Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 1 (43). С. 78–81

Н. И. Петров

РАСТЯЖЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ В ТЕОРИИ МАЛЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. В работе рассматривается растяжение бесконечно длинного цилиндрического стержня переменного сечения. Используются результаты решения линеаризированных уравнений теории малых упругопластических деформаций [1-7] в случае осесимметричной задачи. Предполагается, что в начальном состоянии имеет место простое растяжение.

Ключевые слова: растяжение, перемещение, деформация, напряжение, граничные условия, линеаризация, функция Бесселя.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.43.1.009

УДК: 539.375

Компоненты перемещения тензора деформаций и тензора напряжений в первом приближении выражаются через функции Бесселя нулевого и первого порядка [7]

$$u'_r = -\nu\left[\overline{C}I_1(\mu r) + CI_1(\overline{\mu}r)\right]\cos\nu z, \quad u'_z = \left[\overline{C}\mu I_0(\mu r) + C\overline{\mu} I_0(\overline{\mu}r)\right]\sin\nu z,$$
$$e'_r = \frac{\nu}{r}\left\{\overline{C}I_1(\mu r) + CI_1(\overline{\mu}r) - r\left[\overline{C}\mu I_0(\mu r) + C\overline{\mu}I_0(\overline{\mu}r)\right]\right\}\cos\nu z\ ,$$
$$e'_\theta = -\nu r\left[\overline{C}I_1(\mu r) + CI_1(\overline{\mu}r)\right]\cos\nu z, \quad e'_z = \nu\left[\overline{C}\mu I_0(\mu r) + C\overline{\mu}I_0(\overline{\mu}r)\right]\cos\nu z,$$
$$e'_{rz} = \frac{\nu^2}{2}\left[\left(1 - e^{i\alpha}\right)\overline{C}\mu I_1(\mu r) + \left(1 - e^{-i\alpha}\right)CI_1(\overline{\mu}r)\right]\sin\nu z,$$
$$\sigma'_r = \frac{\nu}{r}\left\{2B\left[\overline{C}I_1(\mu r) + CI_1(\overline{\mu}r)\right] - r\left[\left(3A + Be^{i\alpha}\right)\overline{C}\mu I_0(\mu r) + \right.\right.$$
$$\left.\left.\left(3A + Be^{-i\alpha}\right)C\overline{\mu}I_0(\overline{\mu}r)\right]\right\}\cos\nu z\ ,$$

$$\sigma'_\theta = \frac{\nu}{r}\left\{-2B\left[\overline{C}I_1(\mu r) + CI_1(\overline{\mu}r)\right] + \left[(2B - 3A) - Be^{i\alpha}\right]\overline{C}\mu r I_0(\mu r) + \right.$$
$$\left. + \left[(2B - 3A) - Be^{-i\alpha}\right]C\overline{\mu}rI_0(\overline{\mu}r)\right\}\cos\nu z\ ,$$

Петров Николай Ильич
`e-mail:` ni.petrov46@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры общей физики, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 23.02.2020

$$\sigma_z' = \nu B \left[\left(1 - e^{i\alpha}\right) \overline{C} \mu I_0 \left(\mu r\right) + \left(1 - e^{i\alpha}\right) C \overline{\mu} I_0 \left(\mu r\right)\right] \cos\nu z \ ,$$

$$\tau_{rz}' = \nu^2 B \left[\left(1 - e^{i\alpha}\right) \overline{C} I_1 \left(\mu r\right) + \left(1 - e^{-i\alpha}\right) C I_1 \left(\overline{\mu} r\right)\right] \sin\nu z \ . \tag{1}$$

Рассмотрим растяжение бесконечно длинного цилиндрического стержня переменного сечения. Уравнение поверхности стержня представим в виде

$$r = a + \delta f\left(z\right), \tag{2}$$

где $a = const$, δ - малый параметр ($\delta << 1$).

Цилиндр растягивается вдоль оси z, боковая поверхность свободна от напряжений. Граничные условия на поверхности запишем в виде

$$\sigma_r \cos\left(nr\right) + \tau_{rz} \cos\left(nz\right) = 0,$$

$$\tau_{rz} \cos\left(nr\right) + \sigma_z \cos\left(nz\right) = 0, \tag{3}$$

где n - нормаль к поверхности, σ_r, σ_z, τ_{rz} - компоненты напряжений в цилиндрической системе координат $r\theta z$.

Смещение точек цилиндра происходит в меридиальных плоскостях, положим

$$u_r = u_r\left(r,\ z\right), \quad u_\theta = 0, \quad u_z = u_z\left(r,\ z\right), \tag{4}$$

где u_r, u_θ, u_z - компоненты перемещения вдоль осей $r\theta z$.

Линеаризированные граничные условия (24) имеют вид

$$\sigma_r' = 0, \quad \tau_{rz}' - \sigma_z^0 \frac{df}{dz} = 0, \quad r = a \tag{5}$$

Удовлетворим выражения (22) условиями (26)

$$2B\left[\overline{C} I_1\left(\mu a\right) + C I_1\left(\overline{\mu} a\right)\right] - a\left[\left(3A + Be^{i\alpha}\right)\overline{C}\mu I_0\left(\mu a\right) + \left(3A + Be^{-i\alpha}\right) C\overline{\mu} I_0\left(\overline{\mu} a\right)\right] = 0,$$

$$2B\overline{C} I_1\left(\mu a\right) + 2BC I_1\left(\overline{\mu} a\right) - \left(3A + Be^{i\alpha}\right)\overline{C}\mu a I_0\left(\mu a\right) - \left(3A + Be^{-i\alpha}\right) C\overline{\mu} a I_0\left(\overline{\mu} a\right) = 0.$$

Из первого условия найдем

$$\overline{C} = \frac{\left(3A + Be^{-i\alpha}\right)\overline{\mu} a I_0\left(\overline{\mu} a\right) - 2B I_1\left(\overline{\mu} a\right)}{2B I_1\left(\mu a\right) - \left(3A + Be^{i\alpha}\right)\mu a I_0\left(\mu a\right)}\ C \tag{6}$$

Тогда из второго условия находим

$$f = \frac{CB\nu\cos\nu z}{\sigma_z^0}\left\{\frac{\left(1 - e^{i\alpha}\right)\left[\left(3A + Be^{-i\alpha}\right)\overline{\mu} a I_0\left(\overline{\mu} a\right) - 2B I_1\left(\overline{\mu} a\right)\right] I_1\left(\mu a\right) +}{}\right.$$

$$\left.\frac{+\left(1 - e^{-i\alpha}\right)\left[2B I_1\left(\mu a\right) - \left(3A + Be^{i\alpha}\right)\mu a I_0\left(\mu a\right)\right] I_1\left(\overline{\mu} a\right)}{2B I_1\left(\mu a\right) - \left(3A + Be^{i\alpha}\right)\mu a I_0\left(\mu a\right)}\right\} \tag{7}$$

Положив $f = A\ \cos z$, $A = const$, искомое решение определим из выражений (1), где значение коэффициента C находится из соотношения (8), а коэффициента $\overline{C}$ из соотношения (7).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ильюшин А. А. Пластичность. Москва: Гостехиздат, 1948. 376 с.
[2] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. Москва: Наука, 1978. 208 с.
[3] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. Москва: Физматлит, 2001. 704 с.
[4] Ивлев Д. Д., Михайлова М. В., Петров Н. И. О полиномиальных решениях линеаризированных уравнений теории малых упругопластических деформаций в полярных координатах // Известия ИТА ЧР. 1996-1997. № 3(4)-2(7). С. 64–69.
[5] Петров Н. И. Полиноминальное решение линеаризированных задач осесимметричного состояния в теории малых упругопластических деформаций // Известия ИТА ЧР. 1996-1997. № 3(4)-2(7). С. 70–71.
[6] Петров Н. И. Решение линеаризированных задач осесимметричного состояния в теории малых упругопластических деформаций в полиномах // Фундаментальные и прикладные исследования в области естественных и технических наук. Труды международной научно-практической конференции. Белгород: Агентство перспективных научных исследований (АПНИ), 2018.
[7] Петров Н. И. О решении линеаризированных уравнений теории малых упругопластических деформаций в случае осесимметрической задачи // Вестник ЧГПУ им. И.Я.Яковлева. 2019. № 3(14). С. 61–66.

N. I. Petrov

STRETCHING OF A CYLINDRICAL ROD OF VARIABLE CROSS-SECTION IN THE THEORY OF SMALL ELASTIC-PLASTIC

I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia

Abstract. We considers the stretching of an infinitely long cylindrical rod of variable cross-section. The results of solving the linearized equations of the theory of small elastic-plastic deformations [1-7] in the case of an axisymmetric problem are used. It is assumed that a simple stretch occurs in the initial state.
Keywords: stretching, displacement, deformation, stress, boundary conditions, linearization, Bessel function.

REFERENCES

[1] Ilyushin A. A. Plasticity. Moscow: Gostekhizdat, 1948. 376 p. (in Russian).
[2] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbation method in the theory of elastic-plastic body. Moscow: Nauka, 1978. 208 p. (in Russian).
[3] Ishlinsky A. Y., Ivlev D. D. Mathematical theory of plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2001. 704 p. (in Russian).
[4] Ivlev D. D., Mikhailova M. V., Petrov N. I. On Polynomial soluthions of the linearized equatons of the theory of small elastoplastic strains in polar coordinates // Izvestia ITA ChR. 1996-1997. no. 3 (4)- 2 (7). P. 64–69. (in Russian).
[5] Petrov N. I. Polynomial soluthions of the linearized equatons of linearized problems of an axisymmetric state in the theory of small elastoplastic deformations // Izvestia ITA ChR. 1996-1997. no. 3 (4)- 2 (7). P. 70–71. (in Russian).
[6] Petrov N. I. The solution of linearized problems of an axisymmetric state in the theory of small elastoplastic deformations in polynomials // Materials of the international scientific-practical conference "Fundamental and Applied Research in the Field of Natural and Technical Sciences". Belgorod: Agency for Advanced Research (APNI), 2018. (in Russian).
[7] Petrov N. I. On the solution of linearized equations of the theory of small elastoplastic deformations in the case of an axisymmetric problem // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2019. no. 3 (14). P. 61–66. (in Russian).

Petrov Nikolay Iluich, Candidate Sci. Phys. & Math., Docent, Department of general physics, Chuvash State University, Cheboksary, Russia.