Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 4 (38). С. 90–95

С. О. Фоминых[1]

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ ПРИ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ И АНИЗОТРОПИИ ПО МИЗЕСУ–ХИЛЛУ

[1] *Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия*

Аннотация. Рассматривается двуслойная толстостенная труба, находящаяся под действием внутреннего давления. Предполагается, что материал, обладающий свойствами анизотропии по Хиллу, примыкает к внутренней части трубы (первый слой), второй слой обладает свойствами трансляционной анизотропии. Определено напряженное состояние трубы в пластической области.

Ключевые слова: анизотропия, трансляционная анизотропия, труба, напряжение, пластичность.

УДК: 539.374

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам

$$\alpha = \frac{a}{\rho_s^0}, \quad c = \frac{c}{\rho_s^0}, \quad \beta = \frac{b}{\rho_s^0},$$

где ρ_s^0 — радиус упругопластической границы в исходном нулевом приближении, ρ — текущий радиус.

В первой, внутренней области I $a < \rho < c$ (рис. 1) имеет место условие пластичности

$$A\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) + B\tau_{xy}^2 = K_1^2, \quad A, B, K_1 - \text{const}. \tag{1}$$

Во внешней области II $c < \rho < b$ условие пластичности примем в виде

$$\left(\frac{\sigma_x^{(p)} - \sigma_y^{(p)}}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + (\tau_{xy}^{(p)} - k_3)^2 = K_2^2, \quad k_1, k_2, k_3, K_2 - \text{const}, \tag{2}$$

где $\sigma_x^{(p)}$, $\sigma_y^{(p)}$, $\tau_{xy}^{(p)}$ — компоненты напряжения в декартовой системе координат.

Будем считать компоненты напряжений безразмерными, отнесенными к некоторой величине k_0.

Фоминых Светлана Олеговна
e-mail: ermakovaso@rambler.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 01.09.2018

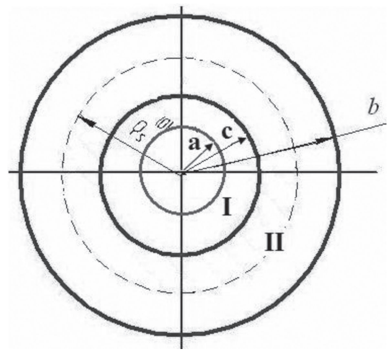

Рис. 1.

Согласно (1), (2) анизотропия материала ориентирована в декартовой системе координат x, y.

Связь между напряжениями в декартовой системе координат x, y и напряжениями в полярной системе координат ρ, θ имеет вид

$$\begin{gathered}\sigma_x = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2}\cos 2\theta + \tau_{\rho\theta}\sin 2\theta,\\ \sigma_y = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2}\cos 2\theta + \tau_{\rho\theta}\sin 2\theta,\\ \tau_{xy} = -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2}\sin 2\theta + \tau_{\rho\theta}\cos 2\theta.\end{gathered} \tag{3}$$

Из (1), (2), (3) получим условия пластичности в полярных координатах:

в первой, внутренней области I

$$\left(\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2}\right)^2\left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\cos 4\theta\right] + (\tau_{\rho\theta}^p)^2\left[\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\cos 4\theta\right] + \\ + \left(\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2}\right)\tau_{\rho\theta}^p[A-B]\sin 4\theta - K_1^2 = 0; \tag{4}$$

во внешней области II

$$\left(\frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2}\right) + \tau_{\rho\theta}^2 - 2R\left(\frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2}\right)\cos(2\theta+\mu) - \\ -2\tau_{\rho\theta}^{(p)}R\sin(2\theta+\mu) + R^2 - 1 = 0, \tag{5}$$

где

$$R = \sqrt{\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 = k_3^2}, \quad \frac{k_1 - k_2}{2R} = \cos\mu, \quad \frac{k_3}{R} = \sin\mu.$$

Решение будем искать в виде разложения по малому безразмерному параметру δ:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta\sigma_{ij}^{(I)}. \tag{6}$$

Предположим

$$A = 1 + d_1\delta, \quad B = 1 - d_1\delta, \quad 0 \le d_1 \le 1. \tag{7}$$

В нулевом исходном осесимметричном состоянии положим

$$\sigma_\rho^{(0)} = \sigma_\rho^{(0)}(\rho), \quad \sigma_\theta^{(0)} = \sigma_\theta^{(0)}(\rho), \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0. \tag{8}$$

В исходном нулевом приближении согласно (4), (8) имеет место

$$\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p} = \pm 2K_1.$$

При растяжении пластины

$$\sigma_\theta^{(0)} > \sigma_\rho^{(0)}, \quad \sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p} = -2K_1. \tag{9}$$

Для определения компонент напряжений во внутренней пластической области в нулевом приближении используем уравнение равновесия в полярной системе координат

$$\frac{d\sigma_\rho^{(0)p}}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}}{\rho} = 0. \tag{10}$$

Из (9), (10) получим

$$\sigma_\rho^{(0)} = 2K_1 \ln\rho + C_1, \quad \sigma_\theta^{(0)} = 2K_1(1 + \ln\rho) + C_1. \tag{11}$$

Предположим, что на внутренней границе действует постоянное давление p:

$$\sigma_\rho^{(0)p}\big|_{\rho=\alpha} = -p, \quad \sigma = \frac{a}{\rho_s^0}. \tag{12}$$

Напряжения в первой, внутренней области I имеют вид

$$\sigma_\rho^{(0)p} = -p + 2K_1 \ln\frac{\rho}{\alpha}, \quad \sigma_\theta^{(0)p} = -p + 2K_1\left(1 + \ln\frac{\rho}{\alpha}\right), \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)p} = 0. \tag{13}$$

В исходном нулевом приближении во внешней пластической области согласно (5), (10) имеет место

$$\sigma_\rho^{(0)} = 2K_2 \ln\rho + C_2, \quad \sigma_\theta^{(0)} = 2K_2(1 + \ln\rho) + C_2. \tag{14}$$

Условия сопряжения компонент напряжений на границе имеют вид

$$\sigma_{\rho_1}^{(0)p}\big|_{\rho=c} = \sigma_{\rho_2}^{(0)p}\big|_{\rho=c}. \tag{15}$$

Напряжения во внешней пластической области II имеют вид

$$\sigma_\rho^{(0)p} = -p + 2K_1 \ln\frac{c}{\alpha} + 2K_2 \ln\frac{\rho}{c}, \quad \sigma_\theta^{(0)p} = -p + 2K_1 \ln\frac{c}{\alpha} + 2K_2\left(1 + \ln\frac{\rho}{c}\right). \tag{16}$$

Из (4) во внутренней зоне в первом приближении имеет место

$$\sigma_\rho^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)p} = d_1 K_1 \cos 4\theta. \tag{17}$$

Решение неоднородного уравнения (17) представимо в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. Частным решением неоднородного уравнения является:

$$\sigma_{\rho_1}^{(I)} = \frac{7}{8}K_1\cos 4\theta, \quad \sigma_{\theta_1}^{(I)} = -\frac{1}{8}K_1\cos 4\theta, \quad \tau_{\rho\theta_1}^{(I)} = -\frac{1}{4}K_1\sin 4\theta. \tag{18}$$

Общее решение в первом приближении согласно (1) и (18) запишем в виде

$$\sigma_\rho^{(I)p} = \frac{1}{\rho}\big[(C_{41}(-15) + \sqrt{15}C_{42})\cos(\sqrt{15}\ln\rho) +$$

$$+(-\sqrt{15}C_{41} + C_{42}(-15))\sin(\sqrt{15}\ln\rho)\big]\cos 4\theta + \frac{7}{8}K_1\cos 4\theta,$$

$$\sigma_\theta^{(I)p} = \frac{1}{\rho}\big[(C_{41}(-15) + \sqrt{15}C_{42})\cos(\sqrt{15}\ln\rho) +$$
$$+(-\sqrt{15}C_{41} + C_{42}(-15))\sin(\sqrt{15}\ln\rho)\big]\cos 4\theta - \frac{1}{8}K_1\cos 4\theta, \tag{19}$$
$$\tau_{\rho\theta}^{(I)p} = \frac{1}{\rho}\big[4\sqrt{15}\big\{C_{42}\cos(\sqrt{15}\ln\rho) - C_{41}\sin(\sqrt{15}\ln\rho)\big\}\sin 4\theta\big] - \frac{1}{4}K_1\sin 4\theta.$$

В первом приближении граничные условия согласно [1] имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)p} &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = \alpha, \\ \sigma_\theta^{(I)p} &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = \alpha, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = \alpha. \end{aligned} \tag{20}$$

Согласно (19), (20) получим

$$C_{41} = \frac{\alpha}{240}K_1\big(\cos(\sqrt{15}\ln\alpha) - \sqrt{15}\sin(\sqrt{15}\ln\alpha)\big),$$
$$C_{42} = \frac{\alpha}{240}K_1\big(\sqrt{15}\cos(\sqrt{15}\ln\alpha) + \sin(\sqrt{15}\ln\alpha)\big).$$

Результирующие напряжения во внутренней пластической области имеют вид

$$\sigma_\rho^{(I)p} = K_1\left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}\rho}\sin\left(\sqrt{15}\ln\frac{\rho}{\alpha}\right) + \frac{7}{8}\right]\cos 4\theta,$$
$$\sigma_\theta^{(I)p} = K_1\left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}\rho}\sin\left(\sqrt{15}\ln\frac{\rho}{\alpha}\right) - \frac{1}{8}\right]\cos 4\theta, \tag{21}$$
$$\tau_{\rho\theta}^{(I)p} = K_1\left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15}\rho}\left\{\sqrt{15}\cos\left(\sqrt{15}\ln\frac{\rho}{\alpha}\right) - \sin\left(\sqrt{15}\ln\frac{\rho}{\alpha}\right)\right\} - \frac{1}{4}\right]\sin 4\theta.$$

Во внешней области

$$\sigma_\rho^{(I)p} = \bigg\{-\frac{3}{\rho}\big(C_{11}\cos(\sqrt{3}\ln\rho) + C_{12}\sin(\sqrt{3}\ln\rho)\big) +$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{\rho}\big(C_{12}\cos(\sqrt{3}\ln\rho) - C_{11}\sin(\sqrt{3}\ln\rho)\big)\bigg\}\cos 2\theta +$$
$$+\bigg\{-\frac{3}{\rho}\big(C_{21}\cos(\sqrt{3}\ln\rho) + C_{22}\sin(\sqrt{3}\ln\rho)\big) +$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{\rho}\big(C_{22}\cos(\sqrt{3}\ln\rho) - C_{21}\sin(\sqrt{3}\ln\rho)\big)\bigg\}\sin 2\theta + R'\cos(2\theta + \mu),$$
$$\sigma_\theta^{(I)p} = \bigg\{-\frac{3}{\rho}\big(C_{11}\cos(\sqrt{3}\ln\rho) + C_{12}\sin(\sqrt{3}\ln\rho)\big) + \tag{22}$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{\rho}\big(C_{12}\cos(\sqrt{3}\ln\rho) - C_{11}\sin(\sqrt{3}\ln\rho)\big)\bigg\}\cos 2\theta +$$
$$+\bigg\{-\frac{3}{\rho}\big(C_{21}\cos(\sqrt{3}\ln\rho) + C_{22}\sin(\sqrt{3}\ln\rho)\big) +$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{\rho}\big(C_{22}\cos(\sqrt{3}\ln\rho) - C_{21}\sin(\sqrt{3}\ln\rho)\big)\bigg\}\sin 2\theta - R'\cos(2\theta + \mu),$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(I)p} = 2\left\{\frac{\sqrt{3}}{\rho}\big(C_{12}\cos(\sqrt{3}\ln\rho) - C_{11}\sin(\sqrt{3}\ln\rho)\big)\right\}\sin 2\theta -$$
$$-2\left\{\frac{\sqrt{3}}{\rho}\big(C_{22}\cos(\sqrt{3}\ln\rho) - C_{21}\sin(\sqrt{3}\ln\rho)\big)\right\}\cos 2\theta - R'\sin(2\theta+\mu),$$

где C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22} — некоторые постоянные.

Условия сопряжения компонент напряжений на границе имеют вид

$$\sigma_{\rho_1}^{(I)p}\big|_{\rho=c} = \sigma_{\rho_2}^{(I)p}\big|_{\rho=c}. \tag{23}$$

Из (23) определим коэффициенты C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}:

$$C_{11} = \frac{R'c}{2}\cos\mu\left(\cos(\sqrt{3}\ln c) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}\ln c)\right),$$
$$C_{12} = \frac{R'c}{2}\cos\mu\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos(\sqrt{3}\ln c) + \sin(\sqrt{3}\ln c)\right),$$
$$C_{21} = \frac{R'c}{2}\sin\mu\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}\ln c) - \cos(\sqrt{3}\ln c)\right),$$
$$C_{22} = -\frac{R'c}{2}\sin\mu\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos(\sqrt{3}\ln c) + \sin(\sqrt{3}\ln c)\right).$$

Результирующие напряжения в пластической области во второй зоне имеют вид

$$\sigma_{\rho}^{(I)p} = -R'\left[\frac{c}{\rho}\left(\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{\rho}{c}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{\rho}{c}\right)\right) - 1\right]\cos(2\theta+\mu)+$$
$$+K_1\left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c}\sin\left(\sqrt{15}\ln\frac{c}{\alpha}\right) + \frac{7}{8}\right]\cos 4\theta,$$
$$\sigma_{\theta}^{(I)p} = -R'\left[\frac{c}{\rho}\left(\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{\rho}{c}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{\rho}{c}\right)\right) + 1\right]\cos(2\theta+\mu)+$$
$$+K_1\left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c}\sin\left(\sqrt{15}\ln\frac{c}{\alpha}\right) - \frac{1}{8}\right]\cos 4\theta, \tag{24}$$
$$\tau_{\rho\theta}^{(I)p} = R'\left[\frac{c}{\rho}\left(\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{\rho}{c}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{\rho}{c}\right)\right) - 1\right]\sin(2\theta+\mu)+$$
$$+K_1\left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15}c}\left\{\sqrt{15}\cos\left(\sqrt{15}\ln\frac{c}{\alpha}\right) - \sin\left(\sqrt{15}\ln\frac{c}{\alpha}\right)\right\} - \frac{1}{4}\right]\sin 4\theta.$$

Таким образом, напряженное состояние в пластической области полностью определено.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.

[2] Фоминых С. О. Упругоидеальнопластическое состояние анизотропной трубы // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(8). Ч. 3. С. 623–627.

S. O. Fominykh[1]

DETERMINATION OF THE STRESS STATE IN THE PLASTIC REGION OF A THICK-WALLED PIPE UNDER THE CONDITION OF PLASTICITY OF TRANSLATIONAL ANISOTROPY AND MISES–HILL ANISOTROPY

[1]*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia*

Abstract. A two-layer thick-walled pipe under the action of internal pressure is considered. It is assumed that a material with Hill anisotropy properties is adjacent to the inside of the pipe (the first layer), the second layer has the properties of translational anisotropy. The stress state of the pipe in the plastic region is determined.

Keywords: anisotropy, transmitting anisotropy, a pipe, pressure, plasticity.

REFERENCES

[1] Ivlev D. D., Ershov L. V. Metod vozmuchenij v teorii uprugoplasticheskogo tela. M.: Nauka, 1978. 208 s. (in Russia)

[2] Fominykh S. O. Uprugoidealnoplasticheskoe sostojanie anizotropnoj truby // Vestnik ChGPU im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predelnogo sostojanija. 2010. № 2(8). Ch. 3. S. 623–627. (in Russia)

Fominykh Svetlana Olegovna

`e-mail:` ermakovaso@rambler.ru, Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Russia