Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 2 (40). С. 36–44

Ю. Н. Радаев

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ДИРЕКТОРЫ В АСИММЕТРИЧНЫХ ТЕОРИЯХ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе получены новые представления трехмерного асимметричного тензора напряжений и соответствующие им формы дифференциальных уравнений равновесия. Асимметричные теории механики деформируемого твердого тела по прежнему привлекают пристальное внимание в связи с необходимостью математического моделирования механического поведения современных материалов (например, ауксетиков с помощью теорий гемитропной микрополярной упругости). Исследование ограничивается только такими асимметричными тензорами второго ранга, для которых удается сохранить понятие о вещественных собственных значениях, но отказаться от взаимной ортогональности направлений главного триэдра. Обсуждается точная алгебраическая формулировка указанных условий асимметричности. В статье обобщаются тензорные представления симметричного тензора напряжений, основанные на естественном репере асимптотических направлений. Полученные результаты являются ярким свидетельством в пользу алгебраической „гиперболичности“ симметричных и асимметричных тензоров второго ранга в трехмерном пространстве.

Ключевые слова: пространственные асимптотические директоры, асимметричные теории механики сплошных деформируемых тел, тензор напряжений, ауксетики

DOI: 10.26293/chgpu.2019.40.2.004

УДК: 539.374

1. Предварительные сведения и вводные замечания. Асимметричные теории механики деформируемого твердого тела в настоящее время по прежнему привлекают пристальное внимание исследователей в связи с необходимостью математического моделирования механического поведения современных материалов (например, ауксетиков с помощью теорий гемитропной микрополярной упругости).

Радаев Юрий Николаевич
`e-mail:` radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-01-00844 „Моделирование термомеханических процессов в сложных средах с помощью принципа термомеханической ортогональности“)

Поступила 05.06.2019

Для микрополярных теорий механики деформируемого твердого тела характерны следующие уравнения равновесия, записанные в терминах силовых и моментных напряжений [1, 2] (см. также [3]):

$$\begin{aligned} &\nabla_i t^{ik} = -X^k, \\ &\nabla_i \mu^{i\cdot}_{\cdot k} - 2\tau_k = -Y_k, \end{aligned} \tag{1}$$

где X^k — объемные силы; Y_k — объемные пары; t^{ik} — асимметричный тензор силовых напряжений (force stress tensor), складывающийся из симметричной $t^{(ik)}$ и антисимметричной $t^{[ik]}$ частей

$$t^{ik} = t^{(ik)} + t^{[ik]}; \tag{2}$$

$\mu^{i\cdot}_{\cdot k}$ — асимметричный тензор моментных напряжений (couple stress tensor); τ_j, μ^j — ассоциированные с силовыми и моментными напряжениями векторы, определяемые согласно

$$\begin{aligned} &-\tau_j = \frac{1}{2} e_{jik} t^{[ik]}, \\ &t^{[ik]} = -e^{ikj}\tau_j, \\ &+\mu^i = \frac{1}{2} e^{iks}\mu_{[ks]}, \\ &\mu_{[is]} = +e_{isj}\mu^j. \end{aligned} \tag{3}$$

В дальнейшем интерес будет представлять асимметричный тензор второго ранга $\mathbf{t}$ и мы будем вести речь именно о нем, хотя в равной степени все сказанное может относиться и к тензору моментных напряжений.

2. Асимметричные тензоры, подобные диагональному тензору. Ограничимся только такими асимметричными тензорами второго ранга $\mathbf{t}$, для которых удается сохранить понятия о главных осях и вещественных собственных значениях, но отказаться от взаимной ортогональности направлений главного триэдра. Поэтому будем полагать, что тензор $\mathbf{t}$ подобен некоторому диагональному тензору. Последнее означает, что тензор $\mathbf{t}$ может быть представлен (с точностью до подобия) в форме

$$\mathbf{S}\mathbf{t}\mathbf{S}^{-1} = \sum_{a=1,2,3} t_a \underset{a}{\mathbf{l}} \otimes \overset{a}{\mathbf{l}}, \tag{1}$$

где $\mathbf{S}$ — невырожденный тензор второго ранга; $\underset{a}{\mathbf{l}}$ $(a = 1, 2, 3)$, $\overset{b}{\mathbf{l}}$ $(b = 1, 2, 3)$ — взаимные тройки линейно независимых векторов; t_a $(a = 1, 2, 3)$ — вещественные собственные значения тензора $\mathbf{S}\mathbf{t}\mathbf{S}^{-1}$, а, следовательно, и тензора $\mathbf{t}$.

