Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 4 (38). С. 80–89

Р. И. Непершин

О ПЛАСТИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ ФЛАНЦА ПРИ ВЫТЯЖКЕ ТОНКОСТЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ МИЗЕСА

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия

Аннотация. Приведено аналитическое решение задачи идеально пластического течения фланца заготовки при вытяжке тонкостенной цилиндрической оболочки при плоском напряженном состоянии по Соколовскому при условии пластичности Мизеса. Решение получено в параметрической форме для напряжений с расчетами линий скольжения, радиальной скорости и изменения начальной толщины. Предельное отношение диаметра заготовки к диаметру проема матрицы, ограниченное максимальным напряжением растя-жения на контуре матрицы, при условии пластичности Мизеса ниже по сравнению с условием пластичности Треска, которое используется в теории глубокой вытяжки цилиндрической оболочки.

Ключевые слова: идеальная пластичность, условие пластичности Мизеса, плоское напряженное состояние, глубокая вытяжка, тонкостенная цилиндрическая оболочка, радиальное течение фланца, изменение толщины, линии скольжения.

УДК: 539.374+ 621.735

Введение. При глубокой вытяжке тонкостенной цилиндрической оболочки с плоским дном во фланце заготовки возникает плоское напряженно-деформированное состояние, зависящее от отношения радиуса кромки фланца R к радиусу r_0 проема матрицы. После небольшого начального участка упругопластического деформирования пластическая область распространяется до свободной кромки фланца [1] и начинается пластическое течение с большими деформациями при дальнейшем перемещении пуансона, которое рассчитывается по модели идеально пластического тела. При больших отношениях R/r_0 на начальной стадии глубокой вытяжки на контуре проема матрицы возникают большие растягивающие напряжения σ_{r0}, которые приводят к локализации пластической деформации в “шейке” и разрушению металла. Предельное отношение R/r_0 определяют из решения дифференциального уравнения равновесия элемента плоского фланца в полярных координатах r,θ

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \tag{1}$$

с граничным условием на свободной кромке фланца

Непершин Ростислав Иванович
`e-mail:` nepershin_ri@rambler.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия.

Поступила 10.09.2018

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_\theta = -\sigma_Y, \quad r = R, \tag{2}$$

где σ_Y – напряжение текучести.
При условии пластичности Треска

$$\sigma r - \sigma_\theta = \sigma_Y \tag{3}$$

толщина фланца остается постоянной, и уравнение (1) с граничным условием (2) определяет распределение напряжений по радиусу фланца [2,3]

$$\sigma_r = \sigma_Y \ln(R/r), \quad \sigma_\theta = \sigma_Y[\ln(R/r) - 1]. \tag{4}$$

При $\sigma_{r0} = \sigma_Y$ на границе $r = r_0$ из (4) следует предельное отношение $R/r_0 = 2.7183$. При осесимметричной вытяжке условие пластичности Мизеса имеет вид [2]

$$\sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = \sigma_Y^2. \tag{5}$$

Подстановка в (1) напряжения σ_θ в зависимости от σ_r из (5) приводит к нелинейному дифференциальному уравнению для σ_r, точное решение которого неизвестно. Закон пластического течения, ассоциированный с условием пластичности Мизеса

$$de_r = \mathrm{c}d\varepsilon_\theta, \quad \mathrm{c} = (2\sigma_r - \sigma_\theta)/(2\sigma_\theta - \sigma_r), \quad de_\theta = dr/r \tag{6}$$

и условие пластической несжимаемости позволяют рассчитывать изменение толщины

$$dh/h = -(1 + \mathrm{c})de_\theta \tag{7}$$

при известном напряженном состоянии σ_r, σ_θ и радиальном перемещении материального элемента, определяющего приращение деформации de_θ, что имеет важное практическое значение.

Для приближенной оценки деформаций, упрочнения материала и изменения толщины фланца в [4-6] напряжения вычисляются по “модифицированному” условию пластичности Треска с заменой правой части в (3) на $m\sigma_Y$ с эмпирическим множителем $m \approx 1.077$ для эквивалентного напряжения текучести σ_e, которое при условиях пластичности Треска и Мизеса отличается на множитель 1.1547. В этом случае напряжения σ_r и σ_θ определяются формулами (4) с множителем $m\sigma_Y$ в правой части и предельное отношение R/r_0 при условии $\sigma_{r0} \leq \sigma_Y$, $r = r_0$ имеет значение $R/r_0 = 2.5307$, которое согласуется с экспериментальными данными глубокой вытяжки стаканов из высокопластичных металлов [7] .

Моделирование нестационарных процессов глубокой вытяжки тонкостенных осесимметричных оболочек, основанное на численном решении уравнения равновесия (1) с условием пластичности Мизеса с учетом изменения толщины по уравнениям (6), (7) и упрочнения материала σ_Y (e_p), где e_p – накопленная пластическая деформация, приведено в работах [8-10].

В настоящей работе приведено аналитическое решение уравнения равновесия (1) с граничным условием (2) при условии пластичности Мизеса (5) в плоском фланце с постоянной начальной толщиной для идеально пластического материала с использованием параметрического представления напряжений σ_r и σ_θ по Соколовскому [2]

$$\sigma_r = \sigma_e \cos(\omega - \pi/6), \quad \sigma_\theta = \sigma_e \cos(\omega + \pi/6), \quad \sigma_e = 2\sigma_Y/v3, \tag{8}$$

которое тождественно удовлетворяет условию пластичности (5). Уравнения (1) с параметрическим представлением (8) использованы в аналитическом решении [2] задачи плоского напряженного состояния при растяжении пластины с круговым отверстием при равномерном распределении давления по контуру отверстия. В интервале $2\pi/3 \geq \omega \geq \pi/6$ уравнения равновесия при плоском напряженном состоянии относятся к гиперболическому типу с неортогональными линиями скольжения [2]. При $\omega = 2\pi/3$ выполняются граничные условия (2) на свободной кромке плоского фланца. При $\omega = \pi/3$ из (8) следует одноосное растяжение $\sigma_r = \sigma_Y$, $\sigma_\theta = 0$, определяющее предельное отношение R/r_0 при малом изменении толщины и напряжения текучести на начальной стадии вытяжки по критерию максимального напряжения растяжения, приводящего к локальному разрушению по механизму образования "шейки".

Напряженное состояние фланца. Подстановка напряжений (8) в (1) приводит к дифференциальному уравнению для переменной ω

$$\frac{d\omega}{dr}\sin(\omega-\pi/6)-\frac{\sin\omega}{r}=0. \qquad (9)$$

Уравнение (9) разделением переменных приводится к виду удобному для интегрирования

$$2dr/r=(v3-\operatorname{ctg}\omega)d\omega. \qquad (10)$$

Интегрирование левой и правой частей уравнения (10) приводит к выражению

$$ln[r^2\sin\omega]=v3\omega+\mathrm{C}, \qquad (11)$$

где C – постоянная интегрирования. Из уравнения (11) находим зависимость $r(\omega)$ в виде

$$r^2=exp(v3\omega+\mathrm{C})/\sin\omega. \qquad (12)$$

Постоянную интегрирования C находим из граничного условия (2) и соотношений (8) при $\sigma_r = 0$, $\sigma_\theta = -\,\sigma_Y$, $\omega = 2\pi/3$, $r = R$ на свободной кромке фланца.

Из формулы (12) находим безразмерный радиус r/R, принимая радиус фланца за характерный размер

$$(r/R)2=exp(v3\omega-\mathrm{C})/\sin\omega,\quad \mathrm{C}=2\pi/v3-\ln(v3/2)=3.7714. \qquad (13)$$

Формула (13) справедлива в интервале изменения ω, в котором производная

$$\frac{dr}{d\omega}=\frac{\exp(\sqrt{3}\omega-C)(\sqrt{3}\sin\omega-\cos\omega)}{2r\sin^2\omega} \qquad (14)$$

положительна. Это условие выполняется в интервале $\pi/6 \leq \omega \leq 2\pi/3$, в котором уравнения плоского напряженного состояния относятся к гиперболическому типу [2].

Одноосное растяжение $\sigma_r = \sigma_Y$, $\sigma_\theta = 0$ на радиусе r_0 находим из (8) при $\omega = \pi/3$. Соответствующее предельное отношение R/r_0= 2.4765, при котором возможно пластическое разрушение стенки цилиндрической оболочки, вычисляем по формуле (13). При $\omega = \pi/6$ имеет место двухосное растяжение $\sigma_r = 2\sigma_Y$ / v3, $\sigma_\theta = \sigma_Y$ / v3. Минимальный радиус $r^*/R = 0.3377$, при котором применима формула (13), определяется значением $\omega = \pi/6$. Распределение напряжений σ_r, σ_θ по радиусу r/R находим по формулам (8) задавая значения ω в интервале от $\pi/6$ до $2\pi/3$ и вычисляя соответствующие значения r/R по формуле (13). Результаты расчетов приведены в табл. 1. На рис. 1 и 2 показано графическое представление этих зависимостей.

ω	r/R	σ_r/σ_Y	σ_θ/σ_Y	ω	r/R	σ_r/σ_Y	σ_θ/σ_Y
0.524	0.338	1.155	0.577	1.388	0.509	0.750	-0.385
0.602	0.340	1.151	0.497	1.466	0.542	0.679	-0.470
0.681	0.345	1.140	0.414	1.545	0.578	0.603	-0.551
0.759	0.353	1.123	0.328	1.623	0.619	0.524	-0.629
0.838	0.364	1.098	0.240	1.702	0.665	0.442	-0.703
0.916	0.377	1.067	0.151	1.780	0.717	0.357	-0.773
0.995	0.392	1.029	0.060	1.859	0.775	0.270	-0.838
1.073	0.410	0.985	-0.030	1.937	0.841	0.181	-0.897
1.152	0.431	0.934	-0.121	2.016	0.915	0.091	-0.952
1.230	0.454	0.878	-0.210	2.094	1.000	0.000	-1.000
1.309	0.480	0.817	-0.299				

Таблица 1. Распределение напряжений σ_r, σ_θ

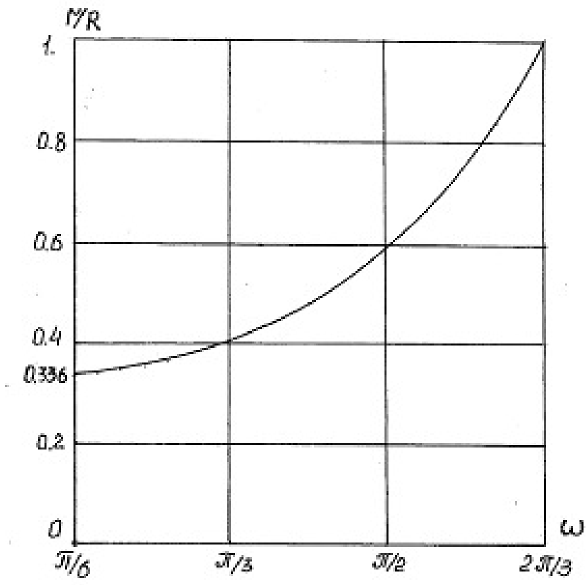

Рис. 1. Зависимость $r(\omega)$

Радиальное пластическое течение фланца. Скорость V_r радиального течения материальных точек фланца находится из соотношений (6) ассоциированного закона пластического течения, записанных для скоростей деформаций в радиальном и окружном направлениях

$$dV_r/dr = cV_r/r\mathrm{c} = (2\sigma_r - \sigma_\theta)/(2\sigma_\theta - \sigma_r). \quad (15)$$

Так как коэффициент c связан с параметром ω соотношениями (8)

$$\mathrm{c} = \frac{\cos\omega + \sqrt{3}\sin\omega}{\cos\omega - \sqrt{3}\sin\omega}, \quad (16)$$

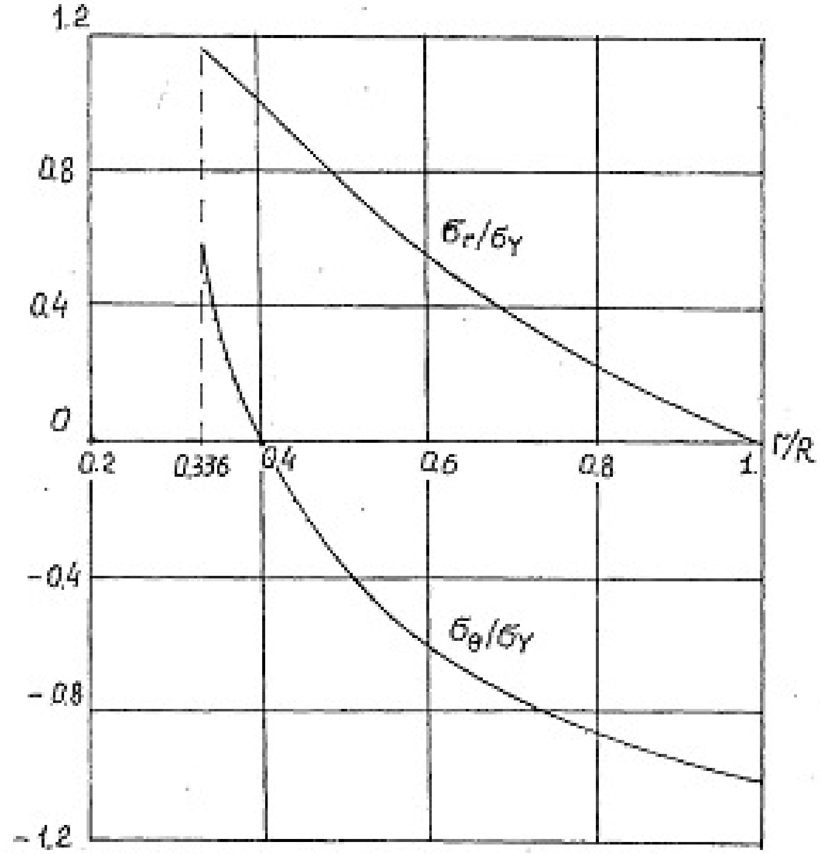

Рис. 2. Распределения напряжений σ_r, σ_θ

где ω зависит от координаты r по формуле (13). Подстановка (16) в (15) приводит к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{dV_r}{V_r} = c(\omega)\frac{dr}{r}. \tag{17}$$

Замена переменной r на ω, с использованием (13) и (14), приводит уравнение (17) к виду

$$2\frac{dV_r}{V_r} = c(\omega)\frac{\sqrt{3}\sin\omega - \cos\omega}{\sin\omega}d\omega. \tag{18}$$

Подстановка (16) в (18) приводит к уравнению удобному для интегрирования

$$2\frac{dV_r}{V_r} = \frac{3 - \operatorname{ctg}^2\omega}{\operatorname{ctg}\omega - \sqrt{3}}d\omega. \tag{19}$$

Из уравнения (19) находим зависимость $V_r\ (\omega)$ при заданной скорости V_0 на радиусе r_0, который определяется значением ω_0 по формуле (13)

$$\left(\frac{V_r}{V_0}\right)^2 = \exp\int_{\omega 0}^{\omega}\frac{3 - \operatorname{ctg}^2\omega}{\operatorname{ctg}\omega - \sqrt{3}}d\omega. \tag{20}$$

Зависимость $V_r\ (r)$ вычисляется с использованием формулы (13). Правую часть уравнения (20) находим численным интегрированием.
Изменение начальной толщины фланца h_0 находим по уравнению (7) при заданном малом перемещении $V_0\ dt$ точек фланца на радиусе r_0 с учетом отрицательного направления скорости V_r с использованием формул (13), (16), (20)

$$dh/h_0 = (1 + \text{c})V_r dt/r. \tag{21}$$

В табл. 2 и на рис. 3 приведены распределения скорости V_r/V_0 и изменения толщины dh/h_0 по радиусу фланца, вычисленные по уравнениям (20) и (21) при $\omega_0 = \pi/3$, r_0= 0.4038, $dt = 0.1$ при одноосном растяжении $\sigma_r = \sigma_Y$, $\sigma_\theta = 0$ на радиусе r_0. Скорость V_r/V_0 снижается нелинейно от проема матрицы к свободной кромке фланца до значения 0.4099 при $r/R = 1$. При $\omega = \pi/2$, $r/R = 0.5913$ имеет место плоская деформация без изменения толщины вследствие равенств $\sigma_r = -\,\sigma_\theta$ и $c = -\,1$ в уравнениях (15), (16) и (21). При $r/R > 0.5913$ начальная толщина фланца незначительно увеличивается и близка к постоянному значению. При $r/R < 0.5913$ происходит быстрое уменьшение толщины, которая переходит в стенку оболочки вблизи закругленной кромки пуансона при его малом осевом перемещении. Этим можно объяснить известное на практике [1,7] локальное уменьшение толщины в виде "шейки" при глубокой вытяжке тонкостенной оболочки с плоским дном.

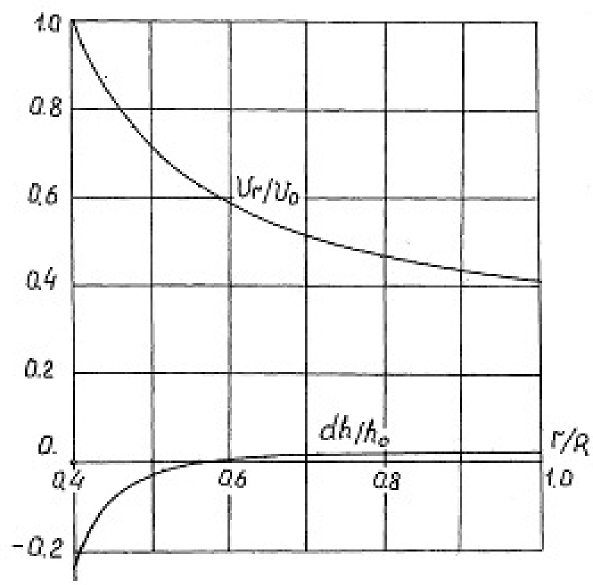

Рис. 3. Распределения скорости V_r и изменение толщины dh

Линии скольжения. Дифференциальные уравнения линий скольжения ξ, η на плоскости *x,y* при плоском напряженном состоянии и условии пластичности Мизеса в интервале $\pi/6 \le \omega \le 2\pi/3$ имеют вид [2]

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg}\,(\varphi - \psi) \quad \text{для} \quad \xi, \quad \frac{dy}{dx} = \text{tg}\,(\varphi + \psi) \quad \text{для} \quad \eta, \tag{22}$$

ω	r/R	V_r/V_0	dh/h_0	ω	r/R	V_r/V_0	dh/h_0
1.047	0.404	1.000	–0.248	1.623	0.619	0.570	0.005
1.100	0.416	0.943	–0.189	1.676	0.649	0.546	0.010
1.152	0.430	0.891	–0.143	1.728	0.682	0.524	0.013
1.204	0.446	0.843	–0.108	1.780	0.717	0.504	0.015
1.257	0.462	0.799	–0.080	1.833	0.755	0.485	0.017
1.309	0.480	0.758	–0.058	1.885	0.796	0.467	0.018
1.361	0.499	0.720	–0.040	1.937	0.841	0.451	0.019
1.414	0.519	0.685	–0.027	1.990	0.889	0.436	0.020
1.466	0.542	0.653	–0.016	2.042	0.942	0.423	0.020
1.518	0.565	0.623	–0.007	2.094	1.000	0.410	0.020
1.571	0.591	0.596	0.000				

Таблица 2. Распределение скорости V_r и изменение толщины dh

где φ – угол наклона напряжения σ_1 к оси x, ψ – угол наклона касательной к линиям скольжения к направлению σ_1. Угол ψ связан с параметром ω соотношением

$$\operatorname{ctg}\omega = -v3\cos 2\psi. \tag{23}$$

Вдоль линий скольжения выполняются интегральные соотношения

$$\varphi - \lambda = const \quad \text{вдоль} \quad \xi, \quad \varphi + \lambda = const \quad \text{вдоль} \quad \eta, \tag{24}$$

