

Б. Г. Миронов¹, Ю. Б. Миронов²

КРУЧЕНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ ИЗ ИДЕАЛЬНОГО ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ЛИНЕАРИЗОВАННОМ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

¹Российский университет транспорта, г. Москва, Россия

²Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе исследовано кручение неоднородных стержней из идеального жесткопластического материала. Получены интегралы, определяющие напряженное и деформированное состояния стержня при линеаризованном условии пластичности. Определено предельное состояние призматического стержня при кручении, найдены линии разрыва напряжений.

Ключевые слова: неоднородный цилиндрический стержень, идеальный жесткопластический материал, поле характеристик, предельное состояние, линии разрыва напряжений.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.43.1.001

УДК: 539.374

Введение. Кручение представляет собой один из видов деформации тел, характеризующийся взаимным поворотом его поперечных сечений под влиянием моментов, действующих в этих сечениях. Кручение стержней довольно часто встречается в инженерной практике, особенно в машиностроении. Теория кручения изотропных и анизотропных стержней из идеального жесткопластического материала изложена в работах [1]–[2]. В [3] исследованы общие соотношения теории кручения анизотропных стержней. Переход к случаю стержня из неоднородного материала приводит к определенным трудностям: задачу в общем случае невозможно проинтегрировать. Отдельные случаи кручения неоднородных и составных стержней рассмотрены в работах [4, 5, 6]. В [7] исследовано кручение неоднородного идеальнопластического стержня при произвольном условии пластичности.

© Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б., 2020

Миронов Борис Гурьевич

e-mail: mbg.chspru@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Российский университет транспорта, г. Москва, Россия.

Миронов Юрий Борисович

e-mail: mistiam@gmail.com, кандидат технических наук, декан, Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия.

Поступила 05.02.2020

Основные результаты. Соотношения теории кручения неоднородных стержней из идеального жесткопластического материала могут быть записаны в виде:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \quad (1)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y);$$

— уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0; \quad (2)$$

— условие пластичности:

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k; \quad (3)$$

— соотношения ассоциированного закона пластического течения:

$$\frac{\varepsilon_{xz}}{\tau_{xz}} = \frac{\varepsilon_{yz}}{\tau_{yz}}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{xy} = 0, \quad (4)$$

где σ_{ij} — компоненты напряжения; ε_{ij} — компоненты скорости деформации; $k = k(x, y)$.

Условие пластичности (3) в плоскости τ_{xz} , τ_{yz} представляет окружность радиуса k (рис. 1) с центром в начале координат.

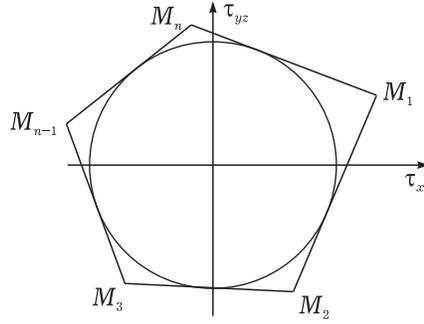


Рис. 1.

Предположим, что окружность условия текучести (3) заменена замкнутой ломаной $M_1M_2M_3\dots M_nM_1$ (см. рис. 1):

$$A_i \tau_{xz} + B_i \tau_{yz} = k, \quad (5)$$

где $A_i, B_i = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Условие (5) представляет на некотором отрезке линеаризованное условие пластичности (3).

Дифференцируя уравнение (5) по переменной y , получим

$$A_i \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + B_i \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \frac{\partial k}{\partial y}. \quad (6)$$

С учетом (2) из уравнения (6) имеем

$$A_i \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - B_i \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial y}. \quad (7)$$

Из (7) следует, что прямые

$$A_i x + B_i y = C_{i1} \quad (C_{i1} = \text{const}) \quad (8)$$

являются характеристиками. Из (5) и (8) следует, что характеристики и линии текучести параллельны. Вдоль характеристик (8) имеют место соотношения для компонент напряжения

$$A_i \tau_{xz} = K, \quad B_i \tau_{yz} = k - K, \quad (9)$$

где

$$K = \int \frac{\partial k}{\partial y}(\alpha, y) dy, \quad \alpha = \frac{1}{A_i}(C_{i1} - B_i y). \quad (10)$$

Аналогично дифференцируя уравнение (5) по переменной x , с учетом (2) получим, что вдоль характеристик справедливы следующие соотношения для компонент напряжения:

$$B_i \tau_{yz} = \bar{K}, \quad A_i \tau_{xz} = k - \bar{K}, \quad (11)$$

где

$$\bar{K} = \int \frac{\partial k}{\partial x}(x, \beta) dx, \quad \beta = \frac{1}{B_i}(C_{i1} - A_i x). \quad (12)$$

Рассматривая условие (5) в качестве пластического потенциала, получим вместо (4) соотношение

$$\frac{\varepsilon_{xz}}{A_i} = \frac{\varepsilon_{yz}}{B_i}. \quad (13)$$

Интегрируя соотношение (13) и часть соотношений (4) и учитывая, что в начальный момент закручивания компоненты деформации e_{ij} равны 0, получим

$$\frac{e_{xz}}{A_i} = \frac{e_{yz}}{B_i}, \quad e_x = e_y = e_z = e_{xy} = 0. \quad (14)$$

Из (14) следует

$$B_i e_{xz} - A_i e_{yz} = 0. \quad (15)$$

Предположим, что компоненты перемещения u, v, w имеют вид

$$u = \theta yz, \quad v = -\theta xz, \quad w = w(x, y), \quad (16)$$

где θ — крутка, w — депланация.

Выражая компоненты деформации через компоненты перемещения, из (15), (16) получим

$$-B_i \frac{\partial w}{\partial x} + A_i \frac{\partial w}{\partial y} = \theta(A_i x + B_i y). \quad (17)$$

Отсюда получим, что прямые (8) являются характеристиками соотношения (17). Вдоль характеристик (8) справедливы соотношения

$$B_i w + \theta C_{i1} x = C_{i2} \quad \text{или} \quad A_i w - \theta C_{i1} y = C_{i3}, \quad (18)$$

где $C_{i2}, C_{i3} = \text{const}$ вдоль характеристики.

Для дальнейшего необходимы не столько выражения для депланации, сколько выражения для компонент деформации.

Дифференцируя соотношение (17) по переменной x , получим уравнение

$$-B_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + A_i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \theta A_i. \quad (19)$$

Из уравнения (19) следует, что вдоль характеристик (8) справедливы соотношения

$$B_i \frac{\partial w}{\partial x} + \theta A_i x = C_{i4} \quad \text{или} \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \theta y = C_{i5}, \quad (20)$$

где $C_{i4}, C_{i5} = \text{const}$ вдоль характеристики.

Аналогично дифференцируя соотношение (17) по переменной y , получим уравнение

$$-B_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + A_i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = \theta B_i. \quad (21)$$

Из уравнения (21) следует, что вдоль характеристик (8) справедливы соотношения

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \theta x = C_{i6} \quad \text{или} \quad A_i \frac{\partial w}{\partial y} - \theta B_i y = C_{i7}, \quad (22)$$

где $C_{i6}, C_{i7} = \text{const}$ вдоль характеристики.

Используя второе соотношение (20) и первое соотношение (22) получим, что вдоль характеристик (8) справедливы соотношения

$$e_{xz} - \theta y = \frac{1}{2} C_{i5}, \quad e_{yz} + \theta x = \frac{1}{2} C_{i6}. \quad (23)$$

Следует отметить, что из соотношений (23), (15), (8) вытекает

$$A_i C_{i6} - B_i C_{i5} = 2\theta C_{i1}. \quad (24)$$

Рассмотрим кручение стержня прямоугольного сечения $m_1 m_2 m_3 m_4$ со сторонами $2a$ и $2b$ (рис. 2а). На контуре сечения вектор касательного напряжения $\vec{\tau} = (\tau_{xz}, \tau_{yz})$ параллелен контуру.

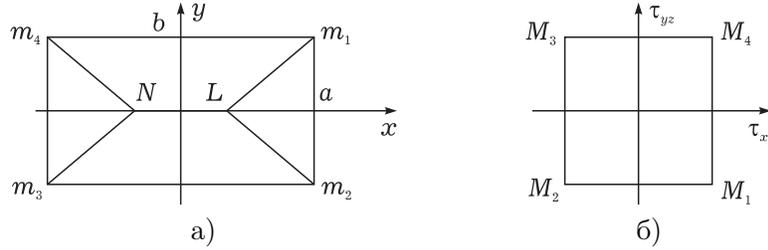


Рис. 2.

В случае изотропного идеального жесткопластического материала характеристики направлены перпендикулярно к контуру. В рассматриваемом случае характеристики (11) фиксированы, поэтому для данного контура сечения стержня всегда можно выбрать линейризованное условие пластичности (5) таким образом, чтобы характеристики оставались перпендикулярными к контуру. Для этого A_i, B_i в условии (5) необходимо выбрать так, чтобы вектор $\vec{n}_i = (A_i, B_i)$ был параллелен отрезку $m_i m_{i+1}$ контура (рис. 2б). Здесь мы имеем четыре семейства характеристик:

$$A_1 x + B_1 y = C_{11}, \quad (25)$$

$$A_2 x + B_2 y = C_{21}, \quad (26)$$

$$A_3 x + B_3 y = C_{31}, \quad (27)$$

$$A_4 x + B_4 y = C_{41}. \quad (28)$$

Для того, чтобы характеристики (25) были ортогональны отрезку $m_1 m_2$ контура сечения стержня, следует положить $A_1 = 0, B_1 = -1$. Условие пластичности (5) принимает вид

$$\tau_{yz} = -k. \quad (29)$$

Характеристики (25) запишутся в виде

$$y = C_{11}. \quad (30)$$

Из (9) и (24) следует

$$C_{15} = 2\theta C_{11}, \quad K = 0. \quad (31)$$

Тогда из (29) и (2) имеем

$$\tau_{yz} = -k, \quad \tau_{xz} = 0. \quad (32)$$

Для того, чтобы характеристики (26) были ортогональны отрезку m_2m_3 контура сечения стержня, следует положить $A_2 = -1$, $B_2 = 0$. Условие пластичности (5) принимает вид

$$\tau_{xz} = -k. \quad (33)$$

Характеристики (26) запишутся в виде

$$x = C_{21}. \quad (34)$$

Из (11) и (24) следует

$$C_{26} = -2\theta C_{21}, \quad \bar{K} = 0. \quad (35)$$

Тогда из (33) и (2) имеем

$$\tau_{xz} = -k, \quad \tau_{yz} = 0. \quad (36)$$

Для того, чтобы характеристики (27) были ортогональны отрезку m_3m_4 контура сечения стержня, следует положить $A_1 = 0$, $B_1 = 1$. Условие пластичности (5) принимает вид

$$\tau_{yz} = k. \quad (37)$$

Характеристики (27) запишутся в виде

$$y = C_{31}. \quad (38)$$

Из (9) и (24) следует

$$C_{35} = -2\theta C_{31}, \quad K = 0. \quad (39)$$

Тогда из (37) и (2) имеем

$$\tau_{yz} = k, \quad \tau_{xz} = 0. \quad (40)$$

Для того, чтобы характеристики (28) были ортогональны отрезку m_4m_1 контура сечения стержня, следует положить $A_1 = 1$, $B_1 = 0$. Условие пластичности (5) принимает вид

$$\tau_{xz} = k. \quad (41)$$

Характеристики (25) запишутся в виде

$$x = C_{41}. \quad (42)$$

Из (11) и (24) следует

$$C_{46} = 2\theta C_{41}, \quad \bar{K} = 0. \quad (43)$$

Тогда из (41) и (2) имеем

$$\tau_{xz} = k, \quad \tau_{yz} = 0. \quad (44)$$

Особо следует остановиться на линиях разрыва напряжений (линии m_1L , m_2L , m_3N , m_4N , NL на рис. 2а), которые возникают в случае, когда через данную точку сечения проходят две и более характеристики. Линии разрыва напряжений являются следом исчезающих жестких областей. На них всегда выполняются соотношения

$$e_{xz} = e_{yz} = 0. \quad (45)$$

m_1L есть линия разрыва напряжений, выходящая из вершины m_1 контура сечения стержня и образованная за счет пересечения семейства характеристик (30) и (42). Согласно (23) из (45) следует, что на m_1L справедливы соотношения

$$C_{15} = C_{45}, \quad C_{16} = C_{46}. \quad (46)$$

Из (32) и (44) имеем уравнение линии разрыва напряжений m_1L :

$$-x + y = b - a. \quad (47)$$

m_2L есть линия разрыва напряжений, выходящая из вершины m_2 контура сечения стержня и образованная за счет пересечения семейства характеристик (30) и (34). Согласно (23) из (45) следует, что на m_2L справедливы соотношения

$$C_{15} = C_{25}, \quad C_{16} = C_{26}. \quad (48)$$

Из (32) и (36) имеем уравнение линии разрыва напряжений m_2L :

$$x + y = -b + a. \quad (49)$$

m_3N есть линия разрыва напряжений, выходящая из вершины m_3 контура сечения стержня и образованная за счет пересечения семейства характеристик (38) и (34). Согласно (23) из (45) следует, что на m_3N справедливы соотношения

$$C_{35} = C_{25}, \quad C_{36} = C_{26}. \quad (50)$$

Из (40) и (36) имеем уравнение линии разрыва напряжений m_3N :

$$-x + y = -b + a. \quad (51)$$

m_4N есть линия разрыва напряжений, выходящая из вершины m_4 контура сечения стержня и образованная за счет пересечения семейства характеристик (38) и (42). Согласно (23) из (45) следует, что на m_4N справедливы соотношения

$$C_{35} = C_{45}, \quad C_{36} = C_{46}. \quad (52)$$

Из (40) и (44) имеем уравнение линии разрыва напряжений m_4N :

$$x + y = b - a. \quad (53)$$

NL есть линия разрыва напряжений, образованная за счет пересечения семейства характеристик (34) и (42). Согласно (23) из (45) следует, что на NL справедливы соотношения

$$C_{25} = C_{45}, \quad C_{26} = C_{46}. \quad (54)$$

Из (36) и (44) имеем уравнение линии разрыва напряжений NL :

$$y = 0. \quad (55)$$

Заключение. Таким образом, в работе:

- получены интегралы, определяющие напряженное и деформированное состояния неоднородного идеального жесткопластического стержня при кручении для линеаризованного условия пластичности, найдены характеристики основных соотношений;
- исследовано предельное состояние неоднородного идеального жесткопластического стержня с прямоугольным сечением: построено поле характеристик основных соотношений, найдены соотношения вдоль характеристик и линии разрыва напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Соколовский В. В. Теория пластичности. Москва: Высшая школа, 1969. 608 с.
- [2] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [3] Миронов Б. Г., Деревянных Е. А. Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2012. № 4(76). С. 108–112.
- [4] Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. Москва: Мир, 1964. 156 с.
- [5] Mironov V., Mironov Y. Torsion of anisotropic and non-uniform cylindrical rods with elliptical section // MATEC Web of Conferences. 2018. 04037.
- [6] Mironov V. G., Mironov Y. B. Torsion of anisotropic and composite cylindrical rod // Journal of Physics: Conference Series. 2019. 012009.
- [7] Миронов Б. Г. К теории кручения неоднородных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4(22). С. 236–240.

B. G. Mironov¹, Yu. B. Mironov²

TORSION OF INHOMOGENEOUS RODS MADE OF AN IDEAL RIGID PLASTIC MATERIAL UNDER A LINEARIZED PLASTICITY CONDITION

¹*Russian University of transport, Moscow, Russia*

²*Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia*

Abstract. The torsion of inhomogeneous rods made of an ideal rigid-plastic material is studied. Integrals are obtained that determine the stress and strain States of the rod under the linearized plasticity condition. The limit state of the prismatic rod during torsion is determined, and the stress break lines are found.

Keywords: a nonuniform cylindrical rod, the perfect rigid-plastic material, the field characteristics, limiting condition, line of gap voltages.

REFERENCES

- [1] Sokolovskij V. V. Theory of plasticity. Moscow: Higher school, 1969. 608 p. (in Russian).
- [2] Ivlev D. D. Theory of ideal plasticity. Moscow: Science, 1966. 232 p. (in Russian).
- [3] Prager V., Hoge F. G. Theory of ideally plastic bodies. Moscow: IL, 1956. 398 p. (in Russian).
- [4] Bykovcev G. I., Ivlev D. D. Theory of plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p. (in Russian).
- [5] Mironov B. G., Derevjannyh E. A. General relations of the torsion theory of anisotropic rods // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ja. Yakovlev. 2012. no. 4(76). P. 108–112. (in Russian).
- [6] Olshak V., Ryhlevskiy Y., Urbanovskiy B. Theory of plasticity of inhomogeneous bodies. Moscow: Mir, 1964. 156 p. (in Russian).
- [7] Mironov B. G. On the theory of torsion of inhomogeneous rods // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ja. Yakovlev. Series: Mechanics of a limit state. 2014. no. 4(22). P. 236–240. (in Russian).
- [8] Mironov B., Mironov Y. Torsion of anisotropic and non-uniform cylindrical rods with elliptical section // MATEC Web of Conferences. 2018. 04037.
- [9] Mironov B. G., Mironov Y. B. Torsion of anisotropic and composite cylindrical rod // Journal of Physics: Conference Series. 2019. 012009.

Boris Gurjevich Mironov, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of department, Russian University of transport, Moscow, Russia.

Yuri Borisovich Mironov, Candidate of technical Sciences, Dean, Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia.