

А. Б. Мустафаев

ТОРМОЖЕНИЕ РОСТА КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРЕЩИНЫ СО СВЯЗЯМИ МЕЖДУ БЕРЕГАМИ С ПОМОЩЬЮ ТЕПЛОвого ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ

Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан

Аннотация. Рассматриваются изменения температурного поля вблизи вершин криволинейной трещины в листовом элементе под действием внешнего неоднородного напряженного поля. Учитывается, что у криволинейной трещины имеются концевые зоны со связями между берегами (силами сцепления). Считается, что эти зоны примыкают к вершинам трещины и имеют размеры соизмеримые с размером трещины. Решение краевой задачи о равновесии криволинейной трещины со связями между берегами в концевых зонах при действии внешнего неоднородного напряженного поля, наведенного термоупругого поля напряжений и усилий в связях, препятствующих раскрытию трещины, сводится в каждом приближении к системе нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром типа Коши. Из решения полученной системы уравнений находятся нормальные и касательные усилия в связях между берегами. Условие предельного равновесия криволинейной трещины с концевыми зонами формулируется на основе двухпараметрического критерия разрушения.

Ключевые слова: листовой элемент конструкции, криволинейная трещина, температурное поле, зоны предразрушения, силы сцепления, неоднородное напряженное поле.

УДК: 539.375

Введение. Значительный интерес представляет оценка влияния локальных изменений температуры вблизи вершин трещины на ее торможение в листовом элементе конструкции. Такие локальные изменения температуры листового элемента легко выполнимы технологически и способствуют замедлению или остановке роста сквозной трещины. Поэтому решение задач механики разрушения для листовых элементов конструкций с трещиной, вблизи вершин которой имеются изменения температуры, представляет теоретический и практический интерес [1-24].

Постановка задачи. Пусть в изотропном однородном листовом элементе, занимающем плоскость Oxy , имеется криволинейная трещина длиной $2l = b-a$ (рис. 1). Рассмотрим задачу механики разрушения о трещине со связями между берегами в листовом элементе конструкции, полагая, что контур трещины имеет неровности –

© Мустафаев А. Б., 2018

Мустафаев Азер Байрам оглы

e-mail: azeg_bm@list.ru, кандидат физико-математических наук, докторант, Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан

Поступила 01.07.2018

малые отклонения от прямолинейной формы. Полагаем наличие у трещины концевых зон, в которых непрерывно распределены силы сцепления материала (зоны предразрушения). Считается, что размеры зон предразрушения сравнимы с длиной трещины [25]. Концевые зоны предразрушения моделируются областями с ослабленными межчастичными связями в материале.

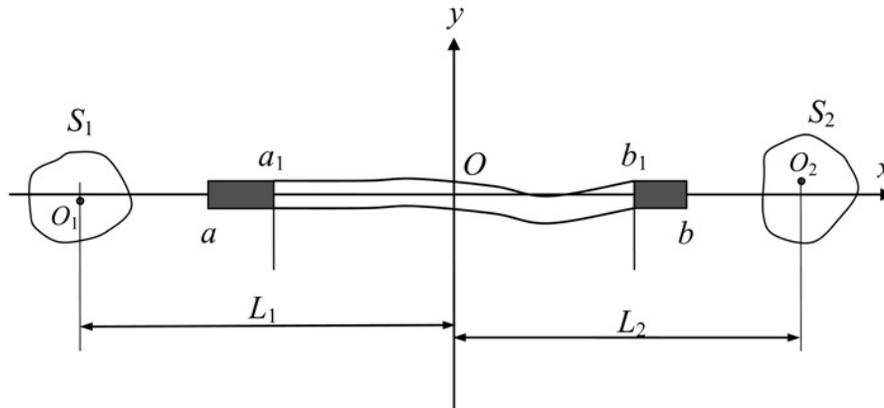


Рис. 1.

Для многих конструкционных материалов (сталей, алюминиевых сплавов и др.) в диапазоне изменения температуры до $300 - 400^\circ\text{C}$ зависимость термоупругих характеристик слабо меняется с температурой. Таким образом, существует такой диапазон температур, в котором допущение о постоянстве характеристик материала корректно. Этот диапазон устанавливается на основании зависимости модуля упругости от температуры. Опыты [1] показывают, что при нагреве трассы пути трещины до $70 - 100^\circ\text{C}$ наблюдается замедление и остановка роста трещины.

Пусть на бесконечности действуют напряжения, являющиеся полиномиальными функциями декартовых координат x и y . Берега криволинейной трещины свободны от нагрузок. Для торможения трещины на ее пути с помощью нагрева тепловым источником области $S = S_1 + S_2$ до постоянной температуры T_0 создается зоны сжимающих напряжений. Принимаем допущения: все термоупругие характеристики материала (модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν) не зависят от температуры T ; материал листового элемента однородный и изотропный. Принято, что в момент $t = 0$ произвольная область S на пути трещины в листовом элементе мгновенно нагревается до постоянной температуры $T = T_0$. Остальная часть листового элемента в начальный момент времени имеет температуру $T = 0$.

Выделим части трещины длиной $d_1 = a_1 - a$ и $d_2 = b_1 - b$ (зоны предразрушения), примыкающие к ее вершинам, в которой берега взаимодействуют. Взаимодействие берегов трещины в зонах предразрушения моделируется путем введения между берегами трещины связей (сил сцепления), имеющих заданную диаграмму деформирования. Физическая природа связей и размеры зон предразрушения зависят от вида материала листового элемента.

Трещина считается близкой к прямолинейной форме, с малыми отклонениями линии трещины от прямой $y = 0$. Уравнение линии трещины принимается в виде $y = f(x)$,

$a \leq x \leq b$. На основании сказанного функции $f(x)$ и $f'(x)$ являются малыми величинами.

При действии внешней силовой и тепловой нагрузок на листовый элемент в связях, соединяющих берега трещины в зонах предразрушения, появятся в общем случае нормальные $q_y(x)$ и касательные $q_{xy}(x)$ усилия. Следовательно, к берегам трещины в конечных зонах будут приложены нормальные и касательные напряжения, численно равные $q_y(x)$ и $q_{xy}(x)$, соответственно. Величины этих напряжений необходимо определить.

Граничные условия на берегах криволинейной трещины имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \sigma_n = 0, \quad \tau_{nt} = 0 \quad \text{при} \quad y = f(x), \quad a_1 < x < b_1; \\ \sigma_n = q_y, \quad \tau_{nt} = q_{xy} \quad \text{при} \quad y = f(x), \quad a \leq x \leq a_1 \quad \text{и} \quad b_1 \leq x \leq b, \end{aligned} \quad (1)$$

где n, t – натуральные координаты.

Основные соотношения поставленной задачи должны быть дополнены уравнением, связывающим раскрытие берегов трещины и усилия в связях в зонах предразрушения, которое можно представить в виде

$$(v^+ - v^-) - i(u^+ - u^-) = \Pi_y(x, \sigma)q_y(x) - i\Pi_x(x, \sigma)q_{xy}(x). \quad (2)$$

Здесь $(v^+ - v^-)$ и $(u^+ - u^-)$ – соответственно нормальная и касательная составляющие раскрытия берегов трещины; функции $\Pi_y(x, \sigma)$ и $\Pi_x(x, \sigma)$ – эффективные податливости связей, зависящие от их натяжения; $\sigma = \sqrt{q_y^2 + q_{xy}^2}$ – модуль вектора усилий в связях.

При постоянных значениях Π_y, Π_x имеем в (2) линейный закон деформирования связей, в общем же случае закон деформирования нелинейный и задан.

Метод решения задачи. С помощью принципа суперпозиции, напряженное состояние в листовом элементе конструкции с криволинейной трещиной, представим в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_{x_0} + \sigma_x^1, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_{y_0} + \sigma_y^1, \\ \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy_0} + \tau_{xy}^1, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ – компоненты тензора напряжений в сплошном листовом элементе, когда на бесконечности действуют напряжения, являющиеся полиномиальными функциями декартовых координат x, y ; $\sigma_{x_0}, \sigma_{y_0}, \tau_{xy_0}$ – решение задачи термоупругости для бездефектного листового элемента; $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1$ – решение задачи механики разрушения для листового элемента с криволинейной трещиной при действии неизвестных нагрузок, приложенных только на поверхности берегов трещины. Эти нагрузки определяют в процессе решения задачи.

Для компонент напряжений $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_x^0 + \sigma_y^0 = 2 \left[\operatorname{Re} \Phi^0(z) + \overline{\Phi^0(z)} \right], \quad z = x + iy, \\ \sigma_y^0 - \sigma_x^0 + 2i\tau_{xy}^0 = \Phi^0(z) + \Omega^0(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi^0(z)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\Phi^0(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m+1} + A_2 z^{m-2} + \dots + A_m$, $\Omega^0(z) = B_0 z^m + B_1 z^{m+1} + B_2 z^{m-2} + \dots + B_m$.

Эти функции (4) в зависимости от значений коэффициентов A_j и B_j ($j = 0, 1, \dots, m$) определяют напряженное состояние в листовом элементе без трещины и теплового источника.

Для нахождения компонент тензора напряжений σ_{x_0} , σ_{y_0} , τ_{xy_0} решается задача термоупругости для сплошного листового элемента. Сначала, решая краевую задачу теории теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_* \Delta T, \quad T = \begin{cases} T_0 & (x, y \in S) \\ 0 & (x, y \notin S) \end{cases} \quad \text{при } t = 0, \quad (5)$$

где Δ – оператор Лапласа, a_* – коэффициент температуропроводности материала листового элемента, находим распределение температуры,

$$T(x, y, t) = \frac{T_0}{4\pi a_*} \left[\iint_{S_1} \exp\left(-\frac{R^2}{4a_* t}\right) d\xi d\eta + \iint_{S_2} \exp\left(-\frac{R^2}{4a_* t}\right) d\xi d\eta \right],$$

где $R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$.

Для обобщенного плоского напряженного состояния считается, что листовой элемент теплоизолирован на боковых поверхностях. Пусть нагретые со стороны каждой вершины трещины тепловым источником области S_1 и S_2 являются произвольными односвязными областями с центрами $O_k(L_k, C_k)$ (рис. 1).

При определении температурного поля, для упрощения задачи, не учитывалось возмущенное температурное поле, вызванное трещиной.

Чтобы учесть потери тепла на поверхности листового элемента вместо уравнения (5) следует решать уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_* \Delta T - m^2 T,$$

где $m^2 = \frac{2a_* \delta}{\lambda h}$; δ – коэффициент теплообмена между листовым элементом и средой; λ – коэффициент теплопроводности; h – толщина листового элемента.

Таким образом, в случае теплообмена со средой через боковые поверхности пластины, нужно полученное решение умножить на $\exp(-m^2 t)$.

Для термоупругого потенциала перемещений находим

$$F(x, y, t) = \frac{(1 + \nu)\alpha T_0}{4\pi} \left\{ \int_0^t \frac{1}{\tau} \left[\iint_S \exp\left(-\frac{R^2}{4a_* \tau}\right) d\xi d\eta \right] d\tau - 2 \iint_S \ln\left(\frac{1}{R}\right) d\xi d\eta \right\},$$

где α – коэффициент линейного температурного расширения листового элемента.

Компоненты тензора напряжений σ_x^0 , σ_y^0 , τ_{xy}^0 выражаются через термоупругий потенциал перемещений по известным формулам [26] и имеют вид

$$\sigma_x^0 = -\mu(1 + \nu)\alpha T_0 \left\{ 1 + \iint_S \frac{1}{\pi R^4} \left[(x - \xi)^2 - (y - \eta)^2 + 2(y - \eta)^2 \Gamma\left(2, \frac{R^2}{4a_* t}\right) - R^2 \exp\left(-\frac{R^2}{4a_* t}\right) \right] d\xi d\eta \right\},$$

$$\sigma_y^0 = -\mu(1 + \nu)\alpha T_0 \left\{ 1 + \iint_S \frac{1}{\pi R^4} \left[(y - \eta)^2 - (x - \xi)^2 + 2(x - \xi)^2 \Gamma\left(2, \frac{R^2}{4a_* t}\right) - R^2 \exp\left(-\frac{R^2}{4a_* t}\right) \right] d\xi d\eta \right\},$$

$$\tau_{xy}^0 = -\frac{\mu(1+\nu)\alpha T_0}{2\pi} \iint_S \frac{4(x-\xi)(y-\eta)}{R^2} \left[1 - \Gamma\left(2, \frac{R^2}{4a_* t}\right) \right] d\xi d\eta,$$

где μ – модуль сдвига материала листового элемента; $\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$.

Граничные условия (1) на берегах криволинейной трещины с концевыми зонами предразрушения на основании (2) принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_n^1 &= -\sigma_y^0 - \sigma_{y_0}, & \tau_{nt}^1 &= -\tau_{xy}^0 - \tau_{xy_0} \\ &\text{при } y = f(x), & a_1 &< x < b_1; \\ \sigma_n^1 &= -(\sigma_y^0 + \sigma_{y_0}) + q_y, & \tau_{nt}^1 &= -(\tau_{xy}^0 + \tau_{xy_0}) + q_{xy} \\ &\text{при } y = f(x), & a \leq x \leq a_1 \text{ и } b_1 \leq x \leq b. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим некоторую произвольную реализацию искривленной (с малыми отклонениями от прямолинейной формы) поверхности берегов трещины. Так как функции $f(x)$ и $f'(x)$ являются малыми величинами, функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = \varepsilon H(x) \quad a \leq x \leq b,$$

где ε – малый параметр.

Компоненты тензора напряжений; σ_x^1 , σ_y^1 , τ_{xy}^1 и перемещения u^1 , v^1 ищем в виде разложений по малому параметру

$$\begin{aligned} \sigma_x^1 &= \sigma_x^{(0)} + \varepsilon \sigma_x^{(1)} + \dots, & \sigma_y^1 &= \sigma_y^{(0)} + \varepsilon \sigma_y^{(1)} + \dots, & \tau_{xy}^1 &= \tau_{xy}^{(0)} + \varepsilon \tau_{xy}^{(1)} + \dots, \\ u^1 &= u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, & v^1 &= v_0 + \varepsilon v_1 + \dots \end{aligned}$$

Неизвестные напряжения в связях в зонах предразрушения также ищем в виде разложений по малому параметру

$$q_y = q_y^{(0)} + \varepsilon q_y^{(1)} + \dots, \quad q_{xy} = q_{xy}^{(0)} + \varepsilon q_{xy}^{(1)} + \dots$$

Значения напряжений при $y = f(x)$ получим, разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности $y = 0$. Используя метод возмущений, находим граничные условия при $y = 0$, $a \leq x \leq b$:

в нулевом приближении

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(0)} &= -(\sigma_y^0 + \sigma_{y_0}), & \tau_{xy}^{(0)} &= -(\tau_{xy}^0 + \tau_{xy_0}) & \text{при } y = 0, & a_1 \leq x \leq b_1, \\ \sigma_y^{(0)} &= q_y^0 - (\sigma_y^0 + \sigma_{y_0}), & \tau_{xy}^{(0)} &= q_{xy}^0 - (\tau_{xy}^0 + \tau_{xy_0}) \\ &\text{при } y = 0, & a \leq x \leq a_1 & \text{ и } b_1 \leq x \leq b; \end{aligned} \quad (7)$$

в первом приближении

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)} &= N, & \tau_{xy}^{(1)} &= T_t & \text{при } y = 0, & a_1 \leq x \leq b_1, \\ \sigma_y^{(1)} &= q_y^1 + N, & \tau_{xy}^{(1)} &= q_{xy}^1 + T_t & \text{при } y = 0, & a \leq x \leq a_1 \text{ и } b_1 \leq x \leq b. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$N = 2\tau_{xy}^{(0)} \frac{dH}{dx} - H \frac{\partial \sigma_y^{(0)}}{\partial y}, \quad T_t = (\sigma_x^{(0)} - \sigma_y^{(0)}) \frac{dH}{dx} - H \frac{\partial \tau_{xy}^{(0)}}{\partial y} \quad \text{при } y = 0. \quad (9)$$

Применяя метод возмущений к уравнению (2), получим в нулевом приближении

$$\begin{aligned} (v_0^+ - v_0^-) - i(u_0^+ - u_0^-) &= \Pi_y(x, \sigma^0)q_y^0(x) - i\Pi_x(x, \sigma^0)q_{xy}^0(x), \\ \sigma^0 &= \sqrt{(q_y^0)^2 + (q_{xy}^0)^2}; \end{aligned} \quad (10)$$

в первом приближении

$$\begin{aligned} (v_1^+ - v_1^-) - i(u_1^+ - u_1^-) &= \Pi_y(x, \sigma^1)q_y^1(x) - i\Pi_x(x, \sigma^1)q_{xy}^1(x), \\ \sigma^1 &= \sqrt{(q_y^1)^2 + (q_{xy}^1)^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Следуя Н.И. Мусхелишвили [27] на основании краевых условий нулевого приближения, приходим к задаче линейного сопряжения с разрывными коэффициентами:

$$\begin{aligned} [\Phi_0(x) + \Omega_0(x)]^+ + [\Phi_0(x) + \Omega_0(x)]^- &= 2f_0(x), \\ [\Phi_0(x) - \Omega_0(x)]^+ - [\Phi_0(x) - \Omega_0(x)]^- &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$f_0(x) = \begin{cases} -(\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) - (\sigma_{y_0} - i\tau_{xy_0}) & \text{на свободных берегах трещины,} \\ q_y^0 - iq_{xy}^0 - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) - (\sigma_{y_0} - i\tau_{xy_0}) & \text{на берегах зон предразрушения.} \end{cases}$$

Решение задачи (12) будет иметь вид [27]

$$\Phi_0(z) = \Omega_0(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{(z-a)(z-b)}} \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(t-b)} f_0(t) dt}{t-z}. \quad (13)$$

При $z \rightarrow \infty$, $X(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)} = z + O(1/z)$. Корень под знаком интеграла представляет собой значение ветви соответствующей функции, выделяемой приведенным условием на верхнем берегу криволинейной трещины.

Для окончательного определения комплексных потенциалов $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ необходимо еще найти напряжения в связях $q_y^0(x)$ и $q_{xy}^0(x)$. Используя формулу Н.И. Мусхелишвили [27]

$$2\mu \frac{\partial}{\partial x} (u_0 - iv_0) = \kappa \Phi_0(z) - \Omega_0(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi_0'(z)}$$

и граничные значения функций $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$, находим на отрезке $a \leq x \leq b$ равенство

$$2\mu i \frac{\partial}{\partial x} [(u_0^+ - iv_0^-) + i(v_0^+ - iv_0^-)] = (1 + \kappa) [\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x)]. \quad (14)$$

Используя формулы Сохоцкого-Племеля [27] и учитывая формулы (13), находим

$$\Phi_0^+(z) - \Phi_0^-(z) = -\frac{i}{\pi \sqrt{(x-a)(x-b)}} \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(t-b)} f_0(t) dt}{t-x}. \quad (15)$$

Подставляя соотношение (15) в уравнение (14) и учитывая соотношение (10) в нулевом приближении, находим систему нелинейных интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $q_y^0(x)$ и $q_{xy}^0(x)$

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{(x-a)(x-b)}} \left\{ \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(t-b)}q_y^0(t)}{t-x} dt + \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(t-b)}(\sigma_y^0 + \sigma_{y0})}{t-x} dt \right\} = \quad (16)$$

$$= \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{\partial}{\partial x} [\Pi_y(x, \sigma^0)q_y^0(x)],$$

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{(x-a)(x-b)}} \left\{ \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(t-b)}q_{xy}^0(t)}{t-x} dt + \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(t-b)}(\tau_{xy}^0 + \tau_{xy0})}{t-x} dt \right\} = \quad (17)$$

$$= \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{\partial}{\partial x} [\Pi_x(x, \sigma^0)q_{xy}^0(x)].$$

Уравнения (16) и (17) являются нелинейными интегродифференциальными уравнениями с ядром типа Коши и могут быть решены только численно. Для их решения используется коллокационная схема [28, 29] с аппроксимацией неизвестных функций.

Перейдем к алгебраизации интегродифференциальных уравнений (16) и (17). Используя квадратурные формулы Гаусса-Чебышева, все интегралы в (16) и (17) заменяются конечными суммами, а производные в правых частях уравнений конечно-разностными аппроксимациями. В результате уравнения (16), (17) сводятся каждое к конечным системам алгебраических уравнений относительно приближенных значений искомых функций, соответственно, в узловых точках:

$$\frac{2}{(1+M)\sin\theta_m} \left[\sum_{n=1}^M q_{y,n}^0 \sum_{k=1}^M \sin k\theta_n \cos k\theta_m + \sum_{n=1}^M \sigma_{y,n}^* \sum_{k=1}^M \sin k\theta_n \cos k\theta_m \right] = \quad (18)$$

$$= \frac{\mu M}{(1+\kappa)(b-a)} [\Pi_y(x_{m+1}, \sigma^0(x_{m+1})) q_y^0(x_{m+1}) - \Pi_y(x_{m-1}, \sigma^0(x_{m-1})) q_y^0(x_{m-1})],$$

$$\frac{2}{(1+M)\sin\theta_m} \left[\sum_{n=1}^M q_{xy,n}^0 \sum_{k=1}^M \sin k\theta_n \cos k\theta_m + \sum_{n=1}^M \tau_{xy,n}^* \sum_{k=1}^M \sin k\theta_n \cos k\theta_m \right] = \quad (19)$$

$$= \frac{\mu M}{(1+\kappa)(b-a)} [\Pi_x(x_{m+1}, \sigma^0(x_{m+1})) q_{xy}^0(x_{m+1}) - \Pi_x(x_{m-1}, \sigma^0(x_{m-1})) q_{xy}^0(x_{m-1})].$$

Здесь

$$q_{y,n}^0 = q_{y,n}^0(\tau_n), \quad q_{xy,n}^0 = q_{xy,n}^0(\tau_n), \quad \sigma_{y,n}^* = \sigma_y^0(\tau_n) + \sigma_{y0}(\tau_n),$$

$$\tau_{xy,n}^* = \tau_{xy}^0(\tau_n) + \tau_{xy0}(\tau_n), \quad x_{m+1} = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b)\eta_{m+1}.$$

С помощью алгебраизации вместо каждого интегродифференциального уравнения (16), (17) получаем систему из M_1 алгебраических уравнений для нахождения напряжений в связях в узловых точках конечных зон предразрушения в нулевом приближении (M_1 – число узловых точек, содержащихся в зонах предразрушения). Если закон деформирования связей нелинейный, для определения напряжений $q_y^0(x)$, $q_{xy}^0(x)$ используется итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений А.А. Ильюшина [30]. В частном случае линейно-упругих связей системы (18), (19) являются линейными и для их численного решения применяется метод Гаусса с выбором главного элемента.

После решения алгебраических систем (18) и (19) вычисляем коэффициенты интенсивности напряжений. Коэффициенты интенсивности напряжений в нулевом приближении представим в виде

$$K_I - iK_{II} = \left(K_I^{load} + K_I^{bond} \right) - i \left(K_{II}^{load} + K_{II}^{bond} \right). \quad (20)$$

Для левого конца трещины имеем:

$$K_I^{a_0,load} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \left\{ \int_a^b \sigma_y^0(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx + \int_a^b \sigma_{y_0}(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx \right\},$$

$$K_I^{a_0,bond} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b q_y^{(0)}(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx,$$

$$K_{II}^{a_0,load} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \left[\int_a^b (\tau_{xy}^0(x) + \tau_{xy_0}(x)) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx \right],$$

$$K_{II}^{a_0,bond} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b q_{xy}^{(0)}(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx;$$

для правого конца трещины

$$K_I^{b_0,load} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b (\sigma_y^0(x) + \sigma_{y_0}(x)) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx,$$

$$K_I^{b_0,bond} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b q_y^0(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx,$$

$$K_{II}^{b_0,load} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b (\tau_{xy}^0(x) + \tau_{xy_0}(x)) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx,$$

$$K_{II}^{b_0,bond} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b q_{xy}^0(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx.$$

После нахождения напряжений в нулевом приближении находим функции N и T_t по формулам (9).

Решение граничной задачи (8) в первом приближении аналогично решению в нулевом приближении. Получены алгебраические системы, заменяющие интегродифференциальные уравнения относительно неизвестных функций $q_y^1(x)$ и $q_{xy}^1(x)$

$$\begin{aligned} \frac{2}{(1+M) \sin \theta_m} \left[\sum_{n=1}^M q_{y,n}^1 \sum_{k=1}^M \sin k\theta_n \cos k\theta_m + \sum_{n=1}^M N_n \sum_{k=1}^M \sin k\theta_n \cos k\theta_m \right] = \\ = \frac{\mu M}{(1+\kappa)(b-a)} \left[\Pi_y(x_{m+1}, \sigma^1(x_{m+1})) q_{y,m+1}^1(x_{m+1}) - \right. \\ \left. - \Pi_y(x_{m-1}, \sigma^1(x_{m-1})) q_{y,m-1}^1(x_{m-1}) \right], \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{(1+M) \sin \theta_m} \left[\sum_{n=1}^M q_{xy,n}^1 \sum_{k=1}^M \sin k\theta_n \cos k\theta_m + \sum_{n=1}^M T_n \sum_{k=1}^M \sin k\theta_n \cos k\theta_m \right] = \\ = \frac{\mu M}{(1+\kappa)(b-a)} \left[\Pi_x(x_{m+1}, \sigma^1(x_{m+1})) q_{xy,m+1}^1(x_{m+1}) - \right. \\ \left. - \Pi_x(x_{m-1}, \sigma^1(x_{m-1})) q_{xy,m-1}^1(x_{m-1}) \right], \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$m = 1, 2, \dots, M1, \quad q_{y,n}^1 = q_{y,n}^1(\tau_n), \quad q_{xy,n}^1 = q_{xy,n}^1(\tau_n), \\ q_{y,m+1}^1 = q_y^1(x_{m+1}), \quad q_{xy,m+1}^1 = q_{xy}^1(x_{m+1}), \quad N_n = N(\tau_n), \quad T_n = T(\tau_n).$$

После решения алгебраических систем (20) и (21) методом упругих решений А.А. Ильюшина [30] вычислялись коэффициенты интенсивности напряжений в первом приближении для левого конца трещины

$$K_I^{a_0,load} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b N(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx, \\ K_I^{a_0,bond} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b q_y^1(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx, \\ K_{II}^{a_0,load} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b T_t(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx, \\ K_{II}^{a_0,bond} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b q_{xy}^1(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx;$$

для правого конца трещины

$$K_I^{b_0,load} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b N(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx, \\ K_I^{b_0,bond} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b q_y^1(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx, \\ K_{II}^{b_0,load} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b T_t(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx, \\ K_{II}^{b_0,bond} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b q_{xy}^1(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx.$$

Окончательно для коэффициентов интенсивности напряжений имеем соотношения

$$K_I^{load} = K_I^{a_0,load} + \varepsilon K_I^{a_1,load}, \quad K_I^{bond} = K_I^{a_0,bond} + \varepsilon K_I^{a_1,bond}, \\ K_{II}^{load} = K_{II}^{a_0,load} + \varepsilon K_{II}^{a_1,load}, \quad K_{II}^{bond} = K_{II}^{a_0,bond} + \varepsilon K_{II}^{a_1,bond}, \\ K_I + iK_{II} = \left(K_I^{load} + K_I^{bond} \right) - i \left(K_{II}^{load} + K_{II}^{bond} \right);$$

для левого конца трещины и

$$K_I^{bond} = K_I^{b_0,load} + \varepsilon K_I^{b_1,load}, \quad K_I^{load} = K_I^{b_0,load} + \varepsilon K_I^{b_1,load}, \\ K_{II}^{load} = K_{II}^{b_0,load} + \varepsilon K_{II}^{b_1,load}, \quad K_{II}^{bond} = K_{II}^{b_0,bond} + \varepsilon K_{II}^{b_1,bond}.$$

для правого конца трещины.

Для анализа предельного равновесия листового элемента ослабленного криволинейной трещиной с концевыми зонами (зонами предразрушения) при действии внешнего неоднородного напряженного поля необходим двухпараметрический критерий разрушения, первое условие которого есть условие продвижения вершины трещины, а второе – условие разрыва связей на краю концевой зоны. В качестве первого условия разрушения принят силовой критерий разрушения Ирвина. Таким образом, предельному равновесию вершины трещины соответствует выполнение условия

$$K = K_c, \quad (23)$$

Здесь $K = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$ – модуль коэффициентов интенсивности напряжений при наличии связей в концевой зоне трещины; K_c – постоянная материал листового элемента.

Вторым условием разрушения принят критерий критического раскрытия берегов трещины. Полагаем, что разрыв связей на краю зоны предразрушения ($x_* = a_1$ или $x_* = b_1$) происходит при выполнении условия

$$V(x_*) = \sqrt{(u^+ - u^-)^2 + (v^+ - v^-)^2} = \delta_c, \quad (24)$$

здесь δ_c – предельная длина связи.

Заключение. Совместное решение полученных уравнений (18), (19), (21)–(24) позволяет при заданной длине криволинейной трещины и характеристиках межчастичных связей установить критическую внешнюю нагрузку и размеры концевых зон предразрушения для предельно-равновесного состояния вершины трещины и края зоны предразрушения. Используя предельные значения K_c и δ_c , которые определяются опытным путем для каждого материала листового элемента, можно выделить режимы равновесия и развития криволинейной трещины при монотонном нагружении. Если условия

$$K \geq K_c, \quad V(x_*) < \delta_c$$

выполняются, происходит продвижение кончика трещины вместе с увеличением длины зоны предразрушения без разрыва связей. Этот этап роста трещины можно рассматривать, как процесс приспособляемости к заданному уровню внешних нагрузок. Рост вершины трещины и одновременно разрыв межчастичных связей на краю концевой зоны предразрушения будет происходить если

$$K \geq K_c, \quad V(x_*) \geq \delta_c.$$

При выполнении условий

$$K < K_c, \quad V(x_*) < \delta_c$$

происходит разрыв связей без продвижения вершины трещины, а размер концевой зоны предразрушения сокращается, стремясь к критическому для данного уровня нагрузок значению.

При

$$K < K_c, \quad V(x_*) \geq \delta_c,$$

положение вершины трещины и концевой зоны предразрушения не меняется.

Установлено, что температурное поле напряжений существенно замедляет рост трещины в листовом элементе и способствует повышению критических разрушающих внешних нагрузок.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Финкель, В. М. Физические основы торможения разрушения. М.: Металлургия, 1977. 380 с.
- [2] Беленький В. Д. Закрытие центральной трещины в круговом диске под действием температурного поля // Проблемы прочности. 1984. № 6. С. 35–38.
- [3] Potthast B., Herrmann K. P. Asymptotic analysis for temperature fields induced by dynamic crack growth in pressure-sensitive materials // Int. J. of Fracture. 2000. Vol. 106. P. 57–64.
- [4] Кадиев Р. И., Мирсалимов В. М. Влияние теплового источника на динамику роста трещины // Вестник Даг. гос. ун-та. 2001. № 4. С. 69–73.
- [5] Fu Y.-M., Bai X.-Z., Qiao G.-Y., Hu Y.-D., Luan J.-Y. Technique for producing crack arrest by electromagnetic heating // Materials Science and Technology. 2001. Vol. 17. P. 1653–1656.
- [6] Кадиев Р. И. Коэффициенты интенсивности напряжений для пластины, ослабленной трещиной, при воздействии теплового источника // Вестник ДНЦ РАН. 2003. № 14. С. 15–18.
- [7] Мирсалимов В. М., Кадиев Р. И. Закрытие трещины в листовом элементе под действием локального теплового поля // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2004. № 6. С. 69–75.
- [8] Kovtunen V. A. Nonconvex problem for crack with nonpenetration // Z. Angew. Math. Mech.. 2005. Bd. 85. Fasz. 4. P. 242–251.
- [9] Мирсалимов В. М. К решению задачи механики контактного разрушения о зарождении и развитии трещины со связями между берегами во втулке фрикционной пары // Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71. Вып. 1. С. 132–151.
- [10] Qin Z, Librescu L., Hasanyan D. Joule heating and its implications on crack detection/arrest in electrically conductive circular cylindrical shells // J. of Thermal Stresses. 2007. Vol. 30. P. 623–637.
- [11] Liu T. J. C. Thermo-electro-structural coupled analyses of crack arrest by Joule heating // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2008. Vol. 49. P. 171–184.
- [12] Мир-Салим-заде М. В. Моделирование частичного закрытия трещин в перфорированной изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров // ПМТФ. 2010. Т. 51, №2. С. 148–159.
- [13] Димаки А. В., Мельников А. Г., Плешанов В. С., Сизова О. В. Теоретическое и экспериментальное исследование залечивания поверхностных трещин индукционным нагревом // Перспективные материалы. 2010. № 3. С. 77–83.
- [14] Liu T. J. C. Finite element modeling of melting crack tip under thermo-electric Joule heating // Engineering Fracture Mechanics. 2011. Vol. 78. P. 666–684.
- [15] Liu T. J. C. Fracture mechanics of steel plate under Joule heating analyzed by energy density criterion // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2011. Vol. 56. P. 154–161.
- [16] Мирсалимов В. М., Рустамов Б. Э. Моделирование частичного закрытия трещиновидной полости со связями между берегами в изотропной среде // Прикладная механика и техническая физика. 2013. № 6. С. 181–190.

- [17] Liu T. J. C. Compressive stresses near crack tip Induced by thermo-electric field // *Int. J. of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering*, 2014. Vol. 8. P. 1799–1802.
- [18] Georgantzinou S. K., Anifantis N. K. Crack closure // *Encyclopedia of Thermal Stresses* (edit. R.V. Hetnarski). Springer Netherlands. 2014. P. 774–779.
- [19] Мир-Салим-заде М. В. Трещины со связями в перфорированной стрингерной пластине // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2014. № 5. С. 34–43.
- [20] Itou S. Thermal stresses around two upper cracks placed symmetrically about a lower crack in an infinite orthotropic plane under uniform heat flux // *J. of theoretical and applied mechanics*. 2014. Vol. 52. P. 617–628.
- [21] Мустафаев А. Б. Взаимодействие берегов искривленной трещины в изгибающейся полосе (балке) под действием теплового источника // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2014. № 4. с. 29–41.
- [22] Мирсалимов В. М., Мустафаев А. В. Решение задачи о частичном контактировании берегов щели переменной ширины под действием температурного поля. // *Физико-хим. механика материалов*. 2015. № 1. С. 86–92.
- [23] Mirsalimov V. M., Mustafayev A. V. A contact problem on partial interaction of faces of a variable thickness slot under the influence of temperature field // *Mechanika*. 2015. Vol. 21. P. 19–22.
- [24] Мустафаев А. Б. Замедление роста щели переменной ширины под действием температурного поля // *Прикладная механика и техническая физика*. 2017. Т. 58, № 1, с. 168–176.
- [25] Гаджиев В. Д., Мирсалимов В. М. Предельно-равновесное состояние детали типа втулки контактной пары при наличии трещин со связями между берегами // *Оптимальное проектирование механических систем*. Баку: Элм, 1999. С. 50–63.
- [26] Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 252 с.
- [27] Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
- [28] Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
- [29] Мирсалимов В. М. Неоднородные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987. 256 с.
- [30] Ильюшин А. А. Пластичность. М.: Логос, 2003. 376 с.

A.B. Mustafayev

RETARDATION OF GROWTH OF CURVILINEAR CRACK WITH INTERFACIAL BONDS BY HEAT STRESS FIELD*Institute of Mathematics and Mechanics of the Academy of Sciences of Azerbaijan*

Abstract. The changes of the temperature field near the tips of a curvilinear crack in a sheet element under the action of external non-uniform stress field are considered. It is taken into account that the curvilinear crack has end zones with interfacial bonds (cohesive tractions). It is assumed that these zones are adjacent to the crack tips and its sizes are comparable to size of the crack. The solution of the boundary problem of equilibrium of a curvilinear crack with interfacial bonds in the end zones under the action of external non-uniform stress field, induced thermoelastic stress field and tractions in the bonds, is reduced in each approximation to a system of nonlinear singular Cauchy-type equations. From the solution of the obtained equations system the normal and tangential tractions in the interfacial bonds are found. The condition of limiting equilibrium of the curvilinear crack with end zones is formulated on the basis of a two-parameter fracture criterion.

Keywords: sheet construction element, curvilinear crack, temperature field, prefracture zones, cohesive tractions, non-uniform stress field

REFERENCES

- [1] Finkel', V. M. Fizicheskie osnovy tormozheniya razrusheniya. M.: Metallurgiya, 1977. 380 s. (in Russian)
- [2] Belen'kij V. D. Zakrytie central'noj treshchiny v krugovom diske pod dejstviem temperaturnogo polya // Problemy prochnosti. 1984. № 6. S. 35–38. (in Russian)
- [3] Potthast B., Herrmann K. P. Asymptotic analysis for temperature fields induced by dynamic crack growth in pressure-sensitive materials // Int. J. of Fracture. 2000. Vol. 106. P. 57–64. (in Russian)
- [4] Kadiev R. I., Mirsalimov V. M. Vliyanie teplovogo istochnika na dinamiku rosta treshchiny // Vestnik Dag. gos. un-ta. 2001. № 4. S. 69–73. (in Russian)
- [5] Fu Y.-M., Bai X.-Z., Qiao G.-Y., Hu Y.-D., Luan J.-Y. Technique for producing crack arrest by electromagnetic heating // Materials Science and Technology. 2001. Vol. 17. P. 1653–1656.
- [6] Kadiev R. I. Koehfficienty intensivnosti napryazhenij dlya plastiny, oslablennoj treshchinoj, pri vozdejstvii teplovogo istochnika // Vestnik DNC RAN. 2003. № 14. S. 15–18. (in Russian)
- [7] Mirsalimov V. M., Kadiev R. I. Zakrytie treshchiny v listovom ehlemente pod dejstviem lokal'nogo teplovogo polya // Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin. 2004. № 6. S. 69–75. (in Russian)
- [8] Kovtunenkov V. A. Nonconvex problem for crack with nonpenetration // Z. Angew. Math. Mech.. 2005. Bd. 85. Fasz. 4. P. 242–251. (in Russian)

Mustafayev Azer Bayram ogly,

e-mail: azer_bm@list.ru, Ph.D., doctorant, Institute of Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

- [9] Mirsalimov V. M. K resheniyu zadachi mekhaniki kontaktного razrusheniya o zarozhdenii i razvitii treshchiny so svyazyami mezhdru beregami vo vtulke frikcionnoj pary // Prikladnaya matematika i mekhanika. 2007. T. 71. Vyp. 1. S. 132–151. (in Russian)
- [10] Qin Z, Librescu L., Hasanyan D. Joule heating and its implications on crack detection/arrest in electrically conductive circular cylindrical shells // J. of Thermal Stresses. 2007. Vol. 30. P. 623–637.
- [11] Liu T. J. C. Thermo-electro-structural coupled analyses of crack arrest by Joule heating // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2008. Vol. 49. P. 171–184.
- [12] Mir-Salim-zade M. V. Modelirovanie chastichnogo zakrytiya treshchin v perforirovannoj izotropnoj srede, usilennoj reguljarnoj sistemoj stringerov // PMTF. 2010. T. 51, №2. S. 148–159. (in Russian)
- [13] Dimaki A. V., Mel'nikov A. G., Pleshanov V. S., Sizova O. V. Teoreticheskoe i ehksperimental'noe issledovanie zalechivaniya poverhnostnyh treshchin indukcionnym nagrevom // Perspektivnye materialy. 2010. № 3. S. 77–83. (in Russian)
- [14] Liu T. J. C. Finite element modeling of melting crack tip under thermo-electric Joule heating // Engineering Fracture Mechanics. 2011. Vol. 78. P. 666–684.
- [15] Liu T. J. C. Fracture mechanics of steel plate under Joule heating analyzed by energy density criterion // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2011. Vol. 56. P. 154–161.
- [16] Mirsalimov V. M., Rustamov B. EH. Modelirovanie chastichnogo zakrytiya treshchinovidnoj polosti so svyazyami mezhdru beregami v izotropnoj srede // Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. 2013. № 6. S. 181–190. (in Russian)
- [17] Liu T. J. C. Compressive stresses near crack tip Induced by thermo-electric field // Int. J. of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering, 2014. Vol. 8. P. 1799–1802.
- [18] Georgantzinos S. K., Anifantis N. K. Crack closure // Encyclopedia of Thermal Stresses (edit. R.B. Hetnarski). Springer Netherlands. 2014. P. 774–779.
- [19] Mir-Salim-zade M. V. Treshchiny so svyazyami v perforirovannoj stringernej plastine // Stroitel'naya mekhanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij. 2014. № 5. S. 34–43.
- [20] Itou S. Thermal stresses around two upper cracks placed symmetrically about a lower crack in an infinite orthotropic plane under uniform heat flux // J. of theoretical and applied mechanics. 2014. Vol. 52. P. 617–628.
- [21] Mustafaev A. B. Vzaimodejstvie beregov iskrivlennoj treshchiny v izgibayushchejsya polose (balke) pod dejstviem teplovogo istochnika // Stroitel'naya mekhanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij. 2014. № 4. s. 29-41. (in Russian)
- [22] Mirsalimov V. M., Mustafaev A. B. Reshenie zadachi o chastichnom kontaktirovanii beregov shcheli peremennoj shiriny pod dejstviem temperaturnogo polya. // Fiziko-him. mekhanika materialov. 2015. № 1. S. 86–92. (in Russian)
- [23] Mirsalimov V. M., Mustafayev A. B. A contact problem on partial interaction of faces of a variable thickness slot under the influence of temperature field // Mechanika. 2015. Vol. 21. P. 19–22.
- [24] Mustafaev A. B. Zamedlenie rosta shcheli peremennoj shiriny pod dejstviem temperaturnogo polya // Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. 2017. T. 58, № 1, s. 168-176. (in Russian)
- [25] Gadzhiev V. D., Mirsalimov V. M. Predel'no-ravnovesnoe sostoyanie detali tipa vtulki kontaktной pary pri nalichii treshchin so svyazyami mezhdru beregami //

Optimal'noe proektirovanie mekhanicheskikh sistem. Baku: EHI, 1999. S. 50–63. (in Russian)

[26] Parkus G. Neustanovivshiesya temperaturnye napryazheniya. M.: Fizmatgiz, 1963. 252 s. (in Russian)

[27] Muskhelishvili N.I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti. M.: Nauka, 1966. 707 s. (in Russian)

[28] Panasyuk V. V., Savruk M. P., Dacyshin A. P. Raspredelenie napryazhenij okolo treshchin v plastinakh i obolochkah. Kiev: Nauk. dumka, 1976. 443 s. (in Russian)

[29] Mirsalimov V. M. Neodnomernye uprugoplasticheskie zadachi. M.: Nauka, 1987. 256 s. (in Russian)

[30] Il'yushin A. A. Plastichnost'. M.: Logos, 2003. 376 s. (in Russian)