

В. В. Козлов, А. А. Маркин

## ПОСТАНОВКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ КЛАССА ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

**Аннотация.** Рассмотрена постановка класса задач нелинейной теории упругости. Предложен численный метод решения задач данного класса. Приведены элементы верификации численного метода для задачи осевого сдвига полого цилиндра. На основании сравнения полученных результатов с САЕ Fidesys сформулированы выводы о возможности применения предложенного метода для решения задач рассматриваемого класса.

**Ключевые слова:** численный метод, полый цилиндр, нелинейная упругость

DOI: 10.26293/chgpu.2019.40.2.007

УДК: 539.3

### 1. Введение

В работе рассматриваются постановки задач нелинейной теории упругости, напряженно-деформированное состояние которых не зависит от осевой координаты. Частные постановки этого класса задач представлены в работах [1-6]. Отличием данного исследования является обобщение частных постановок и представление единого подхода к их решению.

Многие задачи нелинейной теории упругости не имеют аналитического решения, что нашло отражение в работах [7-9]. Таким образом, актуальным является развитие численных методов, позволяющих получить корректные оценки напряженно-деформированного состояния нелинейно-упругой среды. В работе предложен численный метод, позволяющий решать задачи нелинейной теории упругости выбранного класса. Результаты работы метода иллюстрируются решением задачи об осевом сдвиге полого цилиндра [1]. На основании сравнения полученных результатов с САЕ Fidesys делается вывод о достоверности предложенного метода.

---

© Козлов В. В., Маркин А. А. 2019

*Козлов Виктор Вячеславович*

e-mail: vvkozlovtsu@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия,

*Маркин Алексей Александрович*

e-mail: markin-nikram@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект МД-1803.2019.1) и РФФИ (проект № 18-31-20053).

Поступила 01.05.2019

## 2. Постановки задач.

Рассмотрим постановку задач нелинейной теории упругости для бесконечного цилиндра. Рассматривается класс задач, напряженно-деформированное состояние которых зависит только от радиальной координаты  $R$ . Внутренний радиус цилиндра обозначим  $R_{in}$ , внешний -  $R_{en}$ .

Пусть  $(x^1, x^2, x^3) = (R, \theta, z_0)$  - цилиндрические координаты материальной точки цилиндра в начальном состоянии, ось  $Oz$  совпадает с осью симметрии тела. Тогда положение точки в начальном состоянии записывается в виде

$$\mathbf{x} = R \mathbf{e}_R + z_0 \mathbf{e}_{z_0} = R \mathbf{e}_1 + z_0 \mathbf{e}_3,$$

где  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_R$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_{z_0}$  - базисные векторы цилиндрической системы.

Будем полагать  $(r, \varphi, z)$  - цилиндрические координаты этой же точки в деформированном состоянии. В рамках данной модели связь между указанными координатами может быть выражена в виде:

$$r = R + u_R(R); \quad \varphi = \theta + u_\theta(R); \quad z = z_0 + u_{z_0}(R) \quad (1)$$

Для рассматриваемого класса задач удобно ввести подвижную систему координат, повернутую относительно исходной на угол  $u_\theta$  и характеризуемую базисом  $\mathbf{e}_1^{(n)} = \mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_2^{(n)} = \mathbf{e}_\varphi$ ,  $\mathbf{e}_3^{(n)} = \mathbf{e}_z$ , связанным с базисом исходной системы координат соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos(u_\theta) \mathbf{e}_R + \sin(u_\theta) \mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin(u_\theta) \mathbf{e}_R + \cos(u_\theta) \mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_{z_0}. \end{aligned}$$

