

Ю. В. Немировский

## ПРЕДЕЛЬНАЯ ДОЛГОВЕЧНОСТЬ ГИБРИДНЫХ ФЕРМЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,  
г. Новосибирск, Россия*

**Аннотация.** На основе идеи построения и использования изохронных кривых деформирования образцов однородных материалов при длительном нагружении с учетом возможной деградации со временем свойств материалов, разработана схема прогнозирования долговечности гибридных стержней составленных из набора различных материалов. Схема использована для получения предельной долговечности гибридных ферменных конструкций из набора различных материалов.

**Ключевые слова:** гибридные стержни, гибридные ферменные конструкции, долговечность эксплуатации, длительная прочность, ползучесть, теория старения, изохронные кривые деформирования, предельно допустимые деформации, предельно допустимая долговечность, усилия, перемещения, деформации.

УДК: 539.374

**Введение.** Большинство ферменных конструкций предназначены для эксплуатации в течение длительного времени при заданном уровне внешних нагрузок и температур. Вследствии влияния случайных, неучтенных отклонений составов поликристаллических фазовых структур конструкционных металлов и сплавов, наличия дефектов и микропор, их физико-механического и химического взаимодействия при механических и тепловых нагружениях свойства образцов конструкционных материалов со временем изменяются (материалы «стареют»).

---

© Немировский Ю. В., 2018  
*Немировский Юрий Владимирович*  
e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Кабинета Министров Чувашской Республики в рамках научного проекта № 17-41-210272.

Поступила 01.10.2018

В результате при одинаковых условиях термосиловых воздействий образцы одного и того же конструкционного материала показывают в разные времена различное сопротивление. Изучению закономерностей взаимодействия полей напряжений, деформаций и температур в процессе деградации свойств материалов со временем посвящены многочисленные исследования, которые объединены в новое активно развивающееся направление в механике деформируемого твердого тела – теорию ползучести однородных тел и конструкций [1,2-12].

На сегодняшний день не существует однозначно признанной общей теории ползучести описывающей совместное взаимное влияние напряжений, деформаций, скоростей деформаций, деформаций и времени в широком диапазоне их изменений. Имеются разработки технических (инженерных, феноменологических) теорий ползучести, которые выделяют лишь некоторые из перечисленных переменных и высказаны предположения о возможных функциональных зависимостях между ними.

Из широко известных технических теорий ползучести при практических расчетах чаще всего используются три: теория старения, теория течения и теория упрочнения [2-12].

В рамках этих теорий конструкционные материалы рассматриваются как сплошные среды, а происходящие в них процессы, приводящие в конечном итоге к разрушению, описываются с помощью понятий тензоров напряжений и деформаций, векторов сил и перемещений, времени, температуры, энергии, накапливаемой или расходуемой в материале со временем в результате необратимых процессов деформирования. На основе такого подхода разрабатываются и предлагаются различные критерии кратковременной и длительной прочности, устойчивости деформационных процессов, которые затем находят практическое воплощение в расчетной практике отраслевых организаций. При этом для отраслевых организаций одним из важнейших вопросов является прогнозирование надежной долговечности конструкций при заданном режиме их эксплуатации. В последние годы эта проблема остро возникает в строительной индустрии при создании уникальных сооружений дорогостоящих объектов и при массовых застройках гражданских сооружений. Решение этой проблемы теснейшим образом связано с задачей снижения расходов конструкционных материалов при сохранении и повышении эксплуатационной надежности проектируемых объектов. Решение вопросов прогнозирования длительной прочности даже для однородных конструктивных элементов вызывает серьезные трудности [2, 3, 5-10, 13-14], как с расчетной точки зрения, так и с точки зрения получаемых для проверки теоретических расчетов с надежными экспериментальными данными, снимаемыми регулярно с испытуемых образцов в течение длительного времени (десятки и сотни тысяч часов). Поэтому при использовании теорий ползучести для прогнозирования обычно считается приемлимым вследствие ползучести достаточно большой разброс экспериментальных характеристик и предпочтение отдается тому варианту теории ползучести, который позволяет относительно малыми средствами решать большое количество разнообразных задач [2, 3, 5, 10].

Разнообразные повышенные эксплуатационные и экономические и ресурсные требования для однородных материалов уже при начальном нагружении соответствующих однородных образцов приближают их к предельным возможностям эксплуатации и следовательно делают непригодными или опасно пригодными для эксплуатации в течение длительного времени. В настоящее время достаточно интенсивно

при кратковременных нагрузениях расширяются области применения структурно-неоднородных (гибридных) конструкций, что объясняется их высокой эффективностью по сравнению с традиционными однородными системами [20, 21].

Некоторые расчеты показывают, что и при длительных нагрузениях гибридные рамные стержневые конструкции являются более эффективными, чем однородные. Это в полной мере относится и к ферменным конструкциям, в которых каждый из стержней может формироваться из набора различных конструкционных материалов и иметь различные формы поперечных сечений (рис. 1 а, б, в, г).

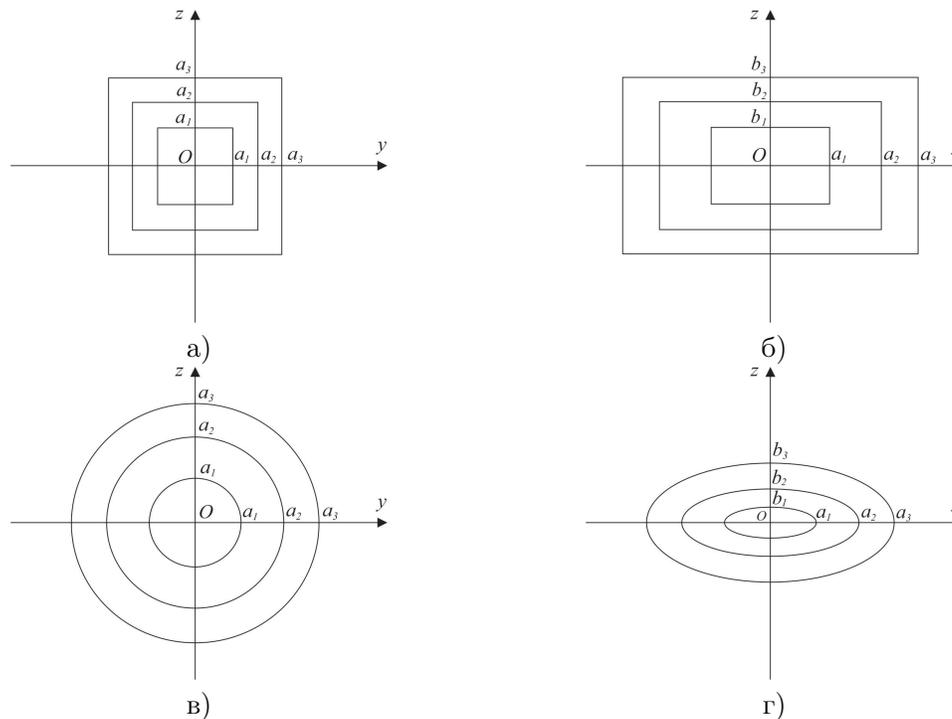


Рис. 1. Формы поперечных сечений стержней.

### 1. Однородный и гибридный ферменный стержень.

Традиционно при расчете ферменных конструкций материал каждого стержня одинаков и одинаково сопротивляется растяжению и сжатию. Это означает, что мгновенная диаграмма в плоскости  $\sigma \sim \varepsilon$  является нечетной функцией

$$\sigma = f(\varepsilon). \tag{1}$$

Если отбросить участок неустойчивого процесса разупрочнения из-за недостоверности экспериментальных замеров, то зависимость (1) при растяжении образца следует рассматривать на отрезке  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^+$ , где  $\varepsilon^+$  – предельно допустимая деформация при напряжении соответствующем пределу прочности  $\sigma^*$ . Здесь и далее при рассмотрении ферменных конструкций будем для простоты считать температуру комфортно-нормальной для всех материалов и незначительными температурными эффектами будем пренебрегать.

При рассмотрении длительных процессов воспользуемся теорией старения, для которой связь между напряжением  $\sigma$ , деформацией  $\varepsilon$  и временем  $t$  можно представить в форме

$$\sigma = \Phi(\varepsilon, t), \quad (2)$$

где  $t$  – параметр.

