

Р. И. Непершин

## О ВДАВЛИВАНИИ ЦИЛИНДРА В ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО С УЧЕТОМ КОНТАКТНОГО ТРЕНИЯ

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия

**Аннотация.** Представлено моделирование вдавливания цилиндра в идеально пластическое полупространство при плоской деформации с учётом контактного трения по Прандтлю. Численным интегрированием дифференциальных уравнений теории плоского пластического течения рассчитываются линии скольжения, годограф скоростей и диссипативная функция. Вычисляется криволинейная форма свободной границы пластической области, определяемая условием пластической несжимаемости в зависимости от глубины вдавливания цилиндра. Моделирование удовлетворяет полной системе уравнений теории плоской деформации при условии пластичности Мизеса с положительными значениями диссипативной функции в пластической области.

**Ключевые слова:** идеально пластическое полупространство, вдавливание цилиндра, плоская деформация, контактное трение, линии скольжения, годограф скоростей, диссипативная функция.

УДК: 539.374

**Введение.** Контактная задача теории идеальной пластичности о вдавливании жесткого цилиндра с учетом контактного трения имеет важное практическое значение для оценки несущей способности пластического полупространства. При малой глубине вдавливания цилиндра граница контакта с пластической областью близка к плоской. В этом случае предельное давление  $q = 2k(1 + \pi/2)$ ,  $k = \sigma_Y/\sqrt{3}$ ,  $\sigma_Y$  – напряжение текучести определяется решением Прандтля для плоского штампа [1-3] при отсутствии скольжения на границе контакта с образованием центральной жесткой зоны независимой от контактного трения. В случае идеально гладкого плоского штампа Хилла [1] возможно скольжение по всей границе контакта без образования центральной жесткой зоны, в котором граничные условия для напряжений и давление  $q$  совпадают с решением Прандтля. В [4] показано, что для плоского штампа при постоянном давлении  $q$  возможны решения с переменной центральной жесткой зоной, изменяющейся от нуля при скольжении по всей границе контакта для штампа Хилла, до максимальной величины при отсутствии скольжения на границе контакта для штампа Прандтля.

---

© Непершин Р. И., 2018

Непершин Ростислав Иванович

e-mail: nepershin\_ri@rambler.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия.

Поступила 10.10.2018

В [2,5] приведены решения о начальном пластическом течении полупространства при давлении цилиндра в круговой лунке с построением линий скольжения для прямолинейной границы полупространства. В этих решениях в области однородного пластического сжатия около границы полупространства из годографа скоростей следует положительное значение главной скорости деформации  $\varepsilon_2$  и отрицательное значение диссипативной функции в этой области. Эти решения дают статическую нижнюю оценку давления на цилиндр, соответствующую граничным условиям для напряжений.

В настоящей работе вдавливание жесткого цилиндра в идеально пластическое полупространство моделируется численным решением дифференциальных уравнений теории плоского пластического течения [2,3]. Вычисляются линии скольжения и годограф скоростей с учетом контактного трения по Прандтлю и криволинейная граница «наплыва» материала, вытесняемого цилиндром, определяемая условием пластической несжимаемости.

Параметром нагружения принимается угол контакта цилиндра с пластической областью. Криволинейная граница пластической области рассчитывается по степенной функции для угла наклона касательной, равного нулю при переходе к границе полупространства. Используются алгоритмы численного решения уравнений теории плоского пластического течения [6] для линий скольжения и годографа скоростей с контролем знака диссипативной функции. Центральная жесткая зона и граница скольжения зависят от контактного трения вследствие криволинейной границы контакта пластической области с цилиндром, в отличие от задачи вдавливания плоского штампа. Диссипативная функция положительна во всей пластической области. При отсутствии контактного трения центральная жесткая область не образуется. Скольжение происходит по всей границе контакта, с разрывом скорости вдоль жесткопластической границы по аналогии с гладким плоским штампом Хилла. При малом угле контакта и малом коэффициенте трения центральная жесткая область распространяется по всей границе контакта. Линии скольжения и годограф скоростей приближаются к решению Прандтля для плоского штампа вследствие малой кривизны свободной границы пластической области.

**Основные уравнения.** На рис.1 показаны линии скольжения в пластической области на плоскости  $x, y$ , нормальной к оси цилиндра справа от плоскости симметрии  $x = 0$ . При вдавливании цилиндра с радиусом  $R$  и длиной оси  $L \gg R$  пластическая область увеличивается от нуля до области, ограниченной границей контакта  $OA$  и свободной границей  $AB$ . При наличии контактного трения в окрестности линии симметрии образуется центральная жесткая область без скольжения на границе контакта  $OE$ . Жесткопластическая граница  $BCDG$  смещается по оси  $y$  на расстояние  $-y_G$ .

Цилиндр считаем неподвижным, полупространство перемещающимся со скоростью  $V = 1$  по оси  $y$ , дугу контакта  $R\alpha_A$  принимаем за единицу длины. Границу контакта  $OA$  задаем в параметрической форме в зависимости от угла наклона касательной  $\alpha$  к оси  $x$

$$x = R \sin \alpha, \quad y = R(1 - \cos \alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_A, \quad R = 1/\alpha_A. \quad (1)$$

Угол дуги контакта  $\alpha_A$  принимаем за параметр нагружения при вдавливании цилиндра на глубину  $h$ . Величина  $h$  определяется условием сохранения объема вытесняемого цилиндром с образованием «наплыва» материала над границей полупространства  $y = h$ . Свободная граница пластической области  $AB$  – гладкая выпуклая кривая с углом наклона касательной  $\beta$  к оси  $x$ , определяемая дифференциальным уравнением

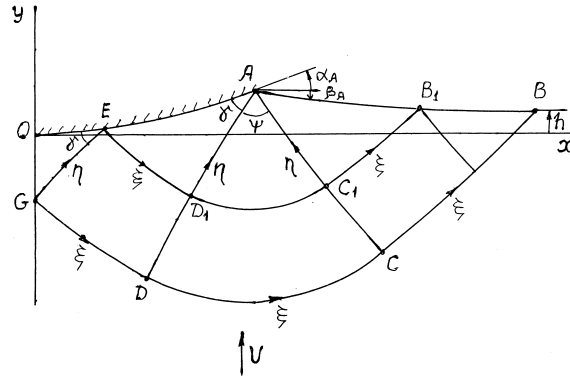


Рис. 1. Вдавливание цилиндра в идеально пластическое полупространство с учетом контактного трения.

$$dy/dx = \operatorname{tg} \beta. \quad (2)$$

Угол  $\beta$  определяется степенной функцией в зависимости от координаты  $x$

$$\beta(x) = \beta_A [\zeta^m - 1], \quad \zeta = (x - x_A)/(x_B - x_A), \quad x_A < x < x_B, \quad (3)$$

при  $\beta = -\beta_A$  в точке  $A$  и  $\beta = 0$  в точке  $B$ . Параметр  $m$  позволяет изменять кривизну границы  $AB$ . Угол  $\beta_A$  зависит от граничных условий на границе контакта, которые приведены ниже, и от глубины вдавливания  $h$ . Координата  $x_B$  точки  $B$  является неизвестным параметром задачи, определяющим границы пластической области.

За единицу напряжения принимаем удвоенную пластическую постоянную  $2k = 2\sigma_Y/\sqrt{3}$  при условии пластичности Мизеса, где  $\sigma_Y$  – напряжение текучести при одноосном растяжении-сжатии. Контактное трение на границе скольжения  $EA$  задаем по Прандтлю безразмерным коэффициентом  $0 < \mu < 1/2$ . Гиперболические дифференциальные уравнения равновесия для напряжений и для скорости перемещений при плоской деформации идеально пластического тела [1-4] приводятся к линиям скольжения  $\xi, \eta$  с соотношениями Генки и Гейрингер

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi, \quad \sigma - \varphi = \operatorname{const}, \quad dV_\xi - V_\eta d\varphi = 0 \quad \text{для } \xi, \quad (4)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \varphi, \quad \sigma + \varphi = \operatorname{const}, \quad dV_\eta + V_\xi d\varphi = 0 \quad \text{для } \eta, \quad (5)$$

где  $\varphi$  – угол наклона касательной к линии скольжения  $\xi$  к оси  $x$ ;  $\sigma$  – среднее напряжение;  $V_\xi, V_\eta$  – проекции вектора скорости на линии скольжения  $\xi$  и  $\eta$ . Нормальные и касательные напряжения вдоль линий скольжения равны  $\sigma$  и  $k = 1/2$ . Компоненты напряжения в координатах  $x, y$  определяются формулами

$$\sigma_x = \sigma - \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \sigma_y = \sigma + \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2} \cos 2\varphi. \quad (6)$$

Проекции вектора скорости в координатах  $x, y$  связаны с  $V_\xi$  и  $V_\eta$  соотношениями

$$V_x = V_\xi \cos \varphi - V_\eta \sin \varphi, \quad V_y = V_\xi \sin \varphi + V_\eta \cos \varphi, \quad (7)$$

$$V_\xi = V_x \cos \varphi + V_y \sin \varphi, \quad V_\eta = V_y \cos \varphi - V_x \sin \varphi. \quad (8)$$

Несущая способность жесткой области полупространства проверяется продолжением линий скольжения ниже границы  $BCDG$  аналогично с задачей о вдавливании плоского штампа [7]. Совместность поля напряжений и скоростей перемещений определяется условием неотрицательности диссипативной функции [3]. На свободной границе  $AB$ , которая совпадает с направлением главного напряжения  $\sigma_2 = -1$  при  $\sigma_1 = 0$ , диссипативная неотрицательна если скорость деформации  $\varepsilon_2 \leq 0$  на границе  $AB$ . Условие неотрицательности диссипативной функции в пластической области выражается неравенством для максимальной скорости сдвига в ортогональных криволинейных координатах  $\xi, \eta$  [7]

$$\Gamma = \frac{\partial V_\xi}{\partial \eta} - V_\eta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial V_\eta}{\partial \xi} + V_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \geq 0, \quad (9)$$

так как скорости перемещений  $V_\xi, V_\eta$  вычисляются вдоль линий скольжения по уравнениям Гейрингер в (4) и (5).

**Граничные условия.** На границе скольжения  $EA$  принимаем касательное напряжение трения  $\mu$  по Прандтлю, которое определяет угол наклона  $\gamma$  линии скольжения  $\eta$  к касательной в точках контактной границы. В координатах  $x_1, y_1$ , направленных по касательной и нормали к границе скольжения, касательное напряжение равно  $-\mu$  и угол наклона  $\varphi_1$  линии скольжения  $\xi$  к оси  $x_1$  равен  $\gamma - \pi/2$ . Из третьего уравнения (6) при  $\varphi_1 = \gamma - \pi/2$  и  $\tau_{x_1 y_1} = -\mu$  находим угол  $\gamma$ , и в точках границы скольжения, определяемых углом наклона касательной  $\alpha$  в соотношениях (1), находим угол наклона  $\varphi$  линий скольжения  $\xi$  к оси  $x$

$$\varphi = \gamma + \alpha - \pi/2, \quad \gamma = \frac{1}{2} \arccos(2\mu), \quad 0 \leq \mu < \frac{1}{2} \quad \text{на } EA. \quad (10)$$

На свободной границе  $AB$ , определяемой численным интегрированием уравнения (2) при известной функции  $\beta(x)$ , находим  $\sigma$  и  $\varphi$  из условия одноосного сжатия  $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -1$

$$\sigma = -\frac{1}{2}, \quad \varphi = \beta + \frac{\pi}{4} \quad \text{на } AB, \quad (11)$$

так как линии скольжения  $\eta$  и  $\xi$  наклонены к нормали этой границы под углами  $\pm\pi/4$ .

Сингулярная точка  $A$  является вырожденной  $\xi$  линией скольжения, в которой  $\eta$  линии скольжения образуют центрированный веер с углом  $\psi$ , связанным с углами  $\alpha_A, \beta_A$  и  $\gamma$  соотношением

$$\psi = \frac{3\pi}{4} - (\alpha_A + \beta_A + \gamma). \quad (12)$$

Переменные  $\sigma$  и  $\varphi$  изменяются в точке  $A$  от свободной границы  $AB$  до границы контакта  $EA$  по второму соотношению (4)

$$\sigma = -\left(\frac{1}{2} + \theta\right), \quad \varphi = \beta_A + \frac{\pi}{4} - \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \psi. \quad (13)$$

Линии скольжения в области  $ABC$  находим решением задачи Коши для дифференциальных уравнений (4) и (5) с соотношениями Генки и граничными условиями (11). В области  $ACD$  линии скольжения находим решением задачи Гурса с известными значениями  $\sigma$  и  $\varphi$  на  $\eta$  линии скольжения  $AC$  и на вырожденной  $\xi$  линии скольжения в точке  $A$ . В области  $AD_1E$  линии скольжения находим решением задачи смешанного типа с известными значениями  $\sigma$  и  $\varphi$  на  $\eta$  линии скольжения  $AD_1$  с граничными условиями (10). В области  $EGDD_1$  линии скольжения находим решением задачи Гурса при известных значениях  $\sigma$  и  $\varphi$  на линиях скольжения  $ED_1$  и  $DD_1$ . В точке  $G$  должны выполняться два условия симметрии на оси  $y$  при  $\tau_{xy} = 0$

$$\varphi = -\frac{\pi}{4}, \quad x = 0. \quad (14)$$

Так как линии скольжения  $ED_1$  и  $DD_1$ , определяющие точку  $G$  при решении задачи Гурса, вычисляются от участков  $AB_1$  и  $BB_1$  свободной границы  $AB$ , то координаты  $x_{B_1}$  и  $x_B$  точек  $B_1$  и  $B$  границы  $AB$  являются двумя параметрами задачи, при которых выполняются условия (14). Третьим параметром, определяющим линии скольжения в пластической области, выбираем угол  $\psi$ . Угол  $\beta_A$  в точке  $A$  свободной границы  $AB$  находится из уравнения (12) при известных значениях  $\psi$ ,  $\alpha_A$  и  $\gamma$ . В случае идеально гладкого цилиндра ( $\mu = 0$ ) центральная жесткая зона не образуется. Точки  $G$  и  $E$  совпадают с началом координат. Граница скольжения  $EA$  совпадает со всей границей контакта  $OA$ . В этом случае линии скольжения определяются двумя параметрами  $\psi$  и  $x_B$ .

Глубина вдавливания цилиндра  $h = y_B$  и угол контакта  $\alpha_A$  связаны условием равенства объемов материала, выдавливаемого цилиндром, и наплыва над горизонтальной границей полупространства, которое приводит к уравнению

$$\cos \alpha_A + 2\alpha_A[h - I\alpha_A/\sin \alpha_A] = 1, \quad I = \int_A^B (y - h) dx. \quad (15)$$

Два условия (14) и уравнение (15) используются для вычисления трех параметров  $\psi$ ,  $x_{B_1}$  и  $x_B$ , определяющих линии скольжения с центральной жесткой зоной  $OEG$ , зависящей от контактного трения  $\mu$ . В случае идеально гладкого цилиндра параметры  $\psi$  и  $x_B$  определяются уравнением (15) и условием  $x = 0$  в точке  $O$  на жесткопластической границе  $O-B$ .

Скорости перемещений вычисляются по уравнениям Гейрингер с использованием кинематических граничных условий на жесткопластических границах  $B-G$ ,  $EG$  и на контактной границе скольжения  $EA$ . При движении жесткой области полупространства относительно неподвижной жесткой зоны  $OEG$  в точке  $G$  возникают разрывы скорости  $[V]_\xi = [V]_\eta = 1/\sqrt{2}$  вдоль  $\xi$  и  $\eta$  линий скольжения  $B-G$  и  $EG$ , которые определяют скорости пластической области на жесткопластических границах при  $\mu > 0$

$$V_\xi = \sin \varphi + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad V_\eta = \cos \varphi \quad \text{на } B-G, \quad (16)$$

$$V_\xi = 0, \quad V_\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{на } EG. \quad (17)$$

Равенство нулю нормальной скорости на границе  $AE$  приводит к соотношению

$$V_\xi = V_\eta \operatorname{tg} \gamma \quad \text{на } EA. \quad (18)$$

Разрыв скорости  $[V]_\eta = 1/\sqrt{2}$  вдоль  $\eta$  линии скольжения  $EG$  приводит к разрыву скорости  $[V]_\xi = 1/\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma$  в точке  $E$  вдоль  $\xi$  линии скольжения  $E-B_1$  вследствие условия (18). При пересечении этой линии скорости  $V_\eta$  непрерывны, а скорости  $V_\xi$  изменяются скачком

$$V_\xi^+ = V_\xi^- + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \gamma \quad \text{на } E - B_1, \quad (19)$$

где  $V_\xi^-$  и  $V_\xi^+$  – скорости  $V_\xi$  ниже и выше линии скольжения  $E-B_1$ . В случае идеально гладкого цилиндра возникает один разрыв скорости в точке  $O$ , равный  $\sqrt{2}$ , который остается постоянным вдоль жесткопластической границы  $O-B$ . Граничное условие (16) при  $\mu = 0$  заменяется соотношениями

$$V_\xi = \sin \varphi + \sqrt{2}, \quad V_\eta = \cos \varphi \quad \text{на } O - B, \quad (20)$$

и равенством  $V_\xi = V_\eta$  на границе  $OA$  в уравнении (18) вследствие равенства  $\gamma = \pi/4$ .

**Численное решение.** Решение уравнений (4) и (5) с приведенными граничными условиями выполняется численным методом. Расчеты автоматизированы программой на ФОРТРАНе с использованием циклических процедур решения задач Коши, Гурса и смешанного типа, и конечно-разностной аппроксимации уравнений теории плоской деформации, приведенными в [6,7] для регулярных узлов сетки линий скольжения.

При решении задачи смешанного типа в области  $EAD_1$  используем конечно-разностную аппроксимацию дифференциального уравнения (4) для  $\xi$  линий скольжения и условие (10) для угла  $\varphi$  на границе скольжения  $EA$  при  $\mu > 0$  или на границе  $OA$  при  $\mu = 0$

$$y = y_1 + (x - x_1) \operatorname{tg} \tilde{\varphi}, \quad \tilde{\varphi} = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi), \quad \varphi = \gamma + \alpha - \pi/2, \quad (21)$$

где нижним индексом  $_1$  обозначены известные значения переменных в ближайшем к границе скольжения узле  $\xi$  линии скольжения. Подстановка в (21) координат  $x, y$  из (1) и угла  $\varphi$  из (10) приводит к тригонометрическому уравнению для угла  $\alpha$  на границе скольжения, которое после преобразований принимает вид

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha + c = 0, \quad (22)$$

где

$$a = \alpha_A(a_2 y_1 + a_1 x_1) - a_2, \quad b = 1 - a_1 + \alpha_A(a_1 y_1 - a_2 x_1), \quad c = a_2 - \alpha_A x_1, \\ a_1 = \sin(\varphi_1 + \gamma), \quad a_2 = -\cos(\varphi_1 + \gamma).$$

Уравнение (22) приводится к квадратному уравнению для  $\sin \alpha$ , из которого находим

$$\sin \alpha = - \left( a \sqrt{a^2 + b^2 - c^2} + bc \right) (a^2 + b^2)^{-1}. \quad (23)$$

Затем по формулам (1) находим координаты точки на границе скольжения, по граничному условию (10) – угол  $\varphi$ , и по соотношению Генки вдоль  $\xi$  линии скольжения – среднее напряжение  $\sigma$

$$\sigma = \sigma_1 + \varphi - \varphi_1, \quad (24)$$

где  $\sigma_1$  и  $\varphi_1$  – известные значения  $\sigma$  и  $\varphi$  в ближайшей к границе скольжения точке  $\xi$  линии скольжения.

При вычислении сетки линий скольжения используется переменный массив числовых данных **KSI** в узловых точках  $\xi$  линий скольжения, используемый в циклических алгоритмах решения краевых задач Коши, Гурса и смешанного типа [6,7]. Входными данными вычислительной программы являются контактное трение  $\mu$ , угол контакта  $\alpha_A$ , угловой шаг  $\Delta\varphi$  веера линий скольжения в точке  $A$ , число точек  $N$  на свободной границе  $AB$  и начальные значения параметров  $\psi$ ,  $x_{B1}$ ,  $x_B$ . Граничные условия (14) выполняются варьированием параметров  $x_{B1}, x_B$  с точностью  $10^{-3}$ . Уравнение (15) решается варьированием параметра  $\psi$  с точностью  $10^{-6}$  и определяет глубину вдавливания цилиндра  $h$  и угол  $\beta_A$  в зависимости от  $\mu$  и  $\alpha_A$ . После вычисления сетки линий находим распределение давления  $p$  на контактной границе скольжения  $EA$

$$p = -\sigma + \frac{1}{2} \sin 2\gamma, \quad (25)$$

и жесткопластические границы  $EG$  и  $G-B$ . Среднее давление  $q$  на проекцию площади контакта на границу полупространства и погонную нагрузку  $Q$  по оси цилиндра находим численным интегрированием распределения нормального  $\sigma$  и касательного  $\tau = 1/2$  напряжений на жесткопластической границе  $G-B$

$$q = -(\alpha_A / \sin \alpha_A) \int_G^B (\sigma \cos \varphi + 1/2 \sin \varphi) ds, \quad Q = 2q \sin \alpha_A. \quad (26)$$

Для вычисления скоростей перемещений используются массивы **KSI** и **ETA** значений  $x$ ,  $y$ ,  $\sigma$ ,  $\varphi$  на жесткопластических границах  $G-B$  и  $EG$  и массив **EA** значений  $x$ ,  $y$ ,  $\sigma$ ,  $\varphi$  на границе скольжения  $EA$ . По этим данным вычисляется сетка линий скольжения с расчётами скоростей по уравнениям Гейрингер и проверкой неравенства (9) для диссипативной функции в регулярных узлах сетки линий скольжения и неравенства  $\varepsilon_2 \leq 0$  на границе  $AB$ .

В области, ограниченной линиями скольжения  $B-G$  и  $E-B_1$ , решается задача Гурса для уравнений Гейрингер с граничными условиями (16) и (17) при  $\mu > 0$  и определением скоростей на отрезке  $BB_1$  свободной границы  $AB$ . В области  $EAD_1$  решается задача смешанного типа с учётом разрыва скорости (19) на линии скольжения  $E-B_1$ . Скорости  $V_\xi$  и  $V_\eta$  в точках границы скольжения вычисляются с использованием граничного условия (18) и уравнения Гейрингер вдоль  $\eta$  линии скольжения, аппроксимируемого конечными разностями

$$V_\eta - V_{\eta 2} + \frac{1}{2}(V_\xi + V_{\xi 2})\Delta\varphi_2 = 0, \quad \Delta\varphi_2 = \varphi - \varphi_2, \quad (27)$$

где нижним индексом  $2$  обозначены известные значения  $V_\xi$ ,  $V_\eta$  и  $\varphi$  в точке  $2$  на  $\eta$  линии скольжения ближайшей к границе  $EA$  с известным углом  $\varphi$  в точке границы  $EA$ . Из уравнений (18) и (27) находим скорости в точках границы  $EA$

$$V_\eta = (V_{\eta 2} - \frac{1}{2}V_{\xi 2}\Delta\varphi_2)/(1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \gamma \Delta\varphi_2), \quad V_\xi = V_\eta \operatorname{tg} \gamma. \quad (28)$$

В области  $AD_1C_1B_1$  решается задача Гурса, с известными значениями  $V_\xi$ ,  $V_\eta$  на линии скольжения  $AD_1$  и разрывом скорости (19) на линии скольжения  $D_1C_1B_1$ . В результате находим скорости в сингулярной точке  $A$  и на отрезке  $AB_1$  свободной границы  $AB$ .

При  $\mu = 0$  скорости в области  $ODA$  находим решением задачи смешанного типа с граничными условиями (20) на  $OD$  и  $V_\xi = V_\eta$  на  $OA$  с использованием уравнений (27) и (28) при  $\gamma = \pi/4$ . Затем в области  $ADCB$  решается задача Гурса с известными значениями  $V_\xi, V_\eta$  на линиях скольжения  $DA$  и  $DCB$  с определением скоростей в сингулярной точке  $A$  и на свободной границе  $AB$ .

Неравенство  $\varepsilon_2 \leq 0$  на границе  $AB$  проверяется по изменению скоростей  $V_1$  и  $V_2$  по направлениям главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  вдоль границы  $AB$ , совпадающей с направлением главного напряжения  $\sigma_2$

$$V_1 = (V_\xi + V_\eta)/\sqrt{2}, \quad V_2 = (V_\eta - V_\xi)/\sqrt{2}, \quad (29)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta V_2}{\Delta s} + \tilde{V}_1 \Delta\beta, \quad \tilde{V}_1 = \frac{1}{2}(V_{11} + V_{12}), \quad (30)$$

где  $\Delta V_2$  – разность скоростей  $V_2$ ,  $\tilde{V}_1$  – средняя скорость  $V_1$ ,  $\Delta s$  – длина дуги,  $\Delta\beta$  – изменение угла наклона касательной между точками 1 и 2 вдоль границы  $AB$ .

В приводимых ниже расчетах представлены сетки линий скольжения, выводимые на экран монитора графическими процедурами ФОРТРАНа с распределениями давления на границе скольжения и годографы скоростей на плоскости  $V_x, V_y$ , вычисляемые по уравнениям (7).

**Численные результаты.** Ниже приведены результаты расчета вдавливания цилиндра в зависимости от угла контакта  $\alpha_A$  и контактного трения  $\mu$ . Линии скольжения и годографы скоростей, удовлетворяющие условию положительности диссипативной функции в пластической области, вычислены при  $m = 0.8$  в уравнении (3). Сетки линий скольжения вычислены с числом точек  $N = 26$  на границе  $AB$  и угловым шагом  $\Delta\varphi = 0.025$  веера линий скольжения в сингулярной точке  $A$ .

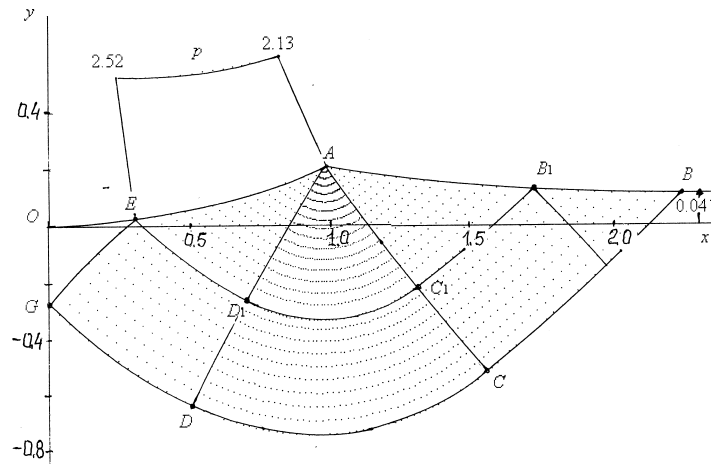


Рис. 2. Линии скольжения и распределение контактного давления при  $\mu = 0.15, \alpha_A = 0.4, \beta_A = 0.170, \psi = 1.153$ .

На рис. 2 показаны линии скольжения и распределение контактного давления для угла  $\alpha_A = 0.4$  при  $\mu = 0.15$ . Параметры  $\psi = 1.153, \beta_A = 0.170, x_B = 2.221$  и  $x_{B1} =$



1.706 определяют границу  $AB$ , среднее давление  $q = 2.437$ , погонную нагрузку  $Q = 1.898$  и глубину вдавливания цилиндра  $h = 0.041$ . Несмотря на невысокий коэффициент трения на границе  $OE$  образуется значительная жесткая зона с углом контакта  $\alpha_E = 0.122$  в точке  $E$ , занимающая более 30% полной дуги контакта с углом  $\alpha_A = 0.4$ . Кривизна жесткопластической границы  $GE$  незначительна при изменении угла  $\varphi$  от  $-0.785$  в точке  $G$  до  $-0.816$  в точке  $E$ . Вследствие кривизны границы контакта и свободной границы пластической области граница  $OE$  центральной жесткой зоны зависит от  $\mu$ , приближаясь к нулю при  $\mu \rightarrow 0$  и к точке  $A$  при увеличении  $\mu$ .

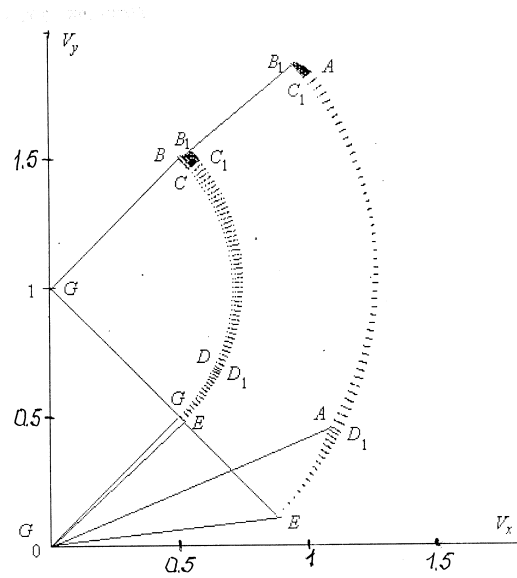


Рис. 3. Годограф скоростей для линий скольжения на рис. 2.

На рис. 3 показан годограф скоростей для линий скольжения на рис. 2. Жесткопластические границы  $G-B$  и  $GE$  отображаются на годографе дугами окружностей с центром в точке  $V_y = 1, V_x = 0$  и радиусами  $[V]_\xi = [V]_\eta = 1/\sqrt{2}$ , с центральным углом  $\pi/2$  для  $G-B$  и  $0.03$  для  $GE$ . Пластическая область  $GEB_1B$  отображается на годографе узким сегментом, определяемым дугами окружностей  $G-B$  и  $GE$ . В области  $BB_1C_1C$  скорости меняются незначительно вследствие малой кривизны линий скольжения. Разрыв скорости  $[V]_\xi = 1/\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma$  вдоль  $\xi$  линии скольжения  $E-B_1$  приводит к смещению по нормали точек этой линии на годографе скоростей. Область  $AED_1$  отображается на годографе узким криволинейным треугольником при малом изменении скоростей вдоль  $\eta$  линий скольжения, имеющих малую кривизну. В области  $AC_1D_1$  происходит наибольшее изменение скоростей вдоль  $\xi$  линий скольжения с сингулярной точкой  $A$ . В области  $AB_1C_1$  скорости изменяются незначительно вследствие малой кривизны свободной границы и линий скольжения  $\xi$  и  $\eta$ . В регулярных узлах сетки линий скольжения и на линиях разрыва скоростей скорость сдвига  $\Gamma$  положительна. На границе  $AB$ , где  $\sigma_2 = -1$ , скорость деформации  $\varepsilon_2$  отрицательна. Диссипативная функция положительна во всей пластической области.

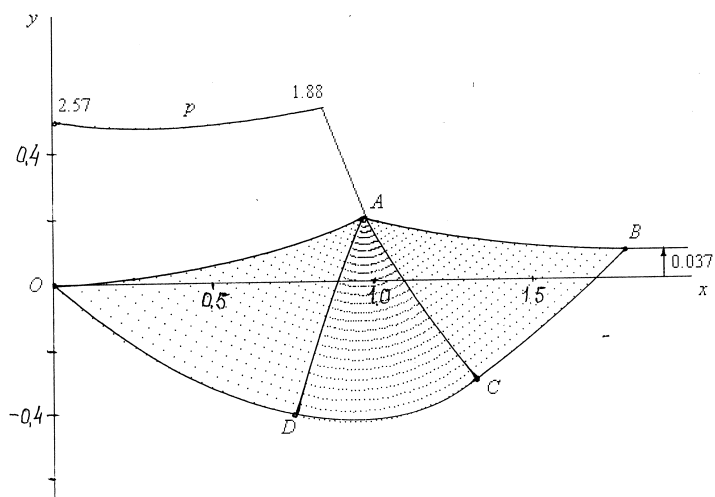


Рис. 4. Линии скольжения и распределение контактного давления при  $\mu = 0$ ,  $\alpha_A = 0.4$ ,  $\beta_A = 0.287$ ,  $\psi = 0.884$ .

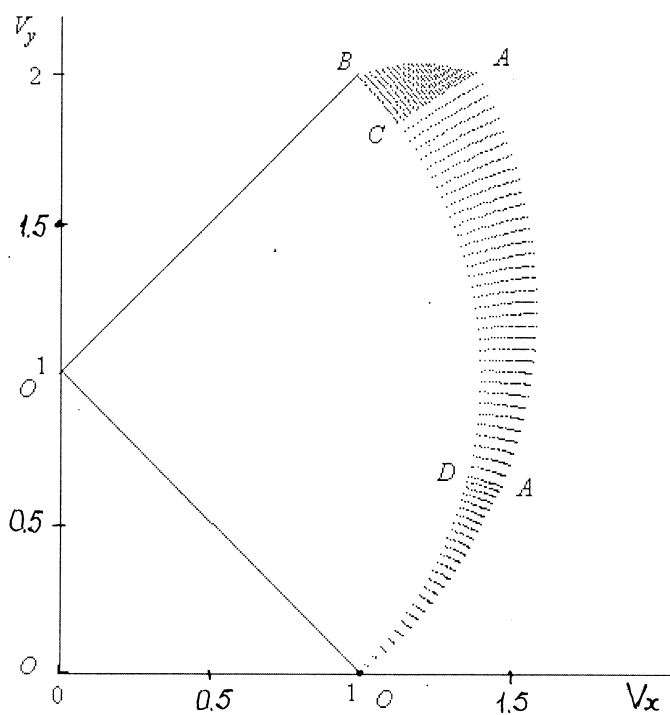


Рис. 5. Годограф скоростей для линий скольжения на рис. 4.

Таблица 1. Координаты границы  $AB$  при  $\mu = 0.15$  и  $\alpha_A = 0.4$  ( $AB_0$ ),  $\alpha_A = 0.41$  ( $AB_1$ ) и смещенной границы  $AB$  при  $\Delta h = 2.26 \times 10^{-3}$  ( $AB_C$ ).

$AB_0$		$AB_1$		$AB_C$	
$x/R$	$y/R$	$x/R$	$y/R$	$x/R$	$y/R$
0.4049	0.0764	0.4077	0.0813	0.4072	0.0805
0.4317	0.0722	0.4343	0.0770	0.4340	0.0764
0.4638	0.0677	0.4663	0.0722	0.4661	0.0719
0.4993	0.0632	0.5016	0.0675	0.5015	0.0674
0.5375	0.0589	0.5396	0.0629	0.5397	0.0631
0.5778	0.0549	0.5798	0.0587	0.5800	0.0591
0.6201	0.0513	0.6219	0.0549	0.6222	0.0555
0.6640	0.0482	0.6656	0.0515	0.6661	0.0524
0.6991	0.0461	0.7005	0.0493	0.7008	0.0499
0.7564	0.0435	0.7574	0.0463	0.7576	0.0469
0.8043	0.0420	0.8052	0.0446	0.8055	0.0455
0.8534	0.0412	0.8542	0.0436	0.8545	0.0446

На рис. 4 и 5 показаны линии скольжения и годограф скоростей для идеально гладкого цилиндра при  $\mu = 0$  и  $\alpha_A = 0.4$ . В этом случае центральная жесткая область отсутствует. Точки  $G$  и  $E$  совпадают с началом координат  $O$ . Давление  $q = 2.25$  и глубина вдавливания  $h = 0.037$  снижаются по сравнению с  $\mu = 0.15$  на рис. 2. Разрыв скорости вдоль жесткопластической границы  $O-B$ , равный  $\sqrt{2}$ , отображается на годографе скоростей на рис. 5 дугой окружности аналогично гладкому плоскому штампу Хилла. Но вследствие криволинейной границы контакта  $OA$  поле скоростей в контактной области  $OAD$  и в области  $ABC$  со свободной границей  $AB$  неоднородно по сравнению с плоским гладким штампом. Диссипативная функция в пластической области положительна при  $\varepsilon_2 < 0$  на границе  $AB$ .

Изменение скорости границы  $AB$  при малом приращении угла контакта  $\Delta\alpha_A$  позволяет вычислить смещение этой границы по приращению  $\Delta h$  глубины вдавливания, которое пропорционально приращению времени  $\Delta t$ . Сравнение координат границы  $AB$  для угла  $\alpha_A = 0.41$  с координатами смещенной границы  $AB$  для угла  $\alpha_A = 0.4$ , рассчитанными по среднему вектору скорости между точками начальной и смещенной границами

$$AB_C = AB_0 + V_c \Delta h,$$

показано в табл. 1 для  $\mu = 0.15$  и в табл. 2 для  $\mu = 0$ . Средние квадратические отклонения смещенной границы от расчетной при  $\alpha_A = 0.41$ , равные  $2.22 \times 10^{-3}$  при  $\mu = 0.15$  и  $2.14 \times 10^{-3}$  при  $\mu = 0$  на порядок ниже средних значений координаты  $y/R$  границы  $AB$  при  $\alpha_A = 0.41$ .

Расчеты свободной границы  $AB$  по уравнениям (2) и (3) с тремя параметрами  $m$ ,  $\beta_A$  и  $x_B$  приводят к удовлетворительному моделированию нестационарного процесса вдавливания цилиндра в идеально пластическое полупространство при численном интегрировании дифференциальных уравнений теории плоской деформации и выполнении условия неотрицательности диссипативной функции в пластической области.

Таблица 2. Координаты границы  $AB$  при  $\mu = 0$  и  $\alpha_A = 0.4$  ( $AB_0$ ),  $\alpha_A = 0.41$  ( $AB_1$  и смещенной границы  $AB$  при  $\Delta h = 1.87 \times 10^{-3}$  ( $AB_C$ ))

$AB_0$		$AB_1$		$AB_C$	
$x/R$	$y/R$	$x/R$	$y/R$	$x/R$	$y/R$
0.4009	0.0757	0.4045	0.0811	0.4034	0.0795
0.4186	0.0711	0.4221	0.0763	0.4211	0.0748
0.4398	0.0660	0.4430	0.0710	0.4423	0.0698
0.4633	0.0610	0.4663	0.0657	0.4657	0.0648
0.4884	0.0562	0.4912	0.0606	0.4908	0.0600
0.5151	0.0518	0.5176	0.0559	0.5174	0.0556
0.5430	0.0479	0.5452	0.0517	0.5452	0.0517
0.5719	0.0444	0.5739	0.0479	0.5741	0.0483
0.6019	0.0416	0.6036	0.0448	0.6040	0.0454
0.6326	0.0394	0.6342	0.0423	0.6347	0.0432
0.6643	0.0379	0.6656	0.0404	0.6663	0.0417
0.6966	0.0371	0.6977	0.0393	0.6986	0.0409

Сравнение линий скольжения на рис. 2 и 4 и численных значений координат границы  $AB$  в табл. 1 и 2 показывает уменьшение пластической области и давления на цилиндр при снижении трения.

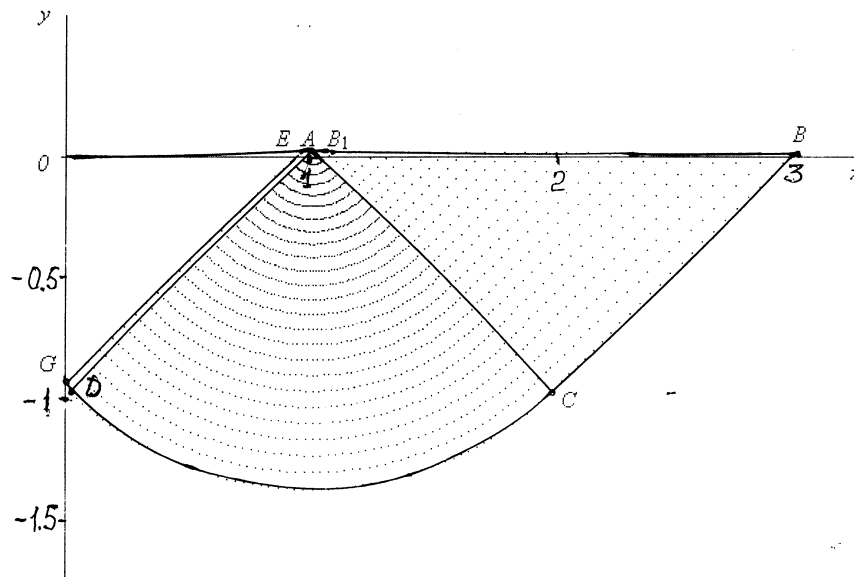


Рис. 6. Линии скольжения при  $\mu = 0.03$ ,  $\alpha_A = 0.03$ ,  $\beta_A = 0.0058$ ,  $\psi = 1.565$ .

С увеличением трения центральная жесткая область увеличивается. Граница скольжения  $EA$  уменьшается. Точка  $E$  и линия разрыва скорости  $E-B_1$  приближаются к

сингулярной точке  $A$ . При уменьшении угла  $\alpha_A$  предельное значение  $\mu$ , при котором центральная жесткая область распространяется на всю границу контакта  $OA$ , уменьшается. На рис. 6 и 7 показаны линии скольжения и годограф скоростей для  $\mu = 0.03$  и  $\alpha_A = 0.03$ , когда граница контакта приближается к плоскому штампу с малым трением. В этом случае граница  $AB$  почти прямолинейна при  $\beta_A = 0.0058$ ,  $\psi = 1.565$ ,  $q = 2.574$  и  $h = 0.0003$ . Коэффициент трения  $\mu = 0.03$  приводит к образованию жесткой зоны на границе штампа по Прандтлю. Жесткопластическая граница  $GE$  с углом  $\varphi_E = -0.787$  в точке  $E$  близка к прямой. Точка  $E$  с углом контакта  $\alpha_E = 0.0285$  почти совпадает с точкой  $A$ . Годограф скоростей, за исключением малой окрестности точки  $A$ , обусловленной кривизной контактной границы, совпадает с решением Прандтля.

Таблица 3. Вдавливание цилиндра в идеально пластическое полупространство с учетом контактного трения. ( $ABC$ )

$\mu$	$\psi$	$-\beta_A$	$\alpha_E$	$x_B/R$	$-y_G/R$	$h/R$	$q$
$\alpha_A = 0.1$							
0.00	1.411	0.060	0.000	0.195	0.000	0.0002	2.493
0.10	1.546	0.025	0.089	0.285	0.084	0.0003	2.557
$\alpha_A = 0.2$							
0.00	1.244	0.127	0.000	0.380	0.000	0.0010	2.416
0.10	1.396	0.076	0.082	0.472	0.076	0.0021	2.492
0.15	1.462	0.061	0.131	0.522	0.119	0.0023	2.529
0.20	1.526	0.051	0.182	0.566	0.160	0.0023	2.544
$\alpha_A = 0.3$							
0.00	1.068	0.203	0.000	0.554	0.000	0.0064	2.332
0.10	1.238	0.135	0.079	0.657	0.074	0.0070	2.439
0.15	1.311	0.112	0.126	0.709	0.114	0.0072	2.480
0.20	1.379	0.098	0.175	0.755	0.153	0.0074	2.504
0.25	1.447	0.086	0.228	0.800	0.192	0.0076	2.527
0.30	1.515	0.078	0.285	0.842	0.231	0.0078	2.533
$\alpha_A = 0.4$							
0.00	0.884	0.287	0.000	0.714	0.000	0.0148	2.250
0.10	1.072	0.199	0.076	0.827	0.070	0.0160	2.371
0.15	1.153	0.170	0.122	0.888	0.112	0.0164	2.437
0.20	1.226	0.151	0.170	0.934	0.147	0.0169	2.452
0.25	1.300	0.133	0.223	0.990	0.189	0.0174	2.500
0.30	1.372	0.121	0.280	1.034	0.227	0.0177	2.510
$\alpha_A = 0.5$							
0.00	0.692	0.379	0.000	0.863	0.000	0.0283	2.171
0.10	0.922	0.249	0.101	1.022	0.099	0.0309	2.317
0.15	0.994	0.229	0.123	1.059	0.114	0.0315	2.372
0.20	1.069	0.208	0.167	1.106	0.145	0.0321	2.402
0.25	1.147	0.186	0.220	1.164	0.185	0.0328	2.443
0.30	1.224	0.168	0.275	1.217	0.223	0.0335	2.480
$\alpha_A = 0.6$							
0.00	0.489	0.482	0.000	0.995	0.000	0.0475	2.088
0.10	0.746	0.325	0.098	1.167	0.095	0.0517	2.243

0.15	0.823	0.300	0.119	1.208	0.108	0.0526	2.305
0.20	0.904	0.273	0.166	1.259	0.140	0.0537	2.328
0.25	0.987	0.246	0.216	1.319	0.177	0.0550	2.374
0.30	1.071	0.222	0.271	1.380	0.217	0.0563	2.423
$\alpha_A = 0.7$							
0.00	0.276	0.595	0.000	1.112	0.000	0.0731	2.005
0.10	0.569	0.402	0.098	1.306	0.097	0.0797	2.181
0.15	0.657	0.366	0.116	1.359	0.111	0.0815	2.265
0.20	0.739	0.338	0.164	1.408	0.139	0.0830	2.281
0.25	0.829	0.304	0.214	1.476	0.177	0.0849	2.336
0.30	0.918	0.275	0.229	1.544	0.217	0.0868	2.391
$\alpha_A = 0.8$							
0.00	0.048	0.723	0.000	1.210	0.000	0.1050	1.918
0.10	0.343	0.529	0.075	1.378	0.063	0.1129	2.079
0.15	0.462	0.461	0.117	1.462	0.099	0.1167	2.155
0.20	0.569	0.407	0.162	1.542	0.137	0.1201	2.230
0.25	0.669	0.364	0.212	1.622	0.178	0.1233	2.298
0.30	0.762	0.331	0.265	1.693	0.215	0.1259	2.356

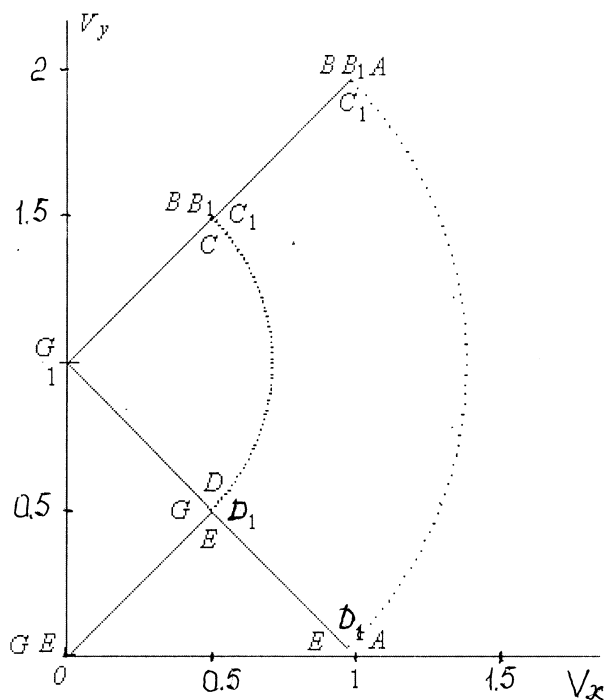


Рис. 7. Годограф скоростей для линий скольжения на рис. 6.

В табл. 3 приведены углы  $\psi$ ,  $\beta_A$ ,  $\alpha_E$ , координаты точек  $B$  и  $G$ , определяющие пластическую область, глубина вдавливания  $h/R$  и давление  $q$  в зависимости от  $\mu$  и  $\alpha_A$ . Центральная жесткая зона почти совпадает со всей границей контакта при  $\{\alpha_A = 0.1, \mu = 0.1\}$ ,  $\{\alpha_A = 0.2, \mu = 0.2\}$  и  $\{\alpha_A = 0.3, \mu = 0.3\}$ . Углы  $\beta_A$  и кривизна границы  $AB$  пластической области малы. При углах  $\alpha_A \geq 0.4$  на границе контакта сохраняется значительная зона скольжения. Кривизна границы  $AB$  и глубина вдавливания увеличиваются. Снижение трения приводит к снижению углов  $\psi$  и давления  $q$ , и к увеличению углов  $\beta_A$  и кривизны границы  $AB$ . При  $\mu = 0$  и  $\alpha_A > 0.8$  угол  $\psi \rightarrow 0$ . Вер  $\eta$  линий скольжения вырождается в одну линию. При увеличении трения снижение угла  $\psi$  при увеличении угла  $\alpha_A$  уменьшается.

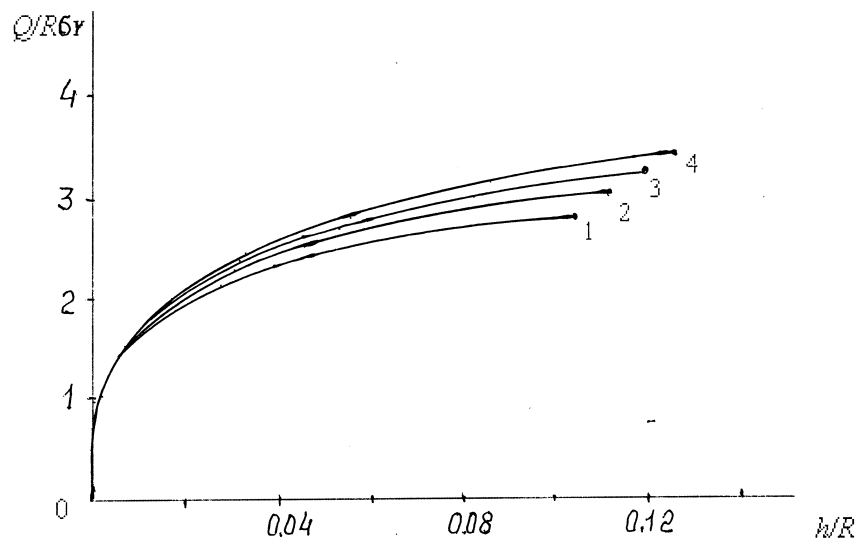


Рис. 8. Зависимости погонной нагрузки на цилиндр  $Q/R\sigma_Y$  от  $h/R$ . 1— $\mu = 0.0$ , 2— $\mu = 0.1$ , 3— $\mu = 0.2$ , 4— $\mu = 0.3$ .

Зависимости погонной нагрузки на цилиндр  $Q/R\sigma_Y$  от глубины вдавливания  $h/R$  и коэффициента трения  $\mu$  показаны на рис. 8. При малых углах  $\alpha_A$  нагрузка быстро увеличивается вследствие малых значений  $h/R$ . С увеличением  $\alpha_A$  возрастание нагрузки замедляется вследствие снижения давления  $q$  и быстрого увеличения  $h/R$ . На рис. 9 и 10 показаны границы пластической области при вдавливании цилиндра для углов  $\alpha_A \geq 0.2$  при  $\mu = 0.2$  и  $\mu = 0$ . При увеличении угла контакта  $\alpha_A$  пластическая область расширяется, но центральная жесткая зона при  $\mu = 0.2$  увеличивается незначительно. В случае гладкого цилиндра пластическая область уменьшается, а кривизна свободной границы  $AB$  увеличивается.

**Заключение.** Приведено моделирование вдавливания жесткого цилиндра в идеально пластическое полупространство с криволинейной границей пластической области с учетом контактного трения по Прандтлю. Численным интегрированием гиперболических уравнений теории плоской деформации вычислены линии скольжения и годографы скоростей пластического течения, при которых диссипативная функция

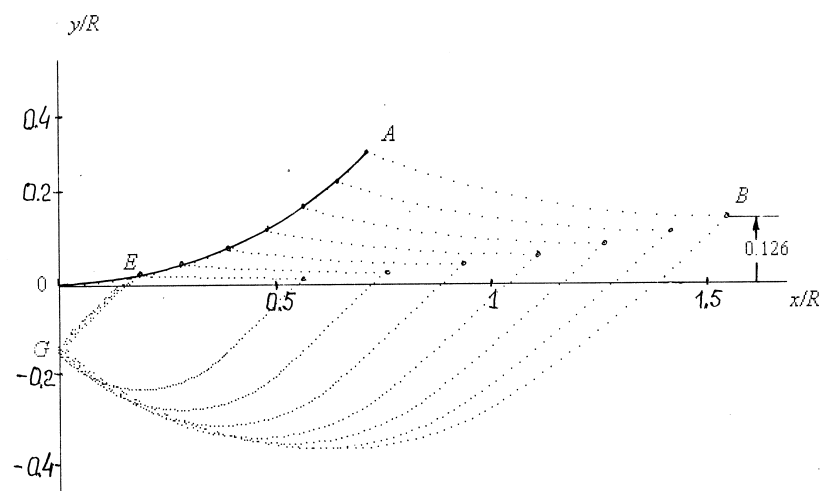


Рис. 9. Границы пластической области при  $\mu = 0.2$  для углов границы контакта цилиндра  $\alpha_d = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ .

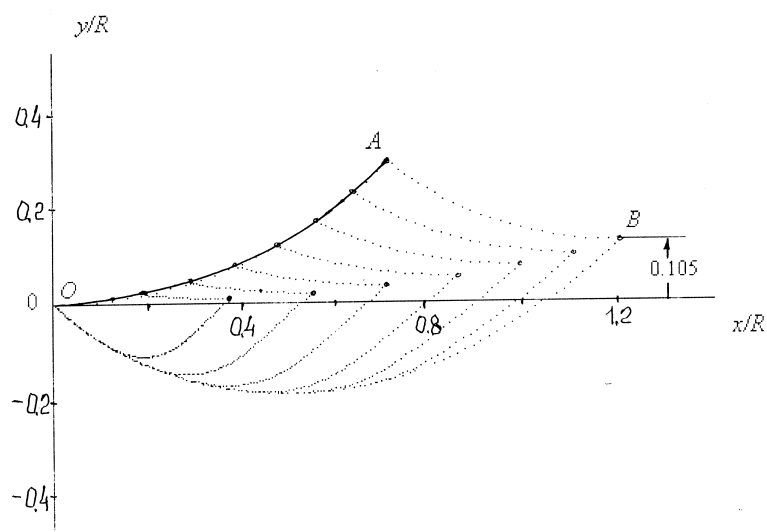


Рис. 10. Границы пластической области при  $\mu = 0$  для углов границы контакта цилиндра  $\alpha_d = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ .

пластического течения положительна во всей пластической области. Получены зависимости предельного давления, формы пластической области с образованием центральной жесткой зоны и глубины вдавливания от коэффициента трения и угла контакта цилиндра с пластической областью. При малых углах контакта и отсутствии



трения решение приближается к давлению плоского штампа Хилла. При малых углах контакта и малом трении решение приближается к давлению плоского штампа Прандтля.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
- [2] Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
- [3] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 704 с.
- [4] Прагер В., Ходж Ф. Теория идеально пластических тел. М.: ИЛ, 1956.
- [5] Томленов А. Д. Теория пластического деформирования металлов. М.: Metallurgiya, 1972. 408 с.
- [6] Nepershin R.I. Applied Problems of Plasticity. Moscow: MSTU "STANKIN", 2016. 310 p.
- [7] Druyanov B.A., Nepershin R.I. Problems of Technological Plasticity. Amsterdam: Elsevier, 1994. 406 p.

*R. I. Nepershin*

### ON THE IDEAL PLASTIC HALF-SPACE INDENTATION BY THE WITH CONTACT FRICTION CONSIDERATION

*Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia*

**Abstract.** Numerical simulation of the plane strain ideal plastic half-space indentation by the rigid cylinder with Prandtl's contact friction consideration is presented. The slip lines, velocities on the hodograph plane with positive dissipative function are defined by numerical calculation of differential equations of the plane strain plastic flow theory. Curved form of the stress free boundary of the plastic region, which is function of the cylinder indentation depth, is defined by the plastic incompressibility condition. The numerical simulation satisfies the full equations system of the plane strain ideal plastic theory with Mises yield criterion and positive dissipative function in the plastic region.

**Keywords:** ideal plastic half-space, cylinder indentation, plane strain theory, contact friction, slip lines, velocities hodograph, dissipative function.

### REFERENCES

- [1] Hill R. Matematicheskaya teoriya plastichnosti. M.: Gostekhizdat, 1956. 407 s.
- [2] Sokolovskij V. V. Teoriya plastichnosti. M.: Vysshaya shkola, 1969. 608 s.
- [3] Ishlinskij A. YU., Ivlev D. D. Matematicheskaya teoriya plastichnosti. M.: FIZMATLIT, 2001. 704 s.
- [4] Prager V., Hodzh F. Teoriya ideal'no plasticheskikh tel. M.: IL, 1956.
- [5] Tomlenov A. D. Teoriya plasticheskogo deformirovaniya metallov. M.: Metallurgiya, 1972. 408 s.

---

*Nepershin Rostislav Ivanovich* ,  
 e-mail: nepershin\_ri@rambler.ru, Dr. Sci. Eng., Professor, Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia.

[6] Nepershin R.I. Applied Problems of Plasticity. Moscow: MSTU "STANKIN", 2016. 310 p.

[7] Druyanov V.A., Nepershin R.I. Problems of Technological Plasticity. Amsterdam: Elsevier, 1994. 406 p.