

С. А. Горшков, Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин

## РАСЧЕТ ПЛОСКОГО ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ И РАЗГРУЗКИ

*Дальневосточный федеральный университет*

*Владивостокский государственный университет экономики и сервиса*

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН*

**Аннотация.** В работе исследуется процесс формирования поля плоских температурных напряжений при нагреве тонкой заземленной пластины равномерным полем температуры. Математически физический процесс предлагается рассматривать как квазистатический процесс равномерного теплового расширения прямоугольной пластинки из термоупругопластического материала. В качестве математической модели материала выбирается среда типа Прандтля-Рейса, обобщенная на случай учета процессов теплопередачи. Заземление пары противоположных сторон пластины гарантирует выход напряженного состояния на поверхность нагружения. Условие пластичности принимается в форме Мизеса при учете зависимости предела текучести от температуры. Принцип максимума диссипации энергии Мизеса позволяет считать поверхность нагружения пластическим потенциалом и гарантирует выполнение ассоциированного закона пластического течения. В итоге, поставленная краевая задача сводится к решению систем дифференциальных уравнений в частных производных относительно параметров напряженно-деформированного состояния. Интегрирование полученных систем уравнений осуществлялось численно, для чего была построена конечно-разностная схема. По результатам численного счета определяются границы зон необратимого деформирования и разгрузки. После окончательного остывания пластины определен итоговый уровень остаточных напряжений и деформаций. Численные результаты представлены графически.

**Ключевые слова:** термоупругость, термопластичность, температурное напряжение, предел текучести, остаточное напряжение, остаточная деформация

УДК: 539.374

**Введение.** Процесс формообразования за счет необратимого деформирования при изменяющемся поле температуры требует предварительного расчета средствами математического моделирования итоговой геометрии формуемого изделия, времени формования и остаточных напряжений. Проведение таких расчетов встречает значительные трудности, связанные со следующими обстоятельствами: 1. определение неизвестной границы зоны необратимого деформирования. 2. определение разгрузочного состояния.

---

Поступила 15.08.2014

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания вузам на выполнение НИР (2014/292) и гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-33064-мол\_a\_вед „Развитие моделей и методов механики необратимого деформирования для описания процессов формоизменения материалов с нелинейными теплофизическими и реологическими свойствами“).

В представленной работе в рамках теории идеальной термоупругопластичности с пределом текучести, зависящим от температуры, исследованы особенности изменения параметров напряженно-деформированного состояния пластинки вследствие равномерного нагрева и последующего охлаждения. На основе численного метода конечных разностей разработан подход к определению необратимых температурных деформаций в двумерном случае при смешанных граничных условиях.

**Определяющие соотношения термоупругопластичности.** За основу термоупругопластического поведения материала примем модель малых деформаций (типа Прандтля–Рейса) [1]:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1)$$

$u_i$  — вектор перемещений. Деформации  $e_{ij}$  представляются в виде суммы термоупругих  $e_{ij}^e$  и пластических  $e_{ij}^p$  составляющих:

$$e_{ij} = e_{ij}^p + e_{ij}^e \quad (2)$$

В наиболее простом случае линейного изотропного тела, зависимость между термоупругими деформациями и напряжениями задается соотношениями Дюгамеля–Неймана [1]:

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk}^e - m\Theta)\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e, \quad m = \alpha(3\lambda + 2\mu) \quad (3)$$

где  $\lambda$ ,  $\mu$  — параметры Ляме материала;  $m = \alpha(3\lambda + 2\mu)$ ;  $\alpha$  — коэффициент линейного теплового расширения;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $\Theta = T - T_0$ ,  $T$  и  $T_0$  текущая и референциальная температуры соответственно. В условиях медленного изменения температурного поля, напряжения материала определяются системой уравнений равновесия:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (4)$$

