Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 1 (43). С. 34–44

М. В. Поликарпов, В. Б. Пеньков

СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ СИЛОВЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ В МЕТОДЕ ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ

Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия

Аннотация. Данная статья посвящена развитию метода граничных состояний на класс задач механики твердого деформируемого тела, включающих сингулярности физического характера. Сформировано множество специальных решений, соответствующих сосредоточенным силовым воздействиям на поверхности гладкого трехмерного тела. Каждое специальное решение включено в базисы пространств внутренних и граничных состояний. В качестве примеров эффективности использования специальных решений методом граничных состояний построены напряжённо-деформированные состояния тел шарообразной формы под воздействием сосредоточенных сил.

Ключевые слова: сосредоточенная сила, эластостатика, сингулярность, трехмерные задачи, шар, метод граничных состояний.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.43.1.004

УДК: 539.3

Введение

Сосредоточенная сила представляет собой идеализацию локально сконцентрированного в малой области поверхностного усилия значительной величины. Этот подход согласуется с принципом Сен–Венана, постулирующим индифферентность индивидуальной формы приложенной нагрузки по отношению к удаленной точке наблюдения: требуется, чтобы главные величины, характеризующие механическое воздействие (главный вектор, момент) имели соответствующие значения. Этот же подход позволяет при проведении вычислений заменять сосредоточенный фактор эквивалентным по действию распределенным. Сосредоточенная сила является сингулярностью физического характера.

Поликарпов Максим Владимирович
`e-mail:` messiah142@gmail.com, аспирант, младший научный сотрудник, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия.
Пеньков Виктор Борисович
`e-mail:` vbpenkov@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90065.

Поступила 18.01.2020

Впервые задача о сосредоточенной силе, действующей на границу полуплоскости, была решена профессором Буссинеском Ж. В. в 1885 году. По условиям задачи необходимо было определить значения вертикальных и касательных напряжений в точке, расположенной на площадке, параллельной плоскости, ограничивающей массив от действия сосредоточенной силы [18].

Мусхелишвили Н. И. для обобщенно плоского напряженного состояния формирует функции, соответствующие действию сосредоточенной силы, приложенной в начале координат к неограниченному телу средствами комплексного представления [9].

В трехмерном случае задача о воздействии сосредоточенной силы в точке неограниченного пространства впервые была изучена Томсоном В. (Кельвином) в мемуаре 1848 году [7]. В [13] рассматривается задача о воздействии сосредоточенной силы в изотропной неограниченной упругой среде. Метод решения задач о сосредоточенных воздействиях по поверхности шара и шарового слоя описан в монографии Лурье А. И. [6], акцент сделан именно на сферический характер границ тела.

Плоские задачи о напряженно-деформированном состоянии при наличии сосредоточенных сил рассматривались в статьях [2, 12]. Ряд работ посвящен механике разрушения под действием сосредоточенных силовых факторов [3, 4, 5, 17]. В рамках динамики сосредоточенные силы и нагрузки исследовались в работах [1, 14]. Учет сосредоточенной силы средствами метода конечных элементов рассматривался в статье [8].

При организации метода граничных состояний (МГС) задачи о сосредоточенной силе рассмотрены ранее [15, 16], но только для класса плоских задач механики твердого деформируемого тела.

Основные положения метода граничных состояний

МГС основан на понятии состояния среды, под которым понимается частное решение определяющих уравнений среды безотносительно к условиям, поставленным на границе тела [10]. Определяющие соотношения в математической модели однородного эластостатического тела представлены в тензорно-индексной форме записи

$$\begin{gathered} \varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i}), \\ \sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{tt}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \\ \sigma_{ij,j} + X_i = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где u_i, X_i — компоненты векторов перемещения и объемных сил, σ_{ij}, ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и деформаций, δ_{ij} — символ Кронекера, λ, μ — параметры Ламе. При фиксированных значениях λ, μ совокупность соотношений (1) сводится к системе уравнений Ламе

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)\, u_{j,ji} + X_i = 0.$$

Их общее решение построено Папковичем и Нейбером и для ограниченного односвязного тела представляется в форме Аржаных – Слободянского (случай отсутствия объемных сил)

$$u_i = 4\,(1-\nu)\,B_i + x_j B_{i,j} - x_i B_{j,i}, \tag{2}$$

где B_i — компонента произвольного гармонического вектора. Общее решения (2) служит эффективным средством формирования базиса пространства состояний для тела, в котором отсутствуют сингулярные факторы [10].

Понятие состояния среды трансформируется в понятия внутреннего ξ и граничного γ состояний, если речь заходит о конкретном теле V, имеющем границу ∂V

$$\xi = \{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\}, \qquad \gamma = \{u_i|_{\partial V}, p_i\},$$

где $p_i = \sigma_{ij}|_{\partial V} n_i$.

Совокупность всех возможных состояний $\xi \longleftrightarrow \gamma$ образует изоморфные гильбертовы пространства внутренних Ξ и граничных Γ состояний со скалярными произведениями

$$(\xi^{(k)}, \xi^{(m)})_\Xi = \int_V \sigma_{ij}^{(k)} \varepsilon_{ij}^{(m)} \partial V, \qquad (\gamma^{(k)}, \gamma^{(m)})_\Gamma = \int_{\partial V} p_i^{(k)} u_i^{(m)} \partial S,$$

которые равны между собой в силу принципа возможных перемещений

$$(\xi^{(k)}, \xi^{(m)})_\Xi = (\gamma^{(k)}, \gamma^{(m)})_\Gamma.$$

После ортогонализации атрибуты результирующих внутреннего и граничного состояний представляются рядами Фурье по элементам ортонормированных базисов

$$u_i = \sum_k c_k u_i^{(k)}, \qquad \sigma_{ij} = \sum_k c_k \sigma_{ij}^{(k)}, \qquad \varepsilon_{ij} = \sum_k c_k \varepsilon_{ij}^{(k)}. \tag{3}$$

$$u_i|_{\partial V} = \sum_k c_k u_i^{(k)}|_{\partial V}, \qquad p_i = \sum_k c_k p_i^{(k)}. \tag{4}$$

Формирование специального решения

Учет сингулярности обеспечивается благодаря использованию специальных решений при организации МГС, а именно формированием счетных базисов с их непосредственным включением для пространств внутренних и граничных состояний.

Перемещение "точки наблюдения" M в неограниченной упругой среде под действием сосредоточенной в "точке истока" Q силы P определяется с помощью тензора Кельвина – Сомильяна формулой [7]

$$\mathbf{u}\,(M, Q) = \hat{U}(M, Q) \cdot \mathbf{P},$$

$$\hat{U} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)R}[(3-4\nu)\,\hat{E} + \frac{\mathbf{RR}}{R^2}], \qquad \mathbf{R} = \mathbf{r}_M - \mathbf{r}_Q, \qquad R = |\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_Q|\,.$$

Специальное решение для единичной силы сосредоточенной в точке с координатами $(0, 0, -1)$ и при $\mu = 1,\ \nu = \frac{1}{4}$ имеет форму

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + (1+\varepsilon+z)^2},$$

$$\mathbf{RR} = \begin{pmatrix} x^2 & xy & x(1+\varepsilon+z) \\ xy & y^2 & y(1+\varepsilon+z) \\ x(1+\varepsilon+z) & y(1+\varepsilon+z) & (1+\varepsilon+z)^2 \end{pmatrix},$$

$$\hat{U} = \frac{1}{R^{3/2}} \begin{pmatrix} x^2 + 2R^2 & xy & x(1+\varepsilon+z) \\ xy & y^2 + 2R^2 & y(1+\varepsilon+z) \\ x(1+\epsilon+z) & y(1+\varepsilon+z) & R^2(2 + \frac{(1+\varepsilon+z)^2}{R^2}) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}\,(M,Q) = \frac{1}{R^{3/2}} \begin{pmatrix} -x(1+\varepsilon+z) \\ -y(1+\varepsilon+z) \\ -R^2(2+\frac{(1+\varepsilon+z)^2}{R^2}) \end{pmatrix}.$$

Точка, находящаяся под воздействием сосредоточенной силы, смещена от границы тела на малую величину ε. Это вынужденная, но допустимая мера, поскольку: 1) на удалении от центра воздействия на расстояние, многократно превышающем ε картина деформирования идентична идеализированной согласно принципу Сен–Венана; 2) смещение центра воздействия на ε от границы тела позволяет гарантированно вычислять пространственные и поверхностными интегралы, скрытые в скалярных произведениях, численными средствами.

Формирование искомых компонент тензоров напряжений и деформаций выполняется в соответствии с соотношениями (1).

Сосредоточенные силовые воздействия на поверхности гладкого тела

Поверхность ∂V трехмерного тела с гладкими границами покрыта n локальными "пятнами" S_k габаритного диаметра 2ε каждое, в центре которых сосредоточены силы $\mathbf{p}_k$ (рис. 1). Каждый вектор $\mathbf{p}_k$ заменен его приближенным представлением в форме вектора пространственных многочлена 4-го порядка, обеспечивающих нулевое значение гладкого "полипа" на границах пятна и гладкость его перехода к нулевому уровню напряжений $\mathbf{p}_k = 0$, $x \in S_0 = \partial V \setminus \cap_{k=1}^{n} S_k$,

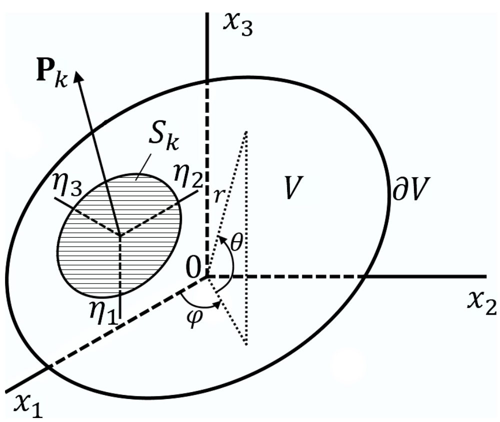

Рис. 1. Локализация пятна S_k

$$\mathbf{P}_k = \int\limits_{S_k} \mathbf{p}_k(\eta) dS_\eta,$$

$$\mathbf{p}_k = p_j^k(\eta),\ \eta = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\},$$

$$p_j^k(\eta) = p_j^{0k}(\frac{3}{\varepsilon^2\pi} - \frac{6r^2}{\varepsilon^4\pi} + \frac{3r^4}{\varepsilon^6\pi}),$$

$$r^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2,\ \eta \in S_k,$$

где p_j^{0k} — максимальное значение усилия на пятне k в направлении оси j.

Кроме смягченных сосредоточенных воздействий будем полагать заданной по всей границе ∂V функцию $\mathbf{p_0}(\mathbf{x})$, имеющую непрерывный гладких характер. Таким образом граничные условия первой основной задачи (по классификации Н. И. Мусхелишвили [9]) имеют вид

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{p_0}(\mathbf{x}) + \mathbf{p_k}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbf{S_k} \\ \mathbf{p_0}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbf{S_0} \end{cases}.$$

По всей границе ∂V вектор $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ представляет собой гладкую непрерывную функцию.

Как известно [11], решение первой основной задачи средствами МГС сводится к вычислению коэффициентов Фурье через ортонормированный базис $\{\gamma^{(l)}\}$ пространства граничных состояний Γ и последующему восстановлению актуальных внутренних и граничных состояний через ряды Фурье (3)-(4).

$$c_k = (\gamma, \gamma^{(l)}) = \int_{\partial V} p_i u_i^{(l)} dS \tag{5}$$

где p_i — компоненты поверхностных усилий, $u_i^{(l)}$ — перемещение вдоль оси X_i из ортонормированного базиса пространства граничных состояний Γ.

Реально вместо полного базиса используется его усеченный вариант с $l \in [1, N]$. В силу особенности граничных условий, близких к сингулярным для обеспечения точности можно не назначать чрезмерно высокое значение, для N, но ввести в исходный базис специальные элементы "схватывающие" эти особенности. Порядок ряда N при этом снижается кардинально. Введенные решения имеют право наполнять базис, поскольку:

(1) они линейно-независимы: никакой конечный набор ограниченных в ограниченной области, охватывающей все особые точки, не может дать бесконечных значений в этих точках;
(2) их введение в исходный регулярный отрезок базиса не отражается на требованиях его полноты.

Шар, уравновешенный системой сосредоточенных сил

В качестве конкретных примеров эффективности использования "специальных" решений для преодоления сингулярностей физического характера рассмотрены две задачи о шаре (рис. 2), покоящимся под воздействием сжимающих сосредоточенных сил, направленных вдоль координатных осей x, y, z.

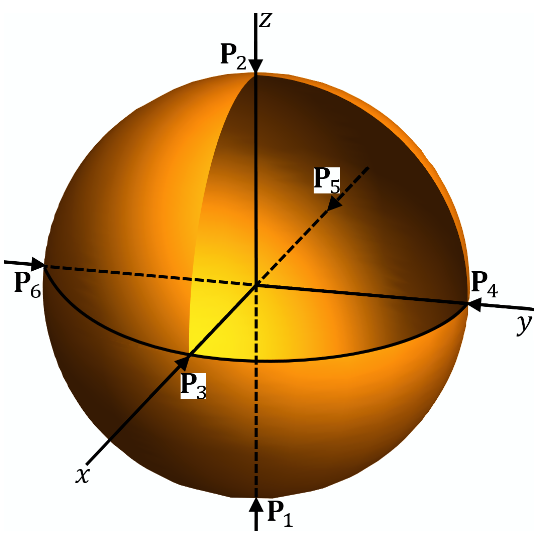

Рис. 2. Шар

Используется сферическая система координат.
Пятна S_k сконцентрированы вокруг точек пересечения координатных осей с поверхностью шара.

При расчетах выполнялось обезразмеривание посредством масштабов μ, R и принималось $R = 1$, $\varepsilon = 1/100$. Параметр нагрузки задавался равным μ (при любом другом значении результирующие поля напряжений и усилий меняются пропорционально).

В случае первой основной задачи коэффициенты Фурье разложения искомого состояния по ортонормированному базису $\{\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(k)}, \dots\} \in \Xi$ пространства внутренних состояний Ξ вычисляются в соответствии с определением скалярного произведения по границе тела (5).

Система коэффициентов Фурье подчинена неравенству Бесселя (левая часть неравенства Бесселя, которая соотносит коэффициенты Фурье с евклидовой нормой раскладываемого элемента)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^2 \leq \|\xi\|_{\Xi}^2 = \|\gamma\|_{\Gamma}^2, \tag{6}$$

где n — размерность усечённого базиса.

На рис. 3а графически представлены коэффициенты Фурье, где по горизонтальной оси указан номер коэффициента, а по вертикальной оси значение этого коэффициента.

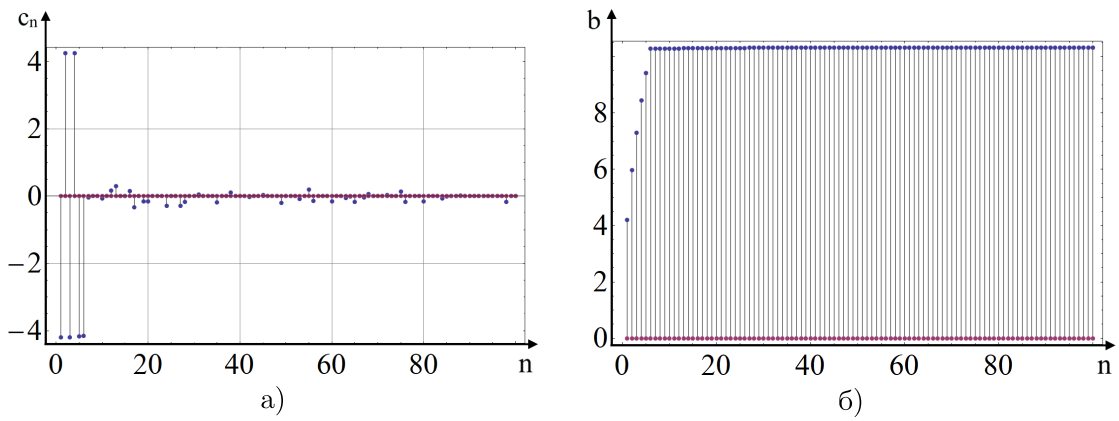

Рис. 3. а) коэффициенты Фурье, б) насыщение суммы Бесселя

Достоверность полученных результатов можно характеризовать фактом насыщение суммы Бесселя (левая часть неравенства Бесселя (6)), представленной на рис. 3б, где по горизонтальной оси указано количество просуммированных коэффициентов, а по вертикальной оси сумма квадратов значений этих коэффициентов.

Результаты свидетельствуют о том, что полученное решение является сходящимся, так как при увеличении числа элементов в базисе значение коэффициентов Фурье уменьшается. Данный факт является одним из косвенных показателей, характеризующим качество решения.

Результаты решения задачи в графической форме

Характеристики, которые отвечают за напряженно-деформированное состояние имеют форму громоздких аналитических выражений; из-за их визуальной необозримости они здесь не приведены. Для краткости на рис. 4 представлены изолинии напряжений, построенные в сечении $x + y + z = 0$ для случая с двумя заданными сосредоточенными силами на полюсах шара.

На рисунках более светлые слои отвечают большему уровню напряжений (нулевой уровень представлен фоном за пределами тела). На изолиниях отражено увеличение напряжения по мере приближения к областям с сингулярностью.

На рис. 5 представлены изолинии напряжений, построенные в сечении $x + y + z = 0$ для случая с шестью заданными сосредоточенными силами.

Заключение

Основные выводы по проделанной работе:

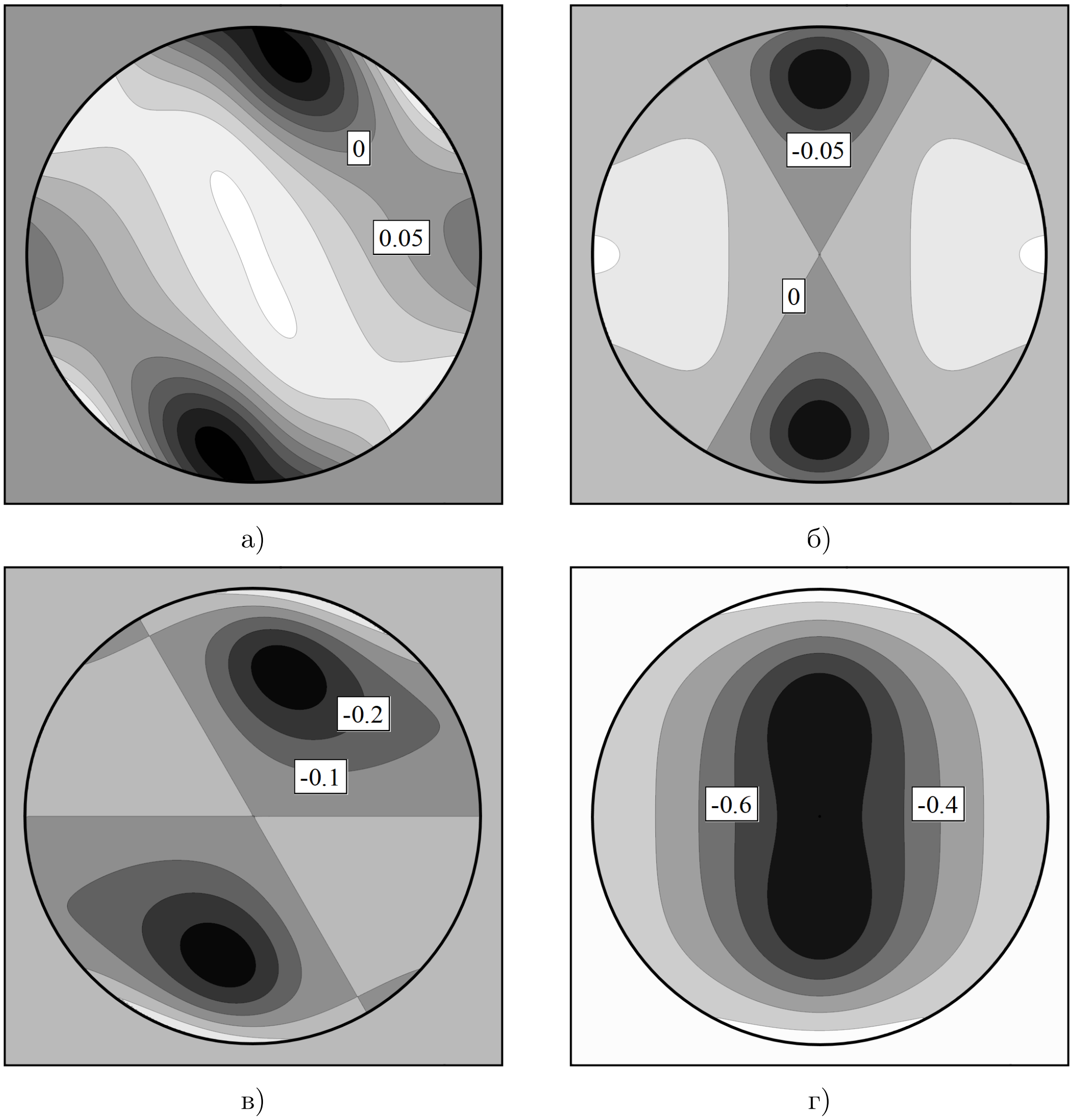

Рис. 4. Изолинии при двух сосредоточенных вдоль оси z сил а) σ_{xx} , б) σ_{xy} , в) σ_{xz} , г) σ_{zz}

(1) Разработана основанная на МГС методика численно-аналитического построения НДС трехмерного тела произвольной формы, нагруженного системой сосредоточенных сил;
(2) Средствами МГС выполнены решения двух задач о сжатие шара сосредоточенными встречно ориентированными силами;
(3) Методика может быть распространена на тела произвольной формы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Журавков М. А., Круподеров А. В. О динамическом воздействии сосредоточенной силы в упругом изотропном пространстве со сферической полостью // Весці нацыянальнай акадэміі навук беларусі. Серыя фізіка-тэхнічных навук. 2010. № 3. С. 44–50.

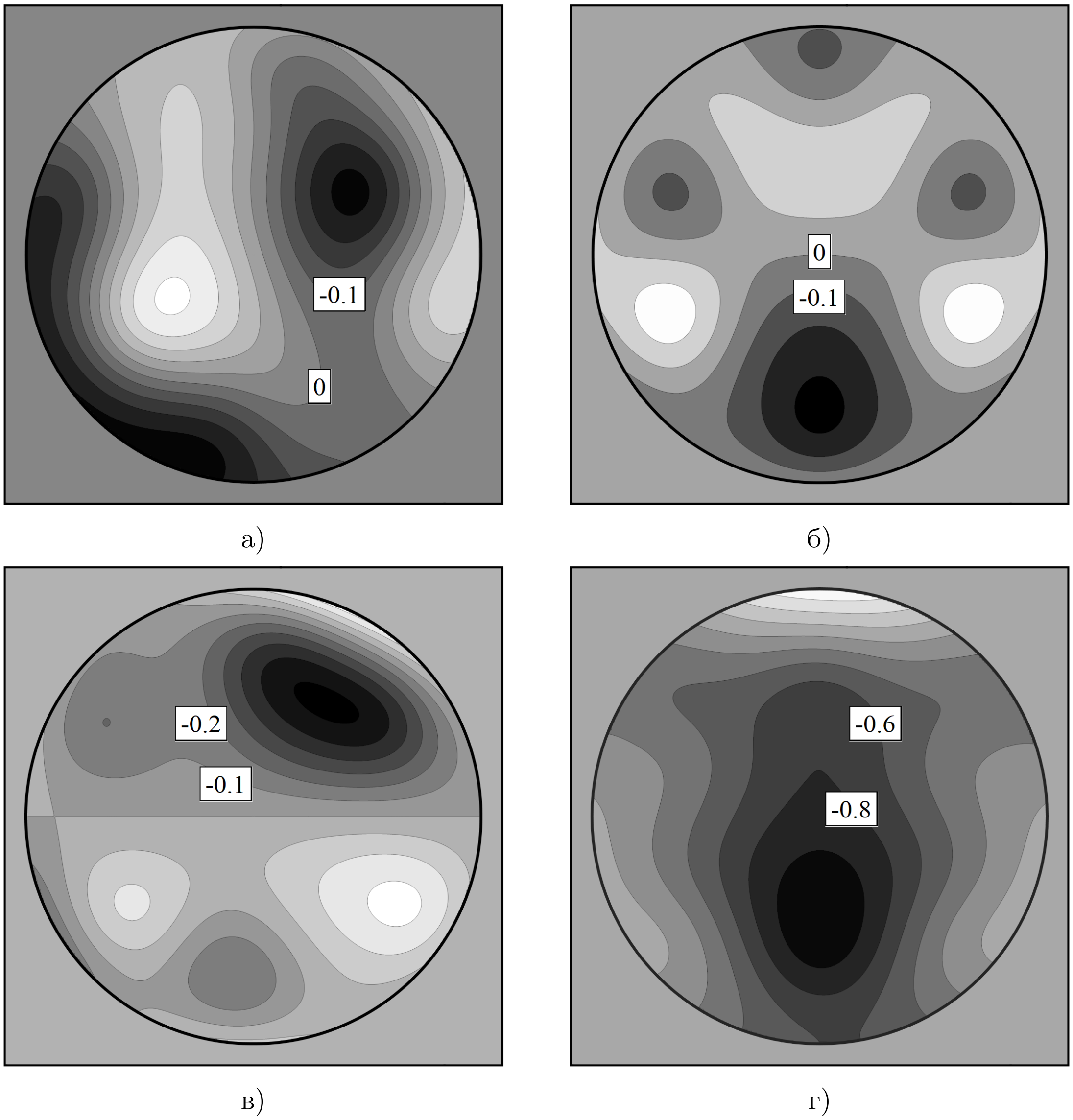

Рис. 5. Изолинии при шести сосредоточенных вдоль координатных осей сил а) σ_{xx} , б) σ_{xy} , в) σ_{xz} , г) σ_{zz}

[2] Колганов Ю. А. Исследование механизмов разрушения в композиции с жестким включением при растяжении сосредоточенными силами // Строительная механика и расчет сооружений. 2009. № 5(226). С. 18–28.

[3] Кундрат Н. М. Исследование механизмов разрушения в композиции с жестким включением при растяжении сосредоточенными силами // Механика композиционных материалов и конструкций. 2000. № 3. С. 333–342.

[4] Кундрат Н. М. Отслоение жесткого включения в упругопластической матрице при растяжении сосредоточенными силами // Механика композиционных материалов и конструкций. 2001. № 1. С. 107–113.

[5] Кундрат Н. М. Предельное равновесие композиции с жестким включением при растяжении сосредоточенными силами // Механика композиционных материалов и конструкций. 2000. № 1. С. 104–112.

[6] Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Москва: Гостехиздат, 1955. 492 с.

[7] Лурье А. И. Теория упругости. Москва: Наука, 1970. 940 с.

[8] Мартьянова А. Е. Применение МКЭ при исследовании воздействия сосредоточенной нормальной силы на упругую полуплоскость // Вестник астраханского государственного технического университета. 2006. № 2(31). С. 15–20.

[9] Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 708 с.

[10] Пеньков В. Б., Пеньков В. В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики. Владивосток: Дальневосточный математический журнал, 2001.

[11] Пеньков В. Б., Саталкина Л. В. Метод граничных состояний с возмущениями: неоднородные и нелинейные задачи теории упругости и термоупругости. Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH and Co., 2012. 108 с.

[12] Пронина Ю. Г. Сосредоточенные силы и моменты в упругой полуплоскости с отверстием // Вестник санкт-петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2009. № 2. С. 104–114.

[13] Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. Москва: Наука, 1979. 744 с.

[14] Романов В. Г. Асимптотическое разложение решения системы уравнений упругости с сосредоточенной импульсной силой // Сибирский журнал индустриальной математики. 2008. № 3(35). С. 102–118.

[15] Рязанцева Е. А., Пеньков В. Б., Саталкина Л. В. Метод граничных состояний: сосредоточенные силы // доклады Межрегиональной конференции памяти А.Н. Кабелькова. Новочеркасск: Южно-Российский государственный политехнический университет, 2011. С. 126–130.

[16] Рязанцева Е. А. Метод граничных состояний в задачах теории упругости с сингулярностями физического и геометрического характера. Дис. / Рязанцева Елена Анатольевна. – Тула: Механика деформируемого твёрдого тела, 2015. 101 с.

[17] Ярдухин А. К. Аналитическое решение задачи взаимодействия межфазной трещины с отслоившимся межфазным включением при наличии сосредоточенных сил // Вестник самарского государственного технического университета. Серия: физико-математические науки. 2003. № 19. С. 107–110.

[18] Boussinesq M. J. Application eles Potentiels a l‘Etude l‘Equilibre et du Mouvement des Solides Elastiques. Paris: Gauthier – Villars, 1885. 721 p.

M. V. Polikarpov, V. B. Penkov

CONCENTRATED FORCE EFFECTS IN THE METHOD OF BOUNDARY STATE

Lipetsk state technical university, Lipetsk, Russia.

Abstract. This article is devoted to the development of the method of boundary states into a class of problems of mechanics of a solid deformable body, including singularities of a physical nature. Many special solutions have been formed corresponding to concentrated force actions on the surface of a smooth three-dimensional body. Each special solution is included in the bases of spaces of internal and boundary states. As examples of the effectiveness of using special solutions using the boundary state method, stress-strain states of spherical bodies are constructed under the influence of concentrated forces.

Keywords: concentrated force, elastostatics, singularity, three-dimensional problems, orb, the method of boundary state.

REFERENCES

[1] Zhuravkov M. A., Krupoderov A. V. On the dynamic action of a concentrated force in an elastic isotropic space with a spherical cavity // Conduct of the National Academy of Sciences of Belarus. Series of Physical-Technical Sciences. 2010. № 3. C. 44–50. (in Russian).

[2] Kolganov Y. A. The study of fracture mechanisms in a composition with rigid inclusion under tension by concentrated forces // Structural mechanics and structural analysis. 2009. № 5(226). C. 18–28. (in Russian).

[3] Kundrat N. M. The study of fracture mechanisms in a composition with rigid inclusion under tension by concentrated forces // Mechanics of Composite Materials and Structures. 2000. № 3. C. 333–342. (in Russian).

[4] Kundrat N. M. Delamination of hard inclusion in an elastoplastic matrix under tension by concentrated forces // Mechanics of Composite Materials and Structures. 2001. № 1. C. 107–113. (in Russian).

[5] Kundrat N. M. Ultimate balance of a composition with rigid inclusion under tension by concentrated forces // Mechanics of Composite Materials and Structures. 2000. № 1. C. 104–112. (in Russian).

[6] Lurie A. I. Spatial problems of elasticity theory. Moscow: Gostekhizdat, 1955. 492 c. (in Russian).

[7] Lurie A. I. The theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1970. 940 c. (in Russian).

[8] Martyanova A. E. The use of FEM in studying the effect of a concentrated normal force on an elastic half-plane // Bulletin of the Astrakhan State Technical University. 2006. № 2(31). C. 15–20. (in Russian).

[9] Mushelishvili N. I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1966. 708 c. (in Russian).

[10] Penkov V. B., Penkov V. V. The method of boundary state for solving linear mechanics problems. Vladivostok: Far Eastern Mathematical Journal, 2001. (in Russian).

[11] Penkov V. B., Satalkina L. V. The method of boundary states with perturbations: inhomogeneous and nonlinear problems of the theory of elasticity and thermoelasticity. Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH and Co., 2012. 108 c. (in Russian).

Polikarpov Maxim Vladimirovich
`e-mail:` messiah142@gmail.com, graduate student, research assistant, Lipetsk state technical university, Lipetsk, Russia.
Penkov Viktor Borisovich
`e-mail:` vbpenkov@mail.ru, Dr. Sci. Phys. and Math, Professor, Lipetsk state technical university, Lipetsk, Russia.

[12] Pronina Y. G. Concentrated forces and moments in an elastic half-plane with a hole // Bulletin of St. Petersburg University. Applied Mathematics. Computer science. Management processes. 2009. № 2. C. 104–114. (in Russian).

[13] Rabotnov Y. N. Mechanics of a deformable solid. Moscow: Nauka, 1979. 744 c. (in Russian).

[14] Romanov V. G. Asymptotic expansion of the solution of a system of elasticity equations with concentrated impulsive force // Siberian Journal of Industrial Mathematics. 2008. № 3(35). C. 102–118. (in Russian).

[15] Ryazantseva E. A., Penkov V. B., Satalkina L. V. The method of boundary state: concentrated forces // reports of the Interregional conference in memory of A. N. Kabelkova. Novocherkassk: South Russian State Polytechnic University, 2011. C. 126–130. (in Russian).

[16] Ryazantseva E. A. The method of boundary states in problems of the theory of elasticity with singularities of a physical and geometric nature. Dis. Ryazantseva Elena Anatolyevna. - Tula: Mechanics of a deformable solid, 2015. 101 c. (in Russian).

[17] Yardukhin A. K. An analytical solution to the problem of the interaction of an interphase crack with a peeled interphase inclusion in the presence of concentrated forces // Bulletin of Samara State Technical University. Series: Physics and Mathematics. 2003. № 19. C. 107–110. (in Russian).

[18] Boussinesq M. J. Application eles Potentiels a l'Etude l'Equilibre et du Mouvement des Solides Elastiques. Paris: Gauthier – Villars, 1885. 721 p. (in French).