

Л. В. Левина, И. И. Марахова, В. Б. Пеньков

РЕАЛИЗАЦИЯ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия

Аннотация. Рассмотрены итерационные процессы для решения краевых задач математической физики и, в первую очередь, – механики. Причины порождения процессов: многополостность тел (алгоритм Шварца), композиционные среды, построение аналитических решений, физическая и геометрическая нелинейность определяющих соотношений (подход Линшtedта-Пуанкаре). Оценены особенности энергетического метода граничных состояний в этих подходах. В качестве примера рассмотрено применение алгоритма Шварца к решению основной смешанной задачи термостатики. .

Ключевые слова: алгоритм Шварца, метод возмущений, малый параметр, метод Линшtedта-Пуанкаре, энергетические методы, метод граничных состояний, МГС, МГСВ.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.008

УДК: 539.3+518.5

Введение. Исторически зародилась тенденция к усложнению постановок краевых задач математической физики, механики сплошных сред. Причины этого: многополостность тел, взаимодействие явлений различной физической природы, поиск точных и приближенных аналитических решений, учет свойств нелинейного характера. Классически решение сводится к итерационной последовательности линейных задач. Эффективным средством явилось использование энергетического метода граничных состояний (МГС), исходящего из изоморфизма гильбертовых пространств внутренних и граничных состояний тела.

© Левина Л. В., Марахова И. И., Пеньков В. Б., 2022

Левина Любовь Владимировна

e-mail: sataalkina_lyubov@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия,

Марахова Ирина Игоревна

e-mail: marahova.irina@yandex.ru, студент кафедры прикладной математики, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия,

Пеньков Виктор Борисович

e-mail: vbrenkov@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры общей механики, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия.

Поступила 10.11.2022

1. Классические итерационные процессы

1.1. Многополостность. Тело занимает замкнутую область $V \subset R^3$ и содержит множество из N непересекающихся полостей $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_N$, где $\bar{V}_k = R^3 \setminus V_k$; $V_i \cap V_j = \emptyset$ ($i \neq j$). Следовательно, $V = \bigcap_{k=0}^N V_k$, где V_0 есть либо односвязная ограниченная область, либо $V_0 \equiv R^3$. Любой вычислительный процесс преодолевает трудности, связанные с учетом особенностей участков границ множества ∂V , на которых также возможны различные варианты постановок граничных условий (ГУ).

Пусть краевая задача представлена в операторной форме (L – линейный оператор):

$$L\xi = f, \quad x \in V \quad (1)$$

Правая часть f отвечает за неоднородность линейной постановки задачи, ξ содержит информацию о внутреннем состоянии тела. В общем случае линейности граничное условие (ГУ) имеет форму

$$G\gamma = g, \quad x \in \partial V, \quad (2)$$

где G характеризует тип ГУ, а g – их значения; γ – “след” состояния ξ на ∂V .

В случае энергетических методов эффективность для решения краевой задачи (1), (2) показал подход Треффца [1]. Решение представляется в виде ряда по элементам базиса:

$$\xi = \sum_{k=0}^K c_k \xi^k \quad (3)$$

Базис составляют состояния ξ^k , удовлетворяющие определяющим соотношениям среды.

Продemonстрируем подход Треффца на примере уравнения Пуассона

$$\Delta \xi(x, y, z) = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V. \quad (4)$$

Пусть значение $k = 0$ отвечает частному решению уравнения (4).

Полагая $c_0 = 1$ и корректируя ГУ (2) в форме

$$\sum_{k=1}^K c_k \Delta \xi^k = 0 \quad (G\xi^0 = f),$$

приходим к выводу, что все ξ^k являются линейно-независимыми гармоническими функциями. Для односвязной ограниченной области V_0 набор элементов базиса можно составить отрезком гармонических многочленов известной последовательности [2]:

$$\xi^k \in \{x, y, z, xy, xz, yz, x^2 - y^2, x^2 - z^2, xyz, \dots\}$$

Обозначим $Q_n(x, y, z)$ любой однородный гармонический многочлен порядка n из указанного списка. Доказано [3], что функция вида

$$P_n(x, y, z) = \frac{Q_n(x, y, z)}{r^{2n+1}}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

является гармонической в любой ε -окрестности начала координат. Соответственно $P_n(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ являются таковыми вне ε -окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и исчезающими на бесконечности. При формировании списка $\{\xi^k\}$ требуется удерживать значительное число элементов для каждой полости со своими центрами. Если обозначить мощности отрезков указанных базисов через N_j , то мощность декартова

произведения состояний от каждого элемента базиса равна $K = \prod_{j=0}^N N_j$, где $N_0 = 1$ в случае, когда область $V_0 \equiv R^3$. Эта размерность зачастую весьма велика для проведения практических расчетов.

Итерационный подход Шварца [4] декомпозирует решение задачи: на каждом шаге решается последовательность задач поочередно для каждой из областей V_k . После каждого решения выполняется коррекция в ГУ всех участков границы. Это снимает проблему высокой размерности базиса. Сходимость “алгоритма Шварца” не доказана, но использование подхода к задачам эластостатики показало такую же уже при 3-4 итерациях [5].

1.2. Физическая композиционность. Усложнение физических свойств среды приводит к трудностям, определяемым композицией разнообразных физических характеристик. Примером служит термоэластостатика изотропного однородного тела.

Ее определяющими соотношения являются: 1) уравнения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad x \in V, \quad (5)$$

где ε_{ij} – деформации, u_i – перемещения; 2) уравнения Ламе (λ, μ – упругие постоянные).

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad x \in V, \quad (6)$$

где σ_{ij} – напряжения, δ_{ij} – символ Кронекера; 3) уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad x \in V. \quad (7)$$

Здесь X_i – компонента объемной силы.

В задаче термостатики уравнение Пуассона связывает температуру T с объемным теплоисточником Q посредством коэффициента температуропроводности κ :

$$T_{,ii} = -\frac{1}{\kappa} Q, \quad x \in V. \quad (8)$$

“Комбинированная” термоэластостатическая среда содержит в определяющих соотношениях набор из (5), (6), (8) и закон Дюамеля–Неймана:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha T \delta_{ij}, \quad x \in V. \quad (9)$$

Здесь α – коэффициент температурного расширения.

При каждом упругом состоянии (мощностью списка N^E) возможно произвольное температурное состояние (N^T). Базис термоэластостатических состояний имеет мощность $K = N^E N^T$. Комбинирование сред также порождает проблему размерности.

Если характеристики упругого и теплового состояний не “завязаны” в ГУ, то краевая задача – несвязанная. Строится поле температуры (8) при соответствующих ГУ. Уравнение Дюамеля–Неймана вырождаются в обобщенный закон Гука с объемными силами

$$F_i = X_i - (3\lambda + 2\mu) \alpha T_{,i} \quad (10)$$

В общем случае задача термоэластостатики может быть связанной. Возникает необходимость преодоления сложностей, порожденных числом K . Зарождается версия применения итераций по типу алгоритма Шварца: начальное приближение для температурного поля корректирует объемные силы и ГУ, решается эластостатическая задача, корректируются ГУ для температурной задачи и т.д.

1.3. Полнопараметрические решения. Фундаментальное значение имеют аналитические решения, явно содержащие все параметры задачи. Решение достаточно выполнить один раз. Практические расчеты по оценке полей при конкретных значениях параметров сводятся к элементарному расчету по готовым формулам.

Рассмотрим пример организации полнопараметрического решения (ППР, [6]) для эластостатического тела с характерным геометрическим размером R . В случае однородности и изотропии упругие параметры Ламе μ , $\lambda = 2\nu\mu/(1-2\nu)$ (ν – коэффициент Пуассона), можно использовать при обезразмеривании. При $\nu_0 = 1/4$ после обезразмеривания масштабом μ получается $\mu = \lambda = 1$.

Безразмерное решение не содержит истинного значения коэффициента Пуассона. Будем считать его слабо отличающимся от ν_0 : $\nu = \nu_0 + \omega$. Малый параметр ω может использоваться для организации итерационного процесса на основе метода возмущений. Рассмотрим декомпозицию по параметру ω при $\nu_0 = 1/4$. При $\lambda_0 = \mu_0 = 1$ для λ имеем:

$$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_* \omega^k, \quad \lambda_* = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 2, & k > 0 \end{cases}.$$

Разложения по степеням ω приводят к последовательности задач в итерациях (k) :

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{ij}^{(k)} &= u_{i,j}^{(k)} + u_{j,i}^{(k)}, \\ s_{ij}^{(k)} &= \sigma_{ij}^{(k)} - \tilde{\sigma}_{ij}^{(k)} = \lambda_* \varepsilon_{mm}^{(k)} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^{(k)}, \\ s_{ij,j}^{(k)} + \tilde{X}_i^{(k)} &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{где } \tilde{\sigma}_{ij}^{(k)} = \lambda_* \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_{mm}^{(l)} \omega^l \delta_{ij}, \quad \tilde{X}_i^{(k)} = \lambda_* \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_{mm,i}^{(l)}.$$

Соотношения (11) являются определяющими для линейной изотропной теории упругости, но значения λ_* имеет два уровня. Разрешающую систему уравнений надо готовить дважды. После перехода к размерным величинам приближенное решение содержит все параметры задачи.

1.4. Нелинейные определяющие соотношения. Причины проявления нелинейностей различны: 1) “геометрический” характер нелинейности. Например, – учет составляющей Альманси в определении тензора деформации [7]; 2) физически нелинейные зависимости параметров среды от ее состояния (нелинейная упругость); 3) неоднородность среды. Этот фактор нелинейным не считается, но способствует организации итерационного процесса при проведении вычислений [8].

Использование подхода Линшtedта-Пуанкаре [9] во многих случаях позволяет нелинейную задачу преобразовать к “слабо - нелинейному” операторному представлению

$$L\xi + \beta M\xi = 0, \quad \beta \ll 1. \quad (12)$$

Здесь L – главная линейная часть операторного уравнения, M – собственно нелинейная составляющая, β – малый параметр. В предположении о разложимости нелинейного оператора M по итерациям

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} M^{(k)} \xi^{(k)} \quad (13)$$

удается представить вычислительный процесс в виде последовательности $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ решения задач линейного характера:

$$L\xi^{(0)} = 0; \quad L\xi^{(k)} = -M^{*(k-1)} \xi^{(k-1)}. \quad (14)$$

Правая часть соотношений (14) является уже известной функциональной зависимостью.

Для успешного решения соответствующих (14) краевых задач необходимо эффективно строить как частные решения $\xi^{*(k)}$ для каждой итерации k , так и решение соответствующей однородной задачи

$$L\xi^{(k)} = 0 \quad (15)$$

при скорректированных ГУ за счет поправки от частного решения.

На каждом итерационном шаге сохраняют силу все выше описанные причины усложнения процесса построения решения. Убедительным примером линейаризации методом Линштедта-Пуанкаре может служить исследования напряженно-деформированного состояния протяжённого упругого тела [10], имеющего малые деформации, но конечные перемещения.

2. Основные положения метода граничных состояний. Энергетический метод граничных состояний (МГС) исходит из изоморфизма внутреннего Ξ и граничного Γ пространств состояний среды, заключенной в области V с границей ∂V . Под внутренним состоянием ξ понимается избыточный набор характеристик среды, согласованных определяющими соотношениями. Под граничным состоянием γ понимается “след” внутреннего состояния на границе тела. Он также избыточен; его набор должен гарантировать однозначное восстановление соответствующего внутреннего состояния: $\gamma \rightarrow \xi$. Будем полагать оба пространства линейными, бесконечномерными, полными, всюду плотными. При наличии равных скалярных произведений

$$(\xi^1, \xi^2)_{\Xi} = (\gamma^1, \gamma^2)_{\Gamma} \quad (16)$$

для изоморфных пар элементов $\xi^i \leftrightarrow \gamma^i$, $i \in \{1, 2\}$ они состоят в гильбертовом изоморфизме $\Xi \leftrightarrow \Gamma$.

При условии сепарабельности пространств Ξ, Γ в них существуют изоморфные счетные базисы элементов:

$$\{\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n, \dots\} \leftrightarrow \{\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n, \dots\},$$

которые полагаем ортонормированными в смысле скалярных произведений (16).

Любая изоморфная пара элементов этих пространств имеет структурно одинаковые разложения Фурье по соответствующим базисам:

$$\xi = \sum_{k \in N} c_k \xi^k, \quad \gamma = \sum_{k \in N} c_k \gamma^k, \quad c_k = (\xi, \xi^k)_{\Xi} = (\gamma, \gamma^k)_{\Gamma}. \quad (17)$$

Метод граничных состояний позволяет переписать граничные условия в форме бесконечной системы алгебраических уравнений (БСУ) относительно коэффициентов Фурье (N – размерность усеченного базиса)

$$A \mathbf{c} = \mathbf{b}, \quad (18)$$

$$A = \{a_{ij}\}_{N \times N}, \quad \mathbf{b} = \{b_i\}_N, \quad \mathbf{c} = \{c_j\}_N.$$

Матрица A коэффициентов определяется исходным базисом граничных состояний и типом ГУ. Вектор правых частей несет точную информацию о правой части (4). Структура матрицы A предписана типом ГУ.

Например, в классических вариантах некоторых краевых задач она является единичной и тогда решение БСУ сводится к рутинному вычислению коэффициентов Фурье через свертку $g(x)$ с актуальным набором $\langle \gamma^k \rangle$ – подмножеством элементов искомого граничного состояния γ , отвечающим условиям корректности:

$$c_k = (g, \langle \gamma^k \rangle)_{\Gamma}. \quad (19)$$

При практических расчетах приходится проводить усечения счетного базиса до некоторого конечного значения $K \in N$. Тогда о качественно-точностном характере решения удается судить по неравенству Бесселя

$$\sum_{k=1}^K c_k^2 \leq (\gamma, \gamma)_{\Gamma}. \quad (20)$$

Значение γ заранее является неизвестным. Однако факт насыщения суммы Бесселя (левая часть неравенства Бесселя) позволяет судить о приемлемости удерживаемого значения K . Строгая оценка может быть получена сопоставлением левой и правой частей ГУ (2) и оценкой их разности по любой удовлетворяющей исследователя норме.

Линейность оператора L позволяет представить решение краевой задачи для в виде суммы

$$\xi = \xi^0 + \xi^*, \quad (21)$$

где ξ^* – частное решение, тождественно удовлетворяющее операторному уравнению, ξ^0 – решение краевой задачи для однородного операторного уравнения

$$L \xi^0 = 0 \quad (22)$$

при скорректированных ГУ

$$G \gamma^0 = g - G \gamma^*, \quad \gamma^* \leftrightarrow \xi^*. \quad (23)$$

МГС далее используется для построения решения ξ^0 на основе базиса состояний, соответствующего однородному уравнению с последующей композицией (21). Рассмотрим примеры формирования разрешающей БСУ для двух типов сред.

2.1. Изотропная эластостатика. В задачах об упругом равновесии изотропного материала под внутренним состоянием удобно понимать набор характеристик $\xi^E = \{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\}$, согласованных соотношениями (5)-(7). Базис элементов пространства внутренних состояний эластостатического тела Ξ^E эффективно выписывается средствами общих решений Аржаных–Слободянского для внутренности ограниченной области и внешности полости [7]. Выход на границу тела формирует граничное состояние $\gamma^E = \{u_i, p_i\} \in \Gamma^E$, $p_i = \sigma_{ij} n_j$, $x \in \partial V$, где $\mathbf{n} = \{n_j\}$ – единичный вектор внешней нормали.

Равенство скалярных произведений в обоих пространствах обеспечивает принцип возможных перемещений в эластостатике

$$(\xi_E^{(1)}, \xi_E^{(2)}) \equiv \int_V \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV = \int_{\partial V} p_i^{(1)} u_i^{(2)} dS \equiv (\gamma_E^{(1)}, \gamma_E^{(2)}), \quad (24)$$

где верхние индексы (1), (2) отвечают любым элементам изоморфных базисов. Ниже считаем оба базиса ортонормированными.

Приведем классические варианты разрешающих систем уравнений вида (18).

Первая основная задача. На границе тела заданы усилия: $\mathbf{p}(x), x \in \partial V$. Параметры БСУ определяются выражениями

$$a_{ij} = \delta_{ij}, \quad b_i = \int_{\partial V} p_k u_k^{(i)} ds, \quad x \in \partial V. \quad (25)$$

Вторая основная задача. На границе ∂V заданы поверхностные перемещения $\mathbf{u}(x)$. Параметры БСУ:

$$a_{ij} = \delta_{ij}, \quad b_i = \int_{\partial V} u_k p_k^{(i)} ds, \quad x \in \partial V. \quad (26)$$

Основная смешанная задача. Граница ∂V тела разбита на два класса: $\partial V = S_p \cup S_u$, $S_p \cap S_u = \emptyset$. На S_p удержаны поверхностные усилия $\mathbf{p}$, на S_u – перемещения $\mathbf{u}$. Параметры БСУ таковы [10]:

$$a_{ij} = \int_{S_p} u_k^i p_k^j ds + \int_{S_u} p_k^i u_k^j ds, \quad b_i = \int_{S_p} p_i u_k^i ds + \int_{S_u} u_k p_k^i ds, \quad x \in \partial V. \quad (27)$$

2.2. Линейная термостатика. Элементами базисов пространств внутренних и граничных состояний удобно обозначать наборы характеристик $\xi^T = \{T, T_{,i}\} \in \Xi^T$, $x \in V$ и $\gamma^T = \{T, dT/d\mathbf{n}\} \in \Gamma^T$, $x \in \partial V$. Скалярные произведения определяют основные свойства гармонических функций

$$(\xi_T^{(1)}, \xi_T^{(2)}) = \int_V T_{,i}^{(1)} T_{,i}^{(2)} dV = \int_{\partial V} T^{(1)} \frac{dT^{(2)}}{d\mathbf{n}} dS = (\gamma_T^{(1)}, \gamma_T^{(2)}). \quad (28)$$

В случае задачи Дирихле на границе тела удерживаются значения приведенной температуры: $T(x), x \in \partial V$ и разрешающая система уравнений имеет коэффициенты

$$a_{ij} = \delta_{ij}, \quad b_i = \int_{\partial V} T \frac{dT^{(i)}}{d\mathbf{n}} dS, \quad x \in \partial V. \quad (29)$$

В задаче Неймана на границе определен тепловой поток $\frac{dT}{d\mathbf{n}}, x \in \partial V$. Разрешающие уравнения содержат коэффициенты

$$a_{ij} = \delta_{ij}, \quad b_i = \int_{\partial V} \frac{dT}{d\mathbf{n}} T^{(i)} dS, \quad x \in \partial V. \quad (30)$$

В смешанной задаче, когда на границе удержана линейная комбинация $\alpha T + \beta \frac{dT}{d\mathbf{n}}$, справедливы выражения:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{\partial V} \left(\alpha T^{(j)} + \beta \frac{dT^{(j)}}{d\mathbf{n}} \right) \left(\alpha T^{(i)} + \beta \frac{dT^{(i)}}{d\mathbf{n}} \right) dS, \\ b_i &= \int_{\partial V} \left(\alpha T + \beta \frac{dT}{d\mathbf{n}} \right) \left(\alpha T^{(i)} + \beta \frac{dT^{(i)}}{d\mathbf{n}} \right) dS, \quad x \in \partial V \end{aligned} \quad (31)$$

В основной *смешанной* задаче, когда граница ∂V тела разбита на два класса: $\partial V = S_D \cup S_N$, $S_D \cap S_N = \emptyset$ с условиями Дирихле (S_D) и Неймана (S_N), коэффициенты БСУ рассчитываются так:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{S_D} T^{(i)} \frac{dT^{(j)}}{d\mathbf{n}} dS + \int_{S_N} \frac{dT^{(j)}}{d\mathbf{n}} T^{(i)} dS, \\ b_i &= \int_{S_D} T \frac{dT^{(i)}}{d\mathbf{n}} dS + \int_{S_N} \frac{dT}{d\mathbf{n}} T^{(i)} dS, \quad x \in \partial V. \end{aligned} \quad (32)$$

Во всех случаях в силу линейной независимости элементов базиса решение разрешающей системы линейных алгебраических уравнений единственно.

3. Особенности метода граничных состояний в итерационных процессах. На каждом шаге итерационных процессов решаются линейные краевые задачи, ставящиеся для набора определяющих соотношений среды и удовлетворяющие на границе тела корректным условиям различных типов. Использование для решения МГС предполагает выполнение ряда исходных положений довольно общего характера.

1°. Пространство внутренних состояний Ξ среды является гильбертовым: линейным со скалярным произведением $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})_{\Xi}$. Набор характеристик согласован определяющими соотношениями. Например, для (5), (6), (8), (9) это $\xi = \{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, T, T_{,i}\}$. Соответствующее граничное состояние содержит набор характеристик: $\gamma = \{u_i, p_i, T_i, dT_i/d\mathbf{n}\} \in \Gamma$. В силу истинности выражений (24), (28) можно определить скалярные произведения:

$$\begin{aligned} (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) &= \alpha_E (\xi_E^{(1)}, \xi_E^{(2)}) + \alpha_T (\xi_T^{(1)}, \xi_T^{(2)}), \\ (\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}) &= \alpha_E (\gamma_E^{(1)}, \gamma_E^{(2)}) + \alpha_T (\gamma_T^{(1)}, \gamma_T^{(2)}), \end{aligned}$$

где α_E, α_T – заданные положительные множители.

2°. Каждому элементу $\xi \in \Xi$ изоморфно соответствует элемент гильбертова пространства граничных состояний $\gamma \in \Gamma$. Скалярные произведения изоморфных пар элементов $\xi^{(k)} \leftrightarrow \gamma^{(k)}$ равны: $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})_{\Xi} = (\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)})_{\Gamma}$.

3°. Базисы используемых ниже пространств состояний считаем сформированными и ортонормированными любым способом [11].

4°. Граничные условия (2) использованием разложения в ряды Фурье (3) приводятся к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (18).

5°. Решение усеченной БСУ уровнем K обеспечивается на двух этапах. Во-первых, из неравенства Бесселя $\sum_{k=1}^K c_k^2 \leq (\xi, \xi)_{\Xi}$ по характеру насыщения суммы Бесселя (левая

часть неравенства) можно судить о приемлемости назначаемой величины. Во-вторых, оценка невязки ГУ с γ характеризует точность и можно корректировать значение K .

6°. Построение частного решения неоднородной задачи в случае регулярных правых частей принципиальных трудностей не составляет. Можно достаточно точно и даже строго выписывать частные решения для объемных воздействий полиномиального типа [12].

МГС при решении итерационных задач имеет ряд положительных факторов:

1) в случае многополостности ортогонализация базисов для “частных” тел выполняется единожды: ресурсосбережение;

- 2) при смешанных типах ГУ факт отражения “смешанности” в матрице A разрешающей БСУ достаточно выполнить один раз на начальном приближении. На последующих итерациях решается основная задача, для которой эта матрица – единичная;
- 3) при построении полнопараметрического решения ортогонализация проводится дважды: сначала – для первого приближения, затем – для всех последующих;
- 4) физически композиционные задачи можно разложить по физическому смыслу на этапах подготовки базисов. Просматривается подход, аналогичный алгоритму Шварца;
- 5) при решении нелинейных задач сочетанием метода возмущений и МГС (МГСВ, [13]) ортогонализация и конструирование матрицы A выполняется единожды.

4. Термостатическое состояние полушара со сферической полостью.

Однородная теплопроводная среда занимает область полушара ($z \leq 0$) с шаровидной полостью с центром $O_1(0, 0, -3)$. Полагаем процедуры обезразмеривания выполненными, радиус полости равен 1, радиус полусферы, ограничивающей тело, равен 10. Теплоисточники отсутствуют. Краевые условия соответствуют основной смешанной задаче теплопроводности: на границе полушара температура соответствует отсчетному уровню, на границе полости задан температурный поток: $T|_{\partial V_1} = 0$, $dT/d\mathbf{n}|_{\partial V_2} = 1$, $\mathbf{n}$ – направление внешней нормали по отношению к телу. Требуется определить распределение температуры в теле, используя алгоритм Шварца.

На начальном шаге итерации выполнена последовательность действий: 1) решена задача Дирихле для уравнения Лапласа для полушара. В ГУ для внешности полости внесена поправка величиной $dT^{(0)}/d\mathbf{n}$; 2) решена задача Неймана для внешности полости. В ГУ следующей итерации для полушара внесена поправка величиной $T_{\text{II}}^{(0)}$. По результату первой итерации сформировано приближение для поля температуры $T^{(0)} = T_{\text{I}}^{(0)} + T_{\text{II}}^{(0)}$.

На последующих шагах реализуется только постановку задачи Дирихле на обеих границах: 1) в задаче для полушара строится решение $T_{\text{I}}^{(k+1)}$ и формируется поправка в ГУ на величину $T_{\text{II}}^{(k+1)} = T_{\text{II}}^{(k)} - T_{\text{I}}^{(k+1)}|_{\partial V_{\text{II}}}$; 2) решается задача Дирихле для внешности полости, определяется $T_{\text{II}}^{(k+1)}$ и готовится поправка в ГУ следующей итерации. Итерационно поле температуры накапливается: $T^{(k+1)} = T^{(k)} + T_{\text{I}}^{(k)} + T_{\text{II}}^{(k)}$.

Контроль за корректностью осуществлялось двумя способами: 1) фактом насыщения суммы Бесселя; 2) визуальной оценкой сходимости решения. На рис. 1,2 приведены графики, отражающие значения коэффициентов Фурье для внутренности полушара.

После каждой итерации поле температуры составило значения:

$$T^{(0)} = 1/r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+3)^2},$$

$$T^{(1)} = -0.30 + 0.007(x^2 + y^2) - 0.068z + 0.003(x^2 + y^2)z - 0.015z^2 - 0.002z^3 + 0.035/r^5 - \\ - 0.002(x^2 + y^2)/r^5 + (0.024z + 0.004z^2)/r^5 + (0.060 + 0.020z)/r^3 + 1.183/r,$$

$$T^{(2)} = -0.348 + 0.008(x^2 + y^2) - 0.076z + 0.004(x^2 + y^2)z - 0.016z^2 - 0.002z^3 + 0.035/r^5 - \\ - 0.002(x^2 + y^2)/r^5 + 0.024z/r^5 + 0.004z^2/r^5 + 0.070/r^3 + 0.023z/r^3 + 1.216/r.$$

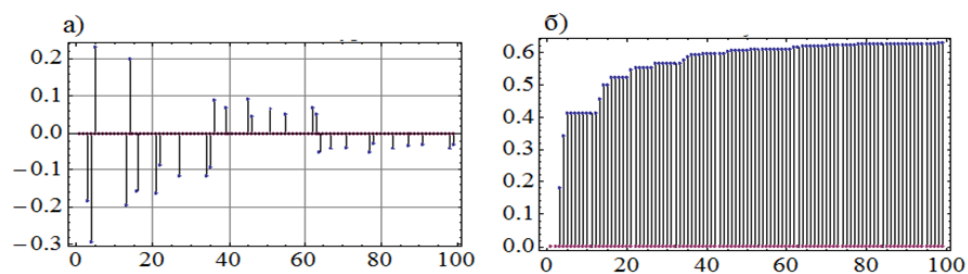


Рис. 1. Приближение I. Коэффициенты Фурье (а) и суммы Бесселя (б)

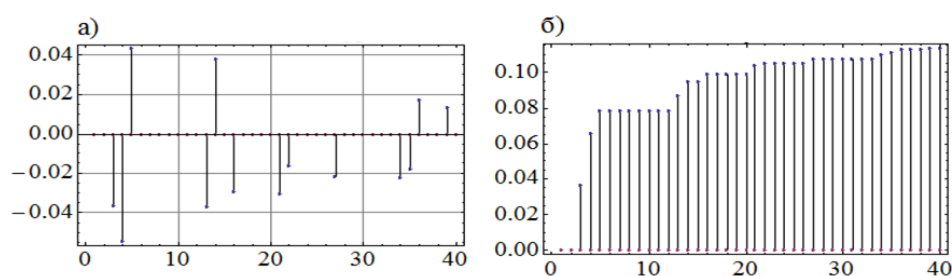


Рис. 2. Приближение II. Коэффициенты Фурье (а) и суммы Бесселя (б)

Для наглядности в оценке процесса сходимости приведено сравнение графиков распределения температуры вдоль оси z в слое $z \in [-2, 0]$. Графики помечены номерами итераций. Из них видно явное стремление к сходимости в итерационном процессе.

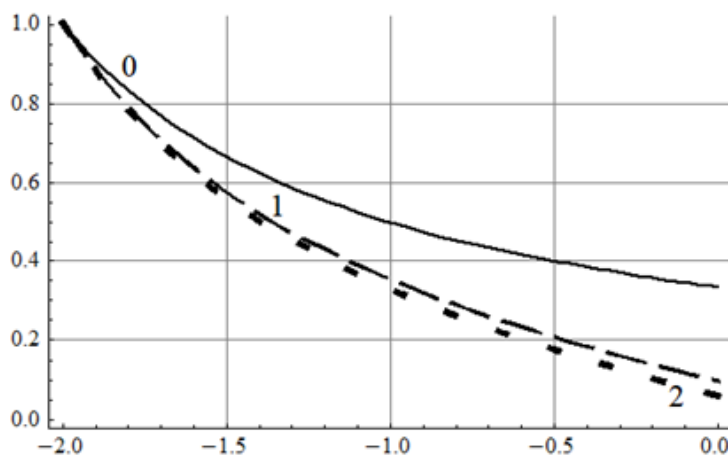


Рис. 3. Итерационное изменение поля температуры: 0,1,2 – номера итераций

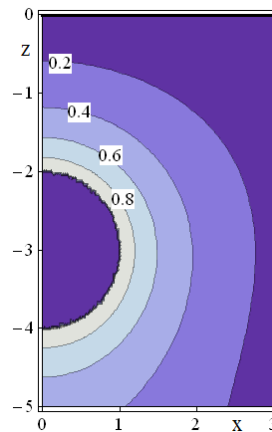


Рис. 4. Фрагмент термополя вблизи полости

После двух корректирующих итераций построено поле температуры. Его линии уровня в окрестности полости приведены на рис. 4.

Заключение

- (1) Применение итерационных подходов к решению различных задач математической физики является регулярным фактором в проведении научных исследований.
- (2) МГС является эффективным аппаратом преодоления трудностей, порождаемых введением итерационных процессов, обусловленных причинами различной природы: многополостностью тела, многофакторностью физических свойств среды, нелинейностью определяющих соотношений, и даже – желанием построить ППР.
- (3) Подход МГС является самодостаточным при решении линейных задач: уравнения определяющих соотношений среды удовлетворяются тождественно; точность решения оценивается невязкой при сопоставлении граничного состояния с ГУ; существует естественный подход для повышения точности посредством прогнозирования необходимой размерности базисов состояний.
- (4) Сходимость итерационного алгоритма Шварца продемонстрирована на решении основной смешанной задачи термостатики для однополостного ограниченного тела (полусфера с заглубленной сферической полостью). Проиллюстрированы процесс сходимости и результирующее температурное поле.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Trefftz E. Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren: Verhandl 2er Internat. Kongress. Techn. Mechanik. Zürich, 1926. p. 131–137.
- [2] Пеньков В. Б., Пеньков В. В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т. 2. № 2. С. 115–137.
- [3] Пеньков В. Б., Саталкина Л. В., Шульмин А. С. Применение метода граничных состояний для анализа упругой среды с полостями и включениями // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78. Вып. 4. С. 542–556.

- [4] Schwarz H. A. Über einige Abbildungsaufgaben // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1869. p. 65–83.
- [5] Пеньков В. Б., Рыбакова М. Р., Левина Л. В. Применение алгоритма Шварца к пространственным задачам теории упругости // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2015. Вып. 3. С. 165–176.
- [6] Новикова О. С., Пеньков В. Б., Левина Л. В. Метод граничных состояний с возмущениями как способ организации полнопараметрического аналитического решения второй основной задачи линейной эластостатики // Вестник ЧПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 2 (36). С. 26–37.
- [7] Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела М.: Наука, 1979. 744 с.
- [8] Саталкина Л. В. Метод граничных состояний в задачах теории упругости неоднородных тел и термоупругости: дисс. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.04; науч. рук. В.Б. Пеньков; Липецк, 2010. 108 с.
- [9] Nayfeh A. H. Introduction to perturbation techniques USA: A Wiley–interscience publication. John Wiley & Sons, Inc , 1993. 519 p.
- [10] Пеньков В. Б., Левина Л. В., Новиков Е. А., Наза С. Ю. Решение краевой задачи для слабо-нелинейного операторного уравнения геометрически нелинейной упругой среды средствами метода граничных состояний с возмущениями // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. трудов Международной научной конференции. Воронеж, 2021. С. 1387–1393.
- [11] Пеньков В. Б., Левина Л. В. Сравнительный анализ процедур ортогонализации базисов евклидовых и гильбертовых пространств // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2020. № 3. С. 103–107.
- [12] Пеньков В. Б., Левина Л. В. Метод опорного базиса построения частного решения линейного неоднородного операторного уравнения математической физики // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2022. № 3. С. 91–101.
- [13] Пеньков В. Б., Саталкина Л. В. Метод граничных состояний с возмущениями: неоднородные и нелинейные задачи теории упругости и термоупругости. Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co., 2012. 108 с.

L. V. Levina, I. I. Marakhova, V. B. Penkov

IMPLEMENTATION OF ITERATIVE PROCESSES BY THE ENERGY METHOD

Lipetsk state technical university, Lipetsk, Russia

Abstract. Iterative processes for solving boundary value problems of mathematical physics and, first of all, mechanics are considered. The reasons for the generation of processes: multi-plane bodies (Schwartz algorithm), compositional media, the construction of analytical solutions, physical and geometric nonlinearity of the defining relations (Linstedt-Poincare approach). The features of the energy method of boundary states in these approaches are evaluated. As an example, the application of the Schwartz algorithm to the solution of the main mixed problem of thermostatics is considered.

Keywords: Schwartz algorithm, perturbation method, small parameter, Linstedt-Poincare method, energy methods, boundary state method, MBS, MBSP.

Levina Lyubov Vladimirovna, Ph.D., Associate Professor, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia,

Marakhova Irina Igorevna, Student, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia,

Penkov Viktor Borisovich, Dr. Sci. Phys. and Math, Professor, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia.

REFERENCES

- [1] Trefftz E. Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren: Verhandl 2er Internat. Kongress. Techn. mechanic. Zürich, 1926. pp. 131-137.
- [2] Penkov V. B., Penkov V. V. Boundary state method for solving problems of linear mechanics // Far Eastern Mathematical magazine. 2001. V. 2. No. 2. pp. 115-137.
- [3] Penkov V. B., Satalkina L. V., Shulmin A. S. Application of the method of boundary states for the analysis of elastic media with cavities and inclusions // Applied Mathematics and Mechanics. 2014. V. 78. Issue. 4. pp. 542-556.
- [4] Schwarz H. A. Über einige Abbildungsaufgaben // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1869. pp. 65-83.
- [5] Penkov V. B., Rybakova M. R., Levina L. V. Application of the Schwartz algorithm to spatial problems theory of elasticity // Izvestia TulGU. Natural Sciences. 2015. Issue. 3. pp. 165-176.
- [6] Novikova O. S., Penkov V. B., Levina L. V. Perturbed boundary state method as a method organization of a full-parametric analytical solution of the second main problems of linear elastostatics // Bulletin of ChGPU im. AND I. Yakovlev. Series: Mechanics of the limit state. 2018. No. 2 (36). pp. 26-37.
- [7] Rabotnov Yu. N. Mechanics of a deformable solid body M.: Nauka, 1979. 744 p.
- [8] Satalkina L. V. Boundary state method in problems of elasticity theory inhomogeneous bodies and thermoelasticity: diss. ...cand. physical - mat. Sciences : 01.02.04; scientific hands V.B. Penkov; Lipetsk, 2010. 108 p.
- [9] Nayfeh A. H. Introduction to perturbation techniques USA: A wiley-interscience publication. John Wiley & Sons, Inc., 1993. 519
- [10] V. B. Penkov, L. V. Levina, E. A. Novikov, Naza S. Yu. Solution of a boundary value problem for a weakly nonlinear operator equations of a geometrically nonlinear elastic medium by means of the method of boundary states with perturbations // Actual problems of applied mathematics, informatics and mechanics: Sat. Proceedings of the International Scientific Conference. Voronezh, 2021. P. 1387-1393.
- [11] Penkov V. B., Levina L. V. Comparative analysis of base orthogonalization procedures Euclidean and Hilbert spaces // International Journal of Applied and Basic Research. 2020. No. 3. P. 103-107.
- [12] V. B. Penkov, L. V. Levina Support basis method for constructing a particular solution linear inhomogeneous operator equation of mathematical physics // Bulletin of the Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. 2022. No. 3. P. 91-101.
- [13] Penkov VB, Satalkina LV Perturbed boundary state method: inhomogeneous and nonlinear problems of the theory of elasticity and thermoelasticity. Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co., 2012. 108 p.