где переменная λ определяется углом ψ по формуле

$$\operatorname{tg}\lambda = \operatorname{tg}^3\psi, \tag{25}$$

и угол ψ связан с ω соотношением (23). В рассматриваемой задаче радиального пластического течения радиус-вектор r определяется параметром ω по формуле (13), и направление главного напряжения σ_1 совпадает с направлением r при $\varphi = \theta$.
Линии скольжения с соотношениями (24) находим решением задачи Коши от свободной кромки фланца $r = R$, где $\sigma_1 = 0$ $\omega = 2\pi/3$ и переменные ψ и λ определяются формулами (23) и (25)

$$\varphi = \theta, \quad \lambda = 0.3398, \quad \psi = 0.6155, \quad r = R. \tag{26}$$

Значения λ и φ в точке пересечения линий скольжения ξ и η находим из соотношений (24)

$$\lambda = \mathrm{S}(\lambda 1 + \lambda 2 + \varphi 2 - -\varphi 1), \quad \varphi = \mathrm{S}(\lambda 2 - -\lambda 1 + \varphi 1 + \varphi 2), \tag{27}$$

где λ_1, φ_1 и λ_2, φ_2 – известные значения (26) на границе $r = R$ на линиях скольжения ξ и η соответственно. Затем по формулам (25), (23) находим ψ, ω и по формуле (13) – радиус-вектор r точки пересечения линий скольжения. Декартовы координаты точки (r, φ) определяются формулами $x = r \cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$. На рис. 4 показана сетка линий скольжения, вычисленная на секторе фланца $0 \le \varphi \le \pi/3$, $0.5 \le r/R \le 1$ с отображением координат x, y узловых точек в виде пикселей на экране монитора.

На границе $r/R = 1$ заданы узловые точки с равномерным шагом по углу φ. От границы $r/R = 1$ решается задача Коши по приведенным выше уравнениям. На границе $\varphi = 0$ линии скольжения находятся решением смешанной задачи с использованием

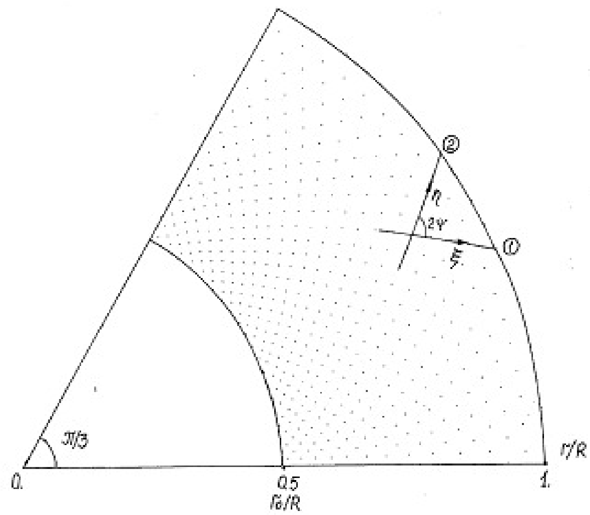

Рис. 4. Линии скольжения на секторе фланца $0.5 \leq r/R \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi/3$

второго соотношения (24) для η линии скольжения, из которого следует $\lambda = \lambda_2 + \varphi_2$, $\varphi = 0$. На границе $\varphi = \pi/3$ точки сетки линий скольжения находятся из решения смешанной задачи с использованием первого соотношения (24) для ξ линии скольжения, из которого следует $\lambda = \lambda_1 - \varphi_1 + \pi/3$, $\varphi = \pi/3$. По значениям λ на границах $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/3$ находятся значения ψ, ω, r и координаты x, y по приведенным выше формулам. Линии скольжения ограничены неравенством $r \geq r_0$ на границе $r_0 = 0.5$, где $\omega = 1.362$, $\psi = 0.8467$.

Угол 2ψ между направлениями ξ и η линий скольжения вдоль радиуса r уменьшается от 1.6934 при $r_0 = 0.5$ до 1.2309 при $r = 1$. Линии скольжения ортогональны при $r_0 = 0.5913$, где $\omega = \pi/2$ и $\sigma_r = -\sigma_\theta$. При $r_0 = 0.3377$, где $\omega = \pi/6$, $\psi = \pi/2$, линии скольжения ортогональны к радиусу r и противоположно направлены.

Заключение. Приведено аналитическое решение задачи идеально пластического течения фланца при плоском напряженном состоянии при вытяжке тонкостенной цилиндрической оболочки при условии пластичности Мизеса в параметрической форме по Соколовскому. По ассоциированному закону пластического течения вычислена радиальная скорость пластического течения и изменение начальной толщины фланца заготовки при глубокой вытяжке. Вычислены линии скольжения на плоском фланце.

