Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 1 (43). С. 92–100

В. Н. Орлов, М. В. Гасанов

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ СЕДЬМОЙ СТЕПЕНИ В ОКРЕСТНОСТИ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация. В настоящей статье дано развитие варианта доказательства теоремы существования и единственности решения рассматриваемого класса нелинейных дифференциальных уравнений, характерной особенностью которых является наличие подвижных особых точек. Представленное доказательство позволяет построить аналитическое приближенное решение, получить его априорные оценки. Апостериорная оценка позволяет оптимизировать априорную оценку. Теоретический материал протестирован с помощью численного эксперимента.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, задача Коши, метод мажорант, окрестность подвижной особой точки, аналитическое приближенное решение, априорная оценка погрешности.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.43.1.011

УДК: 539.374

Нелинейные дифференциальные уравнения имеют широкое применение в разных областях науки и техники, а именно: исследование процесса теплопередачи в случае нелинейного уравнения при установившемся режиме [1], теория эволюционных процессов [2, 3, 4], теория устойчивости элементов строительных сооружений и анализ живучести (жизнестойкости) зданий [5, 6, 7], градостроительства [8, 9, 10, 11, 12, 13], исследование волновых процессов в колебаниях балки [14]. В частности, в работе [14] рассматривается задача о существовании и единственности решения для уравнения третьего порядка в неявном виде

$$f\left(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)\right) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{1}$$

$$u(0) = u'(0) = u'(1) = 0, \tag{2}$$

Орлов Виктор Николаевич
e-mail: OrlovVN@mgsu.ru, доктор физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.
Гасанов Магомедюсуф Владимирович
e-mail: vonasag6991@mail.ru, магистр, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Поступила 20.01.2020

где используется метод нижних и верхних решений. Неявная структура уравнения (1) предполагает как линейный, так и нелинейный случаи уравнений. В нелинейном случае метод, предлагаемый в работе [14], может быть реализован, но для этого необходимо иметь верхние и нижние решения, а это непростая задача. Сложность обуславливается тем, что в данной работе [14] не обсуждается специфика нелинейного дифференциального уравнения, связанная с наличием подвижной особой точки.

В данной работе развивается технология модификации метода мажорант, предложенная в работах [15, 16], успешно реализуемая для других классов уравнений [17].

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$Y''' = a_7(x)Y^7 + a_6(x)Y^6 + a_5(x)Y^5 + a_4(x)Y^4 + a_3(x)Y^3 + \\ + a_2(x)Y^2 + a_1(x)Y + a_0(x), \tag{3}$$

которое с помощью замены переменной

$$Y = Cu(x) - \frac{C^6 a_6(x)}{7} \tag{4}$$

приводится к нормальной форме

$$u'''(x) = u^7(x) + r(x), \tag{5}$$

при этом

$$\begin{cases} a_7(x) = \dfrac{1}{C^6}, \quad a_5(x) = \dfrac{3C^6 a_6^2(x)}{7}, \quad a_4(x) = \dfrac{5C^{12} a_6^3(x)}{49}, \\ a_3(x) = \dfrac{5C^{18} a_6^4(x)}{343}, \quad a_2(x) = \dfrac{3C^{24} a_6^5(x)}{2401}, \quad a_1(x) = \dfrac{C^{30} a_6^6(x)}{16807}, \\ r(x) = -\dfrac{C^{36} a_6^7(x)}{7^7} + \dfrac{C^6 a_6'''(x)}{7} + a_0(x). \end{cases} \tag{6}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$Y''' = Y^7 + r(x), \tag{7}$$

$$Y(x_0) = y_0, \quad Y'(x_0) = y_1, \quad Y''(x_0) = y_2. \tag{8}$$

Теорема 3. *Пусть*

1) x^* — подвижная особая точка решения задачи Коши (7)–(8);

2) $r(x) \in C^\infty$ в области $|x^* - x| < \rho_1$, где $0 < \rho_1 = \mathrm{const}$;

3) $\exists M_n : \dfrac{\left|r^{(n)}(x^*)\right|}{n!} \leqslant M_n$, $M_n = \mathrm{const}$, $n = 0, 1, 2, \dots$,

тогда существует единственное решение задачи Коши (7)–(8), представимое в виде

$$Y(x) = (x^* - x)^{-\frac{1}{2}} \sum_0^\infty C_n (x^* - x)^{\frac{n}{2}}, \tag{9}$$

в области

$$|x^* - x| < \rho_2, \tag{10}$$

где

$$\rho_2 = \min\left\{\rho_1, \frac{1}{(M+1)^4}\right\}, \quad M = \sup_n \left\{\frac{\left|r^{(n)}(x^*)\right|}{n!}\right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Доказательство. Строим решение уравнения (7) в окрестности подвижной особой точки в виде

$$Y(x) = (x^* - x)^{\rho} \sum_0^{\infty} C_n (x^* - x)^n, \quad C_0 \neq 0. \tag{11}$$

По условию теоремы $r(x)$ раскладывается в ряд

$$r(x) = \sum_0^{\infty} A_n (x^* - x)^n. \tag{12}$$

Подставив (11) и (12) в уравнение (7), получаем

$$-\sum_0^{\infty} C_n (x^* - x)^{n+\rho-3} (n+\rho)(n+\rho-1)(n+p-2) =$$

$$= (x - x^*)^{7\rho} \sum_0^{\infty} C_n^{****} (x^* - x)^n + \sum_0^{\infty} A_n (x^* - x)^n,$$

где

$$C_n^{****} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_j^{***}, \quad C_n^{***} = \sum_{i=0}^{n} C_i^* C_j^{**}, \quad C_n^{**} = \sum_{i=0}^{n} C_i^* C_j^*, \quad C_n^* = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}.$$

Из последнего соотношения следует необходимость выполнения следующих условий:

$$\begin{aligned} &1)\ n + \rho - 3 = n + 7\rho; \\ &2)\ -(n-1)(n-3)(n-5)C_n = 8\left(\mathrm{C}_n^{****} + A_{\frac{n-7}{2}}\right) \text{ при } n = 2k+1,\ k = 3, 4, ...; \\ &3)\ -(n-1)(n-3)(n-5)C_n = 8\mathrm{C}_n^{****} \text{ при } n = 2k,\ k = 0, 1, ... \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{и при } n = 1, 3, 5. \end{aligned} \tag{13}$$

Из первого равенства следует что $\rho = -1/2$. Второе и третье равенство представляют собой рекуррентные соотношения, с помощью которых можно однозначно определить все коэффициенты C_n:

$$\mathrm{C}_0 = \pm\sqrt[6]{\frac{15}{8}}, \quad C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = 0,$$

$$C_7 = -\frac{8A_0}{153}, \quad C_8 = 0, \quad C_9 = -\frac{8A_1}{297}, \quad \ldots.$$

В силу однозначности коэффициентов C_n следует единственность формального решения. Выражения коэффициентов C_n были получены с помощью математического пакета Maple.

Анализ выражения коэффициентов C_n предполагает структуру оценок для коэффициентов C_n:

$$\begin{aligned} |C_{3k}| &\leqslant \frac{8M(M+1)^{6k}}{(3k-1)(3k-3)(3k-5)} = E_{3k}, \\ |C_{3k+1}| &\leqslant \frac{8M(M+1)^{6k}}{3k(3k-2)(3k-4)} = E_{3k+1}, \\ |C_{3k+2}| &\leqslant \frac{8M(M+1)^{6k}}{(3k+1)(3k-1)(3k-3)} = E_{3k+2}, \end{aligned} \tag{14}$$

где
$$M=\sup_n\left\{\frac{\left|r^{(n)}(x^*)\right|}{n!}\right\},\quad n=0,1,2,\ldots.$$

Методом математической индукции докажем справедливость оценок (14). Ограничимся случаем оценки C_{3k}. Положим $k=2q+1$, $q=0,1,2,\ldots$. Тогда с учетом (13) и (14) имеем
$$|C_{3k+3}|=\left|\frac{8}{(3k+2)3k(3k-2)}\left(C^{****}_{3k+3}+A_{\frac{3k-4}{2}}\right)\right|=$$
$$=\left|\frac{1}{(3k+2)3k(3k-2)}\left(\sum_{i=0}^{k}C_i\left(\sum_{j=0}^{k-i}C^*_j\left(\sum_{l=0}^{k-i-j}C^*_l\left(\sum_{m=0}^{k-i-j-m}C_mC_{k-i-j-l-m}\right)\right)\right)+A_{\frac{3k-4}{2}}\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{8}{(3k+2)3k(3k-2)}\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{M(M+1)^{6i}}{(3i+2)3i^*(3i-2)}\left(\sum_{j=0}^{k-i}\frac{M(M+1)^{6j}}{(3j+2)3j^*(3j-2)}\times\right.\right.$$
$$\times\left(\sum_{l=0}^{k-i-j}\frac{M(M+1)^{6l}}{(3l+2)3l^*(3l-2)}\left(\sum_{m=0}^{k-i-j-l}\frac{M(M+1)^{6m}}{(3m+2)3m^*(3m-2)}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left.\times\ \frac{M(M+1)^{6(k-i-j-l-m)}}{(3(k-i-j-l-m)+2)3(k-i-j-l-m)^*(3(k-i-j-l-m)-2)}\right)\right)\right)+M\right)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{8M^5(M+1)^{6k}}{(3k+2)3k(3k-2)}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{(3i+2)3i^*(3i-2)}\left(\sum_{j=0}^{k-i}\frac{1}{(3j+2)3j^*(3j-2)}\times\right.$$
$$\times\left(\sum_{l=0}^{k-i-j}\frac{1}{(3l+2)3l^*(3l-2)}\left(\sum_{m=0}^{k-i-j-l}\frac{1}{(3m+2)3m^*(3m-2)}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\times\ \frac{1}{(3(k-i-j-l-m)+2)3(k-i-j-l-m)^*(3(k-i-j-l-m)-2)}\right)\right)\right)+M\leqslant$$
$$\leqslant\frac{8M^5(M+1)^{6k}}{(3k+2)3k(3k-2)}+M\leqslant\frac{8M(M+1)^{6k+6}}{(3k+2)3k(3k-2)},$$
где
$$i^*=\begin{cases}1, \text{ если } i=0,\\ i, \text{ если } i\neq 0,\end{cases}\qquad j^*=\begin{cases}1, \text{ если } j=0,\\ j, \text{ если } j\neq 0,\end{cases}\qquad l^*=\begin{cases}1, \text{ если } l=0,\\ l, \text{ если } l\neq 0,\end{cases}$$
$$m^*=\begin{cases}1, \text{ если } m=0,\\ m, \text{ если } m\neq 0,\end{cases}$$
$$(k-i-j-l-m)^*=\begin{cases}1, \text{ если } m=k-i-j-l,\\ (k-i-j-l-m), \text{ если } m\neq k-i-j-l.\end{cases}$$
Аналогичным образом убеждаемся в справедливости оценок для остальных случаев C_{3k+1} и C_{3k+2}.

Рассмотрим ряд
$$\sum_1^\infty E_n(x^*-x)^{\frac{n-1}{2}},\tag{15}$$

который в силу (14) является мажорирующим для ряда

$$\sum_1^\infty C_n(x^*-x)^{\frac{n-1}{2}}. \tag{16}$$

В силу закономерности коэффициентов рядов (15) и (16) представим ряд (15) в виде

$$\sum_1^\infty E_n(x^*-x)^{\frac{n-1}{2}} = \sum_1^\infty E_{3k}(x^*-x)^{\frac{3k-1}{2}} +$$

$$+\sum_1^\infty E_{3k+1}(x^*-x)^{\frac{3k}{2}} + \sum_1^\infty E_{3k+2}(x^*-x)^{\frac{3k+1}{2}}.$$

Для каждого ряда в правой части последнего равенства, с учетом оценок (14), по признаку Даламбера имеем область сходимости

$$|x^*-x| < \left(\frac{1}{(M+1)^6}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{(M+1)^4}. \tag{17}$$

Таким образом, получаем область сходимости правильной части ряда (11):

$$|x^*-x| < \rho_2,$$

где $\rho_2 = \min\left\{\rho_1, 1/(M+1)^4\right\}$. □

Доказанная теорема 1 позволяет построить аналитическое приближенное решение в виде

$$Y_N(x) = (x^*-x)^{-\frac{1}{2}} \sum_0^N C_n(x^*-x)^{\frac{n}{2}}. \tag{18}$$

Теорема 4. *Пусть выполняются пункты 2 и 3 теоремы 1 и x^* является подвижной особой точкой решения задачи (7)–(8), тогда для аналитического приближенного решения (18) в области*

$$|x^*-x| < \rho_2, \tag{19}$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta Y_N(x) = |Y(x) - Y_N(x)| = \Delta, \tag{20}$$

где

$$\Delta \leqslant \frac{8M(M+1)^{2(N+1)}}{1-(M+1)^6\,|x^*-x|^{\frac{3}{2}}}\,|x^*-x|^{\frac{N}{2}} \times$$

$$\times\left(\frac{1}{N(N-2)(N-4)} + \frac{|x^*-x|^{\frac{1}{2}}}{(N+1)(N-1)(N-3)} + \frac{|x^*-x|}{(N+2)N(N-2)}\right)$$

в случае $N+1=3k$,

$$\Delta \leqslant \frac{8M(M+1)^{2N}}{1-(M+1)^6\,|x^*-x|^{\frac{3}{2}}}\,|x^*-x|^{\frac{N}{2}} \times$$

$$\times\left(\frac{1}{N(N-2)(N-4)} + \frac{|x^*-x|^{\frac{1}{2}}}{(N+1)(N-1)(N-3)} + \frac{|x^*-x|}{(N+2)N(N-2)}\right)$$

для варианта $N+1=3k+1$, *и*

$$\Delta \leqslant \frac{8M(M+1)^{2(N-1)}}{1-(M+1)^6\left|x^*-x\right|^{\frac{3}{2}}}\left|x^*-x\right|^{\frac{N}{2}} \times$$

$$\times\left(\frac{1}{N(N-2)(N-4)}+\frac{\left|x^*-x\right|^{\frac{1}{2}}}{(N+1)(N-1)(N-3)}+\frac{\left|x^*-x\right|}{(N+2)N(N-2)}\right)$$

для $N+1=3k+2$, *где*

$$\rho_2=\min\left\{\rho_1,\frac{1}{(M+1)^4}\right\},\quad M=\sup_n\left\{\frac{\left|r^{(n)}(x^*)\right|}{n!}\right\},\quad n=0,1,2,\ldots,\quad N>5.$$

Доказательство. Докажем теорему с учетом случая $N+1=3k$. Распишем $\Delta Y_N(x)$:

$$\Delta Y_N(x)=|Y(x)-Y_N(x)|=$$

$$=\left|\sum_0^\infty C_n(x^*-x)^{\frac{n-1}{2}}-\sum_0^N C_n(x^*-x)^{\frac{n-1}{2}}\right|=\left|\sum_{N+1}^\infty C_n(x^*-x)^{\frac{n-1}{2}}\right|.$$

Учитывая закономерность в оценках коэффициентов C_n, из теоремы 1 получаем:

$$\Delta Y_N(x)=\left|\sum_{N+1}^\infty C_n(x^*-x)^{\frac{n-1}{2}}\right|\leqslant\sum_{N+1}^\infty |C_n|\cdot\left|x^*-x\right|^{\frac{n-1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{N+1}^\infty E_{3k}\left|x^*-x\right|^{\frac{3k-1}{2}}+\sum_{N+1}^\infty E_{3k+1}\left|x^*-x\right|^{\frac{3k}{2}}+\sum_{N+1}^\infty E_{3k+2}\left|x^*-x\right|^{\frac{3k+1}{2}}=$$

$$=\sum_{N+1}^\infty\frac{8M(M+1)^{6k}}{(3k-1)(3k-3)(3k-5)}\left|x^*-x\right|^{\frac{3k-1}{2}}+$$

$$+\sum_{N+1}^\infty\frac{8M(M+1)^{6k}}{3k(3k-2)(3k-4)}\left|x^*-x\right|^{\frac{3k}{2}}+\sum_{N+1}^\infty\frac{8M(M+1)^{6k}}{(3k+1)(3k-1)(3k-3)}\left|x^*-x\right|^{\frac{3k+1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{8M(M+1)^{6k}}{1-(M+1)^6\left|x^*-x\right|^{\frac{3}{2}}}\left|x^*-x\right|^{\frac{3k-1}{2}}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{(3k-1)(3k-3)(3k-5)}+\frac{\left|x^*-x\right|^{\frac{1}{2}}}{3k(3k-2)(3k-4)}+\frac{\left|x^*-x\right|}{(3k+1)(3k-1)(3k-3)}\right)=$$

$$=\frac{8M(M+1)^{2(N+1)}}{1-(M+1)^6\left|x^*-x\right|^{\frac{3}{2}}}\left|x^*-x\right|^{\frac{N}{2}}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{N(N-2)(N-4)}+\frac{\left|x^*-x\right|^{\frac{1}{2}}}{(N+1)(N-1)(N-3)}+\frac{\left|x^*-x\right|}{(N+2)N(N-2)}\right).$$

Аналогичным образом получаем выражения для Δ в случаях $N+1=3k+1$, $N+1=3k+2$. Полученные оценки в соответствии с условиями теоремы справедливы в области (19). □

Пример. Рассмотрим задачу Коши (7)–(8), где $r(x)\equiv 0$, $Y(0)=1$, $Y'(0)=1$, $Y''(0)=1$, $x^*=0{,}9295$. Результаты расчетов для задачи Коши (7)–(8) представлены в табл. 1, в которой $Y_8(x_1)$ — аналитически приближенное решение (17); Δ_1 — априорная оценка; Δ_2 — апостериорная оценка.

Таблица 1. Числовые характеристики аналитически приближенного решения

x_1	$Y_8(x_1)$	Δ_1	Δ_2
0,9	6,457	0,04	0,007

Для $\Delta_2 = 0{,}007$ по теореме 2 определяем $N = 15$. Слагаемые с 9 по 15 в общей сумме не превышают требуемой точности $\varepsilon = 0{,}007$, следовательно, в структуре аналитически приближенного решения можно ограничиться $N = 8$, при котором решение $Y_8(x_1)$ будет имееть погрешность $\varepsilon = 0{,}007$.

Вывод. В работе доказана теорема существования и единственности решения одного класса нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки, получены оценки для коэффициентов разложения в ряд. На основании доказанной теоремы построено аналитическое приближенное решение в окрестности подвижной особой точки, получена априорная оценка погрешности. Применение апостериорной оценки позволяет оптимизировать априорную оценку. Результаты протестированы с помощью численного эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Axford R. A. Differential equations invariant urber two-parameter Lie groups with applications to non-linear diffusion // Los Alamos Report. 1970. (LA-4514, UC-34).

[2] Airault H. Rational Solutions of Painleve Equations // Studies in applied mathematics. 1979. Vol. 61, no. 1 (July). P. 31–53. DOI: https://doi.org/10.1002/sapm197961131.

[3] Ablowitz M. I. Exact linearization of a Painleve transcendent // Phys. Rev. Lett. 1977. Vol. 38, no. 20. P. 1103–1106. DOI: 10.1103/PhysRevLett.38.1103.

[4] Грамак В. И. О решении второго уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 5. С. 753–763.

[5] Kovalchuk O. A. Simulation of the State of the Rod Elements of the Building Construction // Procedia Engineering. 2016. Vol. 153, no. 2. P. 304–309. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.08.120.

[6] Ковальчук О. А. Устойчивость стержневых элементов строительных конструкций // Журнал ПГС. 2014. № 11. С. 53–54.

[7] Ковальчук О. А. О расчете зданий с ядрами жесткости // Естественные и технические науки. 2015. № 3(81). С. 238–240.

[8] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Research of one class of nonlinear differential equations of third order for mathematical modelling the complex structures (WoS) // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. Vol. 365. DOI: 10.1088/1757-899X/365/4/042045.

[9] Research into a Class of Third-Order Nonlinear Differential Equations in the Domain of Analyticity (Scopus) / V. N. Orlov, O. A. Kovalchuk, E. P. Linnik et al. // Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N. E. Baumana, Estestv. Nauki [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.]. 2018. no. 4. P. 24–35. (in Russian). DOI: 10.18698/1812-3368-2018-4-24-35.

[10] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points (WoS) // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2018. Vol. 456. 012122 IOP Publishing. DOI: 10.1088/1757-899X/456/1/012122.

[11] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical problems of reliability assurance the building constructions // E3S Web Conf. 2019. Vol. 97. 03031, XXII International Scientific Conference “Construction the Formation of Living Environment” (FORM-2019). DOI: https://doi.org/ 10.1051/e3sconf/20199703031.

[12] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction (Scopus) // Modelling and Methods of Structural

Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics. 2020. 012127 IOP Publishing. DOI: 10.1088/1742-6596/1425/1/012127.

[13] Orlov V. N., Chichurin A. On the theory of constructing a numerical-analytical solution of a cantilever beam bend nonlinear differential equation of the first order (Scopus) // Modelling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics. 2020. 012129 IOP Publishing. DOI: 10.1088/1742-6596/1425/1/012129.

[14] Feng Y. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // Computers and Mathematics with Applications. 2008. no. 56. P. 2507–2514. DOI: 10.1016/j.camwa.2008.05.021.

[15] Орлов В. Н. Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля. Москва: МПГУ, 2013. 174 с.

[16] Орлов В. Н. Исследование приближеного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2009. № 4(35). С. 23–32.

[17] Орлов В. Н., Леонтьева Т. Ю. О расширении области для аналитического приближенного решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области // Вестник Самарского гос. техн. университета. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. С. 23–32. DOI: 10.14498/vsgtu1727.

V. N. Orlov, M. V. Gasanov

EXISTENCE THEOREM FOR A SOLUTION OF A CLASS OF THIRD ORDER NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH POLYNOMIAL RIGHT HAND SIDE OF THE SEVENTH DEGREE IN A VICINITY OF A MOVABLE SINGULAR POINT

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract. This article gives the development of a version of the proof of the existence and uniqueness theorem for the solution of the class of nonlinear differential equations under consideration whose characteristic feature is the presence of movable singular points. The presented proof allows us to construct an analytical approximate solution and obtain its a priori estimates. A posteriori estimation allows to optimize a priori estimation. The theoretical material is tested using a numerical experiment.

Keywords: nonlinear differential equations, method Koshe, majorant method, moving singular point, analytically approximate solution, a priori error estimate.

REFERENCES

[1] Axford R. A. Differential equations invariant urber two-parameter Lie groups with applications to non-linear diffusion // Los Alamos Report. 1970. (LA-4514, UC-34).

[2] Airault H. Rational Solutions of Painleve Equations // Studies in applied mathematics. 1979. Vol. 61, no. 1 (July). P. 31–53. DOI: https://doi.org/10.1002/sapm197961131.

[3] Ablowitz M. I. Exact linearization of a Painleve transcendent // Phys. Rev. Lett. 1977. Vol. 38, no. 20. P. 1103–1106. DOI: 10.1103/PhysRevLett.38.1103.

[4] Gromak V. I. On the solution of the second Painlevé equation // Differ. Equations. 1982. Vol. 18, no. 5. P. 753–763. (In Russian).

Viktor Nikolaevich Orlov, Dr. Phys. & Math. Sci., Associate Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

Gasanov Magomedyusuf Vladimirovich, magister, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

[5] Kovalchuk O. A. Simulation of the State of the Rod Elements of the Building Construction // Procedia Engineering. 2016. Vol. 153, no. 2. P. 304–309. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.08.120.
[6] Kovalchuk O. A. Stability of rod elements of building structures // Bulletin of the PGS. 2014. no. 11. (In Russian).
[7] Kovalchuk O. A. On the calculation of buildings with rigid cores // Natural and technical Sciences. 2015. no. 3(81). P. 238–240. (In Russian).
[8] Orlov V. N. Method of approximate solution of the first and second differential equations of Penlevé and Abel. Moscow: MPSU, 2013. 174 p. (In Russian).
[9] Orlov V. N. Investigation of an approximate solution of the Abel differential equation in the vicinity of a moving singular point // Bulletin of the Bauman Moscow state technical University. Series: Natural Sciences. 2009. no. 4(35). P. 23–32. (In Russian).
[10] Orlov V. N., Leontieva T. Y. On the expansion of the domain for an analytical approximate solution of a class of second-order nonlinear differential equations in the complex domain // Bulletin of the Samara State. tech. University. Ser. Phys.-mat. science. 2020. Vol. 24. P. 23–32. (In Russian). DOI: 10.14498/vsgtu1727.
[11] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Research of one class of nonlinear differential equations of third order for mathematical modelling the complex structures (WoS) // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. Vol. 365. DOI: 10.1088/1757-899X/365/4/042045.
[12] Research into a Class of Third-Order Nonlinear Differential Equations in the Domain of Analyticity (Scopus) / V. N. Orlov, O. A. Kovalchuk, E. P. Linnik et al. // Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N. E. Baumana, Estestv. Nauki [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.]. 2018. no. 4. P. 24–35. (in Russian). DOI: 10.18698/1812-3368-2018-4-24-35.
[13] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points (WoS) // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2018. Vol. 456. 012122 IOP Publishing. DOI: 10.1088/1757-899X/456/1/012122.
[14] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical problems of reliability assurance the building constructions // E3S Web Conf. 2019. Vol. 97. 03031, XXII International Scientific Conference "Construction the Formation of Living Environment" (FORM-2019). DOI: https://doi.org/ 10.1051/e3sconf/20199703031.
[15] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction (Scopus) // Modelling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics. 2020. 012127 IOP Publishing. DOI: 10.1088/1742-6596/1425/1/012127.
[16] Orlov V. N., Chichurin A. On the theory of constructing a numerical-analytical solution of a cantilever beam bend nonlinear differential equation of the first order (Scopus) // Modelling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics. 2020. 012129 IOP Publishing. DOI: 10.1088/1742-6596/1425/1/012129.
[17] Feng Y. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // Computers and Mathematics with Applications. 2008. no. 56. P. 2507–2514. DOI: 10.1016/j.camwa.2008.05.021.