При постепенном увеличении температуры тепловое расширение тела может инициировать процесс пластического течения (необратимого деформирования). Согласно ассоциированному закону пластического течения и в условиях принятия принципа максимума Мизеса [2], приращение пластической деформации пропорционально производной поверхности нагружения по напряжениям с точностью до положительного множителя  $d\lambda$ , определяемого при решении конкретной краевой задачи:

$$de_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5)$$

В качестве поверхности нагружения  $f$ , выберем условие пластичности Мизеса [2]:

$$f = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 8k^2(T) \quad (6)$$

где  $\sigma_i$  — главные напряжения,  $k(T)$  — предел текучести материала. В качестве функции предела текучести от температуры выбрана линейная зависимость

$$k = k_0 \left( 1 - \frac{T}{T_m} \right) \quad (7)$$

где  $k_0$  — референциальный предел текучести,  $T_m$  — температура плавления. Таким образом, для определения напряженно-деформированного состояния материала в случае пластического течения необходимо решить совместную систему уравнений (4) и (6). Преобразуем (1) с учетом (2):

$$e_{ij}^e = e_{ij} - e_{ij}^p = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) - e_{ij}^p \quad (8)$$

Для приращения пластической деформации имеем

$$de_{ij}^p = e_{ij}^p - \tilde{e}_{ij}^p \quad (9)$$

где  $\tilde{e}_{ij}^p$  — пластические деформации, вычисленные в предыдущий момент времени. С другой стороны согласно закону течения (5) ассоциированному с поверхностью нагружения (6) можно получить:

$$de_{ij}^p = d\lambda(3\sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}) \quad (10)$$

Из (10) следует условие пластической несжимаемости материала

$$de_{11}^p + de_{22}^p + de_{33}^p = 3d\lambda(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} - \sigma_{kk}) = 0 \quad (11)$$

Полагая, что существует момент времени, при котором  $\tilde{e}_{ij}^p = 0$  из (9) получим  $de_{ij}^p = e_{ij}^p$ , т.е. пластическая деформация согласно (11) в следующий момент времени удовлетворяет соотношению

$$e_{ii}^p = 0 \quad (12)$$

откуда следует равенство:

$$e_{ii}^e = e_{ii}^e = u_{i,i} \quad (13)$$

Подставив (11) в (10), получим:

$$e_{ij}^p = de_{ij}^p + \tilde{e}_{ij}^p = d\lambda(3\sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}) + \tilde{e}_{ij}^p \quad (14)$$

Далее из (9) с учетом (14) будет следовать

$$e_{ij}^e = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - d\lambda(3\sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}) + \tilde{e}_{ij}^p \quad (15)$$

Подставив значения  $e_{ij}^e$  из (15) и  $e_{kk}^e$  из (13) в соотношения для напряжений (3), получим выражения для компонент тензора напряжений

$$\sigma_{ij} = (\lambda u_{k,k} - m\Theta)\delta_{ij} + 2\mu \left( \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - d\lambda(3\sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}) + \tilde{e}_{ij}^p \right) \quad (16)$$

Группируя слагаемые, перепишем (16) в виде:

$$\sigma_{ij}(1 + 6\mu d\lambda) = 2\mu d\lambda \sigma_{kk}\delta_{ij} + (\lambda u_{k,k} - m\Theta)\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + 2\mu \tilde{e}_{ij}^p \quad (17)$$

Для следа тензора напряжений несложно получить выражение:

$$\sigma_{kk} = (3\lambda + 2\mu)u_{k,k} - 3m\Theta \quad (18)$$

Тогда соотношения (17) с учетом (18) примут вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= ((\lambda + L)u_{k,k} - m\Theta)\delta_{ij} + M(u_{i,j} + u_{j,i} + 2\tilde{e}_{ij}^p) \\ L(d\lambda) &= \frac{4\mu^2 d\lambda}{(1 + 6\mu d\lambda)} \quad M(d\lambda) = \frac{\mu}{(1 + 6\mu d\lambda)} \end{aligned} \quad (19)$$

