченными так, что выполняются неравенства (46). После этого представление об асимптотических директорах можно распространить на инкремент тензора деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}$, что позволяет сразу же указать его каноническую форму в асимптотических директорах ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{l}$, ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{n}$:

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{I}d\varepsilon_2 + (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)\operatorname{sym}({}^{\backprime\backprime}\mathbf{l} \otimes {}^{\backprime\backprime}\mathbf{n}). \tag{47}$$

Напомним, что если смотреть на плоскость, ортогональную второму главному направлению, со стороны оперения вектора $\mathbf{m}$, то асимптотический директор ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{l}$ получается в результате поворота собственного вектора $\mathbf{l}$ на угол ${}^{\backprime\backprime}\iota/2$ по ходу часовой стрелки, а асимптотический директор ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{n}$ — поворотом на тот же угол против хода часовой стрелки.

Угол между асимптотическими директорами ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{l}$, ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{n}$ вычисляется, как и в случае напряжений, с помощью кинематического параметра Лоде

$$\cos{}^{\backprime\backprime}\iota = -\nu, \tag{48}$$

где

$$\nu = \frac{2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}, \tag{49}$$

причем здесь выражение справа по абсолютной величине не превышает единицу.

Учитывая каноническую форму инкремента тензора деформации (47), становится почти очевидной необходимость ввести в рассмотрение два новых направления в плоскости, ортогональной второй главной оси тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$, которые были бы ортогональны направлениям асимптотических директоров ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{l}$, ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{n}$. Соответствующие им директоры обозначим через ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$, ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$; при этом директор ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$ ортогонален асимптотическому директору ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{n}$, а директор ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$ ортогонален ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{l}$:

$${}^{\backprime\backprime}\mathbf{n} \cdot {}^{\prime\prime}\mathbf{l} = 0, \qquad {}^{\backprime\backprime}\mathbf{l} \cdot {}^{\prime\prime}\mathbf{n} = 0. \tag{50}$$

Точнее, если смотреть на плоскость, ортогональную второму главному направлению, со стороны оперения вектора $\mathbf{m}$, то директор ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$ получается в результате поворота собственного вектора $\mathbf{l}$ в указанной плоскости на угол $\dfrac{\pi - {}^{\backprime\backprime}\iota}{2}$ по ходу часовой стрелки, а директор ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$ — поворотом вектора $\mathbf{l}$ на тот же угол против хода часовой стрелки.

Принимая во внимание (47) и (50), сразу же находятся мгновенные удлинения линейных элементов, направленных вдоль второго главного направления и вдоль директоров ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$, ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$; все они оказываются равными промежуточному главному приращению деформации $d\varepsilon_2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{m} &= d\varepsilon_2, \\
{}^{\prime\prime}\mathbf{l} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot {}^{\prime\prime}\mathbf{l} &= d\varepsilon_2, \\
{}^{\prime\prime}\mathbf{n} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot {}^{\prime\prime}\mathbf{n} &= d\varepsilon_2.
\end{aligned} \tag{51}$$

Без труда вычисляются также мгновенные сдвиги в плоскостях, определяемых директорами ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$, ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$:

$$\begin{aligned}
&{}^{\prime\prime}\mathbf{l} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{m} = 0, \\
&{}^{\prime\prime}\mathbf{n} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{m} = 0, \\
&{}^{\prime\prime}\mathbf{l} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot {}^{\prime\prime}\mathbf{n} = {}^{\prime\prime}\mathbf{n} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot {}^{\prime\prime}\mathbf{l} = -\cos{}^{\backprime\backprime}\iota\, d\varepsilon_2 + \frac{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{2}\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - {}^{\backprime\backprime}\iota\right).
\end{aligned} \tag{52}$$

Из формул (51), (52), подстановкой вместо приращения тензора деформации его спектрального представления, получается следующее соотношение, позволяющее устранить второе главное приращение деформации:

$$d\varepsilon_2 = \sin^2\frac{{}^{\backprime\backprime}\iota}{2}\,d\varepsilon_1 + \cos^2\frac{{}^{\backprime\backprime}\iota}{2}\,d\varepsilon_3.$$

Обратимся к уравнениям ассоциированного закона течения [5, 9]. В случае изотропной функции текучести $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ассоциированный закон течения

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda, \tag{53}$$

где неопределенный множитель $d\lambda$ строго положителен для состояний активного пластического течения, в общем для тензоров $\boldsymbol{\sigma}$, $d\boldsymbol{\varepsilon}$ триэдре главных осей будет иметь вид [5, с. 45]

$$d\varepsilon_j = \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} d\lambda \qquad (j = 1, 2, 3), \tag{54}$$

откуда с функцией текучести (40) для активных течений среды Кулона—Мора находим следующие значения для главных приращений деформации:

$$d\varepsilon_1 = d\lambda, \quad d\varepsilon_2 = 0, \quad d\varepsilon_3 = -a d\lambda \qquad (d\lambda > 0). \tag{55}$$

Данные выше равенства позволяют упорядочить главные приращения деформации $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$, $d\varepsilon_3$ в виде убывающей последовательности

$$d\varepsilon_1 > 0, \quad d\varepsilon_2 = 0, \quad d\varepsilon_3 < 0, \tag{56}$$

т.е. второй главной оси тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$ (а в силу изотропии также и второй главной оси тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$) будет соответствовать промежуточное главное приращение деформации $d\varepsilon_2 = 0$. Таким образом, убывающей последовательности главных напряжений отвечает убывающая последовательность главных приращений деформации.

На основании (55) без труда устанавливается, что течение среды Кулона—Мора является необратимо сжимаемым:

$$\mathrm{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}) = (1 - a)d\lambda > 0 \qquad (0 < a < 1). \tag{57}$$

Более того, дилатация (точнее, ее приращение $\mathrm{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon})$) оказывается всегда положительной (кроме случая, когда $a = 1$, т.е. когда среда Кулона—Мора вырождается в идеально пластическую среду без внутреннего трения, подчиняющуюся критерию текучести Треска). Поэтому среда Кулона—Мора разве лишь разрыхляется в процессе течения.

В силу (56) формула (47) упрощается до

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)\mathrm{sym}\,({}^{\backprime\backprime}\mathbf{l} \otimes {}^{\backprime\backprime}\mathbf{n}); \tag{58}$$

можно также показать, что дилатация континуума Кулона—Мора определяется соотношениями

$$\frac{\mathrm{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon})}{\cos{}^{\backprime\backprime}\iota} = \frac{d\varepsilon_1 + d\varepsilon_3}{\cos{}^{\backprime\backprime}\iota} = d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3, \tag{59}$$

откуда сразу же можно заключить, что

$$\cos{}^{\backprime\backprime}\iota = \frac{d\varepsilon_1 + d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}. \tag{60}$$

Соотношения для мгновенных удлинений и сдвигов (51), (52) также упрощаются:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{m}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot\mathbf{m}=0,\\
&{}''\mathbf{l}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot{}''\mathbf{l}=0,\\
&{}''\mathbf{n}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot{}''\mathbf{n}=0;
\end{aligned}
\tag{61}
$$

$$
\begin{aligned}
&{}''\mathbf{l}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot\mathbf{m}=0,\\
&{}''\mathbf{n}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot\mathbf{m}=0,\\
&{}''\mathbf{l}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot{}''\mathbf{n}={}''\mathbf{n}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot{}''\mathbf{l}=\frac{d\varepsilon_1-d\varepsilon_3}{2}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-{}^{\backprime\backprime}\iota\right).
\end{aligned}
\tag{62}
$$

Пользуясь вторым и третьим равенствами в (61), сразу же приходим к выводу о том что в процессе течения сред Кулона—Мора линейные элементы, перпендикулярные направлениям асимптотических директоров ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{l}$, ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{n}$, не претерпевают мгновенных удлинений, т.е. материальные волокна, ориентированные вдоль директоров ${}''\mathbf{l}$, ${}''\mathbf{n}$, мгновенно не удлиняются и не укорачиваются. То же самое на основании первого равенства в (61) справедливо и для волокон, направленных вдоль второй главной оси тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$. Следовательно, мгновенная деформация трехмерного элемента с ребрами, ориентированными вдоль директоров ${}''\mathbf{l}$, ${}''\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$, представляет собой сдвиг в плоскости, ортогональной собственному вектору $\mathbf{m}$. Таким образом, в случае сред Кулона—Мора для векторов ${}''\mathbf{l}$, ${}''\mathbf{n}$ оправданным будет термин „мгновенно нерастяжимые директоры“.

Если $a\to 1$, т.е. когда критерий Кулона—Мора сводится к критерию текучести Треска, асимптотические директоры становятся взаимно ортогональными, то же самое можно сказать и о мгновенно нерастяжимых директорах ${}''\mathbf{l}$, ${}''\mathbf{n}$, более того, асимптотические направления совпадают с направлениями мгновенно нерастяжимых волокон, течение приобретает свойство несжимаемости, и инкремент тензора деформации представляется простой формулой

$$
d\boldsymbol{\varepsilon}=(d\varepsilon_1-d\varepsilon_3)\mathrm{sym}\,({}''\mathbf{l}\otimes{}''\mathbf{n})=(d\varepsilon_1-d\varepsilon_3)\mathrm{sym}\,({}^{\backprime\backprime}\mathbf{l}\otimes{}^{\backprime\backprime}\mathbf{n}),
\tag{63}
$$

на основании которой устанавливается, что плоский элемент, ортогональный промежуточной главной оси приращения тензора деформации и с ориентированными вдоль направлений, делящих точно пополам угол между двумя другими главными направлениями приращения тензора деформации, сторонами, испытывает лишь мгновенную деформацию сдвига.

Для инкремента тензора деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}$ справедливо следующее диадное представление в терминах мгновенно нерастяжимых директоров:

$$
\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{d\varepsilon_1-d\varepsilon_3}=\frac{\cos{}^{\backprime\backprime}\iota}{\sin^2{}^{\backprime\backprime}\iota}({}''\mathbf{l}\otimes{}''\mathbf{l}+{}''\mathbf{n}\otimes{}''\mathbf{n})+\frac{1+\cos^2{}^{\backprime\backprime}\iota}{\sin^2{}^{\backprime\backprime}\iota}\mathrm{sym}\,({}''\mathbf{l}\otimes{}''\mathbf{n}).
\tag{64}
$$

Действительно, в силу $d\varepsilon_2=0$ для диадного представления тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$ необходимы только диады, образованные мгновенно нерастяжимыми директорами ${}''\mathbf{l}$, ${}''\mathbf{n}$, поэтому справедливо следующее разложение с неопределенными пока коэффициентами dl, dh, $d\gamma$:

$$
d\boldsymbol{\varepsilon}=(dl){}''\mathbf{l}\otimes{}''\mathbf{l}+(dh){}''\mathbf{n}\otimes{}''\mathbf{n}+\frac{1}{2}(d\gamma){}''\mathbf{l}\otimes{}''\mathbf{n}+\frac{1}{2}(d\gamma){}''\mathbf{n}\otimes{}''\mathbf{l}.
\tag{65}
$$

Подсчитывая далее мгновенные удлинения и сдвиги, находим

$$\begin{aligned}
&{}''\mathbf{l}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot{}''\mathbf{l} = dl + \cos^2{}^{\backprime\backprime}\iota dh - \cos{}^{\backprime\backprime}\iota d\gamma,\\
&{}''\mathbf{n}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot{}''\mathbf{n} = \cos^2{}^{\backprime\backprime}\iota dl + dh - \cos{}^{\backprime\backprime}\iota d\gamma,\\
&{}''\mathbf{l}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot{}''\mathbf{n} = -\cos{}^{\backprime\backprime}\iota(dl+dh) + \frac{1+\cos^2{}^{\backprime\backprime}\iota}{2}d\gamma.
\end{aligned} \tag{66}$$

С другой стороны, те же самые величины уже были вычислены раньше (см. (61), (62)), следовательно, неопределенные коэффициенты dl, dh, $d\gamma$ связываются между собой приводимыми ниже уравнениями:

$$\begin{aligned}
&dl + \cos^2{}^{\backprime\backprime}\iota dh - \cos{}^{\backprime\backprime}\iota d\gamma = 0,\\
&\cos^2{}^{\backprime\backprime}\iota dl + dh - \cos{}^{\backprime\backprime}\iota d\gamma = 0,\\
&-\cos{}^{\backprime\backprime}\iota(dl+dh) + \frac{1+\cos^2{}^{\backprime\backprime}\iota}{2}d\gamma = \frac{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{2}\sin^2{}^{\backprime\backprime}\iota.
\end{aligned} \tag{67}$$

Из этой системы уравнений можно найти следующие значения для неопределенных коэффициентов dl, dh, $d\gamma$:

$$\begin{aligned}
&dl = dh = \frac{\cos{}^{\backprime\backprime}\iota}{\sin^2{}^{\backprime\backprime}\iota}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3),\\
&d\gamma = \frac{1+\cos^2{}^{\backprime\backprime}\iota}{\sin^2{}^{\backprime\backprime}\iota}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3).
\end{aligned} \tag{68}$$

Подставляя (68) в (65), приходим к диадному представлению (64).

В терминах приращений перемещений полная кинематическая картина сжимаемых течений сред Кулона—Мора в предельном состоянии без труда строится на основе данных представлений об асимптотических направлениях и о мгновенно нерастяжимых линейных элементах. В частности, в двумерных задачах можно достаточно просто получить соотношения для приращений перемещений $d\mathbf{u}$ вдоль линий, касающихся мгновенно нерастяжимых директоров. В плоских течениях мгновенно нерастяжимые директоры будут одновременно указывать характеристические направления системы дифференциальных уравнений кинематики.

Рассмотрим далее вопрос о равенстве углов ${}^{\backprime}\iota$ и ${}^{\backprime\backprime}\iota$, определяющих ориентации асимптотических директоров тензора напряжений и приращения тензора деформации соответственно. A priori мы не можем утверждать, что они равны. Равенство ${}^{\backprime}\iota = {}^{\backprime\backprime}\iota$ означает, что асимптотические директоры тензора напряжений и приращения тензора деформации ориентированы одинаково и равны параметры Лоде (см. (10) и (49))

$$\frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3};$$

при этом убывающим значениям главных напряжений (2) должны соответствовать убывающие значения главных приращений деформации (46). Они связываются ассоциированным законом течения и в общем случае продемонстрировать равенство параметров Лоде не удается. Эта важная и интересная проблема в „старых“ теориях пластичности (см., например, [6–8]), не основанных явно на ассоциированном законе течения, решалась весьма своеобразно. Так, в главе XVI монографии [7] равенство параметров Лоде (10) и (49) формулируется как „третий закон пластичности“

с указанием на подобие главных кругов Мора для напряжений и приращений деформаций.[3] Далее (глава XVII, с. 281) отмечается без дополнительной аргументации, что, несмотря на наблюдаемое в эксперименте отклонение, введение третьего закона пластичности является оправданным. Можно показать, что вопрос о равенстве (или отклонении друг от друга) параметров Лоде решается на основе оценки величины „промежуточного“ главного нормального напряжения.

5. Исследование кинематического ограничения, накладываемого ассоциированным законом течения.

Ассоциированный закон течения (54) с функцией текучести (40) устанавливает кинематическое ограничение на второе главное приращение деформации

$$d\varepsilon_2 = 0, \tag{69}$$

которое должно выполняться для всех пространственных течений среды Кулона—Мора, находящейся на пределе текучести (39). Ясно, что при выполнении условия текучести (39) оно эквивалентно ограничению на главные напряжения

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_2} = 0. \tag{70}$$

Ограничение (70) заведомо выполняется для функции текучести (40), однако такое простое выражение для f подразумевает, что уже известно, что второе главное напряжение σ_2 является промежуточным. Пока *нет никаких* сведений о величине главного напряжения σ_2 лучше всего при анализе ограничения (70) воспользоваться симметризованной формой функции текучести, которая никак не связана со специальной нумерацией главных осей тензора напряжений и представляет собой произведение трех функций текучести:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = h_1 h_2 h_3, \tag{71}$$

где

$$\begin{aligned} h_1 &= (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - [g + \mathit{\Gamma}(\sigma_2 + \sigma_3)]^2, \\ h_2 &= (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - [g + \mathit{\Gamma}(\sigma_1 + \sigma_3)]^2, \\ h_3 &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - [g + \mathit{\Gamma}(\sigma_1 + \sigma_2)]^2; \\ g &= 2c\cos\gamma, \quad \mathit{\Gamma} = -\sin\gamma. \end{aligned}$$

При дифференцировании симметризованной функции текучести (71) по переменной σ_2 получается общий множитель

$$h_2 = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - [g + \mathit{\Gamma}(\sigma_1 + \sigma_3)]^2,$$

[3] Двухтомная монография [7–8] в научной литературе по механике деформируемого твердого тела считается наиболее широкой по замыслу и вместе с тем доступной по изложению. Формулировка законов текучести в первом томе указанного сочинения не следует современной схеме, опирающейся на ассоциированный с условием пластичности закон течения. Достаточными признаются три закона (см. [7, с. 260]): 1) одна и та же ориентация в пространстве главных осей тензора напряжений и приращения тензора деформации; 2) несжимаемость пластического течения; 3) пропорциональность скорости сдвига касательным напряжениям. Наиболее уязвимым здесь является „второй закон пластичности“. Он, например, нарушается для течений сред Кулона—Мора. Теории сред Кулона—Мора целиком посвящена глава 15 второго тома монографии [8]. Условие несжимаемости течения явно включается в теорию (см. [8, с. 560]). Таким образом, законы пластичности [7, 8] оказываются несовместимыми с теорией сред Кулона—Мора, основанной на ассоциированном законе течения.