Тогда с учётом (1) радиус-вектор точки в деформированном состоянии запишем в виде:

$$\mathbf{x} = (R + u_R) \mathbf{e}_r + (z_0 + u_{z_0}) \mathbf{e}_{z_0}$$

Запишем выражения векторов материального базиса  $\mathfrak{D}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}$ :

$$\mathfrak{D}_1 = (1 + u'_R) \mathbf{e}_r + (R + u_R) u'_\theta \mathbf{e}_\varphi + u'_{z_0} \mathbf{e}_{z_0}, \quad \mathfrak{D}_2 = (R + u_R) \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathfrak{D}_3 = \mathbf{e}_{z_0}$$

Из последних формул можно найти базис  $\mathfrak{D}^i$ :

$$\mathfrak{D}^1 = \frac{\mathbf{e}_r}{1 + u'_R}, \quad \mathfrak{D}^2 = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{R + u_R} - \frac{u'_\theta}{1 + u'_R} \mathbf{e}_r, \quad \mathfrak{D}^3 = \mathbf{e}_{z_0} - \frac{u'_{z_0}}{1 + u'_R} \mathbf{e}_r \quad (2)$$

Найдены представления аффинора деформации  $\Phi$ , тензора Коши-Грина  $\mathbf{G}$ :

$$\begin{aligned} \Phi &= (1 + u'_R) \mathbf{e}_R \mathbf{e}_r + (R + u_R) u'_\theta \mathbf{e}_R \mathbf{e}_\varphi + \\ &+ u'_{z_0} \mathbf{e}_R \mathbf{e}_z + \left(1 + \frac{u_R}{R}\right) \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_{z_0} \mathbf{e}_z = \Phi^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^{(n)}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{G} = \mathbf{U}^2 &= \Phi \cdot \Phi^T = \left( (1 + u'_R)^2 + u'_{z_0}{}^2 + (R u'_\theta)^2 \right) \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R + \\ &+ u'_{z_0} (\mathbf{e}_R \mathbf{e}_{z_0} + \mathbf{e}_{z_0} \mathbf{e}_R) + \frac{(R + u_R)^2}{R} u'_\theta (\mathbf{e}_R \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_R) + \\ &+ \frac{(R + u_R)^2}{R^2} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_{z_0} \mathbf{e}_{z_0} = G^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \end{aligned} \quad (4)$$

Аналитические представления других мер описания деформированного состояния среды, таких как левого тензора Генки  $\mathbf{\Gamma}$ , левой меры искажения  $\mathbf{U}$ , тензора поворота  $\mathbf{R}$  громоздки и неудобны в использовании. Однако данные меры могут использоваться в определяющих соотношениях при определении напряженного состояния среды.

Зная обобщенные перемещения  $u_R, u_\theta, u_{z_0}$ , по формуле (4) можно найти числовые значения  $G^{ij}$  в любой точке цилиндра. Решив стандартную задачу определения собственных значений  $\lambda^i$  и векторов  $\mathbf{a}_i = a_i^j \mathbf{e}_j$  меры Коши-Грина, получим представления мер  $\mathbf{G}, \mathbf{U}, \mathbf{\Gamma}$  в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \lambda^i \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i \\ \mathbf{G} &= \mathbf{U}^2 \Rightarrow \mathbf{U} = \sqrt{\lambda^i} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i \\ \mathbf{\Gamma} &= \ln \mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{\Gamma} = \ln \lambda^i \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку диады в представлении (5) меры  $\mathbf{G}$  состоят только из базисных векторов неподвижной цилиндрической системы координат, то производные меры  $\mathbf{U}, \mathbf{\Gamma}$  также будут содержать в диадах только векторы  $\mathbf{e}_i$ . В то же время методика получения тензора поворота  $\mathbf{R} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{\Phi}$  с учетом формулы (3) указывает, что диадное представление тензора  $\mathbf{R}$  будет иметь вид:

$$\mathbf{R} = R^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^{(n)} \quad (6)$$

При необходимости могут быть конкретизированы и другие меры описания деформированного состояния. Формулы (3)–(5) показывают, что компоненты тензоров деформаций зависят от обобщенных перемещений, их производных и радиальной координаты.

Ввиду отсутствия массовых сил уравнение равновесия примет вид

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0},$$

где  $\nabla = \partial^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  - оператор Гамильтона в актуальном базисе,  $\mathbf{S}$  - тензор напряжений Коши.

В силу того, что нагружение не зависит от координаты  $z_0$ , компоненты тензора напряжений зависят только от радиальной координаты:  $s^{ij} = s^{ij}(R)$ . Положим, что тензор напряжений с помощью выбранного определяющего соотношения записан разложением по диадам, составленным из базисных векторов повернутой цилиндрической системы координат, т.е.  $\mathbf{S} = s^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^{(n)}$ . Тогда, рассмотрев последнее выражение и конкретизируя производные  $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x^i}$ , с учетом (2) получаем уравнение равновесия в виде

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S} &= \left( \frac{1}{1+u'_R} \frac{ds^{RR}}{dR} + \frac{s^{R\theta} - s^{\theta\theta}}{R+u_R} \right) \mathbf{e}_r + \\ &+ \left( \frac{1}{1+u'_R} \frac{ds^{R\theta}}{dR} + \frac{2s^{R\theta}}{R+u_R} \right) \mathbf{e}_\varphi + \left( \frac{1}{1+u'_R} \frac{ds^{Rz}}{dR} + \frac{s^{Rz}}{R+u_R} \right) \mathbf{e}_z = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7)$$

В качестве граничных условий используем значения функций перемещений на радиусах цилиндра:

$$u_\theta(R_{in}) = u_{\theta,in}, u_\theta(R_{en}) = u_{\theta,en}. \quad (8)$$

$$u_{z_0}(R_{in}) = u_{z_0,in}, u_{z_0}(R_{en}) = u_{z_0,en}. \quad (9)$$

$$u_R(R_{in}) = u_{R,in}, u_R(R_{en}) = u_{R,en}. \quad (10)$$

Таким образом, (7) – (10) вместе с формулой для компонент тензора истинных напряжений Коши определяют постановку решаемой задачи определения обобщенных перемещений.

### 3. Численный метод.

Опишем численный метод, применяемый для решения краевой задачи (7)–(10) и позволяющий найти обобщенные перемещения. Чтобы постановка (7)–(10) стала полной, необходимо использовать определяющее соотношение. Тогда, из формул для

мер описания деформированного состояния (3)–(6), конкретизированные компоненты тензора напряжений, входящие в (7), будут зависеть от обобщенных перемещений и их производных первого порядка по радиальной координате. Запишем выражения, позволяющие сформулировать конечно-разностную аппроксимацию компонент тензора истинных напряжений.

Разделим отрезок значений радиальной координаты  $R \in [R_{in}, R_{en}]$  на дискретные значения с шагом  $h$ :

$$R_i = R_{in} + ih, \quad i = 0, \dots, n, \quad h = \frac{R_{en} - R_{in}}{n} \quad (11)$$

Точки  $R_0 = R_{in}$ ,  $R_n = R_{en}$  будем соответственно называть левой и правой граничными точками, прочие точки - внутренними. Тогда в каждой дискретной точке выбранную функцию обобщенного перемещения обозначим  $f_i$ , аппроксимация первой производной обобщенного перемещения запишем с точностью до  $O(h^2)$ .

При этом во внутренних точках используем выражения

$$f'|_{R=R_i} = f'_i = \frac{f|_{R=R_{i+1}} - f|_{R=R_{i-1}}}{2h} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2), \quad (12)$$

на левой граничной точке

$$f'|_{R=R_0} = f'_0 = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h} + O(h^2), \quad (13)$$

на правой граничной точке

$$f'|_{R=R_n} = f'_n = \frac{3f_n - 4f_{n-1} + f_{n-2}}{2h} + O(h^2). \quad (14)$$

Дискретные значения производных первого порядка компонент тензора истинных напряжений Коши по радиальной координате  $(s^{ij})'_R$ , входящих в (7), могут быть записаны с помощью аналогичных (12)–(14) формул.

Таким образом, в каждой точке (11) относительно дискретных значений обобщенных перемещений записываем три нелинейных уравнения (7). Граничные условия (8)–(10) используются в левой и правой граничных точках. Получаем замкнутую систему нелинейных уравнений. Процесс нахождения решения этой системы реализован итерационным численным методом Левенберга-Марквардта [10, 11].

#### 4. Результаты для осевого сдвига.

Рассмотрим осевой сдвиг полого цилиндра. Для данного вида деформированного состояния граничные условия (8)–(10) записываются в виде

$$\begin{aligned} u_\theta(R_{in}) &= 0, & u_\theta(R_{en}) &= 0, \\ u_{z_0}(R_{in}) &= 0, & u_{z_0}(R_{en}) &= u_{z_0, en}, \\ u_R(R_{in}) &= 0, & u_R(R_{en}) &= 0 \end{aligned}$$

Используем определяющее соотношение [12]

$$\boldsymbol{\sigma}_R = 2G\tilde{\boldsymbol{\Gamma}} + K(\boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E},$$

где  $\boldsymbol{\sigma}_R$  - повернутый обобщенный тензор напряжений,  $\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}$  - девиатор тензора деформаций Генки,  $\mathbf{E}$  - единичный тензор,  $G$  - модуль сдвига,  $K$  - модуль объемного расширения.

В качестве начального приближения функций перемещений использовались аналитические результаты задачи для несжимаемого материала, полученные в рамках линейной теории упругости:

$$\begin{aligned} u_R &= 0, \\ u_\theta &= 0, \\ u_{z_0} &= \frac{u_{z_0, en}(\ln R - \ln R_{in})}{\ln R_{en} - \ln R_{in}}. \end{aligned}$$

Тогда, с помощью программного комплекса, реализующего численный алгоритм, для параметров  $R_{in} = 0.6$  м,  $R_{en} = 1$  м,  $u_{z_0, en} = 0.25$  м,  $G = 0.5$  МПа,  $K = 50$  МПа получим распределения обобщенных перемещений, что позволяет конкретизировать напряженно-деформированное состояние среды.

Для проверки достоверности результатов используем сравнения полученных обобщенных перемещений и напряжений с САЕ Fidesys. Поскольку в промышленных САЕ необходимо рассматривать геометрически конечные объекты, рассмотрим цилиндр высотой 10 м. С учётом используемых значений  $R_{in} = 0.6$  м,  $R_{en} = 1$  м, можно считать, что посередине высоты цилиндра краевые эффекты на торцах будут оказывать незначительное влияние на напряженно-деформированное состояние. Задав необходимые параметры, соответствующие рассмотренной постановке осевого сдвига, в САЕ Fidesys, получим напряженно-деформированное состояние.

Ниже представлены зависимости перемещений, компоненты напряжений  $s^{Rz_0}$  от радиальной координаты, полученные с помощью предложенного численного метода и САЕ Fidesys.

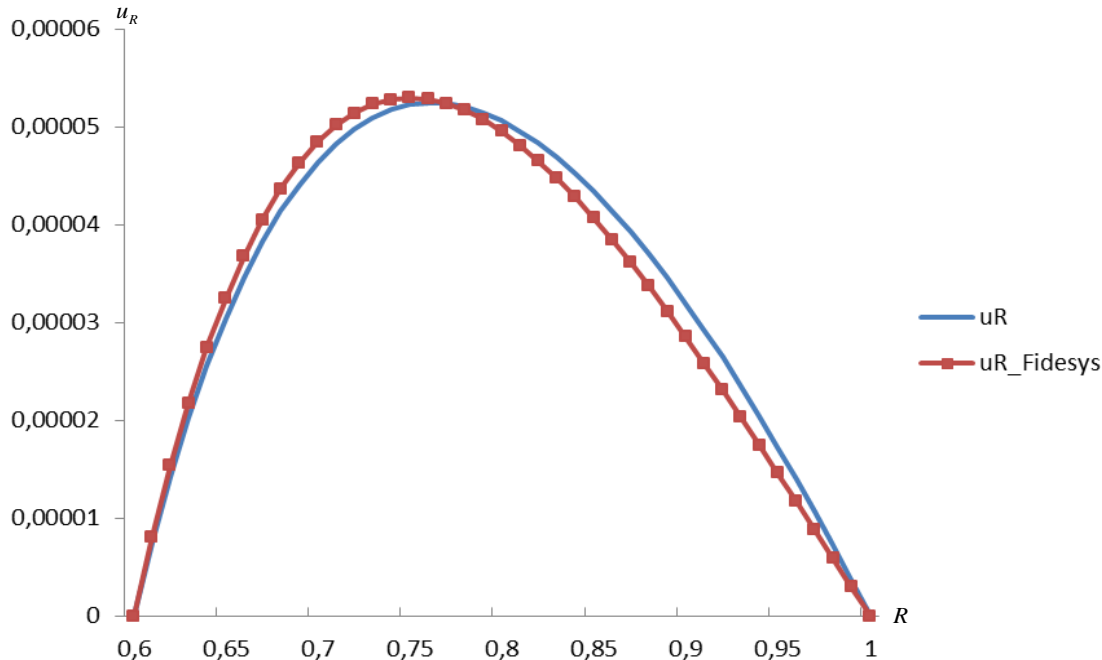


Рис. 1. Радиальное перемещение в зависимости от радиальной координаты.

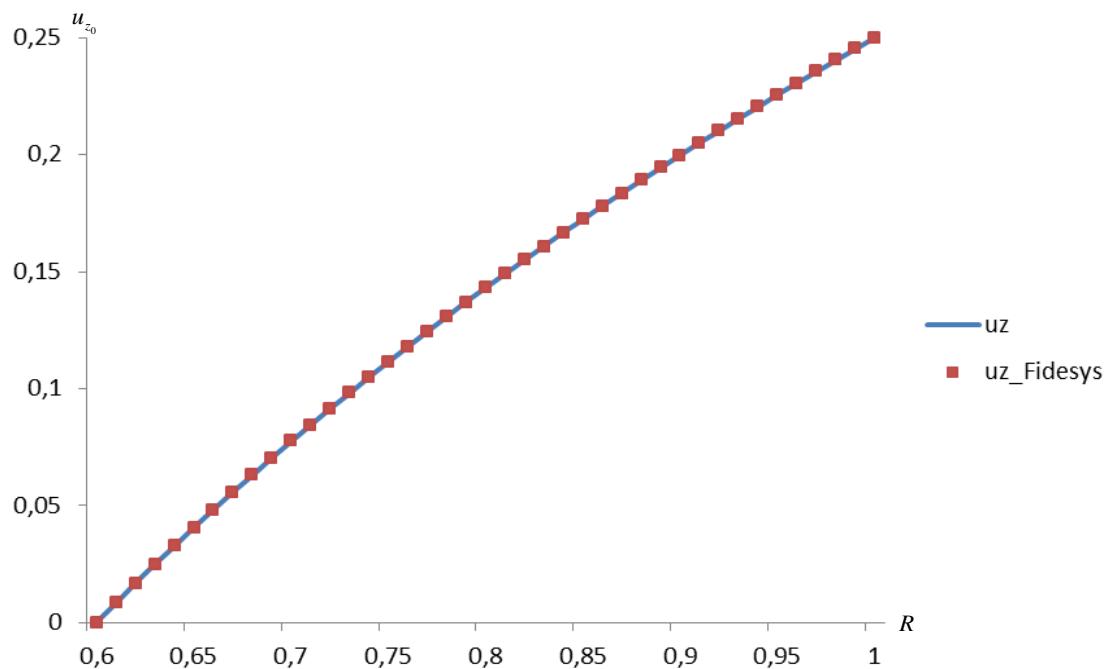


Рис. 2. Осевое перемещение в зависимости от радиальной координаты.

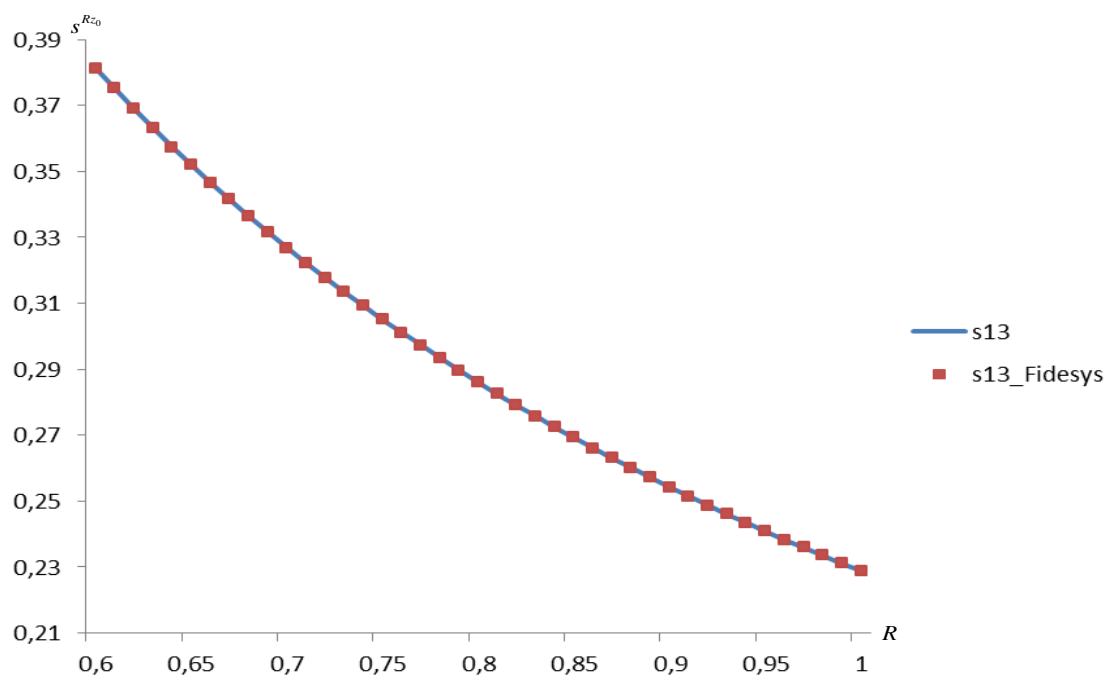


Рис. 3. Компонента тензора напряжений  $s^{Rz_0}$  в зависимости от радиальной координаты.

Таким образом, можно утверждать, что разработанный программный комплекс позволяет качественно оценить напряженно-деформированного состояния рассмотренного осевого сдвига полого цилиндра и может быть использован для определения напряженно-деформированного состояния предлагаемых в работе постановок задач нелинейной теории упругости.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Козлов В.В., Маркин А.А. Комбинированный сдвиг сжимаемого нелинейно-упругого полого цилиндра // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2015. Т. 2. С. 42–52.
- [2] Чиков В.С. Экспериментальные методики конкретизации определяющих соотношений с использованием цилиндрических образцов // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 2. с. 38–49.
- [3] Пономарев С.Д., Бидерман В.Л. Расчеты на прочность в машиностроении. Москва: МАШГИЗ, 1958. Т. 2. 975 с.
- [4] Millard F. V., Jiang Q. . On compressible materials capable of sustaining axisymmetric shear deformations. Part 2: rotational shear of isotropic hyperelastic materials // Q J Mechanics Appl Math. 1997. Vol. 50, no. 2. p. 211–237.
- [5] Лавендел Э.Э. Расчет резинотехнических изделий. М.: Машиностроение, 1976. 228 с.
- [6] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 512 с.
- [7] Курочка К.С. Метод численного решения краевых задач нелинейной теории упругости // Вестник Гомельского государственного технического университета им. П.О. Сухого. № 1. С. 49–57.
- [8] Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. Учеб. пособие. 2 изд. М.: Изд-во МГУ, 1995. 366 с.
- [9] Пешков И.М. Численное моделирование разрывных решений в нелинейной теории упругости // Прикладная математика и техническая физика. Т. 50, № 5. с. 152–161.
- [10] Levenberg K. Method for the Solution of Certain Problems in Last Squares // Quart. Appl. Math. 1944. no. 2. P. 164–168.
- [11] Marquardt D. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1963. Vol. 11, no. 2. P. 431–441.
- [12] Маркин А.А., Христинич Д.В. Нелинейная теория упругости: учеб. пособие. 2 изд. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. 92 с.

V. V. Kozlov, A. A. Markin

## FORMULATION AND METHOD FOR SOLVING A CLASS OF NONLINEAR ELASTICITY PROBLEMS

*Tula State University, Tula, Russia*

**Abstract.** The formulation of the class of problems of the nonlinear theory of elasticity is considered. A numerical method for solving problems of this class is proposed. The elements of verification of the numerical method for the axial shear problem of a hollow cylinder are given. Based on a comparison of the results obtained with CAE Fidesys, conclusions are formulated about the possibility of using the proposed method for solving problems of the considered class.

**Keywords:** numerical method, hollow cylinder, nonlinear elasticity

### REFERENCES

- [1] Kozlov V., Markin A. Combined shear compressible nonlinearity elastic hollow cylinder // *Izvestiya Tula State University. Physical sciences.* 2015. Vol. 2. P. 42–52. (in Russian).
- [2] Chikov V. Experimental methods of concerning the determining relations with the use of cylindrical samples // *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State.* 2018. no. 2. p. 38–49. (in Russian).
- [3] Ponomarev S., Biderman V. *Strength calculations in mechanical engineering.* M.: MASHGIZ, 1958. Vol. 2. 975 p. (in Russian).
- [4] Millard F. B., Jiang Q. On compressible materials capable of sustaining axisymmetric shear deformations. Part 2: rotational shear of isotropic hyperelastic materials // *Q J Mechanics Appl Math.* 1997. Vol. 50, no. 2. p. 211–237.
- [5] Lavendel E. *Calculations of rubber-technical products.* M.: Mashinostroyeniye, 1976. 228 p. (in Russian).
- [6] Lur'ye A. *Nonlinear theory of elasticity.* M: Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1980. 512 p. (in Russian).
- [7] Kurochka K. Metod chislennogo resheniya krayevykh zadach nelineynoy teorii uprugosti // *Vestnik Gomel'skogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. P.O. Sukhogo.* no. 1. P. 49–57. (in Russian).
- [8] Pobedrya B. *Numerical methods in elasticity and plasticity theory. Tutorial.* 2 edition. M.: Izd-vo MGU, 1995. 366 p. (in Russian).
- [9] Peshkov I. Numerical simulation of discontinuous solutions in nonlinear elasticity theory // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* Vol. 50, no. 5. P. 858–865. (in Russian).
- [10] Levenberg K. Method for the Solution of Certain Problems in Last Squares // *Quart. Appl. Math.* 1944. no. 2. P. 164–168.
- [11] Marquardt D. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters // *SIAM Journal on Applied Mathematics.* 1963. Vol. 11, no. 2. P. 431–441.
- [12] Markin A., Khristich D. *Nonlinear theory of elasticity: tutorial.* 2 edition. Tula: Izd-vo TulGU, 2007. 92 p. (in Russian).

---

*Kozlov Viktor Vyacheslavovich*

e-mail: vvkozlovtsu@mail.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Associate Professor, Tula State University, Tula.

*Markin Alexey Alexandrovich*

e-mail: markin-nikram@yandex.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tula State University, Tula.