

А. П. Кержаев¹, И. В. Меньшова^{1,2}, А. В. Никитин³, А. М. Самсонов³

МЕТОД НАЧАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С РАЗРЫВАМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

¹Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН,
г. Москва, Россия

²Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
г. Москва, Россия

³Чебоксарский институт (филиал) Московского политехнического университета,
г. Чебоксары, Россия

Аннотация. В статье рассматривается применение метода начальных функций в пространстве преобразований Фурье к решению задач для плоскости с разрывом перемещений. Рассмотрены четно- и нечетно-симметричная деформации относительно оси трещины. Окончательные решения всех задач представляются в виде несобственных интегралов. Приведены примеры, в которых рассмотрены разрывы трех типов, отличающиеся гладкостью контура разрыва вблизи его концов. Решения получаются быстро, просто и, в отличие от классического решения, без использования теории функций комплексного переменного.

Ключевые слова: метод начальных функций, плоскость, разрыв перемещений, интегральное преобразование Фурье.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.009

УДК: 539.3

1. Введение. Метод начальных функций (МНФ) является аналитическим методом теории упругости и строительной механики. Он позволяет получать как точные,

© Кержаев А. П., Меньшова И. В., Никитин А. В., Самсонов А. М., 2022

Кержаев Александр Петрович

e-mail: alex_kerg@mail.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва, Россия.

Меньшова Ирина Владимировна

e-mail: menshovairina@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва, Россия; доцент, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия.

Исследование А.П. Кержаева и И.В. Меньшовой выполнено в рамках государственного задания ИТПЗ РАН.

Поступила 29.05.2022

так и приближенные решения в виде рядов по тригонометрическим, экспоненциальным и иным системам функций задач теории упругости для канонических областей в различных системах координат.

История метода берет свое начало в 50-х годах прошлого века с работ А.И. Лурье, В.З. Власова и А.С. Малиева. В соответствии с этой методикой решение системы дифференциальных уравнений в частных производных сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений бесконечного порядка. Основы МНФ можно найти в книге [1]. Достоинство МНФ заключается в том, что значительная часть непринципиальных, но громоздких промежуточных выкладок уже выполнена и включена в операторы МНФ. Метод до сих пор используется в проектных институтах и КБ при решении различных инженерных проблем прочностного характера [1–4]. В работе [3] приведен обзор публикаций, посвященных становлению и развитию МНФ.

В этой статье метод начальных функций применяется к решению краевой задачи для плоскости с горизонтальным разрезом, на котором задан разрыв продольных или поперечных перемещений (четно- и нечетно-симметричная деформации). МНФ используется не в классической форме, а в пространстве преобразований Фурье. Это делает его использование более простым и эффективным. Проблема рассматривается как задача о стыке верхней и нижней полуплоскостей, когда вдоль линии их склейки имеется разрыв перемещений. Для этого вводятся две функции, аналитические сверху и снизу от разреза. Окончательные решения всех задач имеют вид простых интегралов Фурье. Операторы МНФ в пространстве преобразований Фурье представляют собой алгебраические выражения, которые удобно использовать в символьных преобразованиях, например, в MathCad.

2. Постановка краевой задачи. Пусть в плоскости xOy на конечном разрезе $\{\Gamma : y = 0, |x| \leq a\}$ (рис. 1) задан разрыв поперечных или продольных перемещений.

Обозначим $U(x, y) = Gu(x, y)$, $V(x, y) = Gv(x, y)$, $Y(x, y) = \sigma_y(x, y)$, $X(x, y) = \tau_{xy}(x, y)$, как это принято в МНФ. Функции $X_0 = \tau_{xy}(x, 0)$, $Y_0 = Y(x, 0)$, определенные при $y = 0$, будем рассматривать как начальные для полуплоскости. Здесь и далее u и v — соответственно перемещения по x (продольное) и по y (поперечное), G — модуль упругости при сдвиге.

Тогда основные зависимости МНФ для полуплоскости в пространстве преобразований Фурье примут вид [3]:

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\lambda, y) &= L_{UY}^0(\lambda, y)\tilde{Y}_0 + L_{UX}^0(\lambda, y)\tilde{X}_0, \\ \tilde{V}(\lambda, y) &= L_{VY}^0(\lambda, y)\tilde{Y}_0 + L_{VX}^0(\lambda, y)\tilde{X}_0, \\ \tilde{Y}(\lambda, y) &= L_{YY}^0(\lambda, y)\tilde{Y}_0 + L_{YX}^0(\lambda, y)\tilde{X}_0, \\ \tilde{X}(\lambda, y) &= L_{XY}^0(\lambda, y)\tilde{Y}_0 + L_{XX}^0(\lambda, y)\tilde{X}_0, \\ \tilde{\sigma}_x(\lambda, y) &= A_Y^0(\lambda, y)\tilde{Y}_0 + A_X^0(\lambda, y)\tilde{X}_0.\end{aligned}\tag{1}$$

Никитин Андрей Витальевич

e-mail: ligalas5@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чебоксарский институт (филиал) Московского политехнического университета, г. Чебоксары, Россия.

