

Р. И. Непершин

## ПЛАСТИЧЕСКОЕ СДАВЛИВАНИЕ ЦИЛИНДРА ПЛОСКИМИ ШТАМПАМИ

*Московский государственный технологический университет “СТАНКИН”,  
г. Москва, Россия*

**Аннотация.** Приведено численное моделирование пластического сдавливания цилиндра плоскими штампами по нормали к его оси на основе теории плоской деформации жестко-пластического тела. Рассматриваются начальная пластическая деформация с выдавливанием материала на свободную поверхность цилиндра, переходящая в пластическое деформирование высокой заготовки и пластического слоя с конечным отношением длины контакта к толщине. Используются линии скольжения и скорости пластического течения по Прандтлю при изменении формы деформируемого сечения цилиндра с учетом контактного трения при сдавливании пластического слоя. Моделирование представляет практический интерес для оценки предельной нагрузки при контактной деформации цилиндра плоскими штампами и деформировании заготовки при ковке плоскими бойками.

**Ключевые слова:** сдавливание цилиндра, плоский штамп, идеальная пластичность, плоская деформация, линии скольжения, контактное давление, скорости течения, контактное трение, предельная нагрузка, ковка плоскими бойками.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.43.1.012

УДК: 539.374

**Введение.** Анализ пластического деформирования цилиндра при сдавливании плоскими штампами по нормали к его оси при плоской деформации представляет практический интерес для оценки предельной нагрузки при контактном пластическом течении и для моделирования формоизменения цилиндрической заготовки при ковке плоскими бойками [1, 2, 3]. В работах о давлении плоского штампа на срез выпуклой заготовки при плоской деформации [1, 2] рассчитывались линии скольжения и напряженное состояние решением задачи Коши от выпуклого криволинейного контура, задачи Гурса с вырожденной сингулярной точкой и задачи смешанного типа на границе штампа без рассмотрения поля скоростей. Поле скоростей с кинематическими граничными условиями на границе штампа и на жесткопластической границе показывает отрицательные значения диссипативной функции пластического течения

---

© Непершин Р. И., 2020

*Непершин Ростислав Иванович*

**e-mail:** nepershin\_ri@ Rambler.ru, доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет “СТАНКИН”, г. Москва, Россия.

Поступила 01.02.2020

в области задачи Коши с выпуклой свободной границей и в области смешанной задачи на границе контакта пластической области со штампом. Решение задачи с выпуклой пластической областью, удовлетворяющее условию пластичности и граничным условиям для напряжений, является статически возможным, и на основании экстремальных теорем идеальной пластичности [4] приводит к нижней оценке предельной нагрузки.

В задачах о вдавлении жесткого клина и выпуклого штампа с выпуклой границей полупространства [5, 6, 7] сегмент свободной жесткой области ограничен прямолинейной свободной границей задачи Коши, что приводит к полному решению для напряжений и скоростей при неотрицательной диссипативной функции в пластической области. Аналогичная ситуация имеет место при сдавливании заготовки плоскими бойками с конечным отношением длины контакта к толщине, при свободных выдавливаемых концах с криволинейной границей, которые связаны с прямолинейной боковой границей пластической области [8], что приводит к полному решению для напряжений и скоростей при плоской деформации.

В настоящей работе представлено численное моделирование трех стадий сдавливания жесткопластического цилиндра плоскими штампами при плоской деформации.

На первой стадии рассматривается нестационарный процесс вдавливания плоского штампа с образованием сегмента свободной жесткой области с криволинейной границей над прямолинейной границей пластической области. Граница свободной жесткой области вычисляется численным методом с использованием поля линий скольжения и годографа скоростей по Прандтлю для полупространства с криволинейной границей [5, 6, 7].

Вторая стадия сдавливания моделируется пластическим течением с отношением толщины плоского участка заготовки к длине границы контакта больше единицы с использованием линий скольжения и годографа скоростей по Прандтлю. Начало второй стадии определяется равенством контактного давления на второй стадии с давлением в конце первой стадии, после которого давление на штамп снижается по сравнению с первой стадией. Пластическая область возникает в центральной части заготовки между штампами при горизонтальном смещении жестких зон без изменения формы внешней границы.

На третьей стадии происходит пластическое течение с уменьшением толщины заготовки и увеличением длины границы контакта и давления на штампы, которое моделируется линиями скольжения и годографом скоростей при конечном отношении длины границы контакта к толщине заготовки больше единицы [2, 3, 8].

Линии скольжения  $\xi$ ,  $\eta$  и скорости  $V_\xi$ ,  $V_\eta$  на второй и третьей стадиях выполнены с использованием численных процедур [9] решения дифференциальных уравнений плоской деформации жесткопластического тела [10]

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi \text{ для } \xi, \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \varphi \text{ для } \eta \quad (1)$$

с дифференциальными соотношениями Генки и Гейрингер

$$d\sigma - d\varphi = 0 \text{ вдоль } \xi, \quad d\sigma + d\varphi = 0 \text{ вдоль } \eta, \quad (2)$$

$$dV_\xi - V_\eta d\varphi = 0 \text{ вдоль } \xi, \quad dV_\eta + V_\xi d\varphi = 0 \text{ вдоль } \eta, \quad (3)$$

где  $\varphi$  — угол наклона касательной к линии скольжения  $\xi$  с осью  $x$ ;  $\sigma$  — безразмерное среднее напряжение, отнесенное к удвоенной пластической постоянной  $2k = 1$ . Напряжения и скорости пластического течения в декартовых координатах при известных

значениях  $\sigma$ ,  $\varphi$ ,  $V_\xi$ ,  $V_\eta$  определяются формулами

$$\sigma_x = \sigma + \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \sigma_y = \sigma - \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2} \cos 2\varphi, \quad (4)$$

$$V_x = V_\xi \cos \varphi - V_\eta \sin \varphi, \quad V_y = V_\xi \sin \varphi + V_\eta \cos \varphi. \quad (5)$$

Формулы (5) используются для отображения сетки линий скольжения на плоскость годографа скоростей  $V_x$ ,  $V_y$ .

Приводимые ниже расчеты деформируемой формы сечения цилиндра, линий скольжения и годографов скоростей автоматизированы программами на ФОРТРАНе с графическими процедурами вывода результатов расчета на экран монитора [11].

**Первая стадия деформирования цилиндра.** На рис. 1 показаны линии скольжения и годограф скоростей в пластической области по Прандтлю на первой стадии деформирования цилиндра плоскими штампами. Радиус цилиндра принимаем за единицу длины. Вследствие симметрии рассматриваем сечение цилиндра в первом квадранте декартовых координат  $x$ ,  $y$  с центром  $O$ .

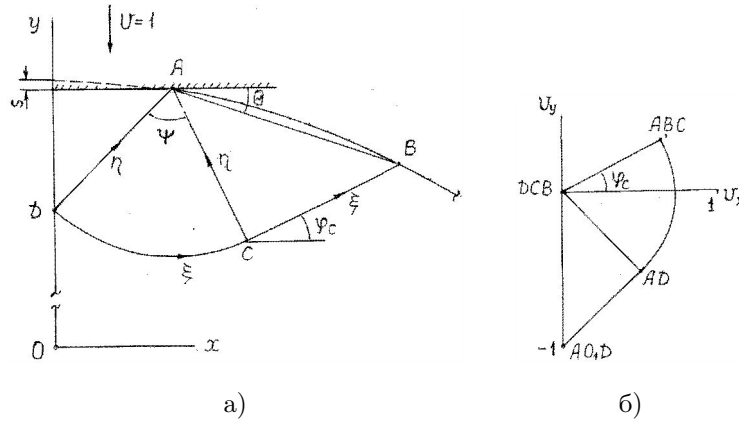


Рис. 1. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б) на первой стадии пластического сдавливания цилиндра

Уравнение недеформированной круговой границы цилиндра представим в параметрической форме:

$$x = \sin \alpha, \quad y = \cos \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad (6)$$

где  $\alpha$  — угол между нормалью в точке границы сечения и осью  $y$ .