в который главное напряжение σ_2 не входит. Однако считать ограничение (70) выполненным за счет выполнения „условия текучести“

$$(\sigma_1-\sigma_3)^2-[g+\mathit{\Gamma}(\sigma_1+\sigma_3)]^2=0 \tag{72}$$

неприемлемо, поскольку (72) на самом деле условием текучести не является пока не установлены неравенства (2). Следовательно, ограничение (70) будет выполняться не в силу „условия текучести“, а в силу равенства нулю оставшегося сомножителя

$$\begin{gathered}[(\sigma_2-\sigma_3)-\mathit{\Gamma}[g+\mathit{\Gamma}(\sigma_2+\sigma_3)]]\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2-[g+\mathit{\Gamma}(\sigma_1+\sigma_2)]^2\right]+\\ +\left[(\sigma_2-\sigma_3)^2-[g+\mathit{\Gamma}(\sigma_2+\sigma_3)]^2\right][(\sigma_2-\sigma_1)-\mathit{\Gamma}[g+\mathit{\Gamma}(\sigma_1+\sigma_2)]]=0.\end{gathered} \tag{73}$$

Равенство (73) естественно рассматривать как уравнение для определения второго главного напряжения σ_2 и последующего доказательства того, что оно в действительности будет промежуточным.

В результате достаточно длинной цепи алгебраических преобразований уравнение (73) можно привести к следующему виду:

$$A_3\alpha^3+A_2\alpha^2+A_1\alpha+A_0=0, \tag{74}$$

где коэффициенты кубического полинома определяются формулами

$$\begin{aligned}&A_0=2\omega^4,\\ &A_1=-3\varsigma^2-4\mathit{\Gamma}\omega^2 d,\\ &A_2=1+2\frac{2\varsigma^4-\omega^4}{l}-2\omega^2d^2+4\mathit{\Gamma}^2d^2-2\mathit{\Gamma}d(1-\varsigma^2\omega^{-2}),\\ &A_3=2\mathit{\Gamma}d^3-\varsigma^2l^{-1}+d^2\omega^{-2}(\varsigma^2+2\mathit{\Gamma}^2)+4\mathit{\Gamma}\varsigma^2dl^{-1};\end{aligned}$$

g, $\mathit{\Gamma}$, $\omega^2=1-\mathit{\Gamma}^2$, $\varsigma^2=1+\mathit{\Gamma}^2$ — материальные постоянные;

$$\alpha=\omega^2\frac{\sigma_1+\sigma_3}{\sigma_2},\quad l=\omega^4\frac{(\sigma_1+\sigma_3)^2}{\sigma_1\sigma_3},\quad d=\frac{g}{\omega^2(\sigma_1+\sigma_3)}.$$

Если рассматривать (74) как кубическое алгебраическое уравнение относительно переменной α, то формально значение α определяется в зависимости от переменных l и d ($\alpha=\alpha(l,d)$) и тем самым решается вопрос о величине главного напряжения σ_2.

Идеально пластическое тело Кулона—Треска является предельным случаем рассматриваемой модели ($\gamma\to 0$), который характеризуется следующими значениями определяющих постоянных (k — предел текучести при чистом сдвиге):

$$\mathit{\Gamma}=0,\quad g=2k,\quad \omega^2=1,\quad \varsigma^2=1.$$

Для переменных α, l и d в уравнении (74) при этом находятся более простые выражения

$$\alpha=\frac{\sigma_1+\sigma_3}{\sigma_2},\quad l=\frac{(\sigma_1+\sigma_3)^2}{\sigma_1\sigma_3},\quad d=\frac{2k}{\sigma_1+\sigma_3},$$

а само уравнение (74) приобретает существенно более обозримый вид

$$(d^2-l^{-1})\alpha^3+(1+2l^{-1}-2d^2)\alpha^2-3\alpha+2=0. \tag{75}$$

Это кубическое уравнение, к счастью, легко поддается решению; оно имеет три вещественных корня

$$\alpha=2,\quad \alpha=\frac{-1+\sqrt{1+4Z}}{2Z},\quad \alpha=\frac{-1-\sqrt{1+4Z}}{2Z};\qquad Z=\frac{4k^2-\sigma_1\sigma_3}{(\sigma_1+\sigma_3)^2}.$$

Первый из них (никак не связанный с величинами l и d) соответствует промежуточному главному напряжению, равному точно медианному значению „крайних“ главных напряжений:

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}.$$

Таким образом, в теории Кулона—Треска кинематическое ограничение (69) удовлетворяется специальной (точно медианной) зависимостью главного напряжения σ_2 от „крайних“ главных напряжений σ_1, σ_3. Помимо всего прочего, данный результат обеспечивает дополнительный аргумент в пользу корректности трехмерной теории течения, основанной на критерии текучести Кулона—Треска. То же самое относится и к теории плоского деформированного состояния (в плане корректности вывода двумерных уравнений из трехмерной постановки): в этом случае „внеплоское“ главное напряжение σ_2 оказывается точно медианным.

Рассмотрим далее случай идеально сыпучей среды Мора (отсутствует сцепление между зернами, $c \to 0$). Уравнение (74) при этом несколько упрощается в силу $d \to 0$ и его можно привести к виду

$$\varsigma^2\alpha^3 - [l + 2(2\varsigma^4 - \omega^4)]\alpha^2 + 3\varsigma^2 l\alpha - 2\omega^4 l = 0, \tag{76}$$

где

$$\alpha = \omega^2\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{\sigma_2}, \quad l = \omega^4\frac{(\sigma_1 + \sigma_3)^2}{\sigma_1\sigma_3}, \quad \omega^2 = 1 - \mathit{\Gamma}^2, \quad \varsigma^2 = 1 + \mathit{\Gamma}^2, \quad \mathit{\Gamma} = -\sin\gamma.$$

Уравнение (76) должно позволить определить зависимость второго главного напряжения от первого и третьего в форме зависимости: $\alpha = \alpha(l)$.

На комплексной плоскости рассмотрим алгебраическое кубическое уравнение[4]

$$e_0\alpha^3 + e_1\alpha^2 + e_2\alpha + e_3 = 0. \tag{77}$$

Разделим это уравнение на коэффициент e_0 и выполним подстановку

$$\alpha = \alpha' - \frac{e_1}{3e_0}.$$

В результате приходим к „неполному“ кубическому уравнению

$$\begin{gathered} \alpha'^3 + e_2'\alpha' + e_3' = 0, \\ e_2' = \frac{e_2}{e_0} - \frac{e_1^2}{3e_0^2}, \\ e_3' = \frac{2e_1^3}{27e_0^3} - \frac{e_1e_2}{3e_0^2} + \frac{e_3}{e_0}. \end{gathered} \tag{78}$$

Дискриминант неполного кубического уравнения определяется согласно

$$d = -27e_3'^2 - 4e_2'^3$$

и следующим образом вычисляется в терминах коэффициентов исходного кубического уравнения (77):

$$d = E_1^2E_2^2 - 4E_1^3E_3 - 27E_3^2 - 4E_2^3 + 18E_1E_2E_3, \tag{79}$$

[4]Теория кубического уравнения с необходимой полнотой изложена, например, в классическом руководстве [11, с. 211-217].

где

$$E_j = \frac{e_j}{e_0} \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Формальные корни неполного кубического уравнения (78) находятся с помощью формулы Кардано в виде суммы двух кубических радикалов (в дальнейшем они будут обозначаться через λ и μ)

$$\alpha' = \sqrt[3]{-\frac{e_3'}{2} + \sqrt{-\frac{d}{4 \cdot 27}}} + \sqrt[3]{-\frac{e_3'}{2} - \sqrt{-\frac{d}{4 \cdot 27}}}, \tag{80}$$

подразумевая оперирование с кубическими радикалами из комплексных чисел. Кубический радикал из комплексного числа z имеет три значения; если найдено одно $\sqrt[3]{z} = \xi$, то два других будут равны $\varepsilon\xi$, $\varepsilon^2\xi$, где

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Поэтому формула Кардано (80) при всех возможных интерпретациях входящих в нее двух кубических радикалов дает девять значений, шесть из которых отбрасываются, рассматривая условие того, что произведение входящих в (80) кубических радикалов должно быть равно $-\dfrac{1}{3}e_2'$. Если в формуле (80) найдена комбинация кубических радикалов $\alpha' = \lambda + \mu$ с $\lambda\mu = -\dfrac{1}{3}e_2'$, то сама указанная комбинация есть корень уравнения (78), а два других корня будут иметь значения $\alpha' = \varepsilon\lambda + \varepsilon^2\mu$, $\alpha' = \varepsilon^2\lambda + \varepsilon\mu$. При отличном от нуля дискриминанте все три корня неполного кубического уравнения различны.

В том случае, когда все коэффициенты кубического уравнения (77) вещественны, по знаку дискриминанта уравнения (79) различаются следующие три ситуации:

(1) $d = 0$, все корни уравнения (78) вещественны; корнями являются отношения $\dfrac{3e_3'}{e_2'}$ и $-\dfrac{3e_3'}{2e_2'}$ (двукратный корень);

(2) $d < 0$, под знаками каубических радикалов в (80) будут находится вещественные величины, следовательно, кубические радикалы λ, μ можно взять вещественными; один корень уравнения (78) вещественный $\alpha' = \lambda + \mu$, а два оставшихся корня

$$\alpha' = -\frac{\lambda + \mu}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(\lambda - \mu), \quad \alpha' = -\frac{\lambda + \mu}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(\lambda - \mu)$$

комплексно сопряжены;

(3) $d > 0$, кубические радикалы λ, μ комплексно сопряжены; пары $\varepsilon\lambda$, $\varepsilon^2\mu$ и $\varepsilon^2\lambda$, $\varepsilon\mu$ также комплексно сопряжены; все корни уравнения (78) вещественны и равны $2\Re\lambda$, $-\Re\lambda - \sqrt{3}\Im\lambda$, $-\Re\lambda + \sqrt{3}\Im\lambda$.

Все сказанное в применении к кубическому уравнению (76) позволяет найти его решения в форме (80) со значениями

$$27\varsigma^6 e_3' = -2[l + 2(2\varsigma^4 - \omega^4)]^3 + 27\varsigma^2[l + 2(2\varsigma^4 - \omega^4)] - 54\varsigma^4\omega^4,$$

$$\varsigma^8 d = 9\varsigma^4[l + 2(2\varsigma^4 - \omega^4)]^2 - 8\omega^4[l + 2(2\varsigma^4 - \omega^4)]^3 - 108\omega^8\varsigma^8 -$$
$$- 36\varsigma^{12} + 108\varsigma^4\omega^4[l + 2(2\varsigma^4 - \omega^4)].$$

6. Основные результаты выводы.

Предложено представление об асимптотических директорах симметричного тензора напряжений и приращения тензора деформации, а также об ортогональных им направлениях (определяющих ориентацию мгновенно нерастяжимых директоров), расположенных в плоскости ортогональной главной оси приращения тензора деформации, соответствующей промежуточному главному приращению деформации.

Развита новая схема моделирования сжимаемых течений сред Кулона—Мора и обобщенных пластических тел Прандтля, основанная на представлении об асимптотических направлениях тензора напряжений и приращения тензора деформации.

В асимптотических осях получены канонические диадные представления для тензора напряжений и приращения тензора деформации.

Получены различные (симметризованный и несимметризованный) варианты представления критерия текучести Кулона—Мора в терминах главных нормальных напряжений и соответствующие формулировки ассоциированного закона течения.

Проанализированы уравнения ассоциированного закона течения, которые затем использованы при изучении кинематики необратимого течения.

В процессе течения сред Кулона—Мора материальные волокна, ориентированные вдоль ортогональных асимптотическим директорам направлений, мгновенно не удлиняются и не укорачиваются.

Приращение дилатации всегда положительно (кроме случая, когда среда Кулона—Мора вырождается в идеально пластическую среду без внутреннего трения, подчиняющуюся критерию текучести Треска).

Кинематическое ограничение, накладываемое на процессы течения ассоциированным законом течения, трактуется как условие, позволяющее определить величину промежуточного главного напряжения (внеплоского главного напряжения в случае плоского деформированного состояния), которое не входит в формулировку критерия Кулона—Мора.

В теории Кулона—Треска кинематическое ограничение удовлетворяется специальной (точно медианной) зависимостью главного напряжения от крайних главных напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Прагер В. Введение в механику сплошных сред. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963. 312 с.

[2] Ильюшин А.А. Пластичность. Часть первая. Упруго-пластические деформации. М.: Гостехтеоретиздат, 1948. 376 с.

[3] Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.

[4] Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.

[5] Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.

[6] Надаи А. Пластичность. Механика пластического состояния вещества. М., Л.: ОНТИ, 1936. 280 с.

[7] Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1954. 648 с.

[8] Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Мир, 1969. 864 с.

[9] Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. 240 с.

[10] Радаев Ю.Н. Асимптотические оси тензоров напряжений и приращения деформации в механике сжимаемых континуумов// Изв. РАН. Мех. тверд тела. 2013. №5. С. 77-85.

[11] Сушкевич А.К. Основы высшей алгебры. М., Л.: ОНТИ, 1937. 476 с.

Y. N. Radayev

ON THE THEORY OF THE COULOMB–MOHR MEDIA AND GENERALIZED PRANDTL PLASTIC SOLIDS

Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. Three-dimensional flows of perfectly plastic medium are considered within the framework of the Coulomb–Mohr continuum model. The model is to be used in applied problems related to limit states and flows of sands, rocks and any other kind of granular media. A generalization of the Coulomb–Mohr continuum model due to L. Pandtl is discussed. The present study is based on a notion of asymptotic directions of the stress tensor and the strain tensor increment and as well on instantaneously not elongated directors which are orthogonal to the asymptotic directions and lie in the plane normal to the intermediate principal stress axis. By making use of mechanical sense of asymptotic directions the canonical dyadic representations of the stress tensor and the strain tensor increment are obtained. The associated flow rule are discussed and applied to study of three-dimensional irreversible kinematics of the Coulomb–Mohr media. It is shown that the dilatation rate is always positive excepting the case of zero internal friction. Orientations of the instantaneously not elongated linear material elements are found. The strain tensor increment represented in three dimensions by means of the instantaneously not elongated directors is obtained. A kinematical constraint to three-dimensional flows of the Coulomb–Mohr media imposed by the associated flow rule is discussed. The constraint is to be treated as an equation to determine the intermediate principal stress not involved in the formulation of the Coulomb–Mohr limit state condition. The intermediate principal stress is proved to be the exactly median principal stress for the media with zero internal friction.

Keywords: Coulomb–Mohr medium, Prandtl plastic solid, principal stress, asymptotic directors, cohesion, internal friction, associated flow rule

REFERENCES

[1] Prager V. Vvedenie v mekhaniku sploshnyh sred. M.: Izd-vo inostr. lit-ry, 1963. 312 s. (in Russian)

[2] Il'yushin A.A. Plastichnost'. CHast' pervaya. Uprugo-plasticheskie deformacii. M.: Gostekhteoretizdat, 1948. 376 s. (in Russian)

[3] Sokolovskij V.V. Teoriya plastichnosti. M.: Vyssh. shk., 1969. 608 s. (in Russian)

[4] Kachanov L.M. Osnovy teorii plastichnosti. M.: Nauka, 1969. 420 s. (in Russian)

[5] Ivlev D.D. Teoriya ideal'noj plastichnosti. M.: Nauka, 1966. 232 s. (in Russian)

[6] Nadai A. Plastichnost'. Mekhanika plasticheskogo sostoyaniya veshchestva. M., L.: ONTI, 1936. 280 s. (in Russian)

[7] Nadai A. Plastichnost' i razrushenie tverdyh tel. T. 1. M.: Izd-vo inostr. lit-ry, 1954. 648 s. (in Russian)

Radayev Yuri Nickolaevich

`e-mail:` radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Researcher, Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia.

[8] Nadai A. Plastichnost' i razrushenie tverdyh tel. T. 2. M.: Mir, 1969. 864 s. (in Russian)

[9] Radaev YU.N. Prostranstvennaya zadacha matematicheskoj teorii plastichnosti. Samara: Izd-vo Samarskogo gos. universiteta, 2006. 240 s. (in Russian)

[10] Radaev YU.N. Asimptoticheskie osi tenzorov napryazhenij i prirashcheniya deformacii v mekhanike szhimaemyh kontinuumov// Izv. RAN. Mekh. tverd tela. 2013. №5. S. 77-85. (in Russian)

[11] Sushkevich A.K. Osnovy vysshej algebry. M., L.: ONTI, 1937. 476 s. (in Russian)