Самсонов Алексей Михайлович

e-mail: sam_polytech@mail.ru, старший преподаватель, Чебоксарский институт (филиал) Московского политехнического университета, г. Чебоксары, Россия.

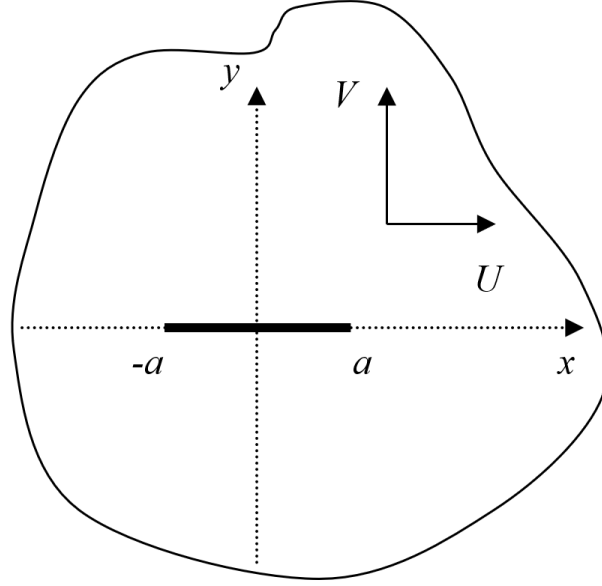


Рис. 1. Схема краевой задачи

Входящие сюда операторы МНФ в пространстве преобразований Фурье равны:

$$\begin{aligned}
 L_{UY}^0(\lambda, y) &= \frac{i}{2\lambda} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - |\lambda|y \right) e^{-|\lambda|y}, \quad L_{UX}^0(\lambda, y) = - \left(\frac{1}{|\lambda|(1+\nu)} - \frac{1}{2}y \right) e^{-|\lambda|y}, \\
 L_{VY}^0(\lambda, y) &= - \left(\frac{1}{|\lambda|(1+\nu)} + \frac{1}{2}y \right) e^{-|\lambda|y}, \\
 L_{VX}^0(\lambda, y) &= - \frac{i}{2\lambda} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + |\lambda|y \right) e^{-|\lambda|y}, \\
 L_{YY}^0(\lambda, y) &= (1 + |\lambda|y) e^{-|\lambda|y}, \quad L_{YX}^0(\lambda, y) = L_{XY}^0(\lambda, y) = i\lambda y e^{-|\lambda|y}, \\
 L_{XX}^0(\lambda, y) &= A_Y^0(\lambda, y) = (1 - |\lambda|y) e^{-|\lambda|y}, \quad A_X^0(\lambda, y) = i \left(2 \frac{|\lambda|}{\lambda} - \lambda y \right) e^{-|\lambda|y},
 \end{aligned} \tag{2}$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Будем рассматривать последовательно четно- и нечетно-симметричную деформации плоскости.

3. Четно-симметричная деформация плоскости

3.1. *Разрыв поперечных перемещений.* Пусть на разрезе Γ задан разрыв поперечных перемещений

$$V^+(x, 0) - V^-(x, 0) = 2v(x), \tag{3}$$

где $v(x)$ — четная функция.

Подставляя операторы (2) в формулы (1), на оси симметрии получим

$$\begin{aligned}
 \widetilde{U}_0 &= \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{i}{2\lambda} \widetilde{Y}_0 - \frac{1}{(1+\nu)|\lambda|} \widetilde{X}_0, \\
 \widetilde{V}_0 &= - \frac{1}{(1+\nu)|\lambda|} \widetilde{Y}_0 - \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{i}{2\lambda} \widetilde{X}_0, \\
 \widetilde{\sigma}_x(\lambda, 0) &= \widetilde{Y}_0 + 2i \frac{|\lambda|}{\lambda} \widetilde{X}_0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Введем две функции:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= -\tau_{xy}(x, 0) + i \left[(1 + \nu) \frac{dU(x, 0)}{dx} - \frac{1 - \nu}{2} \sigma_y(x, 0) \right], \\ \Psi(x) &= (1 + \nu) \frac{dV(x, 0)}{dx} - \frac{3 + \nu}{2} \tau_{xy}(x, 0) + i \sigma_x(x, 0).\end{aligned}\quad (5)$$

Эти функции использовались в статьях [5–7] для решения различных задач с разрывами в бесконечной полосе. Тогда на разрезе Γ получим

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = 0, \quad \Psi^+(x) - \Psi^-(x) = 2(1 + \nu) \frac{dv(x)}{dx}. \quad (6)$$

Символами $\pm$ обозначены значения функций соответственно сверху и снизу от разреза.

Воспользовавшись формулами (4) и подставляя их в преобразования Фурье формул (5), (6), после небольших преобразований получим систему из двух алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}- \left(\frac{|\lambda|}{\lambda} + 1 \right) \widetilde{X}_0 &= 0, \\ \left(\frac{\lambda}{|\lambda|} + 1 \right) (i \widetilde{Y}_0 - 2 \widetilde{X}_0) &= 2(1 + \nu) \widetilde{A}(\lambda),\end{aligned}\quad (7)$$

где

$$\widetilde{A}(\lambda) = \lambda \int_{-a}^a v(x) e^{i\lambda x} dx. \quad (8)$$

Разрешим систему (7) относительно $\widetilde{X}_0$ и $\widetilde{Y}_0$:

$$\widetilde{X}_0 = 0, \quad \widetilde{Y}_0 = -2i(1 + \nu) \frac{|\lambda|}{\lambda + |\lambda|} \widetilde{A}(\lambda). \quad (9)$$

Подставляя найденные коэффициенты (9) в формулы (1), получим решение задачи в пространстве преобразований Фурье. Затем применяя к полученным выражениям обратное преобразование Фурье по формуле (см., например, [8])

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \quad (10)$$

найдем искомое решение:

$$\begin{aligned}U(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_{UY}^0(y) \widetilde{Y}_0 e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ V(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_{VY}^0(y) \widetilde{Y}_0 e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_x(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_Y^0(y) \widetilde{Y}_0 e^{-i\lambda x} d\lambda,\end{aligned}\quad (11)$$

$$\sigma_y(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_{YY}^0(y) \widetilde{Y}_0 e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_{XY}^0(y) \widetilde{Y}_0 e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

Раскрывая подынтегральные выражения в (11), получим

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{2\lambda} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - |\lambda|y \right) \left(-2i(1+\nu) \frac{|\lambda|}{\lambda+|\lambda|} \widetilde{A}(\lambda) \right) e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

$$V(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{|\lambda|(1+\nu)} - \frac{1}{2}y \right) \left(-2i(1+\nu) \frac{|\lambda|}{\lambda+|\lambda|} \widetilde{A}(\lambda) \right) e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

$$\sigma_x(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1-|\lambda|y) \left(-2i(1+\nu) \frac{|\lambda|}{\lambda+|\lambda|} \widetilde{A}(\lambda) \right) e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda, \quad (12)$$

$$\sigma_y(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\lambda|y) \left(-2i(1+\nu) \frac{|\lambda|}{\lambda+|\lambda|} \widetilde{A}(\lambda) \right) e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda y \left(-2i(1+\nu) \frac{|\lambda|}{\lambda+|\lambda|} \widetilde{A}(\lambda) \right) e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

Это же решение (12) можно получить в классической постановке как решение для полуплоскости, если считать, что на ее прямолинейной границе заданы нулевое касательное напряжение и поперечное перемещение $V(x, 0) = v(x)$. В этом случае

$$\widetilde{X}_0 = 0, \quad \widetilde{Y}_0 = -(1+\nu)|\lambda|\tilde{v}(\lambda). \quad (13)$$

Подставляя коэффициенты (13) в формулы (1) и переходя к пространству оригиналов, получим

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{2\lambda} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - |\lambda|y \right) [-(1+\nu)|\lambda|\tilde{v}(\lambda)] e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

$$V(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{|\lambda|(1+\nu)} - \frac{1}{2}y \right) [-(1+\nu)|\lambda|\tilde{v}(\lambda)] e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

$$\sigma_x(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1-|\lambda|y) [-(1+\nu)|\lambda|\tilde{v}(\lambda)] e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda, \quad (14)$$

$$\sigma_y(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\lambda|y) [-(1+\nu)|\lambda|\tilde{v}(\lambda)] e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda y [-(1+\nu)|\lambda|\tilde{v}(\lambda)] e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

$$\tilde{v}(\lambda) = \int_{-a}^a v(x) e^{i\lambda x} dx.$$

В интегралах вида (14) можно избавиться от мнимой единицы, если учесть четность функции $v(x)$ и воспользоваться формулой Эйлера. Тогда после упрощений соответственно получим

$$U(x, y) = -\frac{1+\nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}\lambda}{2} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - |\lambda|y \right) \tilde{v}(\lambda) e^{-|\lambda|y} \sin \lambda x d\lambda,$$

$$V(x, y) = -\frac{1+\nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{1+\nu} - \frac{1}{2}|\lambda|y \right) \tilde{v}(\lambda) e^{-|\lambda|y} \cos \lambda x d\lambda,$$

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{1+\nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (|\lambda| - \lambda^2 y) \tilde{v}(\lambda) e^{-|\lambda|y} \cos \lambda x d\lambda, \quad (15)$$

$$\sigma_y(x, y) = -\frac{1+\nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (|\lambda| + \lambda^2 y) \tilde{v}(\lambda) e^{-|\lambda|y} \cos \lambda x d\lambda,$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -\frac{1+\nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y \operatorname{sgn}\lambda \lambda^2 \tilde{v}(\lambda) e^{-|\lambda|y} \sin \lambda x d\lambda.$$

Рассмотрим три типа разрывов поперечных перемещений различной степени гладкости в окрестности концов разреза.

1. Пусть форма разрыва представлена функцией $v_1(x) = 8(a^2 - x^2)^2$. Преобразование Фурье этой функции имеет вид

$$\tilde{v}_1(\lambda) = 128(3 \sin a\lambda - 3a\lambda \cos a\lambda - a^2\lambda^2 \sin a\lambda)/\lambda^5. \quad (16)$$

2. Пусть форма разрыва в окрестности концов разреза имеет гладкость, меньшую чем в первом примере: $v_2(x) = 2(a^2 - x^2)$. В этом случае имеем

$$\tilde{v}_2(\lambda) = 8(\sin a\lambda - a\lambda \cos a\lambda)/\lambda^3. \quad (17)$$

3. Пусть контур разрыва вблизи его концов имеет гладкость, меньшую гладкости функций $v_1(x)$ и $v_2(x)$: $v_3(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$. Пользуясь справочником [9], найдем

$$\tilde{v}_3(\lambda) = \pi a J_1(a|\lambda|)/|\lambda|, \quad (18)$$

где $J_1(a|\lambda|)$ — функция Бесселя.

На рис. 2–4 показаны распределения нормальных и касательных напряжений вблизи разреза в зависимости от формы разрыва. Сплошные кривые соответствуют $v_1(x)$, штриховые кривые — $v_2(x)$, точечные кривые — $v_3(x)$.

3.2. *Разрыв продольных перемещений.* Будем считать, что на разрезе Γ задан разрыв продольных перемещений

$$U^+(x, 0) - U^-(x, 0) = 2u(x), \quad (19)$$

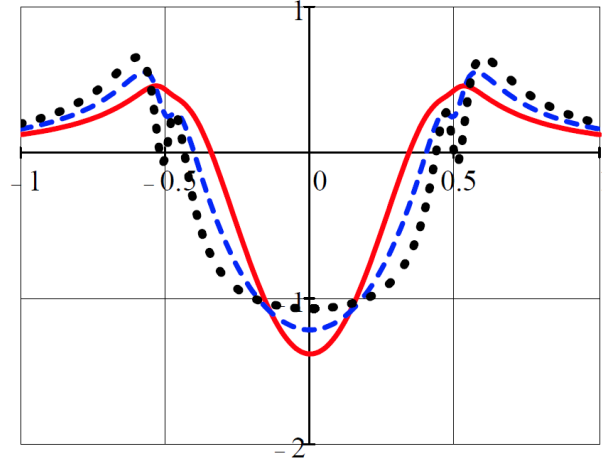


Рис. 2. Распределение нормальных напряжений $\sigma_x(x, y)$ в сечении $y = 0.05$ для каждого типа разрыва

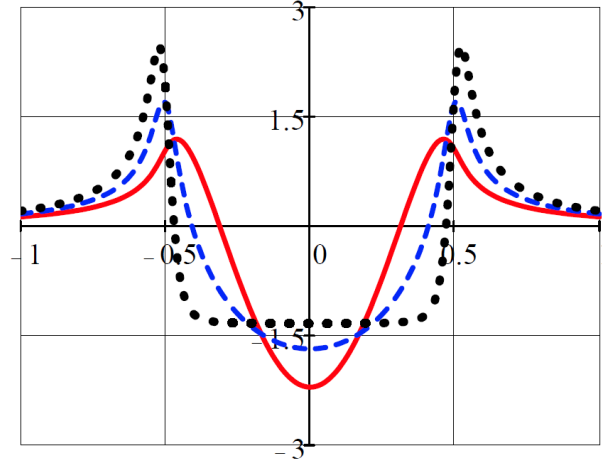


Рис. 3. Распределение нормальных напряжений $\sigma_y(x, y)$ в сечении $y = 0.05$ для каждого типа разрыва

причем функция $u(x)$ нечетна. Здесь для удобства вместо функции $\Psi(x)$ введем функцию

$$F(x) = 2\Phi(x) - \Psi(x) = - \left[(1 + \nu) \frac{dV(x, 0)}{dx} + \frac{1 - \nu}{2} \tau_{xy}(x, 0) \right] - i\sigma_y(x, 0). \quad (20)$$

Очевидно, что на разрезе Γ

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = 2i(1 + \nu) \frac{du(x)}{dx}, \quad F^+(x) - F^-(x) = 0. \quad (21)$$

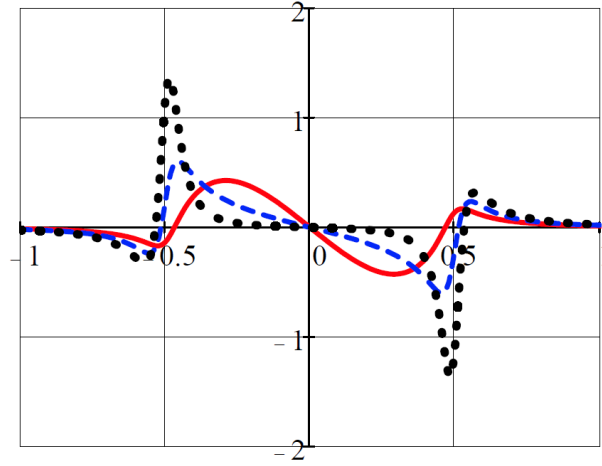


Рис. 4. Распределение касательных напряжений $\tau_{xy}(x, y)$ в сечении $y = 0.05$ для каждого типа разрыва

Раскрывая выражения (21) для функций, стоящих слева, и пользуясь обозначениями (4), получим равенства, аналогичные равенствам (7):

$$\begin{aligned} -\left(\frac{|\lambda|}{\lambda} + 1\right) \widetilde{X}_0 &= 2i(1 + \nu) \widetilde{A}(\lambda), \\ -\left(\frac{\lambda}{|\lambda|} + 1\right) i \widetilde{Y}_0 &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\widetilde{A}(\lambda) = \lambda \int_{-a}^a u(x) e^{i\lambda x} dx. \quad (23)$$

Решая систему (22) относительно $\widetilde{X}_0$ и $\widetilde{Y}_0$, найдем:

$$\widetilde{X}_0 = -2i(1 + \nu) \frac{|\lambda|}{\lambda + |\lambda|} \widetilde{A}(\lambda), \quad \widetilde{Y}_0 = 0. \quad (24)$$

Подставим (24) в (1) и применим обратное преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_{UX}^0(y) \widetilde{X}_0 e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ V(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_{VX}^0(y) \widetilde{X}_0 e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_x(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_X^0(y) \widetilde{X}_0 e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_y(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_{YX}^0(y) \widetilde{X}_0 e^{-i\lambda x} d\lambda, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_{XX}^0(y) \widetilde{X}_0 e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

Раскрывая выражения для операторов, получим решение задачи:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} - \left(\frac{1}{|\lambda|(1+\nu)} - \frac{1}{2}y \right) \left(-2i(1+\nu) \frac{|\lambda|}{\lambda + |\lambda|} \widetilde{A}(\lambda) \right) e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ V(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} - \frac{i}{2\lambda} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + |\lambda|y \right) \left(-2i(1+\nu) \frac{|\lambda|}{\lambda + |\lambda|} \widetilde{A}(\lambda) \right) e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_x(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i \left(2 \frac{|\lambda|}{\lambda} - \lambda y \right) \left(-2i(1+\nu) \frac{|\lambda|}{\lambda + |\lambda|} \widetilde{A}(\lambda) \right) e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_y(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda y \left(-2i(1+\nu) \frac{|\lambda|}{\lambda + |\lambda|} \widetilde{A}(\lambda) \right) e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - |\lambda|y) \left(-2i(1+\nu) \frac{|\lambda|}{\lambda + |\lambda|} \widetilde{A}(\lambda) \right) e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda. \end{aligned} \quad (26)$$

Полученное решение эквивалентно решению для полуплоскости с заданными на ее прямолинейной границе нулевым нормальным напряжением и продольным перемещением $U(x, 0) = u(x)$. В этом случае

$$\widetilde{X}_0 = -(1+\nu)|\lambda|\widetilde{u}(\lambda), \quad \widetilde{Y}_0 = 0. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (1) и переходя к пространству оригиналов, получим

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} - \left(\frac{1}{|\lambda|(1+\nu)} - \frac{1}{2}y \right) [-(1+\nu)|\lambda|\widetilde{u}(\lambda)] e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ V(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} - \frac{i}{2\lambda} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + |\lambda|y \right) [-(1+\nu)|\lambda|\widetilde{u}(\lambda)] e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_x(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i \left(2 \frac{|\lambda|}{\lambda} - \lambda y \right) [-(1+\nu)|\lambda|\widetilde{u}(\lambda)] e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_y(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda y [-(1+\nu)|\lambda|\widetilde{u}(\lambda)] e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - |\lambda|y) [-(1+\nu)|\lambda|\widetilde{u}(\lambda)] e^{-|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \widetilde{u}(\lambda) &= \int_{-a}^a u(x) e^{i\lambda x} dx = i \int_{-a}^a u(x) \sin \lambda x dx = i \widetilde{u}_s(\lambda). \end{aligned} \quad (28)$$

Учитывая нечетность функции $u(x)$ и воспользовавшись формулой Эйлера, окончательно получим следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \frac{1+\nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\nu} - \frac{1}{2}|\lambda|y \right) \tilde{u}_s(\lambda) e^{-|\lambda|y} \sin \lambda x d\lambda, \\
 V(x, y) &= -\frac{1+\nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn} \lambda}{2} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + |\lambda|y \right) \tilde{u}_s(\lambda) e^{-|\lambda|y} \cos \lambda x d\lambda, \\
 \sigma_x(x, y) &= \frac{1+\nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (2\lambda - y \operatorname{sgn} \lambda \lambda^2) \tilde{u}_s(\lambda) e^{-|\lambda|y} \cos \lambda x d\lambda, \\
 \sigma_y(x, y) &= \frac{1+\nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y \operatorname{sgn} \lambda \lambda^2 \tilde{u}_s(\lambda) e^{-|\lambda|y} \cos \lambda x d\lambda, \\
 \tau_{xy}(x, y) &= -\frac{1+\nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (|\lambda| - \lambda^2 y) \tilde{u}_s(\lambda) e^{-|\lambda|y} \sin \lambda x d\lambda.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Рассмотрим, как и в предыдущем пункте, три типа разрывов продольных перемещений, которые отличаются гладкостью контура разрыва вблизи его концов.

1. Пусть форма разрыва имеет вид $u_1(x) = 8x(a^2 - x^2)^2$. Тогда получим

$$\tilde{u}_1(\lambda) = 128i(15 \sin a\lambda + a^3 \lambda^3 \cos a\lambda - 6a^2 \lambda^2 \sin a\lambda - 15a\lambda \cos a\lambda)/\lambda^6. \tag{30}$$

2. Пусть контур разрыва в окрестности концов разреза имеет гладкость, меньшую гладкости функции $u_1(x)$: $u_2(x) = 2x(a^2 - x^2)$. В этом случае будем иметь

$$\tilde{u}_2(\lambda) = -8i(a^2 \lambda^2 \sin a\lambda - 3 \sin a\lambda + 3a\lambda \cos a\lambda)/\lambda^4. \tag{31}$$

3. Пусть форма разрыва вблизи его концов имеет гладкость, меньшую гладкости двух предыдущих функций: $u_3(x) = x\sqrt{a^2 - x^2}$. Преобразование Фурье данной функции определяется по формуле [9]

$$\tilde{u}_3(\lambda) = \pi a^2 i \frac{\operatorname{sgn} \lambda}{|\lambda|} \left(-J_0(a|\lambda|) + 2 \frac{J_1(a|\lambda|)}{a|\lambda|} \right). \tag{32}$$

На рис. 5–7 показаны графики, иллюстрирующие решения вблизи разреза в зависимости от формы разрыва. Сплошные кривые соответствуют $u_1(x)$, штриховые кривые — $u_2(x)$, точечные кривые — $u_3(x)$.

4. Нечетно-симметричная деформация плоскости

4.1. *Разрыв поперечных перемещений.* Будем считать, что на разрезе Γ задан разрыв поперечных перемещений

$$V^+(x, 0) - V^-(x, 0) = 2v(x), \tag{33}$$

где $v(x)$ — нечетная функция.

Повторяя предыдущие выкладки, получим выражения для перемещений и напряжений, которые совпадают с формулами (12).

Это решение совпадает с решением для полуплоскости, на прямолинейной границе которой заданы нулевое касательное напряжение и поперечное перемещение $V(x, 0) = v(x)$.

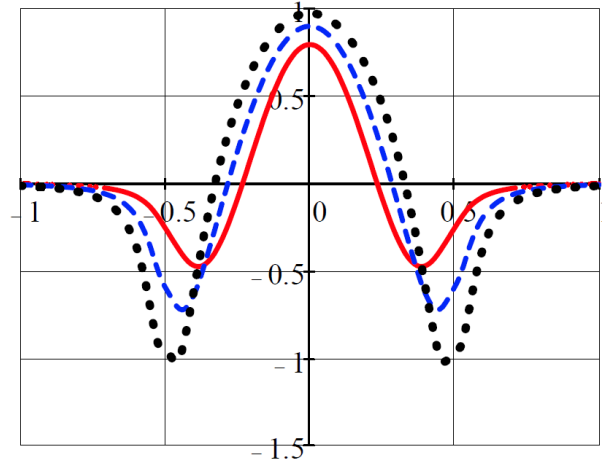


Рис. 5. Распределение нормальных напряжений $\sigma_x(x, y)$ в сечении $y = 0.05$ для каждого типа разрыва

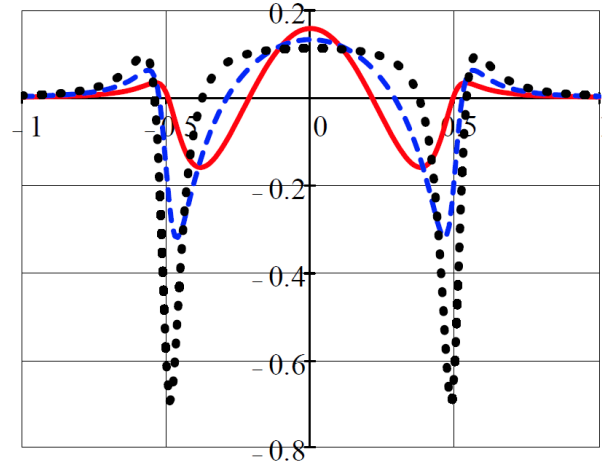


Рис. 6. Распределение нормальных напряжений $\sigma_y(x, y)$ в сечении $y = 0.05$ для каждого типа разрыва

Формы разрыва поперечных перемещений возьмем те же, что и в пункте 3.2.

1. Пусть $v_1(x) = 8x(a^2 - x^2)^2$. В соответствии с (30) получим

$$\tilde{v}_1(\lambda) = 128i(15 \sin a\lambda + a^3 \lambda^3 \cos a\lambda - 6a^2 \lambda^2 \sin a\lambda - 15a\lambda \cos a\lambda)/\lambda^6. \quad (34)$$

2. Пусть $v_2(x) = 2x(a^2 - x^2)$. Тогда

$$\tilde{v}_2(\lambda) = -8i(a^2 \lambda^2 \sin a\lambda - 3 \sin a\lambda + 3a\lambda \cos a\lambda)/\lambda^4. \quad (35)$$

3. Пусть $v_3(x) = x\sqrt{a^2 - x^2}$. В этом случае

$$\tilde{v}_3(\lambda) = \pi a^2 i \frac{\operatorname{sgn} \lambda}{|\lambda|} \left(-J_0(a|\lambda|) + 2 \frac{J_1(a|\lambda|)}{a|\lambda|} \right). \quad (36)$$

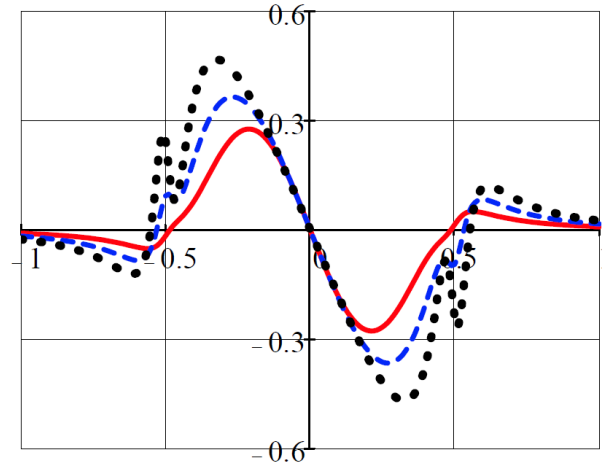


Рис. 7. Распределение касательных напряжений $\tau_{xy}(x, y)$ в сечении $y = 0.05$ для каждого типа разрыва

4.2. *Разрыв продольных перемещений.* Пусть на разрезе Γ задан разрыв продольных перемещений

$$U^+(x, 0) - U^-(x, 0) = 2u(x), \quad (37)$$

причем функция $u(x)$ четна.

Окончательные формулы для перемещений и напряжений имеют вид (26), совпадающий с решением для полуплоскости, когда на ее прямолинейной границе заданы нулевое нормальное напряжение и продольное перемещение $U(x, 0) = u(x)$.

Снова рассмотрим три типа разрывов продольных перемещений, отличающиеся гладкостью контура разрыва вблизи концов разреза.

1. $u_1(x) = 8(a^2 - x^2)^2$. По формуле (16) имеем

$$\widetilde{u}_1(\lambda) = 128(3 \sin a\lambda - 3a\lambda \cos a\lambda - a^2\lambda^2 \sin a\lambda)/\lambda^5. \quad (38)$$

2. $u_2(x) = 2(a^2 - x^2)$. Тогда получим

$$\widetilde{u}_2(\lambda) = 8(\sin a\lambda - a\lambda \cos a\lambda)/\lambda^3. \quad (39)$$

3. $u_3(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$. В этом случае будем иметь

$$\widetilde{u}_3(\lambda) = \pi a J_1(a|\lambda|)/|\lambda|. \quad (40)$$

5. Заключение

1. В работе с помощью метода начальных функций построено решение краевой задачи теории упругости для плоскости с разрезом, на котором заданы разрывы продольных или поперечных перемещений. Рассмотрены три вида разрывов различной гладкости в окрестности концов разреза, и численно дано сравнение решений. В первом случае, когда гладкость контура разрыва максимальна, что соответствует точке возврата, напряжения конечны при приближении к вершине разреза, во втором случае, когда кончик контура разрыва острый, напряжения растут как $\ln r$, а в третьем случае, когда вершина контура разрыва имеет характер эллиптической кривой, напряжения возрастают как $r^{-0.5}$. Здесь $r \rightarrow 0$ — координата, отсчитываемая от вершины разреза.

2. Добавляя к полученному решению решение для полуплоскости, снимающее нормальные и касательные напряжения на прямолинейной границе $y = \alpha$ ($\alpha > 0$), можно получить решение для полуплоскости со свободной границей и с разрывом, ось которого параллельна границе полуплоскости. Аналогично можно получить решение для полуплоскости со свободной границей и разрывом, ось которого перпендикулярна границе полуплоскости.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Власов В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. Москва: Стройиздат, 1975. 224 с.
- [2] Агарев В. А. Метод начальных функций для двумерных краевых задач теории упругости. Киев: Изд-во АН УССР, 1963. 203 с.
- [3] Method of initial functions and integral Fourier transform in some problems of the theory of elasticity / A. V. Matrosov, M. D. Kovalenko, I. V. Menshova et al. // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2020. Vol. 71, no. 1. Art. 24. DOI: 10.1007/s00033-019-1247-3.
- [4] Меньшова И. В., Кержаев А. П., Никитин А. В. Метод начальных функций и преобразование Фурье в задаче для разномодульной полосы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3 (29). С. 41–49.
- [5] Коваленко М. Д., Меньшова И. В., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича. Примеры решений в полуполосе // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С. 121–144.
- [6] Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P. On the exact solutions of the biharmonic problem of the theory of elasticity in a half-strip // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2018. Vol. 69, no. 5. Art. 121. DOI: 10.1007/s00033-018-1013-y.
- [7] Mixed boundary value problems in the theory of elasticity in an infinite strip / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova, A. P. Kerzhaev et al. // Acta Mechanica. 2018. Vol. 229, no. 11. P. 4339–4356. DOI: 10.1007/s00707-018-2244-x.
- [8] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1976. 544 с.
- [9] Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций. Москва: Наука, 1977. 288 с.

A. P. Kerzhaev¹, I. V. Menshova^{1,2}, A. V. Nikitin³, A. M. Samsonov³

METHOD OF INITIAL FUNCTIONS AND INTEGRAL FOURIER TRANSFORM IN THE PROBLEM FOR A PLANE WITH DISPLACEMENT DISCONTINUITIES

¹*Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

²*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

³*Cheboksary Institute (Branch) of the Moscow Polytechnic University, Cheboksary, Russia*

Abstract. The article considers the application of the method of initial functions in the space of Fourier transforms to solving problems for a plane with a displacement discontinuity. Even-symmetric and odd-symmetric deformations relative to the crack axis are considered. The final solutions to all the problems are represented in the form of improper integrals. Examples are given in which three types of discontinuities are considered, differing in the smoothness of the discontinuity contour near its ends. The solutions are obtained quickly, simply and, unlike the classical solution, without using the theory of functions of a complex variable.

Keywords: method of initial functions, plane, displacement discontinuity, integral Fourier transform.

REFERENCES

- [1] Vlasov V. V. Method of initial functions in problems of the theory of elasticity and structural mechanics. Moscow: Stroiizdat, 1975. 224 p. (in Russian).
- [2] Agarev V. A. Method of initial functions for two-dimensional boundary value problems of the theory of elasticity. Kiev: Izd. Akad. Nauk USSR, 1963. 203 p. (in Russian).
- [3] Method of initial functions and integral Fourier transform in some problems of the theory of elasticity / A. V. Matrosov, M. D. Kovalenko, I. V. Menshova et al. // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2020. Vol. 71, no. 1. Art. 24. DOI: 10.1007/s00033-019-1247-3.
- [4] Menshova I. V., Kerzhaev A. P., Nikitin A. V. Method of initial functions and Fourier transform in the problem for a multi-modulus strip // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I. Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2016. no. 3 (29). P. 41–49. (in Russian).
- [5] Kovalenko M. D., Menshova I. V., Shulyakovskaya T. D. Expansions in Fadde–Papkovich functions: examples of solutions in a half-strip // Izv. RAN. MTT. 2013. no. 5. P. 121–144. (in Russian).
- [6] Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P. On the exact solutions of the biharmonic problem of the theory of elasticity in a half-strip // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2018. Vol. 69, no. 5. Art. 121. DOI: 10.1007/s00033-018-1013-y.
- [7] Mixed boundary value problems in the theory of elasticity in an infinite strip / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova, A. P. Kerzhaev et al. // Acta Mechanica. 2018. Vol. 229, no. 11. P. 4339–4356. DOI: 10.1007/s00707-018-2244-x.
- [8] Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elements of the theory of functions and functional analysis. Moscow: Nauka, 1976. 544 p. (in Russian).
- [9] Brychkov Y. A., Prudnikov A. P. Integral transforms of generalized functions. Moscow: Nauka, 1977. 288 p. (in Russian).

Kerzhaev Alexander Petrovich, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
Menshova Irina Vladimirovna, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia.
Nikitin Andrey Vitalievich, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Associate Professor, Cheboksary Institute (Branch) of the Moscow Polytechnic University, Cheboksary, Russia.
Samsonov Alexey Mikhailovich, Senior Lecturer, Cheboksary Institute (Branch) of the Moscow Polytechnic University, Cheboksary, Russia.