При перемещении  $s$  штампа относительно начальной точки контакта при  $\alpha = 0$  образуется граница контакта с полудлиной  $a$  и происходит выдавливание материала с криволинейной внешней границей  $AB$  при расширении пластической области  $ABCD$  по Прандтлю (рис. 1а). На границе контакта образуется жесткая область  $ADO_1$ , перемещающаяся со скоростью штампа  $V_y = -1$ . Прямолинейная граница  $AB$  длиной  $2a$  с углом наклона  $\theta$  определяет однородное напряженное состояние  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = -1$ ,  $\sigma = -0,5$  в области  $ABC$ . Угол  $\psi$  верха  $\eta$  линий скольжения в точке  $A$  и угол  $\varphi$  наклона  $\xi$  линий скольжения в области  $ABC$  определяются формулами

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad \varphi = \frac{\pi}{4} - \theta. \quad (7)$$

Давление  $q_1$  на штамп находим из первого уравнения (2) для  $\xi$  линии скольжения  $CD$  при  $\varphi = \pi/4 - \theta$ ,  $\sigma = -0,5$  в точке  $C$  и из второго уравнения (4) находим  $q_1 = -\sigma y$ :

$$q_1 = 1 + \frac{\pi}{2} - \theta. \quad (8)$$

Годограф скоростей (рис. 1б) определяется двумя разрывами скорости  $[V] = 1/\sqrt{2}$  в точке  $D$  вдоль  $\eta$  и  $\xi$  линий скольжения и ортогональным отображением на плоскости годографа круговой линии скольжения  $CD$  на рис. 1а дугой окружности с радиусом  $1/\sqrt{2}$  с центральным углом  $\psi$ . Область  $ABC$  вместе с контуром  $AB$  свободного жесткого сегмента скользит вдоль жесткопластической границы  $BC$  со скоростью  $1/\sqrt{2}$  с углом наклона  $\varphi = \pi/4 - \theta$ :

$$V_x = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)/\sqrt{2}, \quad V_y = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)/\sqrt{2}. \quad (9)$$

Скорости (9) определяют смещение криволинейного контура  $AB$  при вдавливании штампа.

Полудлина границы контакта  $a$  при перемещении штампа  $s$  определяется точкой  $A$  пересечения прямой  $y = 1 - s$  с контуром  $AB$ . Координаты точки  $B$  жесткой области цилиндра определяются уравнениями (6) и связаны с  $s$ ,  $a$  и углом  $\theta$  уравнениями

$$a(1 + 2 \cos \theta) = \sin \alpha, \quad H - 2a \sin \theta = \cos \alpha, \quad H = 1 - s. \quad (10)$$

Исключение  $\theta$  из (10) приводит к квадратному уравнению для  $\sin \alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{aH}{a^2 + H^2} \left[ c + \sqrt{1 + \frac{H^2}{a^2}(1 - c^2)} \right], \quad c = \frac{1 + H^2 - 3a^2}{2H}. \quad (11)$$

При известных значениях  $s$  и  $a$  из уравнения (11) находим угол  $\alpha$ , определяющий координаты точки  $B$ , из уравнений (10) находим угол  $\theta$ , по уравнениям (8) и (9) находим давление  $q_1$  и смещения координат точек контура  $AB$  при малом перемещении штампа  $\Delta s$ :

$$\Delta x = \Delta s V_x, \quad \Delta y = \Delta s V_y. \quad (12)$$

При  $s \rightarrow 0$  пластическая область стягивается в точку контакта  $y = 1$ ,  $x = 0$  при  $a, \alpha, \theta \rightarrow 0$  и  $q_1 \rightarrow 1 + \pi/2$  — давление плоского штампа Прандтля на пластическое полупространство с горизонтальной границей.

В модели Прандтля пластическая область не зависит от контактного трения вследствие отсутствия пластического скольжения на границе штампа. Для пластического полупространства с горизонтальной границей возможна модель Хилла, при пластическом скольжении по границе идеально гладкого штампа с контактным давлением  $1 + \pi/2$ . В этой модели длина свободной границы  $AB$  равна полудлине штампа  $a$ . Для гладкого штампа по Хиллу в случае круговой границы полупространства можно вычислить угол наклона  $\theta$  границы  $AB$ , который будет меньше угла  $\theta$  для штампа Прандтля и приводит к большей величине контактного давления  $q_1$ . Поэтому в настоящей работе используется модель Прандтля, приводящая к меньшей предельной нагрузке при сдавливании цилиндра.

Криволинейный контур  $AB$ , параметры пластической области  $a$ ,  $\alpha$ ,  $\theta$  и давление  $q_1$  вычисляем по следующему алгоритму:

1) начальную пластическую область при вдавливании штампа  $s_0 \ll 1$  определяем для круговой границы  $AB$  вследствие малой площади, выдавливаемой через свободную границу цилиндра;

2) начальную полудлину границы контакта штампа определяем точкой пересечения с круговой границей  $a_0 = \alpha_0$  при заданном значении  $\alpha_0 \ll 1$  и  $s_0 = 1 - \cos \alpha_0$ ;

3) находим угол  $a = 3\alpha_0$ , определяющий точку  $B$ , из уравнения (11) при  $\sin a = a$  и  $H = 1$ ;

4) находим угол  $\theta = 2\alpha_0$  из второго уравнения (10) при  $\cos \theta = \cos 3\alpha_0$  и  $\sin \theta = \theta$ ;

5) находим значение  $q_1 = 1 + \pi/2 - 2\alpha_0$  из уравнения (8);

6) задаем приращение перемещения штампа  $\Delta s = k s_0$ ,  $k < 1$ ;

7) вычисляем перемещение точки  $A$  и полудлину границы контакта  $a$  при  $s = s_0 + \Delta s$  по первым уравнениям (9) и (12):

$$a = a_0 + \Delta s \cos \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) / \sqrt{2};$$

8) вычисляем координаты первой смещенной точки  $B$  по уравнениям (9) и (12):

$$x_1 = \sin a + \Delta s \cos \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) / \sqrt{2}, \quad y_1 = \cos \alpha + \Delta s \sin \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) / \sqrt{2};$$

9) вычисляем новый угол  $\alpha$  по уравнению (11) для новых значений  $a$ ,  $H = 1 - s$  и координаты  $x$ ,  $y$  точки  $B$  на недеформированной границе цилиндра;

10) из второго уравнения (10) находим угол  $\theta$  и из уравнения (8) — давление  $q_1$  на границе контакта с полудлиной  $a$ .

В результате вычислений при первом смещении  $\Delta s$  границы штампа от начального значения  $s_0$  получаем три точки криволинейного контура  $AB$  и расширение пластической области с увеличенной полудлиной контакта  $a$ . При дальнейшем увеличении  $s$  с шагом  $\Delta s$  от предыдущего значения  $s_0$  полудлина контакта  $a$  определяется координатой  $x_A$  точки пересечения линии  $y_A = H = 1 - (s_0 + \Delta s)$  с контуром  $AB$ , которая вычисляется линейной интерполяцией между точками контура  $i$  и  $i + 1$  и смещением по оси  $x$ :

$$x_A = x_i + \frac{(x_{i+1} - x_i)(H - y_i)}{y_{i+1} - y_i} \quad \text{при} \quad y_{i+1} \leq H \leq y_i, \quad (13)$$

$$a = x_A + \Delta s \cos \left( \frac{\pi}{4} - \theta_0 \right) / \sqrt{2} \quad (14)$$

с использованием известного угла  $\theta_0$  для линий скольжения при перемещении  $s_0$ . Затем выполняются расчеты значений  $\alpha$ ,  $\theta$ ,  $q_1$  для смещенной границы контакта по значениям  $a$  и  $H$ ; вычисляются координаты смещенных точек контура  $AB$ :

$$x_i = x_{i0} + \Delta s \cos \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) / \sqrt{2}, \quad y_i = y_{i0} + \Delta s \sin \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) / \sqrt{2}, \quad i = 2, 3, \dots, N, \quad (15)$$

включая точку  $B$  с номером  $N$ . Расчеты криволинейного контура  $AB$ , деформированной формы сечения цилиндра в контактной области и давления  $q_1$  выполняются до перехода ко второй стадии сдавливания цилиндра, определяемого неравенством  $q_1 \leq q_2$ , где  $q_2$  — давление на штамп на второй стадии деформирования цилиндра по Прандтлю, снижающееся при уменьшении отношения  $H/a$ .

В табл. 1 приведены координаты точек криволинейного контура  $AB$  для начальной полудлины границы контакта  $a = 0,05$  при  $s_0 = 1,25 \cdot 10^{-3}$  при конечных значениях, вычисленные с шагом  $\Delta s = 0,625 \cdot 10^{-3}$ . На рис. 2 сплошной линией показана деформированная форма сечения в конце первой стадии сдавливания цилиндра с плоской границей контакта и криволинейным контуром  $AB$ . Начальный круговой контур сечения цилиндра показан штриховой линией. По условию пластической несжимаемости

Таблица 1. Контур  $AB$  на первой стадии сдвливания цилиндра:  $s = 8,748 \cdot 10^{-3}$ ,  $a = 0,155$ ,  $H = 0,991$

$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$
0,188	0,986	0,266	0,966	0,357	0,935
0,206	0,982	0,287	0,960	0,384	0,924
0,226	0,977	0,309	0,953	0,416	0,910
0,245	0,972	0,332	0,945	0,449	0,893

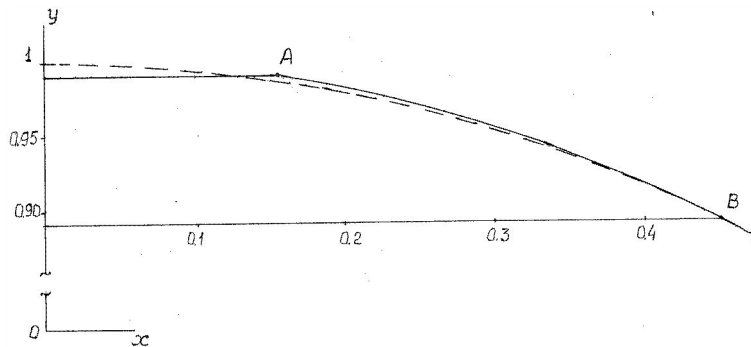


Рис. 2. Деформированная (сплошная линия) и начальная (пунктир) формы сечения при сдвливании цилиндра в конце первой стадии:  $s = 8,75 \cdot 10^{-3}$ ,  $a = 0,155$

площадь сегмента круга над границей контакта равна площади, ограниченной контуром круга и смещенного контура  $AB$  с отрезком границы контакта от пересечения с контуром круга до точки  $A$ . Смещенная площадь растянута на большой дуге начальной окружности с быстрым снижением расстояния между контуром  $AB$  и контуром круга при приближении к точке  $B$  на границе с жесткой областью. Касательная к контуру  $AB$  практически совпадает с касательной к недеформированному кругу в точке  $B$ .

В табл. 2 и на рис. 3 показано расчетное смещение контура  $AB$  по нормали к круговому контуру цилиндра в зависимости от угла  $\alpha$

$$f(\alpha) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \quad (16)$$

включая отрезок границы контакта от точки пересечения с круговым контуром цилиндра до точки  $A$  (рис. 1а).

В табл. 3 приведены расчетные значения полудлины границы контакта  $a$ , отношения  $H/a$ , контактного давления  $q_1$  и погонной силы  $P = 2aq_1$  на первой стадии сдвливания цилиндра в зависимости от перемещения штампов  $s$ . На рис. 4 показаны графики функций  $q_1(s)$  и  $P(s)$ . Давление  $q_1$  снижается до 2,25 при  $s = 8,75 \cdot 10^{-3}$  и  $H/a = 6,393$ . При дальнейшем увеличении  $s$  и снижении отношения  $H/a$  пластическая область образуется в средней части сечения между плоскими штампами при давлении  $q_2 < q_1$  и переходе ко второй стадии сдвливания цилиндра.

**Вторая стадия деформирования цилиндра.** На второй стадии происходит пластическая деформация цилиндра между штампами при  $H/a > 1$  при снижении контактного давления по сравнению с первой стадией. Пластическое течение на второй

Таблица 2. Смещение контура  $AB$  по нормали к окружности на первой стадии сдавливания цилиндра

$f \times 10^{-3}$	$\alpha$	$f \times 10^{-3}$	$\alpha$	$f \times 10^{-3}$	$\alpha$
0,000	0,132	3,332	0,188	1,627	0,316
0,620	0,137	3,065	0,207	1,318	0,338
1,260	0,142	2,792	0,227	1,001	0,365
1,921	0,146	2,511	0,247	0,677	0,394
2,603	0,151	2,223	0,268	0,344	0,428
3,306	0,155	1,928	0,290	0,000	0,466

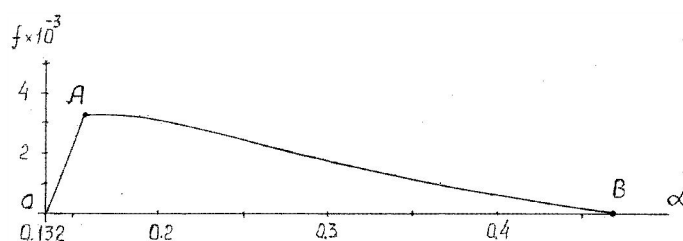


Рис. 3. Смещение контура свободной границы  $AB$  по нормали к поверхности цилиндра в зависимости от угла  $\alpha$  в конце первой стадии сдавливания цилиндра

Таблица 3. Зависимости  $a$ ,  $H/a$ ,  $q_1$  и  $P$  от  $s$  на первой стадии сдавливания цилиндра

$s \times 10^{-3}$	$a$	$H/a$	$q_1$	$P$
0,000	0,000	$\infty$	2,571	0,000
0,450	0,030	33,3	2,511	0,150
0,900	0,042	23,4	2,485	0,212
1,250	0,050	20,0	2,471	0,247
1,875	0,062	16,2	2,447	0,312
2,500	0,068	14,7	2,436	0,331
3,124	0,075	13,4	2,424	0,362
3,749	0,081	12,2	2,410	0,393
4,374	0,089	11,2	2,396	0,414
5,000	0,096	10,4	2,380	0,457
5,624	0,104	9,58	2,364	0,491
6,249	0,112	8,87	2,346	0,526
6,874	0,121	8,21	2,326	0,563
7,498	0,131	7,58	2,304	0,603
8,123	0,142	6,97	2,278	0,649
8,748	0,155	6,39	2,250	0,698

стадии определяется полем линий скольжения Прандтля без скольжения материала в треугольной области однородного напряженного состояния на границах контакта со штампами. Линии скольжения определяются центрированным веером с углом  $\psi$  в сингулярной точке  $A$  на границе контакта и условием  $\varphi = -\pi/4$  на линии симметрии с отношением  $H/a$ , зависящим от  $\psi$ .

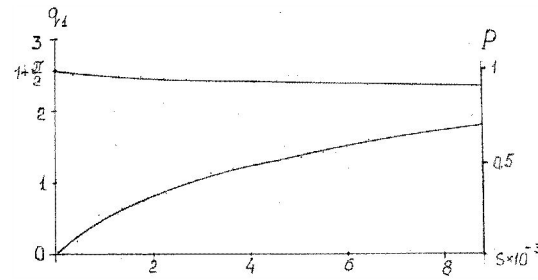


Рис. 4. Зависимости контактного давления  $q_1$  и погонной силы  $P$  от перемещения штампа  $s$  на первой стадии сдвливания цилиндра

На рис. 5а показаны линии скольжения в координатах  $x_1, y_1$  с началом в центре контакта с верхним штампом и полудлиной границы контакта  $a$ , принятой за единицу, для  $\psi = 0,5236$  и  $H = 2,441$ . Статическое равновесие жесткой области при равенстве нулю горизонтальной силы определяется интегрированием напряжений по  $\eta$  линии скольжения  $O-A$ :

$$\int_0^A \left( \sigma \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \right) ds_\eta = 0. \quad (17)$$

Подстановка в (17)  $\sigma = \sigma_0 - (\varphi - \pi/4)$  и соотношений  $ds_\eta \cos \varphi = dy$ ,  $ds_\eta \sin \varphi = -dx$  вдоль  $\eta$  линии скольжения приводит к уравнению для среднего напряжения  $\sigma_0$  в

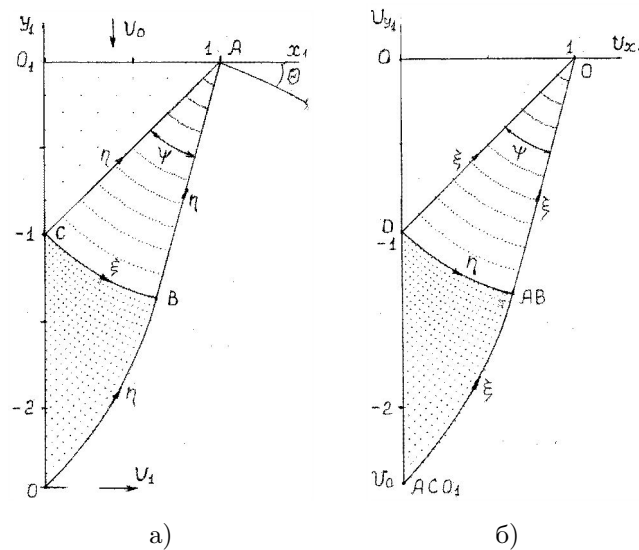


Рис. 5. Линии скольжения (а) и голограф скоростей (б) по Прандтлю на второй стадии сдвливания цилиндра



точке  $O$ :

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{4} + \left[ \int_O^A \varphi dy - \frac{1}{2} \right] / H. \quad (18)$$

Среднее напряжение в точке  $C$  находим по соотношениям (2) вдоль линий скольжения  $OB$  и  $BC$  и из второго уравнения (4) находим давление  $q_2$  на штампы:

$$\sigma_C = \sigma_0 - 2\psi, \quad q_2 = \frac{1}{2} + 2\psi - \sigma_0. \quad (19)$$

Равенство (17) выполняется при изменении знака подинтегральной функции вдоль линии скольжения  $O-A$ , что приводит к положительным значениям  $\sigma_0$  с напряжениями растяжения  $\sigma_1$  в центре сечения деформируемого цилиндра [3, 12]. Несущая способность клина жесткой области с вершиной в точке  $A$  приводит к неравенству

$$q_2 < 1 + \frac{\pi}{2} - \theta, \quad (20)$$

где  $\theta$  — угол наклона касательной к оси  $x_1$  свободной границы в точке  $A$ . При  $\theta = 0$  из (15) следует ограничение давления плоского штампа на толстую заготовку по Прандтлю при отношении  $H/a = 8,74$  [3, 8, 12].

При построении годографа скоростей для линий скольжения Прандтля (рис. 5б) используем условие пластической несжимаемости  $V_1 = V_0 a / H$ , где  $V_1$  — скорость горизонтального перемещения жесткой области при вертикальной скорости штампа  $V_0$ . Разрыв скорости  $[V] = \sqrt{2}V_1$  в точке  $O$  (рис. 5а), направленный по касательной к  $\eta$  линии скольжения  $O-A$ , определяет отображение линии скольжения  $O-A$  дугой окружности с центральным углом  $\psi$ . Скорости в области  $OBC$  отображаются на плоскости годографа криволинейными линиями скольжения, совпадающими с полем линий скольжения на рис. 5а. Диссипативная функция в области  $ACO_1$  равна нулю и положительна в области с криволинейными линиями скольжения.

В табл. 4 приведены значения  $q_2$ ,  $\sigma_1 = \sigma_0 + 1/2$  в центре сечения цилиндра и отношение  $H/a$  в зависимости от угла веера  $\psi$  в сингулярной точке  $A$  (рис. 5а), вычисленные для поля линий скольжения Прандтля. В вычислительной программе табличная функция  $q_2(H/a)$  вводится файлом в исходные данные и используется в алгоритме расчета первой стадии при контроле неравенства  $q_2 < q_1$  и на второй стадии при изменении отношения  $H/a$ . Если  $H/a > 8,311$ , то принимаем  $q_2 = 1 + \pi/2$ , иначе

Таблица 4. Зависимости  $H/a$ ,  $q_2$ ,  $\sigma_1$  от  $\psi$  на второй стадии сдавливания цилиндра для линий скольжения Прандтля

$\psi$	$H/a$	$q_2$	$\sigma_1$	$\psi$	$H/a$	$q_2$	$\sigma_1$
0,087	1,183	1,014	0,161	0,786	3,646	1,667	0,904
0,175	1,383	1,050	0,299	0,873	4,164	1,791	0,955
0,262	1,606	1,104	0,420	0,960	4,757	1,921	0,999
0,349	1,853	1,172	0,527	1,048	5,438	2,057	1,038
0,437	2,130	1,252	0,621	1,135	6,221	2,199	1,071
0,524	2,441	1,342	0,705	1,222	7,123	2,346	1,098
0,611	2,793	1,442	0,780	1,309	8,165	2,498	1,121
0,698	3,192	1,551	0,846	1,350	8,331	2,571	1,130

значение  $q_2$  находим линейной интерполяцией в интервале  $z_1 \leq z \leq z_2$ , где  $z = H/a$ ,  $z_1 = (H/a)_i$ ,  $z_2 = (H/a)_{i+1}$ :

$$q_2 = f_1 + \frac{(f_2 - f_1)(z - z_1)}{z_2 - z_1}, \quad f_1 = q_{2i}, \quad f_2 = q_{2,i+1}. \quad (21)$$

Изменение формы сечения цилиндра на второй стадии сдвливания при перемещении штампа  $s$  происходит вследствие горизонтального перемещения  $u$  жесткой зоны справа от жесткопластической границы  $O-A$ . Условие пластической несжимаемости для скоростей перемещения штампа и жесткой области приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{du}{ds} = \frac{x_A(s) + u}{1 - s}, \quad (22)$$

где  $x_A(s) + u = a$  — полудлина переменной границы контакта, определяемая координатой точки пересечения границы контакта с внешним контуром жесткой зоны и перемещением жесткой зоны, и  $1 - s = H$  — полутолщина плоского участка сечения между штампами. Начальными условиями для интегрирования уравнения (22) являются известные значения  $a_0$ ,  $H_0$  и  $s_0$  при  $u = 0$  в конце первой стадии сдвливания цилиндра.

При переходе от первой стадии ко второй внешний контур жесткой зоны состоит из смещенного контура  $AB$  в виде табличной функции, представленной в табл. 1, и дуги окружности, определяемой уравнениями (6) при  $\alpha_B \leq \alpha \leq \pi/2$ , где  $\alpha_B$  — известный угол, определяющий точку  $B$  в конце первой стадии (табл. 2). Значения  $x_A(s)$  вычисляем по формуле (13) при  $H = 1 - s$  с использованием табличной функции границы  $AB$ .

Уравнение (22) в интервале  $s_0 < s < 1 - y_B$  интегрируем численным методом с малым приращением  $\Delta s$  для средних значениях  $a/H$  в правой части при  $u_0 = 0$ :

$$\Delta u = \Delta s \frac{a_0 + x_A(s_0)}{H_0 + H - \Delta s}, \quad a = x_A(s_0) + \Delta u, \quad u = u_0 + \Delta u. \quad (23)$$

Свободный контур жесткой области смещается на величину  $u$  по горизонтальной оси после каждого приращения  $\Delta u$ . На следующем шаге  $\Delta s$  смещенный контур жесткой области и перемещение  $u$  принимаются за начальные значения при расчетах по формулам (23).

При  $s > 1 - y_B$  площадь сечения выше границы контакта переходит в пластическую область. Свободная граница жесткой зоны остается круговой с постоянным радиусом, равным единице, и смещается по оси  $x$ . На этом отрезке значений  $s$  переменные  $a$  и  $u$  определяются формулами, следующими из условия сохранения безразмерной площади сечения  $\pi/4$  при круговой границе жесткой области:

$$u = \left[ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\beta - \sin \beta \cos \beta) \right] / \sin \beta, \quad a = u + \cos \beta, \quad \beta = \arcsin H, \quad H = 1 - s. \quad (24)$$

На рис. 6 показаны профили сечения цилиндра для отношений  $H/a = 6,39; 1,53$  и  $1,01$ . В табл. 5 приведены значения  $a$ ,  $H/a$ ,  $u$ ,  $q_2$  и погонной силы  $P = 2aq_2$  в зависимости от  $s$ , ограниченные неравенством  $H/a > 1$ , при нарушении которого происходит переход к третьей стадии сдвливания цилиндра. Расчеты выполнены с шагом  $\Delta s = 0,01$ . Для снижения размера таблицы данные приведены с шагом  $\Delta s = 0,02$ .

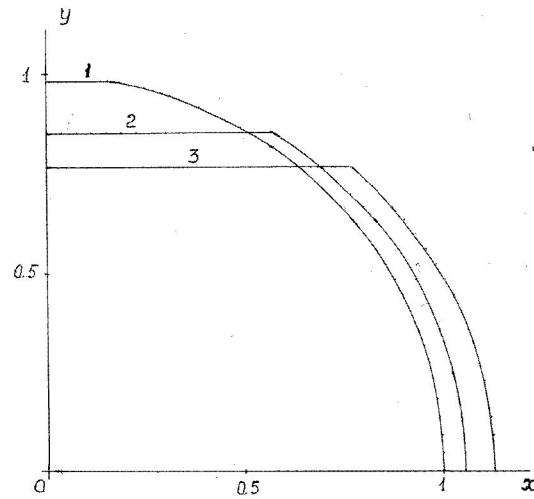


Рис. 6. Формы сечения цилиндра при сдавливании на второй стадии: 1 — переход от первой стадии ко второй,  $q_1 = q_2 = 2,25$ ,  $a = 0,155$ ,  $H/a = 6,39$ ; 2 —  $q_2 = 1,13$ ,  $a = 0,563$ ,  $H/a = 1,53$ ; 3 —  $q_2 = 1,001$ ,  $a = 0,576$ ,  $H/a = 1,01$

Таблица 5. Зависимости  $u$ ,  $a$ ,  $H/a$ ,  $q_2$  и  $P$  от  $s$  на второй стадии сдавливания цилиндра для линий скольжения Прандтля

$s$	$u$	$a$	$H/a$	$q_2$	$P$
0,009	0,002	0,155	6,393	2,250	0,698
0,029	0,004	0,252	3,849	1,716	0,866
0,049	0,010	0,323	2,940	1,482	0,959
0,069	0,018	0,384	2,423	1,337	1,028
0,089	0,027	0,439	2,074	1,236	1,086
0,109	0,037	0,490	1,817	1,162	1,140
0,129	0,049	0,540	1,615	1,106	1,194
0,149	0,062	0,586	1,452	1,067	1,251
0,169	0,076	0,632	1,316	1,038	1,312
0,189	0,092	0,677	1,199	1,017	1,376
0,209	0,110	0,721	1,097	1,007	1,453
0,229	1,288	0,765	1,008	1,001	1,531

**Третья стадия деформирования цилиндра.** На третьей стадии происходит пластическая деформация между штампами при  $a/h > 1$ , зависящая от контактного трения по Прандтлю  $0 \leq \mu \leq 0,5$ , где  $h$  — полутолщина пластического слоя.

При  $\mu = 0$  пластическое течение в области  $x = a$ ,  $0 \leq y \leq h$ , происходит при однородном напряженном и деформированном состоянии  $\sigma_x = \sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_y = \sigma_2 = -1$ ,  $\varepsilon_x = -\varepsilon_y = 1/h$ ,  $\gamma_{xy} = 0$  и линейном изменении скоростей  $V_x = x/h$ ,  $V_y = -y/h$ . Сегмент жесткой области с круговой границей при  $x > a$  перемещается со скоростью  $V_x = a/h$ . Полутолщина границы контакта  $a$  и перемещение  $u$  жесткой области вычисляются по формулам (24). Толщина  $h$  пластического слоя и угол  $\beta$  круговой границы

уменьшаются. Длина контакта и погонная сила увеличиваются при постоянном давлении  $q_3 = 1$ .

При  $\mu > 0$  пластическое течение определяется линиями скольжения, построенными от области однородного напряженного состояния со свободной границей  $x = a$ . На рис. 7а показаны линии скольжения, вычисленные при  $\mu = 0,25$  и  $a/h = 6,25$  от свободной границы  $AB$ , с областью  $ABC$  однородного напряженного состояния  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = -1$ ,  $\sigma = -0,5$ . Контактное трение определяет угол  $\gamma = \frac{1}{2} \arccos 2\mu$  наклона  $\eta$  линий скольжения к границе штампа  $y = h$ . Угол веера  $\eta$  линий скольжения в точке  $A$  и угол  $\gamma$  связаны соотношением  $\psi = \pi/4 - \gamma$ . На линии симметрии  $y = 0$  угол наклона  $\xi$  линий скольжения  $\varphi = -\pi/4$ . Линии скольжения вычисляются от централизованного веера  $ACE$  численным решением последовательности задач Гурса и смешанного типа на границах  $y = 0$  и  $y = h$  для уравнений (1), (2) с использованием численных процедур [9]. Веер прямолинейных линий скольжения с центром  $A$  порождает области однородного напряженного состояния  $AEF$ ,  $HMN$  на границе штампа и  $DGL$ ,  $PRQ$  на линии симметрии  $y = 0$ , соединенные отрезками прямолинейных линий скольжения с областями неоднородного напряженного состояния. Линия скольжения  $OTS$  является жесткопластической границей.

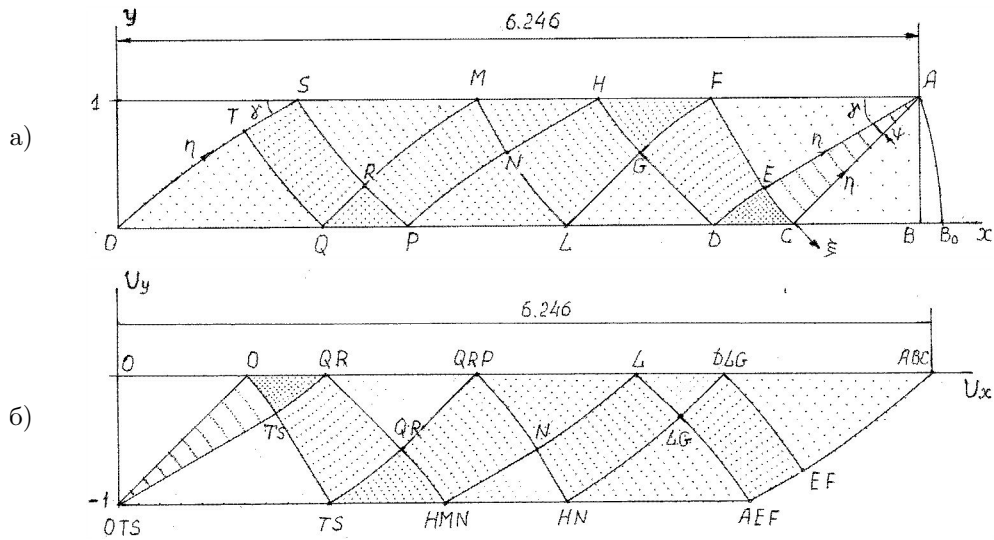


Рис. 7. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б) на третьей стадии сдвигания цилиндра:  $\mu = 0,25$ ,  $a/h = 6,25$

Годограф скоростей, показанный на рис. 7б, определяется разрывом скорости  $[V] = \sqrt{2}$  вдоль границы  $OTS$ , который затем распространяется вдоль линий скольжения  $SRP$ ,  $PNH$ ,  $HGD$  и  $DEA$  с учетом непрерывности нормальной скорости  $V_y = -1$  на границе  $y = h$  и  $V_y = 0$  на границе  $y = 0$ . Области однородного напряженного состояния на годографе скоростей обозначены точками с тремя символами; постоянные скорости на прямолинейных отрезках линий скольжения обозначены точками с двумя символами. Годограф скоростей на рис. 7б получается поворотом линий скольжения

на рис. 7а на угол  $\pi$  против хода часовой стрелки. В случае  $a/h \gg 1$  и  $\mu > 0$  линии скольжения и годограф скоростей стремятся к решению Прандтля для тонкого пластического слоя [2, 3, 8, 10] при  $q_3 = 1 + \frac{1}{3}\mu(a/h)$ .

Линии скольжения и годограф скоростей, показанные на рис. 7 для отношения  $a/h = 6,25$ , включают также линии скольжения и скорости для отношений  $1 < a/h < 6,25$  при смещении начала координат  $O$  вдоль оси  $x$  до точки  $C$ . Если начало координат находится на отрезке  $CD$  при  $1 < a/h < 1,65$ , то жесткопластическая граница проходит внутри веера с углом  $\psi$  до точки  $A$ . Жесткая область распространяется по всей границе контакта при  $\mu \leq 0,25$ . При  $a/h > 1,65$  и  $\mu = 0,25$  на границе контакта появляются отрезки пластического скольжения, возрастающие до точки  $S$  при  $a/h = 6,25$ .

Если начало координат находится на отрезках  $OQ$ ,  $PL$  и  $DC$ , то разрывы скорости вдоль линий скольжения выходят в точку  $A$ , и круговой сегмент свободной жесткой области перемещается со скоростью  $V_x = a/h$  без изменения формы внешней границы. При  $\mu \rightarrow 0,5$ ,  $\gamma \rightarrow 0$ ,  $\psi \rightarrow \pi/4$  разрывы скорости в пластической области стремятся к нулю; кривизна круговой границы жесткой области не изменяется при непрерывном увеличении отношения  $a/h$ . В этих случаях переменные  $a$ ,  $u$  и угол  $\beta$ , определяющие форму деформированного сечения с круговой границей жесткой области, вычисляются по формулам (24).

На рис. 8 показаны линии скольжения Прандтля для  $\mu = 0,5$  при отсутствии скольжения по всей границе контакта при отношении  $a/h = 3,642$ . Это поле линий скольжения содержит предельные значения  $1 < a/h < 3,642$ , зависящие от  $\mu = \frac{1}{2} \sin 2\psi$ ,  $0 < \psi < \pi/4$  при отсутствии скольжения на границе контакта. В табл. 6 приведены значения  $u$ ,  $a$ ,  $a/h$ , среднего давления  $q_3$  и погонной силы  $P$  в зависимости от  $s$ , рассчитанные для линий скольжения Прандтля при сохранении круговой границы жесткой области при  $x > a$ .

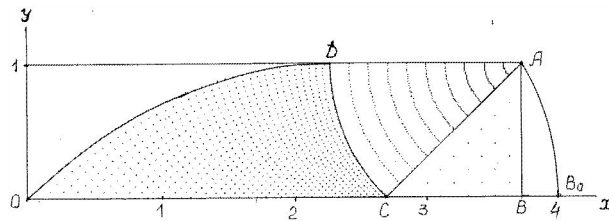


Рис. 8. Линии скольжения Прандтля на третьей стадии сдавливания цилиндра без скольжения на границе контакта:  $\psi = \pi/4$ ,  $\mu = 0,5$ ,  $a/h = 3,64$

При отношениях  $a/h$ , превышающих предельные значения для коэффициентов трения  $\mu$ , приведенных в табл. 6, возникают области с однородным напряженным состоянием на линии симметрии и на контактной границе. На рис. 9а показаны линии скольжения при  $\mu = 0,25$  и  $a/h = 2,760$  с границей скольжения  $AF$  и областями  $ADF$  и  $EGO$  однородного напряженного состоянием. Годограф скоростей (рис. 9б) определяется криволинейными линиями скольжения в области  $CDE$ , веером прямых линий скольжения в области  $ACD$  и разрывами скорости  $\sqrt{2}$  вдоль линии скольжения  $OGF$  и  $\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma$  вдоль линий скольжения  $FDC$  и  $CA$ . Линии скольжения и годограф скоростей совпадают при отношениях  $a/h = 1,605$  и  $a/h = 2,760$ .

Таблица 6. Зависимости  $u$ ,  $a$ ,  $h/a$ ,  $q_3$  и  $P$  от  $s$  и  $\mu$  на третьей стадии сдавливания цилиндра для линий скольжения Прандтля

$s$	$\mu$	$u$	$a$	$a/h$	$q_3$	$P$
0,255	0,052	0,157	0,825	1,108	1,005	1,658
0,280	0,104	0,186	0,879	1,221	1,019	1,793
0,304	0,154	0,216	0,934	1,341	1,041	1,945
0,327	0,203	0,249	0,989	1,469	1,069	2,114
0,350	0,250	0,284	1,044	1,605	1,103	2,303
0,372	0,294	0,321	1,099	1,750	1,143	2,512
0,394	0,334	0,360	1,155	1,905	1,186	2,741
0,414	0,371	0,402	1,213	2,071	1,234	2,993
0,435	0,404	0,446	1,271	2,249	1,286	3,269
0,455	0,433	0,492	1,330	2,440	1,342	3,570
0,474	0,457	0,541	1,392	2,645	1,401	3,898
0,493	0,475	0,593	1,454	2,867	1,463	4,255
0,511	0,489	0,647	1,519	3,105	1,528	4,642
0,528	0,497	0,704	1,586	3,363	1,596	5,061
0,546	0,500	0,764	1,655	3,642	1,666	5,516

Скорость области  $ABC$  при  $a/h = 1,605$  равна  $V_0 = 1,605$ , и при  $a/h = 2,760$  равна  $V_1 = V_0 + 2 \operatorname{tg} \gamma = 2,760$ . При этом область  $ABC$  и жесткая зона с границей  $AB$  перемещаются без изменения внешней границы жесткой зоны.

При отношениях  $1,605 < a/h < 2,760$  разрывы скорости проходят через область  $ABC$  и примыкающую к ней жесткую область, изменяя ее внешнюю границу. На рис. 9а показаны точки  $F_1, F_0, F_2$  на границе скольжения  $AF$ , определяющие линии скольжения при смещении начала координат  $O$  в точки  $O_1, O_0, O_2$ . На годографе скоростей эти точки совпадают с отображениями областей однородного напряженного состояния  $ADF$  и  $EGO$ , так как для линий скольжения при отношениях  $1,605 < a/h < 2,760$  годограф скоростей не изменяется. При увеличении отношения  $a/h$  от начального значения 1,605 длина скольжения  $l$  на границе контакта и отношение  $a/h$  увеличиваются до предельных значений

$$L_1 = \frac{\sqrt{2}h}{\cos \gamma}, \quad a/h = (a/h)_0 + 2 \operatorname{tg} \gamma, \quad (25)$$

где  $(a/h)_0 = 1,605$  и  $\gamma = 0,5236$  при  $\mu = 0,25$ .

При  $0 < l < L_1$  разрывы скорости  $\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma$  вдоль  $\xi$  линий скольжения в точках границы контакта, ограниченных длиной  $l$ , проходят через область  $AB_0C$  (рис. 9а) и изменяют форму границы  $AB_0$  жесткой области. При  $0 < l < L_0$ , где  $L_0$  определяет точку  $F_0$  и  $\xi$  линию скольжения, проходящую в точку  $B_0$  границы  $AB_0$  жесткой зоны

$$L_0 = \frac{\sqrt{2}h + a - x_{B_0}}{2 \cos \gamma}, \quad (26)$$

где  $x_{B_0}$  — координата  $x$  точки  $B_0$ , разрыв скорости выходит на границу жесткой области  $AB_0$ . Линия скольжения  $F_1C_1B_1$  с разрывом скорости непрерывно смещается от точки  $A$  до линии скольжения  $F_0C_0B_0$ , разделяя область  $AB_0C$  на две зоны, перемещающиеся с различными скоростями. Область ниже линии разрыва, включая точку  $C$ , перемещается вдоль оси  $x$  со скоростью  $V_0$ ; область выше линии разрыва,

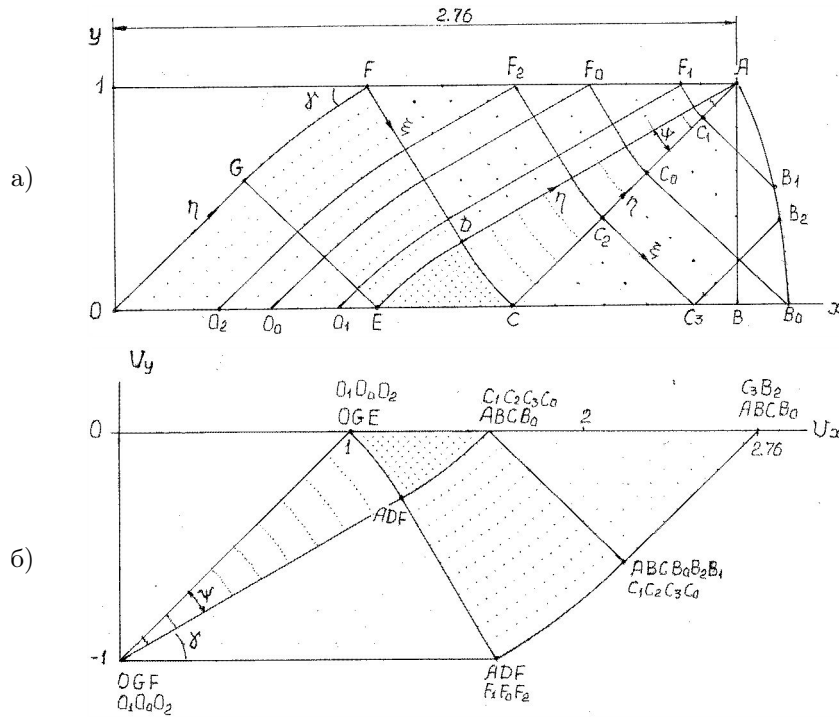


Рис. 9. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б) на третьей стадии сдавливания цилиндра при  $\psi = 0,2618$ ,  $\mu = 0,25$ ,  $a/h = 2,76$  с границей скольжения  $AF$

включая точку  $A$ , скользит относительно нижней области по линии разрыва с вектором скорости

$$V_x = V_0 + \operatorname{tg} \gamma, \quad V_y = -\operatorname{tg} \gamma. \quad (27)$$

При увеличении длины скольжения в интервале  $L_0 < l < L_1$  разрыв скорости  $\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma$  вдоль  $\xi$  линии скольжения  $F_2C_2C_3$  пересекает ось  $x$  при  $x < x_{B_0}$  и переходит на  $\eta$  линию скольжения  $C_3B_2$  с точкой  $B_2$  на границе  $AB_0$ . На этом интервале изменения  $l$  область  $AB_0C$  разделяется двумя линиями разрыва скорости  $C_2C_3$  и  $C_2B_2$  на три зоны с различными скоростями. Область ниже линии  $C_2C_3$ , включая точку  $C$ , перемещается вдоль оси  $x$  со скоростью  $V_0$ ; область выше линии  $C_2C_3$  и слева от линии  $C_3B_2$ , включая границу  $AB_2$ , скользит по границе  $C_2C_3$  с вектором скорости (27); область справа от линии  $C_3B_2$ , включая границу  $B_0B_2$ , перемещается по оси  $x$  со скоростью

$$V_1 = V_0 + 2 \operatorname{tg} \gamma. \quad (28)$$

При  $l \rightarrow L_1$  линия скольжения  $C_3B_2$  приближается к линии скольжения  $AC$  с разрывом скорости  $\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma$ , точка  $B_2$  приближается к точке  $A$  и граница жесткой области перемещается по оси  $x$  со скоростью (28).

Длина скольжения  $l$  и  $a/h$  связаны с перемещением штампа  $s > s_0$ , где  $s_0$  — предельное значение, при котором сохраняется поле линий скольжения Прандтля при заданном коэффициенте трения  $\mu$  в табл. 6. Отношение  $(a/h)_0$  и  $l = 0$  при  $s = s_0$ , соответствующие этому значению  $\mu$ , являются начальными условиями для функции  $l(s)$

и изменения границы  $AB_0$  вследствие разрывов скорости в жесткой области, зависящих от  $l$ . Примем  $h_0 = 1$  при  $s = s_0$  за характерный размер, тогда безразмерное значение  $a_0 = V_0$  представляет начальную скорость перемещения жесткой области с границей  $AB_0$  по оси  $x$ .

При малом перемещении  $\Delta s$  граница штампа  $h = h_0 - \Delta s$  пересекает линию скольжения  $AD$  и границу  $AB_0$  (рис. 9а). При перемещении  $\Delta s$  точка пересечения границы штампа  $y = h$ ,  $x = x(h)$  с границей  $AB_0$  смещается вектором скорости (27) на  $\Delta x = \Delta s(V_0 + \operatorname{tg} \gamma)$ ,  $\Delta y = -\Delta s \operatorname{tg} \gamma$ , где  $\gamma = \pi/4 - \psi < \pi/4$ . Смещенная точка остается на границе штампа, так как  $\Delta s > |\Delta y|$ . В результате перемещения  $\Delta s$  полудлина  $a$  границы контакта увеличивается:

$$a = x(h) + \Delta s(V_0 + \operatorname{tg} \gamma) \quad (29)$$

и около смещенной точки  $A$  появляется малая длина скольжения на границе контакта

$$\Delta l = \Delta s(V_0 + \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{ctg} \gamma) + x(h) - a_0. \quad (30)$$

Уравнения (29) и (30) показывают, что отношение  $a/h$  и длина скольжения  $l$  зависят от перемещения  $s$  и от уравнения границы  $AB_0$ , которое зависит от  $l$  вследствие перемещения линий разрыва скоростей в жесткой области.

Численное моделирование изменения границы жесткой области  $AB_0$ , отношения  $a/h$  и длины скольжения  $l$  в зависимости от  $s$  выполнено по следующему алгоритму программы на ФОРТРАНе:

- 1) из табл. 6 по значению  $\mu$  находим  $s_0$ ,  $u$ ,  $a_0$ ,  $(a/h)_0$  для радиуса цилиндра  $R = 1$ ;
- 2) принимаем  $h_0$  за единицу длины и находим  $a_0 = (a/h)_0$ ,  $V_0 = a_0$ ,  $u = u/h_0$ ,  $R = 1/h_0$ ;
- 3) вычисляем углы  $\gamma = \frac{1}{2} \arccos(2\mu)$ ,  $\psi = \pi/4 - \gamma$ ,  $\alpha = \arcsin(1/R)$ ;
- 4) начальную круговую границу  $AB_0$  жесткой области представляем в табличном виде с шагом по углу  $\Delta\alpha = a/(N-1)$ ,  $x_i = u + R \cos \alpha_i$ ,  $y_i = R \sin \alpha_i$ ,  $\alpha_i = (i-1)\Delta\alpha$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ;
- 5) задаем шаг  $\Delta s$  и начальные значения  $s_0 = 0$ ,  $a = a_0$ ,  $h_0 = 1$ ,  $l_0 = 0$ ,  $J = 1$ ;
- 6) вычисляем  $s = s_0 + \Delta s$ ,  $h = h_0 - \Delta s$  и координаты  $x_A = x_{i+1} + (x_i - x_{i+1})(h - y_{i+1})/(y_i - y_{i+1})$  точки  $A$  в интервале  $y_i \leq h \leq y_{i+1}$  и  $N = i + 1$ , если  $i + 1 < N$ ;
- 7) вычисляем  $L_1$ ,  $L_0$ ,  $a$ ,  $\Delta l$  по формулам (25), (26), (29), (30),  $l = l_0 + \Delta l$ ,  $x_N = a$ ,  $y_N = h$ ;
- 8) вычисляем координаты точки пересечения  $C$  линий разрыва скорости с границей  $AB_0$  жесткой области по средним значениям  $\tilde{l} = \frac{1}{2}(l+l_0)$ ,  $\tilde{a} = \frac{1}{2}(a+a_0)$ : если  $l < L_0$ , то  $x_0 = \tilde{a}$ ,  $y_0 = h - \sqrt{2}\tilde{l} \cos \gamma$ ,  $ID = 1$ , иначе  $x_0 = \tilde{l} + h - \sqrt{2}\tilde{l} \cos \gamma$ ,  $y_0 = 0$ ,  $ID = 2$ ; если  $ID = 1$ , то  $y_C = (x_0 + y_0 - x_i + ky_i)/(1+k)$ ; если  $ID = 2$ , то  $y_C = (y_0 - x_0 + x_i - ky_i)/(1-k)$ ,  $x_C = x_i + k(y_C - y_i)$ ;  $y_i \leq y_C \leq y_{i+1}$ ,  $k = (x_{i+1} - x_i)/(y_{i+1} - y_i)$ ;
- 9) вычисляем координаты границы  $AB_0$ : если  $y_i < y_C$ , то  $x_i = x_{i0} + \Delta x$ ,  $y_i = y_{i0}$ , если  $ID = 1$ , то  $\Delta x = \Delta s V_0$ , если  $ID = 2$ , то  $\Delta x = \Delta s(V_0 + 2 \operatorname{tg} \gamma)$ ; если  $y_i > y_C$ , то  $x_i = x_{i0} + \Delta s(V_0 + \operatorname{tg} \gamma)$ ,  $y_i = y_{i0} - \Delta s \operatorname{tg} \gamma$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, N-1$ ;  $x_{i0}$ ,  $y_{i0}$  — координаты границы  $AB_0$  при  $s = s_0$ ;
- 10) запись в файл  $J$ ,  $N$ ,  $s$ ,  $h$ ,  $a$ ,  $l$  и координат границы  $AB_0$ ;
- 11) вывод на экран монитора контура сечения с границей  $AB_0$  при заданном номере  $J$ ;
- 12) если  $l < L_1$ , то  $s_0 = s$ ,  $h_0 = h$ ,  $a_0 = a$ ,  $l_0 = l$ ,  $J = J + 1$ ; переход на п. 6;
- 13) выход из программы.



При малых коэффициентах трения  $\mu$  предельное отношение  $a/h$ , при котором скопление на границе контакта отсутствует, уменьшается. Дальнейшее сдавливание цилиндра происходит с возрастанием длины скольжения на большом участке границы контакта до предельного значения  $L_1$  с возрастанием отношения  $a/h$  вследствие увеличения угла  $\gamma$  в уравнениях (25). Это приводит к изменению границы жесткой области  $AB_0$  на большом участке перемещения штампа вследствие увеличения отношения  $a/h$ .

На рис. 10 показано изменение формы круговой границы цилиндра от начального отношения  $a/h = 1,341$  при  $\mu = 0,15$ ,  $\gamma = 0,5236$ ,  $\psi = 0,1571$  для линий скольжения по Прандтлю при отсутствии скольжения на границе контакта до конечного отношения  $a/h = 3,041$ , ограниченного предельным скольжением  $L_1 = 1,187$ . Расчеты выполнены для табличной функции границы  $AB_0$  с начальным числом точек  $N = 31$ ,  $\Delta s = 0,01$  с числом шагов  $J = 31$  с выводом на экран координат границы  $AB_0$  через один шаг. Численные значения координат границы  $AB_0$  с точностью до четырех значащих цифр, выводимые в файл на каждом шаге, занимают более 23 килобайт и не приводятся для сокращения объема статьи.

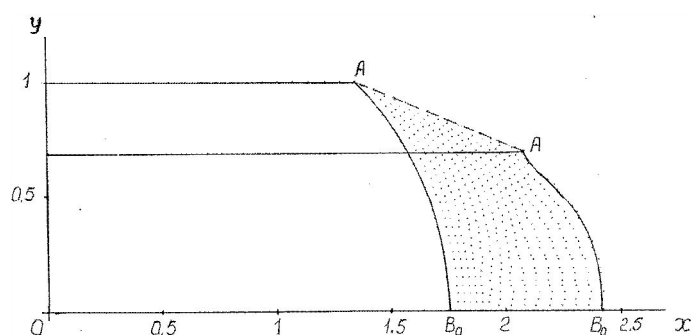


Рис. 10. Изменение формы свободной круговой границы при сдавливании цилиндра на третьей стадии от  $a/h = 1,341$  до  $3,041$  при  $\mu = 0,15$  и скольжении  $L_1 = 1,187$  на границе контакта

Из рис. 10 видно, что примерно на  $1/3$  перемещения  $s$  в начале сдавливания смещаемая граница жесткой области близка к начальной круговой форме. При дальнейшем перемещении штампа происходит быстрое выпучивание границы  $AB_0$  на участке скольжения  $l > L_0$  вследствие высокой скорости жесткой области справа от линии разрыва  $C_3B_2$  (рис. 9а) вдоль оси  $x$ . При конечном отношении  $a/h$  большая часть границы  $AB_0$ , за исключением малого участка около границы контакта, близка к круговой, но при уменьшении радиуса кривизны до  $0,6$  относительно радиуса недеформированного сечения цилиндра.

В программе расчета внешней границы жесткой области при сжатии сечения плоскими штампами от начального отношения  $a/h$  для линий скольжения по Прандтлю предусмотрено введение в исходные данные начальной границы жесткой области различной формы. На практике обычно принимают прямолинейную вертикальную границу  $AB$ , свободную от внешних напряжений, без примыкающей к ней жесткой области без нагрузки. На рис. 11 показан пример расчета в случае прямолинейной начальной границы  $AB$  при сдавливании пластического слоя с начальным отношением

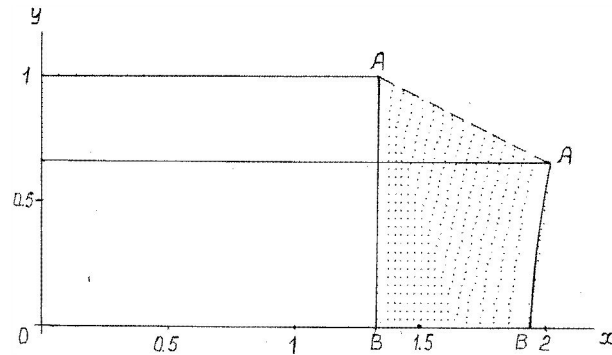


Рис. 11. Изменение свободной вертикальной границы при сдавливании пластического слоя от  $a/h = 1,341$  до  $3,085$  при  $\mu = 0,15$  и скольжении  $L_1 = 1,154$  на границе контакта

$a/h = 1,341$  при  $\mu = 0,15$  для поля линий скольжения по Прандтлю, как и в случае круговой границы на рис. 10.

В случае прямолинейной начальной границы  $AB$  конечное отношение  $a/h = 3,085$  ограничено предельным скольжением  $L_1 = 1,154$ . При этом на большей части сдавливания выполняется неравенство  $l < L_0$  при более высокой скорости жесткой области выше линии разрыва  $C_0B_0$  на рис. 9а, что приводит к вогнутому профилю границы  $AB$ . При конечном отношении  $a/h$  вогнутость профиля уменьшается вследствие ускоренного движения нижней части жесткой области при  $l > L_0$ .

Появление вогнутой свободной границы заготовки при осадке с малым отношением  $a/h$  при смазке на границе контакта известно из практики. Вогнутость свободной границы пластической области изменяет граничные условия для линий скольжения, приводит к снижению контактного давления и увеличению кривизны вогнутой поверхности с вероятностью образования технологического дефекта. Поэтому расчеты, показанные на рис. 11 для прямолинейной границы  $AB$ , качественно показывают причину появления вогнутости вследствие выхода линий разрыва скорости на свободную боковую границу при осадке заготовок плоскими штампами. Теоретический анализ нестационарного процесса осадки с изменением вогнутой свободной границы методом линий скольжения требует дальнейших исследований.

**Заключение.** На основе теории плоской деформации идеально пластического тела выполнено численное моделирование сдавливания цилиндра плоскими штампами, от контактного давления штампа на пластическое полупространство с круговой границей до сдавливания пластического слоя с конечным отношением длины контакта к толщине.

На начальной стадии контактного деформирования используется линии скольжения для штампа Прандтля без скольжения на границе контакта, которое дает снижение предельного давления по сравнению с давлением на полупространство с горизонтальной границей. На этой стадии вычисляется выдавливание материала на границу цилиндра в виде узкого серповидного наплыва плавно переходящего на цилиндрическую поверхность жесткой области.

На второй стадии рассматривается сдавливание цилиндра при пластической области между границами штампов. Используются линии скольжения Прандтля для

высокой заготовки с отношением высоты к длине границы контакта  $H/a$  больше единицы. Переход от первой стадии ко второй происходит при отношении контактного давления к напряжению текучести  $q/\sigma_Y = 2,25$  при  $H/a = 6,39$ . На второй стадии кривизна круговой границы жесткой области не изменяется при ее горизонтальном смещении с уменьшением отношения  $H/a$  до единицы.

Третья стадия переходит в задачу деформирования пластического слоя с конечным отношением длины контакта к толщине  $a/h$  больше единицы. Предельное отношение  $a/h$  при отсутствии скольжения на границе контакта определяется линиями скольжения Прандтля второй стадии с поворотом вертикальной оси на угол  $\pi/2$  и зависит от контактного трения  $\mu$ . В этом случае круговая форма жесткой области остается неизменной при сдавливании и смещается по горизонтальной оси, также как на второй стадии.

При увеличении отношения  $a/h$  выше предельного значения по Прандтлю при заданном коэффициенте  $\mu$  появляется скольжение на границе контакта с областью однородного напряженного состояния. В этом случае линии разрыва скоростей выходят на внешнюю границу жесткой области, непрерывно перемещаются при сдавливании пластического слоя и изменяют форму границы жесткой области. При уменьшении  $\mu$  предельное отношение  $a/h$  по Прандтлю уменьшается, а длина границы скольжения и изменение формы границы жесткой области увеличиваются. Кривизна начальной круговой границы увеличивается с увеличением сдавливания слоя.

В случае вертикальной свободной границы пластического слоя при отсутствии внешней жесткой зоны с выпуклой границей, разрывы скорости, выходящие на свободную границу в области однородного напряженного состояния, при малых значениях  $\mu$  приводят к образованию вогнутой свободной границы. Сдавливание пластического слоя с образованием вогнутой свободной границы может привести к технологическому дефекту формы заготовки. Проблема анализа процесса сдавливания пластического слоя с образованием вогнутой свободной границы вследствие разрывов скоростей остается открытой.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Соколовский В. В. Теория пластичности: 1-е изд. Москва: АН СССР, 1946.
- [2] Соколовский В. В. Теория пластичности: 3-е изд. Москва: Высшая школа, 1969. 608 с.
- [3] Томленов А. Д. Теория пластического деформирования металлов. Москва: Металлургия, 1972. 408 с.
- [4] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. Москва: Наука, 1966. 232 с.
- [5] Быковцев Г. И., Хромов А. М. Плоская деформация идеальных жестко-пластических тел с учетом изменения границы // Изв. АН СССР, МТТ. 1979. № 2. С. 71–78.
- [6] Быковцев Г. И., Хромов А. М. Плоская задача о вдавливании жесткого штампа в идеальное жестко-пластическое полупространство // Изв. АН СССР, МТТ. 1981. № 6. С. 47–52.
- [7] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [8] Хилл Р. Математическая теория пластичности. Москва: ГИИТЛ. 408 с.
- [9] Nepershin R. I. Applied Problems of Plasticity. Moscow: MSTU STANKIN, 2016. 310 p.
- [10] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. Москва: Физматлит, 2001. 704 с.
- [11] Соловьев П. В. FORTRAN для персонального компьютера (Справочное пособие). Москва: Арист, 1991. 223 с.
- [12] Druyanov V. A., Nepershin R. I. Problems of Technological Plasticity. Amsterdam: Elsevier, 1994. 426 p.

R. I. Nepershin

## CYLINDER PLASTIC COMPRESSION BY THE FLAT DIES

*Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia*

**Abstract.** Computer simulation of the rigid-plastic cylinder compression by the flat dies is presented using plane strain ideal plastic theory. Initial contact plastic deformation with material lip forming on the free cylinder surface, followed by the high workpiece and the plastic layer with finite contact length to thickness relation plastic deformation are considered. Prandtl's slip lines and velocity fields are used for the cylinder section form predictions and plastic layer compression with contact friction consideration. Computer simulation can be used for the limit load estimation with cylinder contact plastic flow, compressed by the flat rigid dies, and cylinder workpiece forging by the flat dies.

**Keywords:** cylinder plastic compression, flat dies, ideal plasticity, plane strain, slip lines, velocities, contact pressure, contact friction, limit load, forging by flat dies.

## REFERENCES

- [1] Sokolovskii V. V. The Theory of Plasticity: first ed. Moscow: AN USSR, 1946. (In Russian).
- [2] Sokolovskii V. V. The Theory of Plasticity: third ed. Moscow: Vyshaya shkola, 1969. 608 p. (In Russian).
- [3] Tomlenov D. Theory of the Metals Plastic Deformation. Moscow: Metallurgia, 1972. 408 p. (In Russian).
- [4] Ivlev D. D. Theory of ideal plasticity. Moscow: Nauka, 1966. 232 p. (In Russian).
- [5] Bykovtsev G. I., Chromov A. M. Plane strain deformation of ideal rigid-plastic solid with the boundary change // Izvestiya AN USSR, MTT. 1979. no. 2. P. 71–78. (In Russian).
- [6] Bykovtsev G. I., Chromov A. M. Plane strain problem of the rigid die indentation into the ideal rigid-plastic half space // Izvestiya AN USSR, MTT. 1981. no. 6. P. 47–52. (In Russian).
- [7] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. Theory of Plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p. (In Russian).
- [8] Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford University Press, 1985. 408 p.
- [9] Nepershin R. I. Applied Problems of Plasticity. Moscow: MSTU STANKIN, 2016. 310 p.
- [10] Ishlinskii A. Y., Ivlev D. D. Mathematical Theory of Plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2001. 704 p. (In Russian).
- [11] Solov'ev P. V. FORTRAN for personal computer (handbook). Moscow: Arist, 1991. 223 p. (In Russian).
- [12] Druyanov B. A., Nepershin R. I. Problems of Technological Plasticity. Amsterdam: Elsevier, 1994. 426 p.