

А. В. Гавриленко, В. И. Гультияев, С. Л. Субботин

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОГИБОВ СЖАТО-ИЗОГНУТОГО ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЁННОГО БЕЗ СЦЕПЛЕНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО ЭЛЕМЕНТА ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ДВУХЛИНЕЙНОЙ ДИАГРАММЫ СОСТОЯНИЯ БЕТОНА

*Тверской государственной технической университет, г. Тверь, Россия*

**Аннотация.** В статье приводится описание методики расчёта прогибов изгибаемых железобетонных элементов, предварительно напряжённых арматурой без сцепления. В основу методики положено использование двухлинейной диаграммы состояния сжатого бетона. Процесс нагружения элемента предложено отслеживать по деформациям. Выделен ряд характерных этапов работы напряжённой без сцепления балки при росте внешней нагрузки. Для характерных этапов приведены расчётные зависимости, позволяющие оценить момент сечения и кривизну. По полученным формулам осуществлён расчёт ряда балок, испытанных на изгиб в ранее проведённом экспериментальном исследовании. Из сопоставления результатов счёта с данными эксперимента сделаны выводы о возможности использования предлагаемого метода.

**Ключевые слова:** напряжение без сцепления, нелинейная деформационная модель, двухлинейная диаграмма состояния, идеальный упругопластический материал, испытание на изгиб.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.40.2.001

УДК: 620.173.21, 539.3

За рубежом весьма популярны предварительно напрягаемые в условиях строительной площадки железобетонные конструкции, в которых напрягаемая арматура не имеет сцепления с бетоном по всей её длине, а усилия обжатия передаются на бетон только по торцам. Использование в строительстве такой технологии, называемой постнапряжением, имеет ряд технологических и экономических преимуществ [1]. В нашей стране наблюдается недостаток нормативной документации, позволяющей выполнить расчёт и проектирование таких конструкций.

---

© Гавриленко А. В., Гультияев В. И., Субботин С. Л., 2019

*Гавриленко Алексей Владимирович*

**e-mail:** gawaw@mail.ru, аспирант кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственной технической университет, г. Тверь, Россия,

*Гультияев Вадим Иванович*

**e-mail:** vig0@mail.ru, доктор технических наук, профессор кафедры конструкции и сооружения, Тверской государственной технической университет, г. Тверь, Россия

*Субботин Сергей Львович*

**e-mail:** sbtn@yandex.ru, доктор технических наук, профессор кафедры конструкции и сооружения, Тверской государственной технической университет, г. Тверь, Россия.

Поступила 15.05.2019

Одним из наиболее актуальных методов расчёта бетонных и железобетонных элементов, содержащихся в нормативной документации в нашей стране, можно считать нелинейную деформационную модель – НДМ [2, с. 5].

При этом расчёт по НДМ целесообразно производить с использованием вычислительной техники [2, с. 75], что требует создания компьютерной программы. Однако при написании такой программы могут быть допущены определённые ошибки, которые не окажутся фатальными для выполнения программы в целом, но при этом приведут к получению недостоверных результатов. Для исключения данных ошибок требуется процесс отладки, при котором результат программного счёта, полученный при различных входных данных, сопоставляется с заведомо известным результатом, полученным каким-либо или иным способом, например – аналитически.

В связи с этим была поставлена задача по получению методами механики материалов ряда аналитических расчётных зависимостей, позволяющих оценить напряжения в сжатом бетоне и прогиб балки без сцепления.

#### Основные предпосылки методики расчёта

В поставленной задаче интерес представляет величина прогиба только в одной точке по длине балки – в середине её пролёта. В связи с этим прогиб элемента от действия внешних сосредоточенных сил целесообразно определять по формуле Мора с применением способа Верещагина. Согласно [3, с. 34] и [4, с. 184], прогиб рассматриваемого элемента в середине его пролёта от действия эксплуатационных нагрузок может быть выражен формулой:

$$f = \frac{Fa}{24EI} (3l^2 - 4c^2), \quad (1)$$

где  $F$  – сосредоточенные силы, приложенные к балке на расстояниях  $c$  от её опор;  $l$  – пролёт балки;  $E$  – начальный модуль упругости бетона;  $I$  – момент инерции поперечного сечения.

Расчёт по формуле (1) затруднён, поскольку при работе железобетонного элемента в ряде его сечений образуются трещины, приводящие к уменьшению момента инерции в таких сечениях и соответствующему росту прогиба элемента.

В методике актуального свода правил [5] предлагается вычислять кривизну элемента на участках с трещинами и без трещин по различным формулам. Однако в рассматриваемом элементе отсутствует арматура, имеющая сцепление с бетоном, что делает затруднительным корректное определение кривизны на участках с трещинами в растянутой зоне по [5]. Методика, предложенная в [6], требует выполнения ряда итераций и на практике оказывается достаточно трудоёмкой.

Для получения способа определения прогибов элемента с трещинами, выражение (1) приближённо преобразуем к следующему виду:

$$f = \frac{M_{\max}}{24EI} (3l^2 - 4c^2). \quad (2)$$

При работе в упругой стадии кривизна элемента связана с изгибающим моментом известным соотношением:

$$\frac{1}{\rho_{\max}} = \frac{M_{\max}}{EI}. \quad (3)$$

В свою очередь кривизна элемента может быть записана как:

$$\frac{1}{\rho_{\max}} = \frac{\varepsilon_b}{x}, \quad (4)$$

что следует из геометрических соображений.

Тем самым из (2) получаем следующую формулу для определения прогиба элемента в середине пролёта:

$$f = \frac{\varepsilon_b}{24x} (3l^2 - 4c^2). \quad (5)$$

Для отыскания прогиба по данной формуле целесообразно задаться несколькими стадиями работы элемента, в которых будет различаться величина деформации наиболее сжатого волокна бетона  $\varepsilon_b$ . Примем, что гипотеза плоских сечений в рассматриваемом случае полностью соблюдается. Для описания работы бетона зададимся двухлинейной диаграммой  $\sigma - \varepsilon$ , приведённой в [5], т.е. будем рассматривать бетон идеальным упругопластическим материалом [7, с. 41]. Учитывая изложенные обстоятельства, а также задаваясь рядом данных из приведённого ранее экспериментального исследования, вполне возможно определить высоту сжатой зоны бетона в сечении и далее прогиб по выражению (5).

Наличие трещин в растянутой зоне рассматриваемой балки при определении её прогиба по формуле (5) учитывается исключением из рассмотрения растянутого бетона при исчерпании его прочности. Критерии образования трещин и исчерпания прочности бетона приняты в соответствии с рекомендациями [5]. Рассмотрение сечения без учёта растянутого бетона приводит к уменьшению высоты сжатой зоны, что влечёт соответствующий рост прогиба элемента после образования трещин.

#### **Стадии и этапы работы элемента, расчётные зависимости**

В экспериментальном исследовании балок без сцепления, выполненном ранее, были получены графики “прогиб – нагрузка” для ряда образцов (рис. 1).

По данным графиков, а также на основании натурных наблюдений за поведением балок при их изготовлении и испытании, принимая во внимание основные особенности технологии производства работ при возведении подобных конструкций в реальных объектах, с учётом общепринятого подхода к рассмотрению стадий работы железобетонных элементов [8], были выделены основные этапы работы рассматриваемых балок без сцепления:

- I. Стадия предварительного напряжения
- II. Стадия работы под нагрузкой без трещин в растянутой зоне
- III. Стадия работы под нагрузкой после образования трещин в растянутой зоне.

В каждой из данных стадий дополнительно можно выделить определённые этапы работы элемента, рассмотренные подробнее далее.

**Стадия I “предварительное напряжение”.** Расчётная схема элемента дана на рис. 2.

В данной стадии к элементу прикладывается усилие предварительного обжатия. Сам элемент перед началом напряжения, как правило, расположен на опалубке и в его сечениях отсутствуют внутренние усилия, обусловленные действием его собственного веса. Обжатие может компенсировать часть нагрузки от собственного веса элемента либо её всю. Элемент может получить предварительный выгиб. Правильный выбор усилия предварительного напряжения с целью компенсации части изгибающего момента, вызванного собственным весом, является важным этапом в проектировании постнапряжённых конструкций [9, с. 11].

**Стадия II “работа под нагрузкой без трещин в растянутой зоне”.** Расчётная схема элемента приведена на рис. 3.

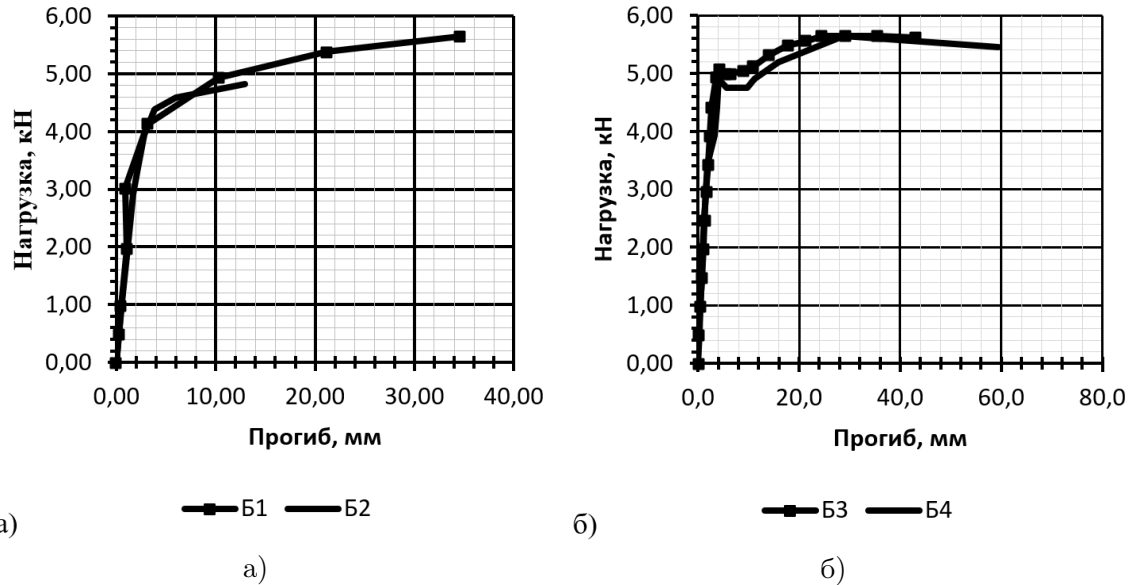


Рис. 1. Графики, показывающие зависимость “прогиб – нагрузка”: а – для образцов-балок Б1 и Б2, б – для образцов-балок Б3 и Б4

При росте внешней нагрузки постепенно гасятся сжимающие усилия, заданные при предварительном обжатии. Напряжения в бетоне нижней части конструкции от сжимающих переходят к растягивающим.

При этом можно выделить два характерных этапа работы элемента на данной стадии:

**II.1.** Бетон по высоте сечения работает линейно, при этом в бетоне верхней части возникают сжимающие напряжения, а в бетоне нижней части – растягивающие. Окончание данного этапа работы элемента характеризуется достижением в наиболее растянутом волокне деформации  $\varepsilon_{bt1}$ , которая определяет переход линейной зависимости напряжений от деформаций к нелинейной (см. рис. 3, б). По графикам на рис. 1 данной стадии соответствует относительно линейный участок при прогибе балки от 0 примерно до 4 мм.

Из геометрических соображений для данной стадии получаем:

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_{bt1,red}x}{h - x}. \quad (6)$$

На данной стадии работы элемента считаем, что деформации в сжатом бетоне не достигли величины  $\varepsilon_{b1}$ , поэтому наибольшее напряжение в сжатой зоне сечения, с учётом рекомендаций [5], может быть найдено как:

$$\sigma_b = \varepsilon_b E_b = \frac{\varepsilon_{bt1}x E}{h - x}. \quad (7)$$

Из выражения равенства нулю проекций сил на горизонтальную ось получаем квадратное уравнение, из решения которого может быть найдена высота сжатой зоны  $x$ :

$$(\varepsilon_{bt1,red}bE - R_{btb})x^2 + (2R_{btb}h + 2N_{II.1})x - R_{btb}bh^2 - 2N_{II.1}h = 0. \quad (8)$$

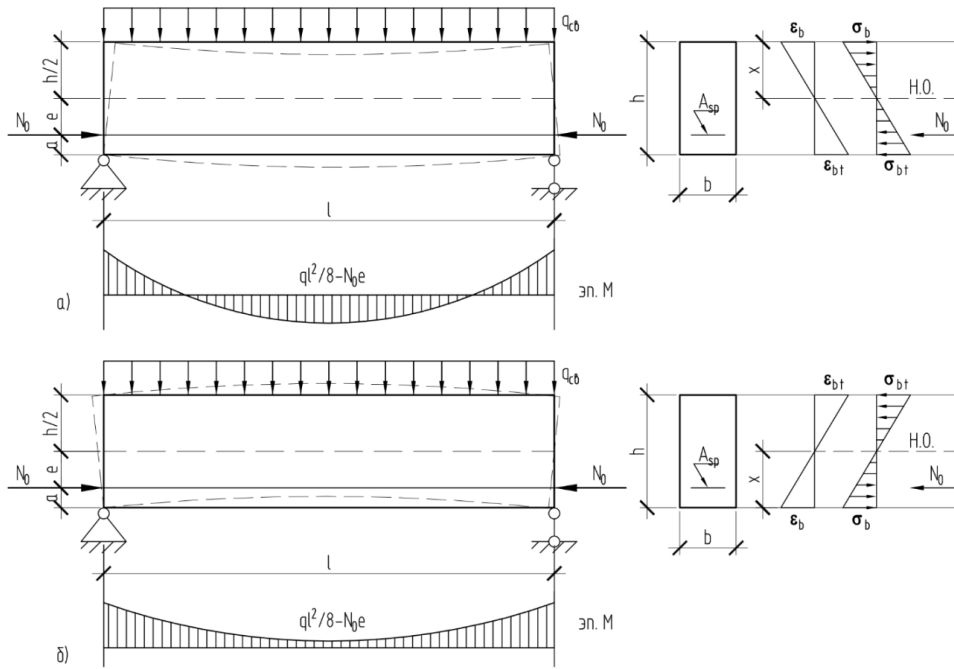


Рис. 2. Элемент в стадии предварительного напряжения: а – в случае, если  $ql^2/8 > N_0e$ ; б – в случае, если  $ql^2/8 < N_0e$

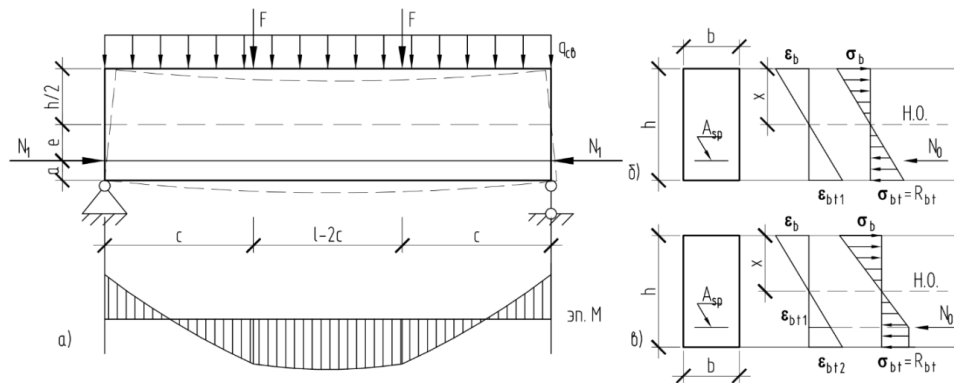


Рис. 3. Элемент в стадии работы под нагрузкой без трещин в растянутой зоне: а – схема элемента; б, в – распределение деформаций и напряжений по высоте сечения на этапах II.1 и II.2 соответственно

Уравнение равенства нулю моментов относительно нейтральной оси позволяет отыскать момент сечения в данной стадии:

$$M_{II.1} = \frac{1}{3} \sigma_b b x^2 + \frac{1}{3} R_{bt} b (h - x)^2 + N_{II.1} (h - x - a). \quad (9)$$

**II.2.** С дальнейшим ростом внешней нагрузки в растянутом бетоне развивается зона неупругих деформаций. Данный этап работы элемента завершается при достижении в наиболее растянутом волокне деформации  $\varepsilon_{bt2}$ , являющейся предельной деформацией для бетона при растяжении. Тем самым, в сечении достигнут момент трещинообразования (см. рис. 3, в).

Находим относительную деформацию наиболее сжатого волокна:

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_{bt2}x}{h-x}. \quad (10)$$

Считаем, что относительные деформации сжатого бетона по-прежнему не достигли величины  $\varepsilon_{b1}$ , поэтому по аналогии с (7) выражаем напряжения в сжатом бетоне:

$$\sigma_b = \frac{\varepsilon_{bt2}xE}{h-x}. \quad (11)$$

Высота сжатой зоны определится из квадратного уравнения:

$$\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{bt2}bE - \frac{11}{30}R_{bt}b\right)x^2 + \left(\frac{22}{15}R_{bt}bh + N_{II.2}\right)x - \frac{11}{15}R_{bt}bh^2 - N_{II.2}h = 0. \quad (12)$$

Момент сечения:

$$M_{II.2} = \frac{1}{3}\sigma_b bx^2 + \frac{611}{1350}R_{bt}b(h-x)^2 + N_{II.2}(h-x-a). \quad (13)$$

**Стадия III “работа под нагрузкой после образования трещин в растянутой зоне”.** Расчётная схема элемента приведена на рис. 4.

Принимаем, что после образования трещины растянутый бетон полностью исключается из работы сечения. В предварительных расчётах работу бетона на участках между трещинами учтём приближённо: примем, что в сечении, расположенном посередине расстояния между трещинами, в растянутом бетоне достигается предельная деформация  $\varepsilon_{bt2}$ . Распределение относительных деформаций в сжатом бетоне примем равномерным по всей верхней грани балки, тем самым в сечении, находящемся посередине расстояния между трещинами, в сжатом бетоне достигается деформация  $\varepsilon_b$  такая же, как и в сечении с трещиной.

Из геометрических соображений высота сжатой зоны в таком сечении оказывается равной:

$$x_1 = \frac{h\varepsilon_b}{\varepsilon_b + \varepsilon_{bt2}}. \quad (14)$$

Для расчёта прогиба по формуле (5) в данном случае необходимо использовать следующую высоту сжатой зоны:

$$x_{cp} = \frac{x + x_1}{2}. \quad (15)$$

В третьей стадии могут быть выделены следующие основные этапы работы элемента:

**III.1.** При постепенном росте внешней нагрузки был достигнут момент, когда трещина образовалась (стадия II.2). Растянутый бетон сразу выключился из работы, что привело к снижению момента инерции сечения и, соответственно, к резкому увеличению прогиба элемента. Величина внешней нагрузки при этом не изменилась. Данный этап работы отчётливо прослеживается по графикам (рис.1, б) в виде горизонтального

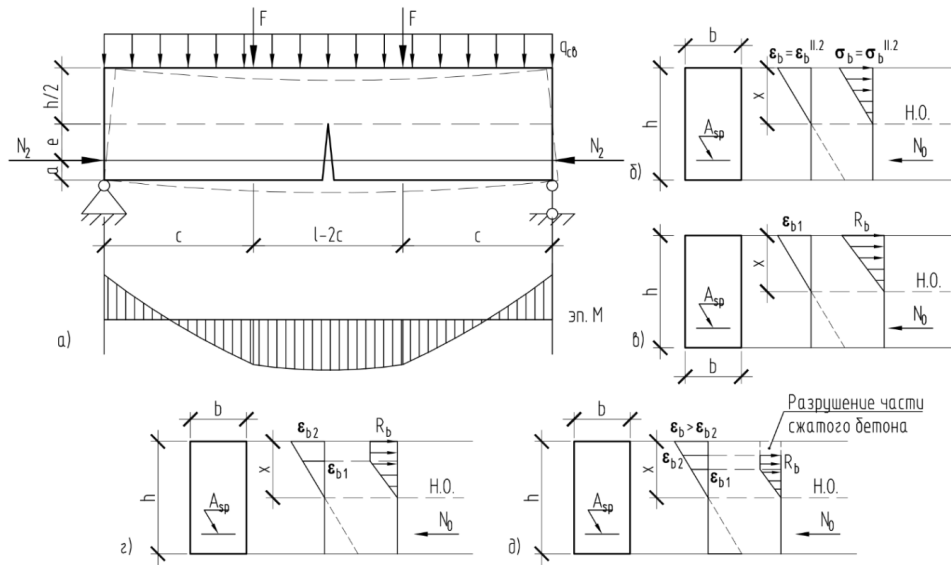


Рис. 4. Элемент в стадии работы под нагрузкой после образования трещин в растянутой зоне: а – схема элемента; б... д – распределение деформаций и напряжений по высоте сечения на этапах III.1... III.4

участка при нагрузке порядка 4,8 кН. Изгибающий момент на данном этапе считаем равным моменту в предельной стадии II.2, то есть моменту, вызвавшему образование трещины:  $M_{III.1} = M_{II.2}$ .

Считаем, что в данном случае в сжатой зоне относительные деформации ещё не достигли величины  $\epsilon_{b1}$ , поэтому их величину можем определить по формуле:

$$\epsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_{b,red}}. \quad (16)$$

Величина напряжений в сжатом бетоне в данном случае может быть получена из выражения:

$$\sigma_b = \frac{2N_{III.1}}{bx}. \quad (17)$$

Высота сжатой зоны из уравнений равновесия статики:

$$x = 3 \left( h - a - \frac{M_{II.2}}{N_{III.1}} \right). \quad (18)$$

Момент сечения:

$$M_{III.1} = \frac{1}{2} \sigma_b b x \left( h - \frac{x}{3} - a \right). \quad (19)$$

Чтобы учесть работу растянутого бетона между трещинами, при вычислении прогиба по формуле (5) в данном случае следует использовать среднюю высоту сжатой зоны  $x_{cp}$ , определённую по формуле (15).

**III.2.** В наиболее сжатом волокне бетона достигается деформация  $\epsilon_{b1}$ , которая, в соответствии с двухлинейной диаграммой  $\sigma - \epsilon$ , определяет переход линейной зависимости напряжений от деформаций к нелинейной.

Величина относительной деформации наиболее сжатого волокна в данном случае известна и, согласно указаниям [5], равна:

$$\varepsilon_{b1} = \frac{R_b}{E_{b,red}} = \varepsilon_{b1,red} = 0,0015. \quad (20)$$

Высота сжатой зоны из уравнения равенства нулю проекций сил на горизонтальную ось:

$$x = \frac{2N_{III.2}}{R_b b}. \quad (21)$$

Момент сечения:

$$M_{III.2} = \frac{1}{2} R_b b x \left( h - \frac{x}{3} - a \right). \quad (22)$$

При вычислении прогиба по формуле (5) в данном случае также целесообразно использовать среднюю высоту сжатой зоны  $x_{cp}$ , определённую по формуле (15).

**III.3.** В наиболее сжатом волокне достигается деформация  $\varepsilon_{b2}$ , которая является предельной деформацией бетона при сжатии. В сечении достигается предельный момент по несущей способности. По графикам на рис. 1 данной стадии соответствует точка, в которой достигнута наибольшая внешняя нагрузка на элемент.

Величина относительной деформации наиболее сжатого волокна бетона в данном случае в соответствии с [5] принимается равной  $\varepsilon_{b2} = 0,0035$ .

Высота сжатой зоны определяется из уравнения:

$$x = \frac{14}{11} \frac{N_{III.3}}{R_b b}. \quad (23)$$

Момент сечения:

$$M_{III.3} = \frac{11}{14} R_b b x \left( h - \frac{31}{77} x - a \right). \quad (24)$$

Как и в двух предыдущих случаях, в формулу для определения прогиба (5) целесообразно подставлять величину  $x_{cp}$ , определённую по (15).

**III.4.** В наиболее сжатом волокне бетона сжатой зоны деформация  $\varepsilon_b > \varepsilon_{b2}$ , часть бетона разрушается и выключается из работы. Данную стадию можно отчётливо отследить по графику на рис.1, б – после достижения прогиба порядка 24-26 мм происходит дальнейший рост прогиба при снижении воспринимаемой балкой внешней нагрузки. С практической точки зрения рассмотрение данной стадии работы избыточно, поэтому в данном случае оно не производится.

Следует отметить, что в процессе работы балочного элемента без сцепления усилие в напрягаемой арматуре изменяется. Так, сразу после приложения к конструкции предварительного обжатия усилие начинает снижаться вследствие развития вторых потерь (длительная релаксация напряжений в арматуре, ползучесть и усадка бетона и другие).

При приложении к элементу внешней нагрузки он получает определённый прогиб. Вследствие этого происходит геометрическое приращение длины арматурного каната, что вызывает прирост усилий в арматуре без сцепления. Данное явление в ряде источников называется “антипотерями” [10]. В зарубежных нормативных документах, а также в работах иностранных и отечественных исследователей предложены различные способы расчётного определения величины антипотерь. Ввиду сложности данного



вопроса, на этапе предварительной проработки аналитической методики расчёта прогибов балок без сцепления усилие в напрягаемой арматуре целесообразно принимать по полученным ранее данным эксперимента.

#### Вычисление прогиба элемента

Исходные данные примем по натурным параметрам балок, испытанных ранее на изгиб. Размеры поперечного сечения, прочность бетона на сжатие и величина защитного слоя бетона для напрягаемой арматуры по образцам балкам Б1–Б4 приведены в строках 1–3 таблицы 1.

Как отмечалось ранее, усилие в нитях напрягаемой арматуры изменяется в процессе нагружения постнапряжённых конструкций внешней нагрузкой, поэтому его величиной будем задаваться отдельно в каждой из ранее выделенных стадий.

Ввиду обстоятельств, изложенных в [11], величина  $R_b$ , полученная при испытании стандартных образцов кубов на сжатие, может отличаться от фактической величины напряжений, при которой произошло разрушение сжатого бетона в балках.

Чтобы проверить данное обстоятельство, расчёты выполним дважды:

- при прочности бетона, полученной при испытании образцов на сжатие (строка 4 табл. 1);
- при прочности бетона, определённой расчётом по предельной стадии III.3 работы балки.

Для того, чтобы получить расчётную прочность бетона на сжатие, представим выражение (24) в следующем виде:

$$M_{III.3} = N_{III.3} \left( h - a - \frac{31}{77}x \right), \quad (25)$$

откуда можем найти альтернативное выражение для определения высоты сжатой зоны:

$$x = \frac{77}{31} \left( h - a - \frac{M_{III.3}}{N_{III.3}} \right). \quad (26)$$

Далее из (23) выражаем искомую величину через высоту сжатой зоны бетона  $x$ :

$$R_b = \frac{14}{11} \frac{N_{III.3}}{bx}. \quad (27)$$

Расчёт по формулам (26) и (27) выполним для нескольких значений  $M_{III.3}$  и  $N_{III.3}$ , взятых по экспериментальным данным в близкой окрестности от момента разрушения балки. Итоговую расчётную величину  $R_b$  вычислим как среднее арифметическое полученных значений.

Результаты расчёта по формуле (27) для балок Б1–Б4 сведены в строку 8 таблицы 1.

Величины прочности бетона на растяжение и начального модуля упругости бетона принимаем по данным таблиц [5], предварительно определив класс бетона на сжатие  $B_{по}$  величине  $R_b$ , измеренной в экспериментальном исследовании или вычисленной по формуле (27). Прочность бетона на растяжение и начальный модуль упругости приведены в строках 5...7 и 9...11 таблицы 1.

Необходимые величины относительных деформаций бетона при двухлинейной диаграмме  $\sigma - \varepsilon$  примем в соответствии с рекомендациями свода правил [5].