Предельное отношение начального диаметра заготовки к диаметру проема матрицы по условию разрушения металла в стенке оболочки по механизму образования "шейки" при условии пластичности Мизеса ниже по сравнению с условием пластичности Треска, которое используется в теории глубокой вытяжки цилиндрической оболочки с плоским дном.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Джонсон У., Меллор П. Теория пластичности для инженеров. М: Машиностроение, 1979. 567 с.

[2] Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.

[3] Томленов А. Д. Теория пластического деформирования металлов. М.: Металлургия, 1972. 408 с.

[4] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.

[5] Попов Е. А. Основы теории листовой штамповки. М: Машиностроение,1977. 278 с.

[6] Аверкиев Ю. А., Аверкиев А. Ю. Технология холодной штамповки. М.: Машиностроение , 1989. 304 с.

[7] Романовский В. П. Справочник по холодной штамповке. Л.: Машиностроение , 1979. 520 с.

[8] Непершин Р. И. Вытяжка тонкостенной конической оболочки из плоской заготовки // 2010. МТТ. № 1. С. 139–153.

[9] Непершин Р. И. Глубокая вытяжка тонкостенной полусферы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 1. С. 74–84.

[10] Nepershin R. I. Applied Problems of Plasticity. Moscow: MSTU “STANKIN”, 2016. 310 p.

R. I. Nepershin

ON THE PLASTIC FLOW OF THE FLANGE DURING THIN-WALLED CYLINDER SHELL DRAWING WITH MISES YIELD CIRETION

Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia

Abstract. Analytical solution of the flange ideal plastic flow during thin-walled cylinder shell drawing is presented. Plane stress theory with Mises yield criterion, developed by Sokolovskii, is used. The plastic stress state is given in the parameter form solution, followed by calculations of the radial velocity, the initial thickness variation and slip lines on the workpiece flange. The limit relation of the workpiece diameter to the matrix diameter, constrained by maximal tension stress on the matrix contour, in the case of Mises yield criterion is lower compared with the cylinder shell deep drawing theory based on Tresca yield criterion.

Keywords: ideal plasticity, Mises yield criterion, plane stress theory, deep drawing, thin-walled cylinder shell, flange radial flow, thickness variation, slip lines.

REFERENCES

[1] Dzhonson U., Mellor P. Teoriya plastichnosti dlya inzhenerov. M: Mashinostroyeniye, 1979. 567 s. (in Russian)

[2] Sokolovskiy V. V. Teoriya plastichnosti. M.: Vysshaya shkola, 1969. C. 608. (in Russian)

[3] Tomlenov A. D. Teoriya plasticheskogo deformirovaniya metallov. M.: Metallurgiya, 1972. 408 s. (in Russian)

[4] Khill R. Matematicheskaya teoriya plastichnosti. M.: Gostekhizdat, 1956. 407 s. (in Russian)

[5] Popov Ye. A. Osnovy teorii listovoy shtampovki. M: Mashinostroyeniye,1977. 278 s. (in Russian)

[6] Averkiyev YU. A., Averkiyev A.YU. Tekhnologiya kholodnoy shtampovki. M.: Mashinostroyeniye , 1989. 304 s. (in Russian)

[7] Romanovskiy V. P. Spravochnik po kholodnoy shtampovke. L.: Mashinostroyeniye , 1979. 520 s. (in Russian)

[8] Nepershin R. I. Vytyazhka tonkostennoy konicheskoy obolochki iz ploskoy zagotovki //MTT. 2010. № 1. S. 139-153. (in Russian)

[9] Nepershin R. I. Glubokaya vytyazhka tonkostennoy polusfery // Problemy mashinostroyeniya i nadezhnosti mashin. 2014. № 1. S. 74–84. (in Russian)

[10] Nepershin R. I. Applied Problems of Plasticity. Moscow: MSTU "STANKIN", 2016. 310 p.

Nepershin Rostislav Ivanovich ,

e-mail: nepershin_ri@rambler.ru, Dr. Sci. Eng., Professor, Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia.