

Е. А. Деревянных¹, А. Н. Максимов¹, Т. В. Митрофанова²

К ВОПРОСУ О КРУЧЕНИИ НЕОДНОРОДНЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ В СЛУЧАЕ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ

¹ Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия

² Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Основными элементами конструкций в некоторых отраслях современной техники являются однородные и неоднородные анизотропные стержни. Широкое распространение при этом в инженерной практике получают конструкции, изготовленные из композиционных материалов, обладающих анизотропией и неоднородностью. Новые композиционные материалы, созданные с использованием технологических способов, обеспечивают надежность конструкций и снижают себестоимость изделий. Актуальность статьи обусловлена тем, что многие элементы строительных машин и механизмов работают как на изгиб, так и на кручение. Работа посвящена решению некоторых задач кручения анизотропных однородных и неоднородных призматических стержней. В статье определено напряженно-деформированное состояние стержней и найдены линии разрыва напряжений. Полученные результаты могут быть применены при расчетах несущей способности конструкций и позволяют учитывать влияние анизотропии при определении предельных усилий при кручении.

Ключевые слова: анизотропия, кручение, предельное состояние, поле характеристик, линии разрыва, напряжение, стержень.

УДК: 539.374

Задачи кручения изотропных и анизотропных цилиндрических и призматических стержней рассмотрены в [1], [2], [3], [4], [5], [6].

Рассмотрим составной прямоугольный анизотропный призматический стержень, разделенный на две области линией неоднородности DE , исходящей из вершины D (рис. 1, а). Ось z направим параллельно образующей стержня. Предположим, что стержень закручивается вокруг оси z равными и противоположными парами сил с

© Деревянных Е. А., Максимов А. Н., Митрофанова Т. В., 2018

Деревянных Евгения Анатольевна

e-mail: jane-evgeniya@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.

Максимов Алексей Николаевич

e-mail: alexei.maksimow@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.

Митрофанова Татьяна Валерьевна

e-mail: mitrofanova_tv@mail.ru, кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 01.09.2018

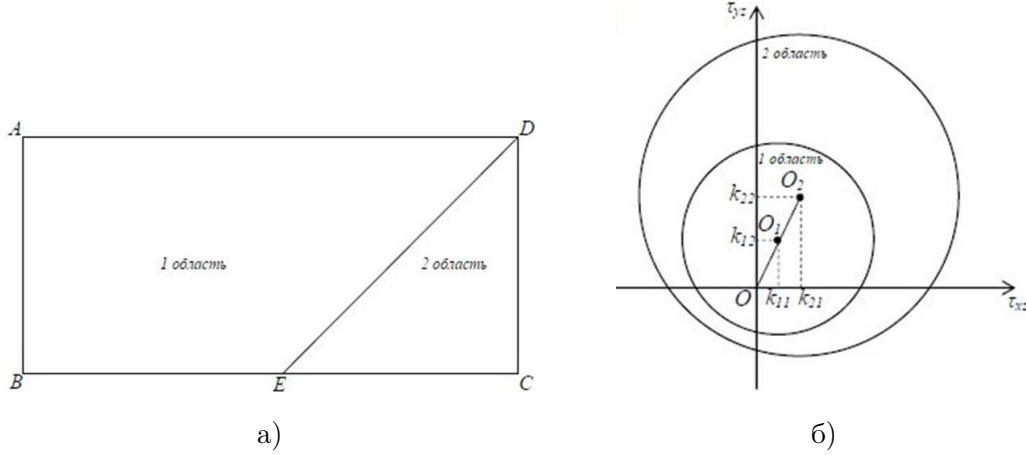


Рис. 1. Составной прямоугольный анизотропный призматический стержень, разделенный на две области линией неоднородности

моментом M . Боковая поверхность стержня считается свободной от нагрузок. Влиянием массовых сил можно пренебречь.

Положим

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y), \quad (1)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ — нормальные и касательные напряжения на площадках, перпендикулярных координатным осям x, y, z . Условие пластичности в каждой области имеет вид

$$(\tau_{xz} - k_{i1})^2 + (\tau_{yz} - k_{i2})^2 = k_{i0}^2, \quad k_{i0}, k_{i1}, k_{i2} = \text{const}, \quad (2)$$

при этом $k_{20} > k_{10}$, $i = 1, 2$. Отнесем все величины, имеющие размерность напряжений, к величине k_{i0} ($i = 1, 2$), и перейдем к безразмерным величинам. Условие (2) примет вид

$$(\tau_{xz} - k_{i1})^2 + (\tau_{yz} - k_{i2})^2 = 1, \quad (3)$$

где $i = 1, 2$. Положим в каждой области

$$\tau_{xz} = k_i(\theta) \cos \theta, \quad (4)$$

$$\tau_{yz} = k_i(\theta) \sin \theta, \quad (5)$$

$$\text{tg } \theta = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}}, \quad (6)$$

где $i = 1, 2$.

Согласно (4), (5) из (3) найдем

$$k_i(\theta) = \rho_i \cos(\theta - \mu_i) + \sqrt{1 - \rho_i^2 \sin^2(\theta - \mu_i)}, \quad k_i(\theta) > 0, \quad (7)$$

где

$$\rho_i = \sqrt{k_{i1}^2 + k_{i2}^2}, \quad \frac{k_{i1}}{\rho_i} = \cos \mu_i, \quad \frac{k_{i2}}{\rho_i} = \sin \mu_i, \quad \text{tg } \mu_i = \frac{k_{i2}}{k_{i1}}, \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

Дифференциальное уравнение равновесия при кручении имеет вид

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (9)$$

Подставляя выражения (4), (5) в уравнение равновесия (9), получим

$$(k'_i \cos \theta - k_i \sin \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} + (k'_i \sin \theta + k_i \cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad (10)$$

где

$$k'_i = \frac{dk}{d\theta}, \quad i = 1, 2. \quad (11)$$

Соответствующие уравнения для определения характеристик имеют вид

$$\frac{dx}{k'_i \cos \theta - k_i \sin \theta} = \frac{dy}{k'_i \sin \theta + k_i \cos \theta} = \frac{d\theta}{0}, \quad (12)$$

где $i = 1, 2$. Из уравнения (12) следует, что характеристики уравнений (10) примут вид

$$y_i = \frac{k'_i \sin \theta + k_i \cos \theta}{k'_i \cos \theta - k_i \sin \theta} x + \Phi_i(\theta), \quad \theta = \text{const}, \quad (13)$$

где $i = 1, 2$. Из уравнения (13) следует, что характеристики являются прямыми линиями, вдоль которых касательные напряжения τ_{xz} , τ_{yz} постоянны.

На рис. 2 представлен случай кручения прямоугольных анизотропных стержней, разделенных на две области линией неоднородности DE , исходящей из вершины D .

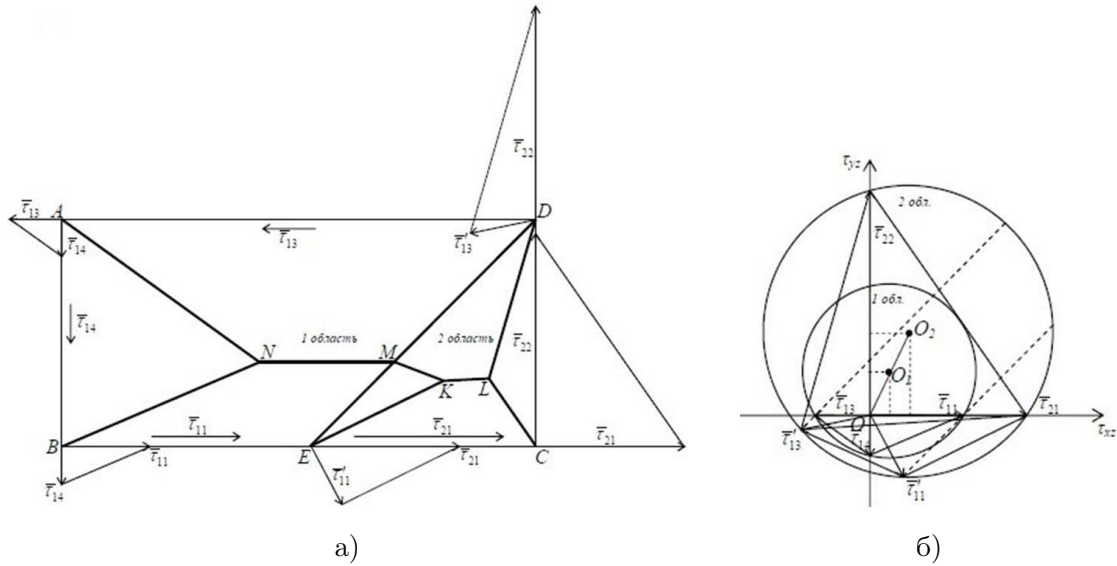


Рис. 2. Кручение прямоугольных анизотропных стержней, разделенных на две области линией неоднородности DE

В каждой области определим линии разрыва напряжений.

На линии неоднородности DE должно выполняться условие сопряжения векторов касательных напряжений. Направляющий вектор линии разрыва AN первой области равен разности векторов касательных напряжений $\bar{\tau}_{13}$ и $\bar{\tau}_{14}$, направляющий вектор

линии разрыва BN — разности векторов $\bar{\tau}_{14}$ и $\bar{\tau}_{11}$. Линии разрыва AN и BN пересекаются в точке N . В силу сопряжения векторов касательных напряжений $\bar{\tau}_{11}$ и $\bar{\tau}_{13}$ имеем линию разрыва NM первой области, исходящую из точки параллельно прямой AD . Линия разрыва пересекает линию разрыва DE в точке M .

Направляющий вектор линии разрыва CL второй области равен разности векторов касательных напряжений $\bar{\tau}_{22}$ и $\bar{\tau}_{21}$. В силу сопряжения векторов касательных напряжений в плоскости $DMKL$ второй области действует вектор касательного напряжения $\bar{\tau}'_{13}$. Направляющий вектор линии разрыва DL равен разности векторов касательных напряжений $\bar{\tau}'_{13}$ и $\bar{\tau}_{22}$. Линии разрыва напряжений CL и DL пересекаются в точке L . Линия разрыва KL исходит из точки L параллельно направляющему вектору, равному разности векторов касательных напряжений $\bar{\tau}'_{13}$ и $\bar{\tau}_{21}$. В силу сопряжения векторов касательных напряжений в плоскости EMK второй области действует вектор касательного напряжения $\bar{\tau}'_{11}$. Направляющий вектор линии разрыва EK второй области равен разности векторов касательных напряжений $\bar{\tau}_{21}$ и $\bar{\tau}'_{11}$. Линия разрыва MK исходит из точки M параллельно направляющему вектору, равному разности векторов касательных напряжений $\bar{\tau}'_{11}$ и $\bar{\tau}'_{13}$. Линии разрыва MK , LK , EK пересекаются в точке K .

Таким образом, в каждой области найдены векторы касательных напряжений, характеристики соотношений, определяющих напряженно-деформированное состояние тела, и построены линии разрыва напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Деревянных Е. А. О предельном состоянии кусочно-неоднородных анизотропных призматических стержней полигонального сечения при кручении // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 1(11). С. 75–80.
- [2] Деревянных Е. А. Предельное состояние анизотропных призматических кусочно-неоднородных стержней при кручении // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 3(13). С. 72–79.
- [3] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
- [4] Ивлев Д. Д., Миронов Б. Г. О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(8). Ч. 3. С. 576–579.
- [5] Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. Деформированное состояние трансляционно-анизотропных тел при кручении // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. 2011. № 4(72). С. 57–60.
- [6] Митрофанова Т. В. О предельном состоянии анизотропных призматических стержней при кручении // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(8). Ч. 3. С. 601–609.

Е. А. Derevyannih¹, А. Н. Maksimov¹, Т. В. Mitrofanova²

TO A QUESTION OF TORSION OF NON-UNIFORM PRISMATIC CORES IN CASE OF TRANSMITTING ANISOTROPY

¹*Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia*

²*I. N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

Abstract. Basic elements of designs in some branches of the modern equipment are uniform and non-uniform anisotropic cores. At the same time in engineering practice the designs made of the composite materials having anisotropy and heterogeneity are widely adopted. The new composite materials created with an ipolzovaniye of technological ways provide reliability of designs and reduce себестоимость products. The relevance of article is caused by the fact that many elements of construction cars and mechanisms work both for a bend, and for torsion. Work is devoted to the solution of some problems of torsion of anisotropic uniform and non-uniform prismatic cores. In article the intense deformed condition of cores is defined and lines of a rupture of tension are found. The received results can be applied when calculating of the bearing ability of designs and allow to consider influence of anisotropy when determining limit efforts at torsion.

Keywords: anisotropy, torsion, limit condition, field of characteristics, lines of a gap, tension, core.

REFERENCES

- [1] Derevyannyh E. A. O predel'nom sostoyanii kusochno-neodnorodnyh anizotropnyh prizmaticheskikh sterzhnej poligonal'nogo secheniya pri kruchenii // Vestnik CHGPU im. I. YA. YAKovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2012. № 1(11). S. 75–80. (in Russian)
- [2] Derevyannyh E. A. Predel'noe sostoyanie anizotropnyh prizmaticheskikh kusochno-neodnorodnyh sterzhnej pri kruchenii // Vestnik CHGPU im. I. YA. YAKovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2012. № 3(13). S. 72–79. (in Russian)
- [3] Ivlev D. D. Teoriya ideal'noj plastichnosti. M.: Nauka, 1966. 231 c. (in Russian)
- [4] Ivlev D. D., Mironov B. G. O sootnosheniyah translyacionnoj ideal'noplasticheskoy anizotropii pri kruchenii // Vestnik CHGPU im. I. YA. YAKovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2010. № 2(8). CH. 3. S. 576–579. (in Russian)
- [5] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. Deformirovannoe sostoyanie translyacionno-anizotropnyh tel pri kruchenii // Vestnik CHGPU im. I. YA. YAKovleva. 2011. № 4(72). S. 57–60. (in Russian)
- [6] Mitrofanova T. V. O predel'nom sostoyanii anizotropnyh prizmaticheskikh sterzhnej pri kruchenii // Vestnik CHGPU im. I. YA. YAKovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2010. № 2(8). CH. 3. S. 601–609. (in Russian)

Dereviannih Evgeniya Anatolyevna

e-mail: jane-evgeniya@yandex.ru, Ph. D., Assoc. Professor, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia.

Maksimov Aleksey Nikolaevich

e-mail: alexei.maksimow@yandex.ru, Ph. D., Assoc. Professor, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia.

Mitrofanova Tatjana Valeryevna

e-mail: mitrofanova_tv@mail.ru, Ph. D., I. N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.