Расчёт производился в следующем порядке:

№	Параметр	Ед. изм.	Величина параметра по образцам			
			Б1	Б2	Б3	Б4
1	Ширина сечения, $b$	см	19,97	19,96	20,08	19,95
2	Высота сечения, $h$	см	10,07	10,18	10,03	9,99
3	Защитный слой арматуры, $a_{sp}$	см	2,97	2,97	2,97	2,97
4	Прочность бетона на сжатие по образцам-кубам, $R_b$	кН/см <sup>2</sup>	2,63	2,63	3,00	3,00
5	Класс бетона на сжатие по образцам-кубам, $B_1$	–	29,34	29,34	33,92	33,92
6	Прочность бетона на растяжение $R_{bt}$ по классу $B_1$	кН/см <sup>2</sup>	0,17	0,17	0,19	0,19
7	Начальный модуль упругости бетона $E_b$ по классу $B_1$	кН/см <sup>2</sup>	3217,01	3217,01	3406,66	3406,66
8	Прочность бетона на сжатие по расчёту в стадии III.3, $R_b$	кН/см <sup>2</sup>	1,05	1,04	1,95	2,46
9	Класс бетона на сжатие по расчёту в стадии III.3, $B_2$	–	14,09	13,98	26,42	33,72
10	Прочность бетона на растяжение $R_{bt}$ по классу $B_2$	кН/см <sup>2</sup>	0,11	0,11	0,16	0,19
11	Начальный модуль упругости бетона $E_b$ по классу $B_2$	кН/см <sup>2</sup>	2308,73	2298,29	3070,93	3398,78

Таблица 1. Исходные данные для расчёта

1. По экспериментальным данным (см. табл. 2) для каждой из выделенных стадий работы элемента задаёмся предварительной величиной усилия в нитях напрягаемой арматуры  $N_i$ .

Образец Б1		Образец Б2		Образец Б3		Образец Б4	
Нагрузка, $F$ , кН	$N$ , кН	Нагрузка, $F$ , кН	$N$ , кН	Нагрузка, $F$ , кН	$N$ , кН	Нагрузка, $F$ , кН	$N$ , кН
0,00	55,50	0,00	55,10	0,00	51,24	0,00	47,15
0,49	57,05	1,05	50,64	0,49	51,24	0,49	47,38
0,98	57,05	1,96	52,35	0,98	51,24	0,98	47,44
1,96	57,05	2,91	51,59	1,96	51,33	1,96	47,44
3,02	56,08	3,37	50,16	2,96	51,33	2,94	47,57
4,13	55,56	3,94	50,43	3,92	51,35	3,92	47,59
4,92	58,80	4,38	50,43	4,92	51,11	4,91	47,59
5,38	64,49	4,58	50,43	5,30	54,61	5,19	51,30
5,65	65,55	4,82	53,67	5,65	59,12	5,65	53,25

Таблица 2. Величина усилия в напрягаемой арматуре в зависимости от внешней нагрузки

2. При известных исходных данных и величине  $N_i$  вычисляем  $x, \varepsilon_b, \sigma_b$  и  $M_i$  для данной стадии работы элемента.

3. Определяем расчётную величину внешней нагрузки в данной стадии по формуле:

$$F_i = \frac{M_i - 0,125ql^2}{c}, \quad (28)$$

где  $q$  – равномерно-распределённая нагрузка от собственного веса балки, равная  $q = 0,00462$  кН/см;  $l$  – пролёт балки между опорами,  $l = 192$  см;  $c$  – расстояние от опоры до точки приложения внешней сосредоточенной нагрузки,  $c = 61$  см.

4. По экспериментальным данным при известной величине внешней нагрузки  $F_i$  линейной интерполяцией определяем уточнённую величину усилия в нитях напрягаемой арматуры  $N_i$ .

5. Повторяем расчёт на шагах 2...4 до тех пор, пока расхождение между изначально заданной и уточнённой величинами  $N_i$  не окажется в пределах 5%.

6. Зная уточнённые величины  $x, \varepsilon_b$  и  $\sigma_b$  по шагу 5, вычисляем при необходимости  $x_{cp}$  по формуле (15) и далее прогиб элемента по (5).

Величины прогиба, полученные в результате расчёта, а также расчётное значение внешней сосредоточенной нагрузки  $F$ , при котором данный прогиб был получен, сведены в таблицу 3 для всех балок при двух вариантах прочности бетона.

Стадия	Образец-балка							
	Б1		Б2		Б3		Б4	
	$F$ , кН	$f$ , мм	$F$ , кН	$f$ , мм	$F$ , кН	$f$ , мм	$F$ , кН	$f$ , мм
Бетон В1								
II.1	4,33	1,30	4,04	1,21	4,08	1,21	3,80	1,17
II.2	4,31	1,61	4,10	1,52	4,16	1,53	3,92	1,50
III.1	4,31	1,78	4,10	1,89	4,16	1,98	3,92	2,12
III.2	6,52	10,21	5,37	10,59	5,73	10,84	4,71	11,21
III.3	6,78	24,72	5,51	25,25	5,89	25,74	5,19	26,15
Бетон В2								
II.1	3,93	1,56	3,66	1,44	3,93	1,27	3,80	1,17
II.2	3,77	1,84	3,56	1,74	3,95	1,58	3,91	1,50
III.1	3,77	1,70	3,56	1,68	3,95	1,82	3,91	2,11
III.2	4,61	8,16	4,27	8,48	4,84	10,20	4,62	10,86
III.3	5,55	20,45	4,82	21,39	5,61	24,28	5,30	25,46

Таблица 3. Результаты вычисления прогибов

### Сопоставление результатов расчёта с данными эксперимента

По результатам расчётов были получены величины прогиба балок в середине пролёта и соответствующие данным прогибам величины внешней нагрузки (см. табл. 3). Для удобства анализа полученных результатов и сопоставления их с данными эксперимента на графики, показывающие измеренную в эксперименте зависимость прогиба от внешней нагрузки, были наложены аналогичные графики, составленные по результатам счёта (рис. 5).

Из приведённых графиков следует, что использование в расчётах прочности бетона В1, полученной при испытаниях образцов-кубов, в двух случаях из трёх приводит к

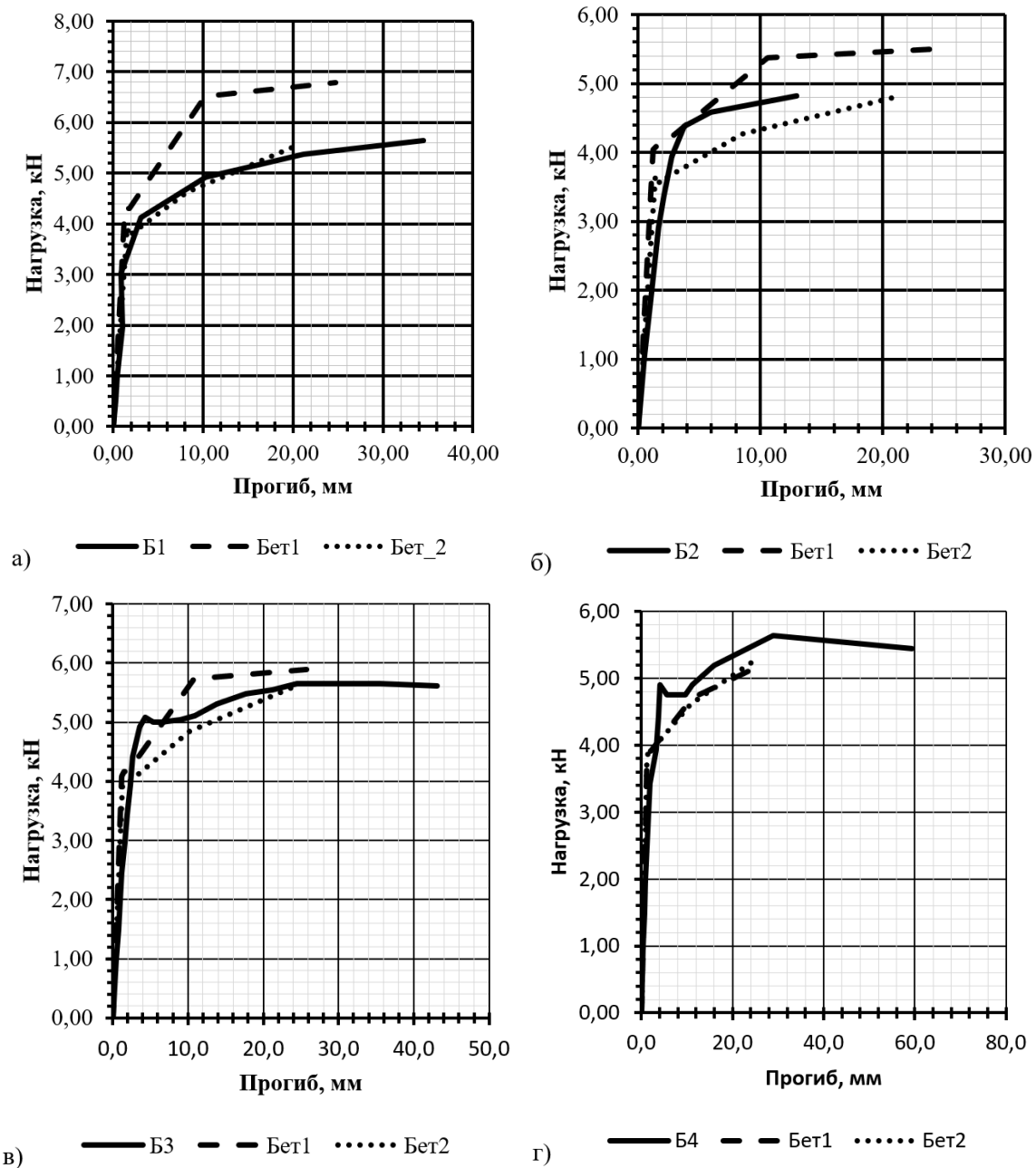


Рис. 5. Сопоставление экспериментального и расчётного прогиба: а – для образца Б1, б – для образца Б2, в – для образца Б3, г – для образца Б4

получению завышенных значений внешней нагрузки при одинаковых с экспериментальными значениями прогибов. В то же время при использовании расчётных характеристик бетона В2 наблюдается тенденция к занижению результатов. На практике

получение несколько заниженных результатов, полученных при использовании расчётных параметров бетона, можно считать более приемлемыми, поскольку это даст определённый “запас” в прочности и жёсткости реальной конструкции.

Также по графикам можно заметить, что на этапе работы конструкции до образования трещины результаты практически идентичны для обоих вариантов бетона. При этом наблюдается определённое завышение жёсткости конструкции относительно экспериментальных данных.

После образования трещины можно судить, как правило, о качественном соответствии полученных расчётом графиков данным эксперимента.

### **Заключение**

Была предложена аналитическая методика расчёта прогибов балок, напряжённых арматурой без сцепления. Предполагалось, что поведение бетона при росте внешней нагрузки описывается двухлинейной диаграммой  $\sigma - \varepsilon$ , приведённой в нормативной документации по расчёту бетонных и железобетонных конструкций, актуальной на данный момент.

В поведении рассматриваемых конструкций под нагрузкой были выделены основные стадии и этапы работы. На каждом из них были получены расчётные зависимости, позволяющие определить необходимые для расчёта прогибов величины, в частности, высоту сжатой зоны. По данным экспериментального исследования ряда образцов-балок, напряжённых арматурой без сцепления, были приняты необходимые исходные данные для расчёта по полученным аналитическим зависимостям.

В результате сопоставления расчётных и экспериментальных величин прогиба можно сделать вывод о том, что предложенный подход к определению прогибов в целом показывает сходимость с данными эксперимента, однако в ряде случаев точность получаемых результатов не может быть названа удовлетворительной. В связи с этим в дальнейшем представляет интерес развитие предложенного расчётного подхода, в частности, применение в нём трёхлинейной или криволинейной диаграммы состояния бетона.

## **ЛИТЕРАТУРА**

- [1] Расчёт балок, напряжённых арматурой без сцепления, методами линейной механики материалов / А.В. Гавриленко, Т.Р. Баркая, С.Л. Субботин [и др.] // Жилищное хозяйство и коммунальная инфраструктура. 2018. № 4(7). с. 16–21.
- [2] Кодыш Э.Н., Никитин И.К., Трекин Н.Н. Расчёт железобетонных конструкций из тяжёлого бетона по прочности, трещиностойкости и деформациям. М.: АСВ, 2010. 352 с.
- [3] ACI 435R-95. Control of deflection in concrete structures / ACI Committee 435. 1995.
- [4] Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1970. 544 с.
- [5] СП 63.13330.2012. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003. Введ. 01.01.2013. 2012.
- [6] Mast R. Analysis of cracked prestressed concrete sections: a practical approach // PCI Journal. 1998. p. 80–91.
- [7] Зубчанинов В.Г. Механика сплошных деформируемых сред, 2 изд. Тверь: ЧуДо, 2000. 703 с.
- [8] Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции. 5 изд. М.: Стройиздат, 1991. 767 с.
- [9] Cross E. Post-tensioning in Building Structures. Austress Freyssinet Pty Ltd.
- [10] Поргаев Д.В. Расчет и конструирование монолитных преднапряженных конструкций гражданских зданий : научное издание. М.: Ассоциация строительных вузов, 2011. 248 с.
- [11] О назначении допусков на линейные размеры и форму кубических и призматических бетонных образцов при испытаниях на сжатие / Л.М. Абрамов, С.Н. Маклакова, М.А. Галкина [и др.] // Вестник Чувашия государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 4(34). с. 74–81.

A. V. Gavrilenko, V. I. Gulyaev, S. L. Subbotin

**DEFLECTION DETERMINATION OF AN ECCENTRICALLY CURVED  
CONCRETE ELEMENT PRESTRESSED WITHOUT BOND BY USING  
BI-LINEAR DIAGRAM OF CONCRETE STATE**

*Tver State Technical University, Tver, Russia*

**Abstract.** There is a description of a deflection calculation method of posttensioned unbonded concrete elements in this paper. Method is based on use of bi-linear diagram of concrete state. Loading process is suggested to track by strains. Some key stages of posttensioned unbonded beam work are determined. For these stages calculated dependencies for estimation of curvature and ultimate bending moment of cross section are given. Calculation of some beams, which were investigated in previous experimental study, are made using suggested formulas. By comparison of experimental data and calculated results conclusion about possibility of use of suggested method is given.

**Keywords:** : posttension, non-linear deformation model, bi-linear state diagram, perfect elastic-plastic material, bending test

REFERENCES

- [1] Calculation of beams prestressed by reinforcement without bond to concrete by methods of linear mechanics of materials / A. Gavrilenko, T. Barkaya, S. Subbotin et al. // *Zhilishchnoye khozyaystvo i kommunal'naya infrastruktura*. 2018. no. 4(7). p. 16–21. (in Russian).
- [2] Kodysh E., Nikitin I., Trekin N. Calculation of reinforced concrete structures made of heavy concrete for strength, crack resistance and deformations. M.: ASV, 2010. 352 p. (in Russian).
- [3] ACI 435R-95. Control of deflection in concrete structures / ACI Committee 435. 1995.
- [4] Feodos'yev V. Strength of materials. M.: Nauka, 1970. 544 p. (in Russian).
- [5] SP 63.13330.2012. Concrete and reinforcement concrete structures. The main provisions. Updated edition of SNiP 52-01-2003. 01.01.2013. 2012. (in Russian).
- [6] Mast R. Analysis of cracked prestressed concrete sections: a practical approach // *PCI Journal*. 1998. p. 80–91.
- [7] Zubchaninov V. Mechanics of continuous deformable environments. 2 edition. Tver': ChuDo, 2000. 703 p. (in Russian).
- [8] Baykov V., Sigalov E. Reinforced concrete structures. 5 edition. M.: Stroyizdat, 1991. 767 p. (in Russian).
- [9] Cross E. Post-tensioning in Building Structures. Austress Freyssinet Pty Ltd.
- [10] Portayev D. Calculation and design of monolithic posttensioned constructions of civil buildings : scientific publication. M.: Assotsiatsiya stroitel'nykh vuzov, 2011. 248 p. (in Russian).
- [11] On the appointment of tolerances for linear dimensions and shape of cubic and prismatic concrete specimens under compression tests / L. Abramov, S. Maklakova, M. Galkina et al. // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.YA. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya*. 2017. no. 4(34). p. 74–81. (in Russian).

---

*Gavrilenko Alexey Vladimirovich*, Postgraduate Student, Tver State Technical University, Tver, Russia.

*Gulyaev Vadim Ivanovich*, Doctor of Technical Sciences, Ass. Professor, Tver State Technical University, Tver, Russia.

*Subbotin Sergey Lvovich*, Doctor of Technical Sciences, Ass. Professor, Tver State Technical University, Tver, Russia.