Подставляя (19) в (3), получим уравнения равновесия относительно компонент вектора перемещений

$$(\lambda + L + M)u_{k,ki} + u_{k,k}L_{,i} - m\Delta T_{,i} + M(u_{i,kk} + 2\tilde{e}_{ik,k}^p) + M_{,k}(u_{i,k} + u_{k,i} + 2\tilde{e}_{ik}^p) = 0 \quad (20)$$

**Постановка краевой задачи термоупругопластичности в условиях плоского напряженного состояния.** Рассмотрим тонкую квадратную пластинку с длиной стороны 1. Стороны пластины параллельные оси абсцисс закреплены:

$$\begin{aligned} u_x(x, 0) = 0, \quad u_x(x, 1) = 0 \\ u_y(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 1) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Стороны параллельные оси ординат свободны от нагружающих усилий:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(0, y) = 0, \quad \tau_{xy}(0, y) = 0 \\ \sigma_{xx}(1, y) = 0, \quad \tau_{xy}(1, y) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Температурное поле пластины равномерно и медленно изменяется с течением времени. В таком случае можно принять гипотезу о плоском напряженном состоянии, т.е.

$$\begin{aligned}\sigma_{iz} &= 0 \\ e_{iz}^p &= 0\end{aligned}\quad (23)$$

Оставшиеся компоненты тензора напряжений согласно (3) записываются в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= (\lambda + L)u_{k,k} - m\Delta T + 2Mu_{x,x} + 2M\tilde{e}_{xx}^p \\ \sigma_{yy} &= (\lambda + L)u_{k,k} - m\Delta T + 2Mu_{y,y} + 2M\tilde{e}_{yy}^p \\ \tau_{xy} &= M(u_{x,y} + u_{y,x}) + 2M\tilde{e}_{xy}^p\end{aligned}\quad (24)$$

Величину  $u_{k,k} = (u_{x,x} + u_{y,y} + u_{z,z})$  определим из условия (23):

$$(\lambda + L)(u_{x,x} + u_{y,y} + u_{z,z}) - m\Delta T + 2Mu_{z,z} = 0\quad (25)$$

Из (25) найдем  $u_{z,z}$ :

$$u_{z,z} = \frac{m\Delta T - (\lambda + L)}{(\lambda + L + 2M)}(u_{x,x} + u_{y,y})\quad (26)$$

Тогда след тензора деформаций запишется в виде

$$u_{k,k} = \frac{m\Delta T + 2M}{(\lambda + L + 2M)}(u_{x,x} + u_{y,y})\quad (27)$$

Таким образом результирующая система дифференциальных уравнений в частных производных при условии нулевого градиента температур примет вид

В термоупругой области и области разгрузки

$$\begin{cases} (\lambda + L + M)u_{k,kx} + u_{k,k}L_{,x} + (M(u_{x,k} + u_{k,x} + 2\tilde{e}_{xk}^p))_{,k} = 0 \\ (\lambda + L + M)u_{k,ky} + u_{k,k}L_{,y} + (M(u_{y,k} + u_{k,y} + 2\tilde{e}_{yk}^p))_{,k} = 0 \\ d\lambda = 0 \end{cases}\quad (28)$$

В области пластического течения

$$\begin{cases} (\lambda + L + M)u_{k,kx} + u_{k,k}L_{,x} + (M(u_{x,k} + u_{k,x} + 2\tilde{e}_{xk}^p))_{,k} = 0 \\ (\lambda + L + M)u_{k,ky} + u_{k,k}L_{,y} + (M(u_{y,k} + u_{k,y} + 2\tilde{e}_{yk}^p))_{,k} = 0 \\ \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\tau_{xy}^2 = 4k^2 \end{cases}\quad (29)$$

**Построение и анализ численного решения.** Поскольку, температура в каждой точке пластинки — величина одинаковая и одновременно с этим предполагается медленное изменение ее уровня, временные интервалы удобно отождествлять с приращением температуры  $dT$ . Пусть в начальный момент времени температура пластинки  $T = T_0$ . Задав, малое приращение  $dT$ , вычислим напряженно-деформированное состояние пластины. Решив систему уравнений (28) получим численные значения перемещений  $u_i$ . По найденным перемещениям строятся поля напряжений согласно (19). Далее в каждом узле проверяется условие пластичности (6). В случае невыполнения условия пластичности ни в одном из узлов, рассчитываем напряженно-деформированное состояние для следующего приращения температуры. Таким образом, можно определить изменение напряженно-деформированного состояния пластины в условиях термоупругого равновесия.

При определенном уровне температуры  $T = T_1$  в некоторых узлах пластины впервые выполнится условие пластичности (6), что означает начало процесса пластического течения. Для таких узлов следует интегрировать систему разрешающих уравнений (29). Численно разрешив полученную систему дифференциальных уравнений в частных производных получим значения перемещений и множителя  $d\lambda$ . По известным значениям  $d\lambda$  и напряжениям из ассоциированного закона (10) определяется приращение пластической деформации. Таким образом, перед следующим приращением температуры в некоторых узлах будет присутствовать накопленная деформация  $\tilde{e}_{ij}^p$ . На новом временном шаге заново решаем систему уравнений (28) с целью выявить узлы, в которых вновь выполняется условие пластичности (6). После определения таких узлов для них заново решается система (28), для остальных

узлов решается система (29). Такая последовательность вычислений обеспечивает универсальный подход к вычислению напряженно-деформированного состояния. В зависимости от приращения температуры имеем, либо процесс накопления необратимых деформаций, либо процесс разгрузки, например при отрицательном приращении температуры, когда за счет накопленных деформаций на предыдущем шаге, перестает выполняться условие пластичности на следующем шаге. На рис. 1 и рис. 2 представлены остаточные напряжения при полном остывании пластины.

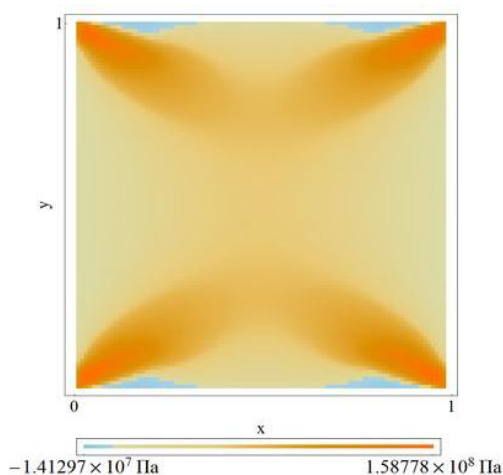


Рис. 1. Распределение остаточного напряжения  $\sigma_{xx}$

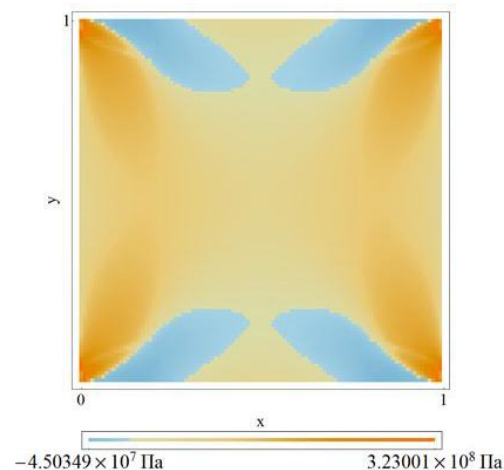


Рис. 2. Распределение остаточного напряжения  $\sigma_{yy}$

Стоит отметить высокую скорость сходимости численного решения по пространственным координатам за счет использования второго порядка точности при аппроксимации частных производных от компонент вектора перемещений. Для пространственной сетки использовалось  $n = 99$  узлов. Расчеты показали, что при более крупном разбиении  $n = 49$  длина вектора перемещений отличается примерно на 2% от такой же величины при более мелком разбиении с размером сетки  $n = 99$ . Изменение приращения температуры показало значительную зависимость алгоритма вычислений от значения  $dT$ . При построении графиков использовалось удовлетворительное значение  $dT = 5$ , при котором граница пластического течения продвигалась на расстояние 1 узла от области с накопленными деформациями. Максимальный уровень температуры при расчете  $T_2 = 500$ , минимальный уровень при котором впервые происходит пластическое течение  $T_1 = 300$ . В расчетах использовались параметры стали марки 09ГС2.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Боли, Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. – М. : Мир, 1964. – 512 с.
- [2] Быковцев, Г. И. Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.
- [3] Коваленко, А. Д. Развитие исследований в области термоупругости, термопластичности, термовязкоупругости / А. Д. Коваленко // Прикладная механика. – 1969. – Т. 5. – № 12. – С. 1–16.
- [4] Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 1989. – 432 с.

Горшков Сергей Александрович,  
бакалавр, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток

e-mail: iceberg93@yul.ru

Дац Евгений Павлович,  
магистр, ассистент, Владивостокский государственный университет экономики и сервиса,  
г. Владивосток

e-mail: dats@dvo.ru

Мурашкин Евгений Валерьевич,  
кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт проблем механики им.  
А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

e-mail: murashkin@ipmnet.ru

S. A. Gorshkov, E. P. Dats, E. V. Murashkin

## CALCULATION OF PLANE STRESS FIELD UNDER PLASTIC FLOW AND UNLOADING

*Far East Federal University*

*Vladivostok State University of Economics and Service*

*Institute For Problems in Mechanics n.a. A. Yu. Ishlinskiy RAS*

**Abstract.** The present study is devoted to the investigation of the process of formation of the 2-dimensional thermal stresses fields during heating of the clamped thin plate by the uniform temperature field. This physical process is mathematically proposed as a quasi-static process of the uniform thermal expansion of rectangular plate made of thermoelastoplastic material. The generalized Prandtl-Reuss thermoelastoplastic model is used. The clamped pair of opposite sides of the plate ensures yield stress state. Yield condition is taken by the von Mises form with yield stress depend on temperature. The principle of maximum dissipation energy suggests Mises loading surface as a plastic potential and guarantees the associated law of plastic flow. Thus, the boundary value problem is reduced to partial differential equations systems with respect to the stress-strain state parameters. Then, the resulting system is numerically integrated. The finite-difference scheme is developed. The border of irreversible deformation domain and unloading domain are computed according to the numerical results. The level of residual stresses and strains are calculated after the final cooling plate. Numerical results are graphically presented.

**Keywords:** thermoelasticity, thermoplasticity, thermal stress, yield point, residual stress, residual strain

### REFERENCES

- [1] *Boley, B.* Theory of Thermal Stresses / B. Boley, J. Weiner. – M. : Mir, 1964. 512 p.
- [2] *Bykovtsev, G. I.* Theory of Plasticity / G. I. Bykovtsev, D. D. Ivlev. – Vladivostok : Dalnauka, 1998. 528 p.
- [3] *Kovalenko, A. D.* Development of Research in The Field of Thermoelasticity, Thermoplasticity, Thermoviscoelasticity / A. D. Kovalenko // Applied Mechanics. – 1969. – Vol. 5. – № 12. – P. 1–16.
- [4] *SamarSKIY, A. A.* Numerical Methods / A. A. SamarSKIY, A. V. Gulin. – M. : Nauka, 1989. – 432 p.

*Gorshkov Sergey Alexandrovich*

*Bachelor, Far East Federal University, Vladivostok*

*Dats Evgeniy Pavlovich*

*Master, Assistant, Vladivostok State University of Economics and Service, Vladivostok*

*Murashkin Evgenii Valerievich*

*PhD, Institute For Problems in Mechanics n.a. A. Yu. Ishlinskiy RAS, Moscow*