

Б. Г. Миронов¹, А. В. Никитин²

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ТРУБЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

¹Российский университет транспорта, г. Москва, Россия

²Чебоксарский институт (ф) Московского политехнического университета,
г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Рассматривается предельное состояние неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. Материал предполагается неоднородным и обладающим свойствами анизотропии в пластической области. Неоднородность материала заключается в том, что предел текучести зависит от координат, причем он постоянен вдоль концентрических окружностей. Определено предельное состояние трубы в первом приближении.

Ключевые слова: пластичность, неоднородность, труба, анизотропия.

УДК: 539.3

DOI: 10.26293/chgpru.2019.40.2.002

Рассмотрим толстостенную трубу радиусов a , b ($a < b$), которая находится под действием внутреннего давления (рис. 1). Будем считать, что внешняя поверхность трубы свободна от усилий.

Условие пластичности примем в виде [1]

$$Z \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + W(\tau_{xy})^2 = k_{xy}^2, \quad k_1, k_2, k_3 = \text{const}, \quad (1)$$

где σ_x , σ_y , τ_{xy} — компоненты напряжения в декартовой системе координат.

Положим

$$k_{xy} = k_0 + \delta c(x^2 + y^2), \quad Z = 1 + \delta z, \quad W = 1 + \delta w, \quad (2)$$

где δ — малый безразмерный параметр, k_0 , c , z , $w = \text{const}$. Согласно (2) предел текучести k сохраняет постоянное значение вдоль концентрических окружностей

$$c(x^2 + y^2) = d, \quad d = \text{const}, \quad (3)$$

© Миронов Б. Г., Никитин А. В., 2019

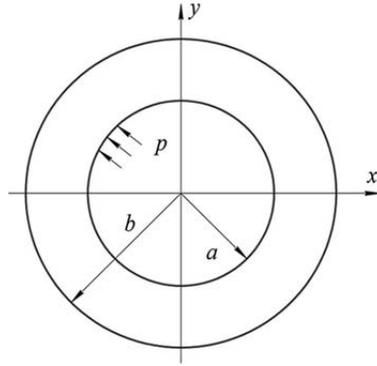
Миронов Борис Гурьевич

e-mail: mbg.chspru@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Российский университет транспорта, г. Москва, Россия.

Никитин Андрей Витальевич

e-mail: ligalas5@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чебоксарский институт (ф) Московского Политехнического университета, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 01.05.2019


 Рис. 1. Толстостенная труба радиусов $a, b; a < b$.

и изменяется в зависимости от изменения величины d . Перейдем к полярным координатам:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta. \quad (4)$$

Связь между напряжениями в декартовой системе координат x, y и напряжениями в полярной системе координат ρ, θ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (1), (5) получим условие пластичности в полярных координатах:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho - \sigma_\theta^2 (Z \cos^2 2\theta + W \sin^2 2\theta) + 4\tau_{\rho\theta}^2 (Z \sin^2 2\theta + W \cos^2 2\theta) + \\ + 2\sigma_\rho - \sigma_\theta \tau_{\rho\theta} Z - W \sin 4\theta = 41 + c\delta \rho^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения равновесия в полярной системе координат имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Граничные условия на внутренней поверхности трубы имеют вид

$$\sigma_\rho|_{\rho=a} = 0, \quad \tau_{\rho\theta}|_{\rho=a} = 0. \quad (8)$$

Положим, что искомое решение зависит от малого параметра δ , которое будем искать в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(I)} \delta + \sigma_{ij}^{(II)} \delta^2 + \dots \quad (9)$$

Предположим, что в исходном нулевом приближении имеет место осесимметричное состояние трубы:

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0. \quad (10)$$

Из (6), (9), (10) следует

$$\sigma_\rho^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)} = -2. \quad (11)$$

Решая совместно (7), (10), (11), получим

$$\sigma_\rho^{(0)} = 2 \ln \rho + C, \quad \sigma_\theta^{(0)} = 2 + 2 \ln \rho + C, \quad (12)$$

где $C = \text{const}$. Согласно (8) в нулевом приближении граничные условия примут вид

$$\sigma_\rho^{(0)}|_{\rho=a} = -p. \quad (13)$$

Из (12), (13) имеем

$$\sigma_\rho^{(0)} = -p + 2 \ln \frac{\rho}{a}, \quad \sigma_\theta^{(0)} = -p + 2 + 2 \ln \frac{\rho}{a}. \quad (14)$$

С учетом (10), (14) из (6) получим

$$\sigma_\theta^{(I)} - \sigma_\rho^{(I)} = 2c\rho^2 + \left(\frac{z+w}{2} + \frac{z-w}{2} \cos 4\theta \right). \quad (15)$$

Уравнениям равновесия (7) удовлетворим, полагая, что

$$\sigma'_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma'_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}, \quad \tau'_{\rho\theta} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right). \quad (16)$$

Из (15), (16) имеем

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 2c\rho^4 + \rho^2(G + H \cos 4\theta), \quad (17)$$

где $G = (z+w)/2$, $H = (z-w)/2$.

В первом приближении граничные условия согласно (8) имеют следующий вид:

$$\sigma'_\rho|_{\rho=a} = 0, \quad \tau'_{\rho\theta}|_{\rho=a} = 0. \quad (18)$$

Компоненты напряжения определяются из (16), (17):

$$\begin{aligned} \sigma'_\rho &= \frac{\cos 4\theta}{8\rho} \left[\left(Ha(\sqrt{15}) \sin(\sqrt{15} \ln \rho) + 7 \cos(\sqrt{15} \ln \rho) \right) \cos(\sqrt{15} \ln a) - \right. \\ &\quad \left. - \left(Ha(\sqrt{15}) \cos(\sqrt{15} \ln \rho) - 7 \sin(\sqrt{15} \ln \rho) \right) \sin(\sqrt{15} \ln a) - 7H\rho \right] + \\ &\quad + c \frac{\rho^2}{a^2} + G \ln \frac{\rho}{a}, \\ \sigma'_\theta &= \frac{\cos 4\theta}{8\rho} \left[\left(Ha(\sqrt{15}) \sin(\sqrt{15} \ln \rho) + 7 \cos(\sqrt{15} \ln \rho) \right) \cos(\sqrt{15} \ln a) - \right. \\ &\quad \left. - \left(Ha(\sqrt{15}) \cos(\sqrt{15} \ln \rho) - 7 \sin(\sqrt{15} \ln \rho) \right) \sin(\sqrt{15} \ln a) + H\rho \right] + \\ &\quad + c \frac{3\rho^2}{a^2} + G \ln(\rho + 1), \\ \tau'_{\rho\theta} &= \frac{\sin 4\theta}{240\rho} \left[-60aH \left(\cos(\sqrt{15} \ln \rho) - \frac{1}{4} \sin(\sqrt{14} \ln \rho) \right) \cos(\sqrt{15} \ln a) - \right. \\ &\quad \left. - 60Ha\sqrt{15} \left(\cos(\sqrt{15} \ln \rho) + \frac{1}{60} a \sin(\sqrt{15} \ln \rho) \right) \sin(\sqrt{15} \ln a) + 60\rho H \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, (19) полностью описывают напряженное состояние неоднородно-анизотропной трубы в первом приближении.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. Москва: Наука, 1978. 208 с.
- [2] Ивлев Д. Д. Об анизотропии пластических тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2010. № 2(66). С. 64–68.
- [3] Никитин А. В. Предельное состояние неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1(23). С. 60–70.
- [4] Никитин А. В., Тихонов С. В. Упругопластическое состояние трансляционно-анизотропной линейно-неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2013. № 4(80). Ч. 2. С. 148–155.
- [5] Никитин А. В., Миронов Б. Г. Определение перемещений в пластической и упругой областях в толстостенной неоднородной трубе при трансляционной анизотропии // Сборник статей по материалам XIV международной заочной научно-практической конференции “Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии”. № 2(14). 2014. С. 93–106.

B. G. Mironov¹, A. V. Nikitin²

**ON THE DETERMINATION OF THE LIMIT STATE NON-UNIFORM PIPE
UNDER INTERNAL PRESSURE**

¹*Russian University of transport, Moscow, Russia*

²*Cheboksary Institute (f) of Moscow Polytechnic University, Cheboksary, Russia*

Abstract. Considered limit state of the inhomogeneous pipes under internal pressure. The material is assumed heterogeneous, and possess the properties of anisotropy in the plastic region. The heterogeneity of the material is that pre-turnover depend on the coordinates, and it is constant along concentric circles. Defined limit state of the pipe in the first approximation.

Keywords: plasticity, heterogeneity, pipe, anisotropy.

REFERENCES

- [1] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbation method in the theory of elastic-plastic body. Moscow: Nauka, 1978. 208 p. (in Russian).
- [2] Ivlev D. D. On the anisotropy of plastic bodies // Bulletin of I. Ya. Yakovlev Chuvash state pedagogical University. 2010. no. 2(66). P. 64–68. (in Russian).
- [3] Nikitin A. V. Limit state of inhomogeneous pipe under internal pressure // Bulletin of the I. Ya. Yakovlev Chuvash state pedagogical University. Series: limit state Mechanics. 2015. no. 1(23). P. 60–70. (in Russian).
- [4] Nikitin A. V., Tihonov S. V. Elastic-plastic state translational-linear anisotropic inhomogeneous pipes under internal pressure // Bulletin of I. Ya. Yakovlev Chuvash state pedagogical University. 2013. no. 4(80). Part 2. P. 148–155. (in Russian).
- [5] Nikitin A. V., Mironov B. G. Determination of displacements in plastic and elastic regions in a thick-walled inhomogeneous pipe under translational anisotropy // Collection of articles based on the XIV international correspondence scientific-practical conference “Scientific discussion: mathematics, physics, chemistry, biology”. No. 2(14). 2014. P. 93–106. (in Russian).

Mironov Boris Gurjevich, Dr. of Sci. Phys. & Math., Professor, Department Chair, Russian University of transport, Moscow, Russia.

Nikitin Andrej Vitaljevich, Candidate of Sci. Phys. & Math., Associate Professor, Cheboksary Institute (f) of Moscow Polytechnic University, Cheboksary, Russia.