Это допущение эквивалентно предположению о существовании некоторой поверхности состояния в пространстве  $\sigma, \varepsilon, t$ . Рассекая эту поверхность плоскостями  $t = t_1, t = t_2, \dots$ , будем получать изохронные кривые деформирования

$$\sigma(t_i) = \varphi_i[\varepsilon(t_i)], \quad i = 1, 2, \dots$$

Для одинаково сопротивляющихся растяжению-сжатию материалов функции  $\varphi_i[\varepsilon(t_i)]$  должны быть нечетными. Тогда предполагая подобие их аппроксимаций для произвольного времени  $t$  можем принять, например

$$\sigma(t) = A(t)\varepsilon(t) + B(t)\varepsilon^3(t). \quad (3)$$

При этом должны выполняться условия

$$\left. \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon^*} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=\varepsilon^*} < 0,$$

$$\sigma^* = A_1 \varepsilon^* + B_1 (\varepsilon^*)^3, \quad B_1 < 0, \quad A_1 > 0.$$

Отсюда

$$\sigma^* = \frac{2}{3} A_1 \varepsilon^*, \quad B_1 = -\frac{\sigma^*}{2(\varepsilon^*)^3}. \quad (4)$$

Таким образом, основной характеристикой длительной прочности выступает для данного материала предельно допустимая деформация  $\varepsilon^*$ , которая может быть определена путем обработки изохронных кривых длительных испытаний для данного материала.

Для гибридного стержня, составленного из нескольких материалов, растягивающее усилие равно

$$N = \sum_{j=1}^{\ell} \sigma_j F_j,$$

где  $F_j$  – площадь сечения  $j$ -го фазового материала.

Если для всех фазовых материалов принять закон деформирования типа (3), считая, что коэффициенты  $A(t), B(t)$  заранее определены путем обработки изохронных кривых деформирования соответствующих материалов, то учитывая свойство совместности деформаций гибридного стержня,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_\ell = \varepsilon, \quad (5)$$

для усилия в стержне будем иметь

$$N = C\varepsilon + D\varepsilon^3, \quad (6)$$

$$C = \left( \sum_j A_j F_j \right), \quad D = \left( \sum_j B_j F_j \right), \quad C > 0, D < 0.$$

Тогда для деформации стержня получим уравнение

$$\varepsilon^3 + 3p\varepsilon + 2q = 0, \quad (7)$$

$$p = \frac{C}{3D}, \quad q = -\frac{N}{2D}, \quad p < 0, \quad q > 0.$$

Дискриминант уравнения

$$D = q^2 + p^3 = \frac{1}{4D^2} \left[ N^2 + \frac{4}{27} \frac{C^3}{D} \right]. \quad (8)$$

Действительный корень уравнения (6) равен

$$\varepsilon = U + V, \quad (9)$$

где

$$U = \left[ -q + D^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}, \quad V = \left[ -q - D^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (10)$$

Предельно допустимое состояние стержня реализуется при

$$\varepsilon = \varepsilon^* = \min(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_l^*), \quad (11)$$

и тогда предельно допустимое усилие в стержне будет равно

$$N^* = C\varepsilon^* + D(\varepsilon^*)^3. \quad (12)$$

Если при обработке изохронных диаграмм деформирования определены зависимости предельных деформаций всех фазовых материалов, то при заданном предельном усилии  $N^3$  уравнение (12) позволяет определить долговечность  $t^*$  данного стержня.

В ряде случаев переход материала диаграмм на изохронных кривых деформирования в состоянии разупрочнения может иметь явный перелом. Тогда диаграммы целесообразно аппроксимировать зависимостями

$$\sigma_i = C_i \varepsilon_i^{\frac{1}{3}}, \quad C_i = \frac{\sigma_i^*}{\varepsilon_i^*}. \quad (13)$$

При этом для усилия в гибридном стержне будем иметь выражение

$$N = \left( \sum_i^l C_i F_i \right) \varepsilon^{\frac{1}{3}}, \quad (14)$$

при  $0 \leq |\varepsilon| \leq \varepsilon_k^*$ , а предельно допустимое усилие будет равно

$$N = \left( \sum_i C_i F_i \right) \varepsilon_k^*, \quad (15)$$

$$\varepsilon_k^* = \min(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_l^*).$$

## 2. Плоские гибридные фермы.

Рассмотрим некоторую ферму в плоскости  $(x, y)$ , составленную из гибридных стержней, предназначенную для длительной эксплуатации. Предполагаем, что для каждого из них установлены зависимости типа (6) или (11).

Рассмотрим в декартовой системе координат две точки  $A_k(x_k, y_k)$  и  $A_m(x_m, y_m)$  соединяющие концы стержня  $A_{km}$ . Пусть радиусы-векторы этих точек относительно начала координат, связанного с одним из опорных узлов будут определяться выражениями

$$\vec{r}_k = x_k \vec{i} + y_k \vec{j}, \quad \vec{r}_m = x_m \vec{i} + y_m \vec{j}, \quad (16)$$

а после деформации – выражениями

$$\vec{R}_k = \vec{r}_k + \vec{u}_k, \quad \vec{R}_m = \vec{r}_m + \vec{u}_m, \quad \vec{u}_k = u_k \vec{i} + v_k \vec{j}, \quad \vec{u}_m = u_m \vec{i} + v_m \vec{j}, \quad (17)$$

$\vec{u}_k, \vec{u}_m$  – вектора перемещений точек  $A_k$  и  $A_m$ . Тогда для длины  $L_{km}$ , деформации  $\varepsilon_{km}$  и вектора усилия  $\vec{N}_{km}$  в этом стержне будем иметь [20, 21]

$$L_{km} = [(x_k - x_m)^2 + (y_k - y_m)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (18)$$

$$\varepsilon_{km} = \frac{(\vec{u}_m - \vec{u}_k) \vec{e}_{km}}{L_{km}} = \frac{1}{L_{km}} [(u_m - u_k) \beta_{km} + (v_m - v_k) \delta_{km}],$$

$$\vec{N}_{km} = N_{km} \vec{e}_{km}, \quad \vec{e}_{km} = \beta_{km} \vec{i} + \delta_{km} \vec{j}, \quad \beta_{km} = \frac{x_m - x_k}{L_{km}}, \quad \delta_{km} = \frac{y_m - y_k}{L_{km}}. \quad (19)$$

Усилия  $N_{km}$  в соответствии с (6) или (11) связаны с деформациями зависимостями

$$N_{km} = C_{km} \varepsilon_{km} + D_{km} \varepsilon_{km}^3, \quad (20)$$

$$N_{km} = E_{km} \varepsilon_{km}^{\frac{1}{3}}. \quad (21)$$

Если в узлах с номерами  $s$  заданы внешние усилия  $\vec{P}_s(P_{xs}, P_{ys})$ , то для них должны быть выполнены уравнения равновесия

$$\sum_r \vec{N}_{rs} + \vec{P}_s = 0, \quad (22)$$

здесь точки  $A_r$  – концы стержней, сходящихся в узлах  $s$ . Что касается остальных узлов  $A_r$ , то их перемещения при деформации должны подчиняться определенным уравнениям связей или быть неподвижными. Для статически определимых ферм усилия  $N_{km}$  в стержне  $A_k A_m$ , определяемому путем решения уравнений равновесия (22). После чего из уравнений (20) или (21) можно определить деформации  $\varepsilon_{km}$  и далее, пользуясь системой уравнений (18) при заданных условиях закрепления фермы в некоторых узлах от ее смещения и вращения как твердого тела, можно вычислить перемещения  $u_k, u_m, v_k, v_m$  остальных узлов фермы.

Для статически неопределимых ферм с помощью дополнительных уравнений кинематических связей для замыкания разрешающих систем уравнений, как обычно, должны быть получены дополнительные уравнения совместности деформаций.

Предельно допустимые деформации  $\varepsilon_{km}^*$  для стержня  $A_k A_m$  определяются равенством

$$\varepsilon_{km}^* = \min_j \{(\varepsilon_j^*)_{km}\}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (23)$$

а предельно допустимое усилие в нем будет равно

$$N_{km}^* = C_{km}\varepsilon_{km}^* + D_{km}^* (\varepsilon_{km}^*)^3, \quad (24)$$

или

$$N_{km}^* = E_{km}^* (\varepsilon_{km}^*)^{\frac{1}{3}}. \quad (25)$$

Зависимости (24), (25) при фиксированных значениях узловых нагрузок позволяют определять предельные допустимые значения  $t_{km}^*$  для каждого из стержней. Тогда в качестве оценки времени  $t^*$  рассматриваемой фермы следует принимать значение

$$t^* = \min(t_{km}^*). \quad (26)$$

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Soderberg C. R. The interpretation of creep tests for machine design // Transactions of the ASME. 1936. Vol. 58. No 8. P. 733–743
- [2] Гольденблат И. И., Бажанов В. Л., Копнов В. А. Длительная прочность в машиностроении. Москва : Машиностроение, 1977. 248 с.
- [3] Аршакуни А.Л., Локощенко А.М., Киселевский В.Н., Шестериков С.А. и др. Закономерности ползучести и длительной прочности: Справочник / Под общ. ред. С.А. Шестерикова. М.: Машиностроение, 1983. 101 с.
- [4] Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
- [5] Гарофало Ф. Законы ползучести и длительной прочности металлов и сплавов. М.: Металлургия, 1968. 304 с.
- [6] Качанов Л. М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 456 с.
- [7] Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
- [8] Работнов Ю. Н. Расчет деталей машин на ползучесть // Изв. АН СССР. ОТН. 1948. №6. С. 789–800.
- [9] Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К. и др. Расчёты на прочность в машиностроении. Т. II. Москва: МАШГИЗ, 1958. 974 с.
- [10] Локощенко А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
- [11] Каблов Е. Н., Голубовский Е. Р. Жаропрочность никелевых сплавов. М.: Машиностроение, 1998. 464 с.
- [12] Агахи К. А., Кузнецов В. Н., Локощенко А. М. и др. Моделирование процесса ползучести на основе аппроксимации экспериментальных данных // Машиностроение и инж. образование. 2011. № 2. С. 52–57.
- [13] Аршакуни А. Л., Шестериков С. А. Прогнозирование длительной прочности металлических материалов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1994. № 3. С. 126–141
- [14] Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести [Текст] // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. №8. С. 26–31.
- [15] Немировский Ю. В. О времени эксплуатации и разрушения конструкций в условиях ползучести // Прикладная механика. 1970. Т.6. №3. С. 47–54

[16] Немировский Ю. В. Об определении времени допустимой эксплуатации конструкций в условиях ползучести // Динамика сплошной среды .Вып. 119. Современные проблемы механики деформируемого твердого тела: Сб. статей / РАН. Сиб. отделение. Ин-т гидродинамики. № 119. Новосибирск: Изд-во ИГиЛ, 2001. С. 87–91.

[17] Мищенко А. В., Немировский Ю. В. Модель ползучести металлов с начальным скачком деформации и функциональными константами материала // Известия вузов. Авиационная техника. 2009. № 1. С. 20–24.

[18] Мищенко А. В., Немировский Ю. В. Анализ напряженно-деформированного состояния длительно нагруженных рам со слоистыми стержнями // Строительная механика и расчет сооружений. 2010. Т.3. С. 27–34.

[19] Мищенко А. В., Немировский Ю. В. Установление срока допустимой эксплуатации слоистых стержней в условиях ползучести // Известия вузов. Строительство. 2008. № 6. С. 19–27.

[20] Немировский Ю. В. Синтез плоских ферменных конструкций / Проблемы оптимального проектирования конструкций : Сб. докл. IV Всероссийского семинара – Новосибирск: Изд-во НГАСУ, 2002. С. 274–281

[21] Немировский Ю. В., Мищенко А. В., Вохмянин И. Т. Рациональное и оптимальное проектирование слоистых стержневых систем. Новосибирск: НГАСУ, 2004. 488 с.

*Yu. V. Nemirovskii*

## EXTREME DURABILITY OF HYBRID FARM DESIGNS

*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia*

**Abstract.** On the basis of the idea of construction and use of isochronous curves of deformation samples of uniform materials at long loading taking into account possible degradation with time of properties of materials, developed the scheme of forecasting of durability of hybrid cores various materials made of set. The scheme is used for obtaining extreme durability hybrid farm designs from a set of various materials.

**Keywords:** hybrid cores, hybrid farm designs, durability of operation, long durability, creep, theory of aging, isochronous curve deformations, maximum permissible deformations, maximum permissible durability, efforts of movement, deformation

## REFERENCES

[1] Soderberg C. R. The interpretation of creep tests for machine design //Transactions of the ASME. 1936. Vol. 58. No 8. P. 733–743.

[2] Gol'denblat I. I., Bazhanov V. L., Kopnov V. A. Dlitel'naya prochnost' v mashinostroenii. Moskva : Mashinostroenie, 1977. 248 s. (in Russian)

[3] Arshakuni A.L., Lokoshchenko A.M., Kiselevskij V.N., SHesterikov S.A. i dr. Zakonomernosti polzuchesti i dlitel'noj prochnosti: Spravochnik / Pod obshch. red. S.A. SHesterikova. M.: Mashinostroenie, 1983. 101 s. (in Russian)

---

*Nemirovskii Yuri Vladimirovich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia.

- [4] Malinin N. N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti*. M.: Mashinostroenie, 1975. 400 s. (in Russian)
- [5] Garofalo F. *Zakony polzuchesti i dlitel'noj prochnosti metallov i splavov*. M.: Metallurgiya, 1968. 304 s. (in Russian)
- [6] Kachanov L. M. *Teoriya polzuchesti*. M.: Fizmatgiz, 1960. 456 s. (in Russian)
- [7] Rabotnov YU. N. *Polzuchest' ehlementov konstrukcij*. M.: Nauka, 1966. 752 s. (in Russian)
- [8] Rabotnov YU. N. *Raschet detalej mashin na polzuchest' // Izv. AN SSSR. OTN*. 1948. №6. S. 789–800. (in Russian)
- [9] Ponomarev S. D., Biderman V. L., Liharev K. K. i dr. *Raschyoty na prochnost' v mashinostroenii*. T. II. Moskva: MASHGIZ, 1958. 974 s. (in Russian)
- [10] Lokoshchenko A. M. *Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallov*. M.: Fizmatlit, 2016. 504 s. (in Russian)
- [11] Kablov E. N., Golubovskij E. R. *ZHaroprochnost' nikel'nykh splavov*. M.: Mashinostroenie, 1998. 464 s. (in Russian)
- [12] Agahi K. A., Kuznecov V. N., Lokoshchenko A. M. i dr. *Modelirovanie processa polzuchesti na osnove approksimacii ehksperimental'nykh dannykh // Mashinostroenie i inzh. obrazovanie*. 2011. № 2. S. 52–57. (in Russian)
- [13] Arshakun A. L., SHesterikov S. A. *Prognozirovanie dlitel'noj prochnosti metallicheskih materialov // Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela*. 1994. № 3. S. 126–141. (in Russian)
- [14] Kachanov L. M. *O vremeni razrusheniya v usloviyah polzuchesti [Tekst] // Izv. AN SSSR. OTN*. 1958. №8. S. 26–31. (in Russian)
- [15] Nemirovskij YU. V. *O vremeni ehkspluatacii i razrusheniya konstrukcij v usloviyah polzuchesti // Prikladnaya mekhanika*. 1970. T.6. №3. S. 47–54. (in Russian)
- [16] Nemirovskij YU. V. *Ob opredelenii vremeni dopustimoi ehkspluatacii konstrukcij v usloviyah polzuchesti // Dinamika sploshnoj sredy .Vyp. 119. Sovremennye problemy mekhaniki deformiruемого tverdogo tela: Sb. statej / RAN. Sib. otd-nie. In-t gidrodinamiki*. № 119. Novosibirsk: Izd-vo IGI, 2001. S. 87–91. (in Russian)
- [17] Mishchenko A. V., Nemirovskij YU. V. *Model' polzuchesti metallov s nachal'nykh skachkom deformacii i funkcional'nymi konstantami materiala // Izvestiya vuzov. Aviacionnaya tekhnika*. 2009. № 1. S. 20–24. (in Russian)
- [18] Mishchenko A. V., Nemirovskij YU. V. *Analiz napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya dlitel'no nagruzhennykh ram so sloistymi sterzhnyami // Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij*. 2010. T.3. S. 27–34. (in Russian)
- [19] Mishchenko A. V., Nemirovskij YU. V. *Ustanovlenie sroka dopustimoi ehkspluatacii sloistykh sterzhnej v usloviyah polzuchesti // Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo*. 2008. № 6. S. 19–27. (in Russian)
- [20] Nemirovskij YU. V. *Sintez ploskih fermennykh konstrukcij / Problemy optimal'nogo proektirovaniya konstrukcij : Sb. dokl. IV Vserossijskogo seminar - Novosibirsk: Izd-vo NGASU*, 2002. S. 274–281 (in Russian)
- [21] Nemirovskij YU. V., Mishchenko A. V., Vohmyanin I. T. *Racional'noe i optimal'noe proektirovanie sloistykh sterzhnevnykh sistem*. Novosibirsk: NGASU, 2004. 488 s. (in Russian)