Напомним, что взаимные тройки линейно независимых векторов $\underset{a}{\mathbf{l}}$ $(a = 1, 2, 3)$, $\overset{b}{\mathbf{l}}$ $(b = 1, 2, 3)$ удовлетворяют фундаментальному соотношению

$$\underset{a}{\mathbf{l}} \cdot \overset{b}{\mathbf{l}} = \overset{b}{\underset{a}{\delta}}.$$

В качестве примера (необходимого в дальнейшем исследовании) приведем диагональное представление единичного тензора $\mathbf{I}$:

$$\mathbf{I} = \sum_{a=1,2,3} \underset{a}{\mathbf{l}} \otimes \overset{a}{\mathbf{l}}. \tag{2}$$

Выясним условия, при которых все собственные значения асимметричного тензора $\mathbf{t}$ оказываются вещественными. Для этого рассмотрим характеристическое уравнение тензора $\mathbf{t}$:

$$-\lambda^3 + J_1\lambda^2 - J_2\lambda + J_3 = 0, \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned} &J_1 = \operatorname{tr}\mathbf{t},\\ &2J_2 = (\operatorname{tr}\mathbf{t})^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{t}^2),\\ &6J_3 = (\operatorname{tr}\mathbf{t})^3 - 3\operatorname{tr}\mathbf{t}\operatorname{tr}(\mathbf{t}^2) + 2\operatorname{tr}(\mathbf{t}^3) = 6\det\mathbf{t}. \end{aligned} \tag{4}$$

В общем случае кубического уравнения

$$e_0\lambda^3 + e_1\lambda^2 + e_2\lambda + e_3 = 0 \tag{5}$$

в результате замены переменной

$$\lambda = \lambda' - \frac{e_1}{3e_0}$$

получается приведенное уравнение

$$\begin{aligned} &\lambda'^3 + e'_2\lambda' + e'_3 = 0,\\ &e'_2 = \frac{e_2}{e_0} - \frac{e_1^2}{3e_0^2},\\ &e'_3 = \frac{2e_1^3}{27e_0^3} - \frac{e_1e_2}{3e_0^2} + \frac{e_3}{e_0} \end{aligned} \tag{6}$$

с дискриминантом

$$d = -27e_3'^2 - 4e_2'^3$$

или

$$d = E_1^2E_2^2 - 4E_1^3E_3 - 27E_3^2 - 4E_2^3 + 18E_1E_2E_3, \tag{7}$$

где

$$E_j = \frac{e_j}{e_0} \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Условие вещественности корней кубического уравнения (5) есть (см., например, [4])

$$d \geq 0, \tag{8}$$

причем поскольку для тензора $\mathbf{t}$ имеем

$$E_1 = -J_1, \quad E_2 = J_2, \quad E_3 = -J_3,$$

то дискриминант его характеристического уравнения (3) находится в виде

$$d = J_1^2J_2^2 - 4J_1^3J_3 - 27J_3^2 - 4J_2^3 + 18J_1J_2J_3. \tag{9}$$

3. Представление асимметричного тензора второго ранга с одним кратным собственным значением. Различные диадные представления [5, 6], справедливые для симметричных тензоров второго ранга, допускают обобщение на случай асимметричных тензоров, подобных диагональным тензорам. Речь идет прежде всего об обобщении понятия асимптотического направления.

Предположим сначала, что два собственных значения тензора $\mathbf{t}$ совпадают:

$$t_1 = t_2.$$

Третье собственное значение t_3 тензора $\mathbf{t}$ будем считать отличным от первых двух.

Можно дать точную алгебраическую характеристику этого случая: дискриминант (9) характеристического уравнения тензора $\mathbf{t}$ (3) должен быть равен нулю, а второй из коэффициентов приведенного уравнения — отличен от нуля, т.е.

$$d = 0, \qquad 3J_2 - J_1^2 \neq 0.$$

Воспользуемся далее представлением единичного тензора (2). После очевидных преобразований находим

$$\mathbf{StS}^{-1} = t_1\mathbf{I} + (t_3 - t_1)\underset{3}{\mathbf{l}} \otimes \overset{3}{\mathbf{l}}, \tag{1}$$

откуда получаем

$$\mathbf{t} = t_1\mathbf{I} + (t_3 - t_1)(\mathbf{S}^{-1} \cdot \underset{3}{\mathbf{l}}) \otimes (\mathbf{S}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{3}{\mathbf{l}}). \tag{2}$$

Вводя затем директоры

$$\underset{*}{\mathbf{d}} = \mathbf{S}^{-1} \cdot \underset{3}{\mathbf{l}}, \qquad \overset{*}{\mathbf{d}} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{3}{\mathbf{l}},$$

находим следующее представление асимметричного тензора $\mathbf{t}$ с помощью двух ненормированных директоров:

$$\mathbf{t} = t_1\mathbf{I} + (t_3 - t_1)\underset{*}{\mathbf{d}} \otimes \overset{*}{\mathbf{d}}, \tag{3}$$

где следует учитывать, что

$$\underset{*}{\mathbf{d}} \cdot \overset{*}{\mathbf{d}} = (\underset{3}{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{S}^{-\mathrm{T}}) \cdot (\mathbf{S}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{3}{\mathbf{l}}) = \underset{3}{\mathbf{l}} \cdot \overset{3}{\mathbf{l}} = 1, \tag{4}$$

т.е. директоры $\underset{*}{\mathbf{d}}$ и $\overset{*}{\mathbf{d}}$ в диадном представлении (3) связаны между собой одним скалярным соотношением (4).

Диадное представление (3) позволяет заключить, что:

1. директор $\underset{*}{\mathbf{d}}$ — собственный вектор тензора $\mathbf{t}$, соответствующий собственному значению t_3;

2. любой вектор, ортогональный $\overset{*}{\mathbf{d}}$, является собственным с кратным собственным значением $t_1 = t_2$;

3. направления, указываемые директорами $\underset{*}{\mathbf{d}}$ и $\overset{*}{\mathbf{d}}$, можно считать асимптотическими для тензора $\mathbf{t}$;

4. векторное произведение $\underset{*}{\mathbf{d}} \times \overset{*}{\mathbf{d}}$ представляет собой собственный вектор тензора $\mathbf{t}$ с кратным собственным значением $t_1 = t_2$;

5. двойное векторное произведение $\overset{*}{\mathbf{d}} \times (\underset{*}{\mathbf{d}} \times \overset{*}{\mathbf{d}})$ представляет собой собственный вектор

тензора $\mathbf{t}$ с кратным собственным значением $t_1 = t_2$;

6. тройка векторов $\underset{*}{\mathbf{d}}$, $\underset{*}{\mathbf{d}} \times \overset{*}{\mathbf{d}}$, $\overset{*}{\mathbf{d}} \times (\underset{*}{\mathbf{d}} \times \overset{*}{\mathbf{d}})$ образует базис в пространстве.

Отметим также, что имеет место равенство

$$\mathrm{tr}(\underset{*}{\mathbf{d}} \otimes \overset{*}{\mathbf{d}}) = \underset{*}{\mathbf{d}} \cdot \overset{*}{\mathbf{d}} = 1.$$

Диадное представление (3) будет справедливо, если разделить диаду $\underset{*}{\mathbf{d}} \otimes \overset{*}{\mathbf{d}}$ на скалярное произведение $\underset{*}{\mathbf{d}} \cdot \overset{*}{\mathbf{d}}$, равное в силу (4) единице. Полученное отношение не изменит значения при нормировке асимптотических директоров на единицу. В терминах нормированных на единицу директоров поэтому имеем для асимметричного тензора $\mathbf{t}$ представление:

$$\mathbf{t} = t_1 \mathbf{I} + (t_3 - t_1) \frac{\underset{*}{\mathbf{d}} \otimes \overset{*}{\mathbf{d}}}{\underset{*}{\mathbf{d}} \cdot \overset{*}{\mathbf{d}}}, \tag{5}$$

где следует принимать во внимание условия нормировки директоров

$$\underset{*}{\mathbf{d}} \cdot \underset{*}{\mathbf{d}} = 1, \quad \overset{*}{\mathbf{d}} \cdot \overset{*}{\mathbf{d}} = 1.$$

Симметричная и антисимметричная части тензора $\mathbf{t}$ легко вычисляются с помощью диадного представления (3); в результате приходим к формулам

$$\mathrm{sym}\, \mathbf{t} = t_1 \mathbf{I} + \frac{1}{2}(t_3 - t_1)(\underset{*}{\mathbf{d}} \otimes \overset{*}{\mathbf{d}} + \overset{*}{\mathbf{d}} \otimes \underset{*}{\mathbf{d}}), \tag{6}$$

$$\mathrm{asym}\, \mathbf{t} = \frac{1}{2}(t_3 - t_1)(\underset{*}{\mathbf{d}} \otimes \overset{*}{\mathbf{d}} - \overset{*}{\mathbf{d}} \otimes \underset{*}{\mathbf{d}}). \tag{7}$$

Для симметричной и антисимметричной частей тензора $\mathbf{t}$ в случае нормированных асимптотических директоров (см. (5)) находятся следующие выражения:

$$\mathrm{sym}\, \mathbf{t} = t_1 \mathbf{I} + \frac{1}{2} \frac{t_3 - t_1}{\underset{*}{\mathbf{d}} \cdot \overset{*}{\mathbf{d}}}(\underset{*}{\mathbf{d}} \otimes \overset{*}{\mathbf{d}} + \overset{*}{\mathbf{d}} \otimes \underset{*}{\mathbf{d}}), \tag{8}$$

$$\mathrm{asym}\, \mathbf{t} = \frac{1}{2} \frac{t_3 - t_1}{\underset{*}{\mathbf{d}} \cdot \overset{*}{\mathbf{d}}}(\underset{*}{\mathbf{d}} \otimes \overset{*}{\mathbf{d}} - \overset{*}{\mathbf{d}} \otimes \underset{*}{\mathbf{d}}). \tag{9}$$

Заметим, что в математической теории пластичности (с симметричным тензором напряжений) величина

$$\frac{|t_3 - t_1|}{2}$$

имеет смысл максимального (по всем ориентациям в пространстве) касательного напряжения в заданной точке.

4. Представление асимметричного тензора второго ранга, все собственные значения которого различны. Предположим, что все собственные значения тензора $\mathbf{t}$ различны и упорядочим их в порядке убывания:

$$t_1 > t_2 > t_3.$$

В этом случае дискриминант (9) характеристического уравнения тензора $\mathbf{t}$ (3) должен быть строго положительным:

$$d > 0.$$

На основании тензорного представления единичного тензора (2) получаем

$$\mathbf{StS}^{-1} = t_2\mathbf{I} + (t_1 - t_2)\underset{1}{\mathbf{l}} \otimes \overset{1}{\mathbf{l}} + (t_3 - t_2)\underset{3}{\mathbf{l}} \otimes \overset{3}{\mathbf{l}}, \tag{1}$$

откуда

$$\mathbf{t} = t_2\mathbf{I} + (t_1 - t_2)(\mathbf{S}^{-1} \cdot \underset{1}{\mathbf{l}}) \otimes (\mathbf{S}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{1}{\mathbf{l}}) + (t_3 - t_2)(\mathbf{S}^{-1} \cdot \underset{3}{\mathbf{l}}) \otimes (\mathbf{S}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{3}{\mathbf{l}}). \tag{2}$$

Определяя директоры согласно

$$\underset{*}{\mathbf{h}} = \mathbf{S}^{-1} \cdot \underset{1}{\mathbf{l}}, \quad \overset{*}{\mathbf{h}} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{1}{\mathbf{l}}, \quad \underset{*}{\mathbf{d}} = \mathbf{S}^{-1} \cdot \underset{3}{\mathbf{l}}, \quad \overset{*}{\mathbf{d}} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{3}{\mathbf{l}},$$

приходим к следующему представлению асимметричного тензора $\mathbf{t}$:

$$\mathbf{t} = t_2\mathbf{I} + (t_1 - t_2)\underset{*}{\mathbf{h}} \otimes \overset{*}{\mathbf{h}} + (t_3 - t_2)\underset{*}{\mathbf{d}} \otimes \overset{*}{\mathbf{d}}, \tag{3}$$

где (ненормированные) директоры связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned} &\underset{*}{\mathbf{d}} \cdot \overset{*}{\mathbf{d}} = 1, \qquad \underset{*}{\mathbf{h}} \cdot \overset{*}{\mathbf{h}} = 1, \\ &\underset{*}{\mathbf{h}} \cdot \overset{*}{\mathbf{d}} = 0, \qquad \underset{*}{\mathbf{d}} \cdot \overset{*}{\mathbf{h}} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что:

1. директор $\underset{*}{\mathbf{d}}$ — собственный вектор тензора $\mathbf{t}$, соответствующий минимальному собственному значению t_3;
2. директор $\underset{*}{\mathbf{h}}$ — собственный вектор тензора $\mathbf{t}$, соответствующий максимальному собственному значению t_1;
3. любой вектор, ортогональный как $\overset{*}{\mathbf{d}}$, так и $\overset{*}{\mathbf{h}}$ является собственным (ему соответствует промежуточное собственное значение t_2), поэтому третий собственный вектор можно выбрать как векторное произведение $\overset{*}{\mathbf{d}} \times \overset{*}{\mathbf{h}}$;
4. векторы $\underset{*}{\mathbf{d}}$, $\overset{*}{\mathbf{d}} \times \overset{*}{\mathbf{h}}$, $\underset{*}{\mathbf{h}}$ образуют в трехмерном пространстве базисный триэдр тензора $\mathbf{t}$.

Нормируя директоры на единицу, приходим к следующему диадному представлению асимметричного тензора $\mathbf{t}$:

$$\mathbf{t} = t_2\mathbf{I} + (t_1 - t_2)\frac{\underset{*}{\mathbf{h}} \otimes \overset{*}{\mathbf{h}}}{\underset{*}{\mathbf{h}} \cdot \overset{*}{\mathbf{h}}} + (t_3 - t_2)\frac{\underset{*}{\mathbf{d}} \otimes \overset{*}{\mathbf{d}}}{\underset{*}{\mathbf{d}} \cdot \overset{*}{\mathbf{d}}}, \tag{5}$$

в котором следует учитывать нормирующие равенства и условия ортогональности

$$\begin{aligned} &\underset{*}{\mathbf{h}} \cdot \underset{*}{\mathbf{h}} = 1, \quad \overset{*}{\mathbf{h}} \cdot \overset{*}{\mathbf{h}} = 1, \quad \underset{*}{\mathbf{d}} \cdot \underset{*}{\mathbf{d}} = 1, \quad \overset{*}{\mathbf{d}} \cdot \overset{*}{\mathbf{d}} = 1; \\ &\underset{*}{\mathbf{h}} \cdot \overset{*}{\mathbf{d}} = 0, \quad \underset{*}{\mathbf{d}} \cdot \overset{*}{\mathbf{h}} = 0. \end{aligned}$$

Несложные вычисления позволяют получить формулы для симметричной и антисимметричной частей тензора $\mathbf{t}$ в терминах нормированных асимптотических директоров:

$$\operatorname{sym}\mathbf{t} = t_2\mathbf{I} + \frac{1}{2}\frac{t_1 - t_2}{\underset{*}{\mathbf{h}}\cdot\overset{*}{\mathbf{h}}}(\underset{*}{\mathbf{h}}\otimes\overset{*}{\mathbf{h}} + \overset{*}{\mathbf{h}}\otimes\underset{*}{\mathbf{h}}) + \frac{1}{2}\frac{t_3 - t_2}{\underset{*}{\mathbf{d}}\cdot\overset{*}{\mathbf{d}}}(\underset{*}{\mathbf{d}}\otimes\overset{*}{\mathbf{d}} + \overset{*}{\mathbf{d}}\otimes\underset{*}{\mathbf{d}}), \tag{6}$$

$$\operatorname{asym}\mathbf{t} = \frac{1}{2}\frac{t_1 - t_2}{\underset{*}{\mathbf{h}}\cdot\overset{*}{\mathbf{h}}}(\underset{*}{\mathbf{h}}\otimes\overset{*}{\mathbf{h}} - \overset{*}{\mathbf{h}}\otimes\underset{*}{\mathbf{h}}) + \frac{1}{2}\frac{t_3 - t_2}{\underset{*}{\mathbf{d}}\cdot\overset{*}{\mathbf{d}}}(\underset{*}{\mathbf{d}}\otimes\overset{*}{\mathbf{d}} - \overset{*}{\mathbf{d}}\otimes\underset{*}{\mathbf{d}}). \tag{7}$$

5. Новые формы уравнений равновесия для асимметричного тензора силовых напряжений. Полученным в предыдущих разделах работы диадным представлениям тензора $\mathbf{t}$ соответствуют новые формы уравнений равновесия. В декартовой системе координат уравнения (1) приобретают вид

$$\begin{aligned} &\partial_j t_{ji} = -X_i,\\ &\partial_j \mu_{ji} + \epsilon_{ijk}t_{jk} = -Y_i. \end{aligned} \tag{1}$$

Если использовать ненормированные асимптотические директоры, то диадные представления тензора $\mathbf{t}$ следующим образом записываются в координатной форме:

$$t_{ji} = t_1\delta_{ji} + (t_3 - t_1)\underset{*}{d_j}\overset{*}{d_i},$$

$$t_{ji} = t_2\delta_{ji} + (t_1 - t_2)\underset{*}{h_j}\overset{*}{h_i} + (t_3 - t_2)\underset{*}{d_j}\overset{*}{d_i}.$$

Для дивергенции тензора $\mathbf{t}$ имеем:

$$\partial_j t_{ji} = \partial_i t_1 + \overset{*}{d_i}\underset{*}{d_j}\partial_j(t_3 - t_1) + (t_3 - t_1)[\overset{*}{d_i}\partial_j\underset{*}{d_j} + \underset{*}{d_j}\partial_j\overset{*}{d_i}],$$

$$\begin{aligned} \partial_j t_{ji} = \partial_i t_2 &+ \overset{*}{h_i}\underset{*}{h_j}\partial_j(t_1 - t_2) + (t_1 - t_2)[\overset{*}{h_i}\partial_j\underset{*}{h_j} + \underset{*}{h_j}\partial_j\overset{*}{h_i}] -\\ &-\overset{*}{d_i}\underset{*}{d_j}\partial_j(t_2 - t_3) - (t_2 - t_3)[\overset{*}{d_i}\partial_j\underset{*}{d_j} + \underset{*}{d_j}\partial_j\overset{*}{d_i}]. \end{aligned} \tag{2}$$

В итоге на основании данных выше формул получаем уравнения равновесия для асимметричных силовых напряжений $\mathbf{t}$ в терминах ненормированных асимптотических директоров.

В случае кратного собственного значения $t_1 = t_2$ векторное уравнение равновесия есть:

$$\boldsymbol{\nabla}t_1 + \overset{*}{\mathbf{d}}(\underset{*}{\mathbf{d}}\cdot\boldsymbol{\nabla})(t_3 - t_1) + (t_3 - t_1)[\overset{*}{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\underset{*}{\mathbf{d}}) + (\underset{*}{\mathbf{d}}\cdot\boldsymbol{\nabla})\overset{*}{\mathbf{d}}] = -\mathbf{X}. \tag{3}$$

В случае различных собственных значений $t_1 > t_2 > t_3$ векторное уравнение равновесия есть:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}t_2 - &\overset{*}{\mathbf{d}}(\underset{*}{\mathbf{d}}\cdot\boldsymbol{\nabla})(t_2 - t_3) - (t_2 - t_3)[\overset{*}{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\underset{*}{\mathbf{d}}) + (\underset{*}{\mathbf{d}}\cdot\boldsymbol{\nabla})\overset{*}{\mathbf{d}}] +\\ &+\overset{*}{\mathbf{h}}(\underset{*}{\mathbf{h}}\cdot\boldsymbol{\nabla})(t_1 - t_2) + (t_1 - t_2)[\overset{*}{\mathbf{h}}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\underset{*}{\mathbf{h}}) + (\underset{*}{\mathbf{h}}\cdot\boldsymbol{\nabla})\overset{*}{\mathbf{h}}] = -\mathbf{X}. \end{aligned} \tag{4}$$

К приведенным выше уравнениям необходимо присоединить также условия, связывающие ненормированные асимптотические директоры: к уравнению (3) условие (4), а к уравнению (4) — четыре условия (4).

6. Заключение.

1. Диадные представления, используемые в теории идеальной пластичности и справедливые для симметричных тензоров второго ранга, допускают обобщение на случай асимметричных тензоров, подобных диагональным тензорам.
2. Обобщенное диадное представление асимметричного тензора второго ранга с одним кратным собственным значением отличается наибольшей формальной простотой, поскольку включает только два пространственных директора, связанных между собой одним скалярным условием.
3. Обобщенное диадное представление асимметричного тензора второго ранга с различными собственными значениями содержит четыре пространственных директора, связанных между собой четырьмя скалярными условиями.
4. Полученные специальные формы уравнений равновесия выражены в терминах, наиболее естественных с алгебраической точки зрения.
5. Полученные результаты являются дополнительным свидетельством в пользу алгебраической „гиперболичности“ симметричных и асимметричных тензоров второго ранга в трехмерном пространстве [7].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford New York Toronto Sydney Paris Frankfurt: Pergamon Press, 1986. Vol. iii. 383 p.

[2] Радаев Ю.Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22, № 3. с. 504–517.

[3] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

[4] Сушкевич А.К. Основы высшей алгебры. М., Л.: ОНТИ, 1937. 476 с.

[5] Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. 240 с.

[6] Радаев Ю.Н. Асимптотические оси тензоров напряжений и приращения деформации в механике сжимаемых континуумов // Изв. РАН. Мех. тверд тела. 2013. № 5. С. 77–85.

[7] Радаев Ю.Н. Гиперболические теории и задачи механики деформируемого твердого тела // Международная конференция „Современные проблемы механики“, посв. 100-летию Л.А. Галина (20-21 сентября 2012 г., г. Москва). Тезисы докл. М.: Самарский государственный технический университет, 2012. С. 75–76.

Y. N. Radayev

THREE-DIMENSIONAL ASYMPTOTIC DIRECTORS IN ASYMMETRIC THEORIES OF CONTINUUM MECHANICS

Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. In this paper new representations of three-dimensional asymmetric stress tensor and the corresponding form of the differential equilibrium equations are given. Asymmetric theories of solid mechanics continue to attract attention in connection with the necessity of mathematical modelling of the mechanical behaviour of the advanced materials (e.g., auxetics by means of the hemitropic micropolar theory of elasticity). The study is restricted to such asymmetric second rank tensors, for which it is still possible to retain the notion of real eigenvalues, but not to accept the mutual orthogonality of the directors of the principal trihedron. The exact algebraic formulation of these asymmetry conditions is discussed. The study extends the tensor representations of the symmetric stress tensor based on the notion of asymptotic directions. The obtained results are a clear evidence in favor of algebraic hyperbolicity both the symmetric and asymmetric second rank tensors in three-dimensional space.

Keywords: spatial asymptotic directors, asymmetric theories of mechanics of continuous deformable bodies, stress tensor, auxetic.

REFERENCES

[1] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford New York Toronto Sydney Paris Frankfurt: Pergamon Press, 1986. Vol. iii. 383 p.

[2] Radayev Y. Pravilo mnozhiteley v kovariantnykh formulirovkakh mikropolyarnykh teoriy mekhaniki kontinuuma // Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2018. Vol. 22, no. 3. p. 504–517.

[3] Novatskiy V. Teoriya uprugosti. M.: Mir, 1975. 872 p.

[4] Sushkevich A. Osnovy vysshey algebry. M., L.: ONTI, 1937. 476 p.

[5] Radayev Y. Prostranstvennaya zadacha matematicheskoy teorii plastichnosti. Samara: Izd-vo Samarskogo Gos. Universiteta, 2006. 240 p.

[6] Radayev Y. Asimptoticheskiye osi tenzorov napryazheniy i prirashcheniya deformatsii v mekhanike szhimayemykh kontinuumov // Izv. RAN. Mekh. Tverd. Tela. 2013. no. 5. P. 77–85.

[7] Radayev Y. Giperbolicheskiye teorii i zadachi mekhaniki deformiruyemogo tverdogo tela // Mezhdunarodnaya konferentsiya „Sovremennyye problemy mekhaniki“, posv. 100-letiyu L.A. Galina (20-21 sentyabrya 2012 g., g. Moskva). Tezisy dokl. M.: Samarskiy Gosudarstvennyy Tekhnicheskiy Universitet, 2012. P. 75–76.

Radayev Yuri Nickolaevich

`e-mail:` radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Researcher, Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia.