

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Научный журнал
№ 3(25)
Июль – сентябрь 2015 г.

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.
Выходит 1 раз в три месяца

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций (свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в
которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на
соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге "Пресса России" 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко

Ответственные секретари: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, Ю. А. Демьянов, В. Г. Зубчанинов, Р. А. Каюмов,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, В. Д. Кулиев, Е. В. Ломакин,
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, А. В. Манжиров, Г. К. Михайлов,
Ю. В. Немировский, Р. И. Непершин, Б. Е. Победря, В. П. Радченко,
А. Ф. Ревуженко, С. А. Редкозубов, С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин,
А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

Международный совет: Р. Ю. Амензаде (Азербайджан), В. М. Мирсалимов
(Азербайджан), В. П. Тамуж (Латвия), А. В. Чигарев (Белоруссия)

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

Тел.: (8352) 62-16-19.

Email: predel21@mail.ru.

WWW: <http://predel.chgpu.edu.ru>.

© ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева», 2015

Манжиров Александр Владимирович



Манжиров Александр Владимирович принадлежит к числу крупнейших механиков нашего времени.

Редколлегия журнала *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния* поздравляет Александра Владимировича с избранием иностранным членом НАН Армении и назначением на должность заместителя директора по научной работе Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН и желает ему здоровья и дальнейших творческих успехов в научной и педагогической деятельности.

Б. Г. Миронов

Ю. Н. Радаев

Б. Г. Миронов¹, Ю. Н. Радаев²

**ПРОФЕССОР А. В. МАНЖИРОВ. К ИЗБРАНИЮ ЧЛЕНОМ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ**

¹ *Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

² *Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва*

Аннотация. Доктор физико-математических наук, профессор Александр Владимирович Манжиров избран иностранным членом Национальной академии наук Республики Армения. А. В. Манжирову принадлежат более двухсот опубликованных научных работ, в том числе 14 монографий (из них семь на английском языке и одна на немецком), и два авторских свидетельства. Весомый вклад А. В. Манжирова в области механики и прикладной математики признан Российской академией наук (РАН), Национальной академией наук Республики Армения (НАН РА), другими научно-исследовательскими организациями и фондами, а также международной научной общественностью.

УДК: 539.374

27 декабря 2014 г. доктор физико-математических наук, профессор Александр Владимирович Манжиров был избран иностранным членом Национальной академии наук Республики Армения. А. В. Манжирову принадлежит более двухсот опубликованных научных работ, в том числе четырнадцать монографий (из них семь на английском языке и одна на немецком), четыре учебных пособия, два авторских свидетельства. Его вклад в механику деформируемого твердого тела по праву можно назвать выдающимся.

А. В. Манжиров — крупный ученый в области механики и прикладной математики. Основными направлениями его научной деятельности являются механика растущих тел, теория ползучести и вязкоупругости, контактные задачи механики, трибология, интегральные уравнения и их приложения.

© Миронов Б. Г., Радаев Ю. Н., 2015

Миронов Борис Гурьевич

e-mail: predel21@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, ректор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: radaev@ipmnet.ru, y.radaev@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

¹ Авторы благодарят к. ф.-м. н. Е. В. Мурашкина за помощь в подготовке к публикации настоящей статьи.

Поступила 12.08.2015

А. В. Манжиров — один из основателей нового научного направления — механики растущих тел, возникшего в связи с насущными потребностями фундаментальной и прикладной науки в исследовании сложных процессов, характерных для современных междисциплинарных проблем, находящихся на стыке механики, физики, химии и биологии. Механика растущих тел, в частности, позволяет эффективно моделировать широкий круг таких технологических процессов, как бетонирование и полимеризация, электролитическое формование и пиролитическое осаждение, лазерное напыление и наплавление, отверждение расплавов и рост кристаллов. Для природных явлений она дает возможности адекватного описания формирования ледников, массивов осадочных и вулканических пород, гравитирующих объектов, а также процессов роста биологических тканей. Им разработаны фундаментальные основы математической теории растущих тел, предложена классификация возможных способов роста, впервые выписаны полностью обоснованные уравнения для целого ряда процессов и рассмотрены основные краевые задачи. Под его руководством проведены первые эксперименты по идентификации свойств растущих тел, исследованы закономерности эволюции напряженно-деформированного состояния таких тел, выявлены новые, присущие только наращиваемым телам механические эффекты.

А. В. Манжиров — ведущий российский ученый в области контактной механики. Для исследования сложных эволюционных процессов контактного взаимодействия и износа им развита теория смешанных интегральных уравнений, содержащих операторы как с постоянными, так и с переменными пределами интегрирования. Предложенный им универсальный проекционный метод решения смешанных интегральных уравнений позволил впервые изучить проблемы контакта и износа поверхностно неоднородных тел и тел с экспериментальными профилограммами поверхности, описываемыми быстро осциллирующими функциями. Он также является признанным авторитетом в области нелинейной ползучести и вязкоупругости неоднородных материалов со свойствами, зависящими от времени.

А. В. Манжиров (в соавторстве с профессором А. Д. Поляниным) написал несколько фундаментальных справочных руководств по математике и интегральным уравнениям, изданным в России и за рубежом. Справочники по интегральным уравнениям не имеют аналогов в мировой литературе, а „Справочник по математике для инженеров и ученых“, изданный CRC Press в 2006 г. на английском языке, является самым большим справочным руководством по математике в мире, охватывая обширный материал из различных разделов современной математики, и уникален в плане собранных в нем методов решения различных уравнений, возникающих в многочисленных приложениях математики.

Своими учителями А. В. Манжиров считает академика АН СССР (РАН) И. И. Воровича (1920–2001) — студенческие годы и дипломная работа, академика АН Арм.ССР (НАН Армении) Н. Х. Арутюняна (1912–1993) и профессора В. М. Александрова (1936–2012) — аспирантура, кандидатская и докторская диссертации и долгие годы совместной работы в Институте проблем механики АН СССР (РАН с 1992 г.). Большое влияние на его научное творчество оказали также академики А. Ю. Ишлинский (1913–2003), В. А. Бабешко, Д. М. Климов, Н. Ф. Морозов, Ф. Л. Черноусько, профессор В. Н. Кукуджанов (1931–2013). Их фундаментальные работы в значительной степени сформировали его научное мировоззрение; с ними ему посчастливилось работать в тесном контакте в редакционных коллегиях научных журналов, Научном совете РАН по механике деформируемого твердого тела, в Высшей аттестационной

комиссии Министерства образования и науки РФ и Российском фонде фундаментальных исследований.

А. В. Манжиров родился 24 мая 1957 г. в г. Ростове-на-Дону. Его отец, Манжиров Владимир Михайлович, был известным специалистом в области химической технологии производства кожи и меха, заслуженным рационализатором РСФСР, награжден медалями „За доблестный труд“ и „Ветеран труда“. Мать, Манжирова Тамара Семеновна, начала трудовую жизнь в пламени Великой Отечественной войны вольнонаемной в действующей 28-й Армии 4-го Украинского фронта (являясь ветераном Великой Отечественной войны, награждена юбилейными медалями в честь Победы в Великой Отечественной войне). В послевоенные годы работала в промышленности и аптечном производстве. Однако большую часть жизни она посвятила семье. Его сестра Манжирова–Афанасьева Татьяна Владимировна также имеет математическое образование (закончила механико-математический факультет Ростовского государственного университета) и работает в области IT (с 1983 г. — в Испании).

В 1974 г. А. В. Манжиров оканчивает в Ростове-на-Дону специализированную среднюю школу № 14 с преподаванием ряда предметов на английском языке с „пятибалльным“ аттестатом. В 1974 г. он становится студентом механико-математического факультета Ростовского государственного университета (в настоящее время — Южный федеральный университет), где специализируется по механике на кафедре теории упругости. Механико-математический факультет Ростовского университета в те годы обеспечивал высочайший уровень подготовки в различных областях математики и механики. Лекции в то время читали такие блестящие ученые и педагоги, как член-корреспондент АН СССР (академик АН СССР с 1990 г., академик РАН с 1991 г.) И. И. Ворович, профессор В. М. Александров, профессор (академик РАН с 1997 г.) В. А. Бабешко, доцент (впоследствии профессор, ректор РГУ) А.В. Белоконь (1941–2013), доценты (впоследствии профессора) Ю. А. Устинов, Л. М. Зубов, С. Г. Самко, Э. Н. Потетюнко, И. Г. Кадомцев, ассистент (в настоящее время профессор, заведующий кафедрой теории упругости Южного Федерального университета) А. О. Ватульян. Научной работой А. В. Манжирова начиная с 3-го курса руководил член-корреспондент АН СССР И. И. Ворович, под влиянием которого произошло формирование научного мировоззрения А. В. Манжирова, особенно в плане применения современного математического аппарата в исследованиях в области прикладной математики и механики деформируемого твердого тела. Дипломная работа была защищена отлично, причем впервые в Ростовском университете защита проходила на английском языке. Оппонентом на защите диплома выступил В. А. Бабешко (ему пришлось вести дискуссию на английском языке, что, впрочем, он сделал без труда). В 1979 г. А. В. Манжиров с отличием оканчивает Ростовский государственный университет, получив квалификацию „механик“ и рекомендацию научного руководителя и ученого совета университета для поступления в аспирантуру.

По приглашению академика АН Арм. ССР Н. Х. Арутюняна (2012–1993) и профессора В. М. Александрова 22 августа 1979 г. А. В. Манжиров впервые переступил порог Института проблем механики АН СССР (РАН с 1991 г.). Академик АН Арм. ССР Н. Х. Арутюнян в то время заведовал лабораторией механики вязкоупругих тел Института проблем механики АН СССР, а профессор В. М. Александров был ведущим научным сотрудником этой лаборатории. По результатам состоявшегося собеседования и на основании рекомендательного письма И. И. Воровича было принято

решение о том, что А. В. Манжиров будет поступать в аспирантуру к Н. Х. Арутюняну по специальности 01.02.04 — механика деформируемого твердого тела на кафедру сопротивления материалов Московского инженерно-строительного института им. В. В. Куйбышева (МИСИ). Кафедрой сопротивления материалов МИСИ в то время заведовал профессор И. С. Цурков (1913–2008), крупный специалист и человек неиссякаемого оптимизма и тонкого чувства юмора. Указанная кафедра в начале семидесятых имела штат около восьмидесяти человек и большое число аспирантов со всего Советского Союза. Определенное число мест занимали аспиранты, работающие фактически в различных академических и отраслевых институтах, в которых в те годы был очень большой конкурс и весьма ограниченный прием в собственную аспирантуру. Сдав вступительные экзамены, А. В. Манжиров в декабре 1979 г. становится аспирантом МИСИ (де-факто в 1979–1982 гг., обучаясь под руководством Н. Х. Арутюняна в лаборатории механики вязкоупругих тел Института проблем механики АН СССР). Именно в эти годы А. В. Манжиров окончательно сформировался как ученый. Решающую роль сыграл в этом его научный руководитель Н. Х. Арутюнян.

Н. Х. Арутюнян — выдающийся ученый и государственный деятель СССР, по праву считается одним из основателей научной школы механики в Армении и всемирно признанным классиком теории ползучести. Работая в Институте проблем механики АН СССР, он вместе со своими учениками создал целый ряд новых научных направлений механики деформируемого твердого тела, в частности такое направление, как механика растущих тел. А. В. Манжиров был любимым учеником Н. Х. Арутюняна. В настоящее время он возглавляет созданную в Институте проблем механики в 80-х годах прошлого века научную школу. Одновременно профессор В. М. Александров привлек А. В. Манжирова к исследованию контактных и смешанных задач механики деформируемого твердого тела, которые прочно вошли в круг его постоянных научных интересов.

10 ноября 1983 г. А. В. Манжиров успешно защищает диссертационную работу *„Исследование напряженно-деформированного состояния неоднородно вязкоупругих тел при их взаимодействии с концентраторами и жесткими штампами“* и получает ученую степень кандидата физико-математических наук в совете при Московском институте электронного машиностроения (ныне Высшая школа экономики). Заметим, что председателем Специализированного совета по защите докторских диссертаций в то время был академик АН Арм. ССР Н. Х. Арутюнян, но поскольку он был и научным руководителем соискателя, то вел заседание его заместитель, профессор Московского института электронного машиностроения А. С. Кравчук (1944–2010). Официальными оппонентами выступили Заслуженный деятель науки и техники РСФСР, профессор Тульского государственного университета Л. А. Толоконников (1923–1998) и доцент мехмата МГУ Р. И. Мазинг (1925–2009). Роль ведущей организации сыграл Днепропетровский государственный университет, который в то время возглавлял академик АН УССР В. И. Моссаковский (1919–2006).

В апреле 1983 г. А. В. Манжиров поступает на работу в Институт проблем механики АН СССР и работает сначала в должности инженера лаборатории механики вязкоупругих тел, с 1984 г. после утверждения его кандидатской диссертации Высшей аттестационной комиссией при Совете Министров СССР — младшего научного сотрудника. В 1989 г. он становится научным сотрудником, затем в 1992 г. — старшим научным сотрудником,

7 октября 1993 г. А. В. Манжиров защищает докторскую диссертационную работу „*Контактные задачи теории вязкоупругости нарациваемых тел*“ в Диссертационном совете при Институте проблем механики РАН. Заседание вел председатель диссертационного совета, академик РАН А. Ю. Ишлинский. Оппонентами по работе выступили директор НИИ механики и прикладной математики при Ростовском государственном университете академик РАН И. И. Ворович, проректор Московской государственной академии приборостроения и информатики профессор А. С. Кравчук, заведующий кафедрой Одесского государственного университета, профессор Г. Я. Попов (1932–2013); ведущая организация – механико-математический факультет МГУ. Отзыв ведущей организации на докторскую диссертационную работу подписал профессор В. Д. Ключников (1928–2001), который в то время возглавлял кафедру теории пластичности механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Эта докторская диссертационная работа была отмечена в „Бюллетене ВАК“ как одна из лучших диссертаций 1993 года по механике.

В 1995 г. А. В. Манжиров становится ведущим научным сотрудником, а с 2004 г. занимает должность заведующего лабораторией моделирования в механике деформируемого твердого тела. Эта лаборатория была создана в результате объединения двух лабораторий, которые возглавляли заслуженный деятель науки Российской Федерации, лауреат Государственной премии Российской Федерации, профессор В. М. Александров и лауреат Премии Совета Министров СССР, заслуженный деятель науки Российской Федерации, иностранный член Национальной академии наук Республики Армении, профессор В. Н. Кукуджанов. Они выдвинули А. В. Манжирова кандидатом на замещение вакантной должности заведующего новой лабораторией. Его кандидатуру поддержал и директор Института проблем механики РАН тех лет академик РАН Ф. Л. Черноушко. Результаты голосования были легко предсказуемыми. В сентябре 2015 г. приказом директора ИПМех РАН члена-корреспондента РАН С. Т. Суржикова А. В. Манжиров назначен на должность заместителя директора ИПМех РАН по научной работе.

В 1988 г. результаты его научных исследований в области контактных задач были подытожены в монографии *Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 320 с.* Книга должна была выйти в 1990 г., а увидела свет только в 1999 г. В ней впервые систематически были изложены основы теории ползучести неоднородных стареющих тел (включая определяющие уравнения различных типов, анализ структуры ядер ползучести и релаксации, доказательства принципов соответствия), теории нелинейной установившейся ползучести, а также механики непрерывно растущих тел, и в рамках указанных теорий сформулированы и исследованы задачи контактного взаимодействия. Значительное место в этой книге отводится математическим методам построения решений интегральных уравнений и систем интегральных уравнений, которые возникают при анализе контактных задач теории ползучести, и алгоритмам построения точных и приближенных решений нелинейных задач. Одним из крупных научных достижений здесь выступает метод решения интегральных уравнений, который в применении к контактным задачам позволяет вместо бесконечных систем интегральных уравнений Вольтерра получить последовательность независимых уравнений Вольтерра. Монография содержит решения большого количества прикладных задач.

В 1991 г. выходит в свет монография *Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В., Наумов В. Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176 с.*, целиком посвященная новым задачам механики деформируемого твердого тела — контактными задачам непрерывно и дискретно наращиваемых тел, обладающих сложными реологическими свойствами (в том числе с учетом старения и возрастной неоднородности). В этой книге были созданы теоретические основы механики контактного взаимодействия деформируемых тел, конфигурации которых изменяются за счет присоединения дополнительного материала к их внешним поверхностям, сформулированы математические постановки соответствующих начально-краевых задач и разработаны методы их исследования.

С середины 90-х годов много времени А. В. Манжиров уделяет развитию теории интегральных уравнений. Интегральные уравнения встречаются во многих разделах механики сплошных сред и физики (в теории упругости, теории пластичности, теории теплопереноса, гидромеханике, электродинамике и теории распространения волн). Начиная с 1998 г. А. В. Манжиров публикует серию книг, посвященную точным решениям интегральных уравнений и методам их решения.

В 2006 г. А. В. Манжиров совместно с А. Д. Поляниным осуществляет издание большого справочного руководства по математике: *A. D. Polyaniin, A. V. Manzhirov, Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists. Boca Raton–London: Chapman & Hall / CRC Press, 2006. 1544 p.*, а в 2007 г. они выпускают самое полное, расширенное и исправленное второе издание справочника по интегральным уравнениям: *A. D. Polyaniin and A. V. Manzhirov, Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists. Boca Raton–London: Chapman & Hall/CRC Press, 2007. 1544 p.*

А. В. Манжиров активно участвует в международном сотрудничестве. Тесные связи установлены им с ведущими учеными Индии. Проводятся работы в рамках совместного проекта РФФИ и Министерства науки и технологий Индии, включая новейшие теоретические и экспериментальные исследования по электролитическому формованию. Важные исследования проводятся с Тшванским технологическим университетом (ЮАР, Претория) по термомеханике лазерной обработки материалов в рамках совместного гранта РФФИ и Национального исследовательского фонда. Здесь основное внимание уделяется теоретическим и экспериментальным проблемам лазерного напыления и наплавления. Многолетнее плодотворное сотрудничество ведется с Институтом основных проблем техники ПАН в рамках Договора о сотрудничестве между РАН и ПАН. Проводятся согласованные исследования в области тонких покрытий.

Получило новый импульс традиционное сотрудничество с Институтом механики НАН Республики Армения в рамках договора между РАН и НАН РА, которое было расширено на новые области механики, в частности, связанные с процессами роста. В 2007 г. профессор А. В. Манжиров организовал совместно с директором Института механики НАН РА профессором В. Н. Акопяном Международную конференцию „Актуальные проблемы механики сплошной среды“, посвященную к 95-й годовщине со дня рождения Н. Х. Арутюняна. Теперь эта конференция стала традиционной, представительной и популярной, а ее неперемненными сопредседателями являются профессора В. Н. Акопян и А. В. Манжиров.

Около десяти лет А. В. Манжиров являлся координатором Комплексной долгосрочной программы научно-технического сотрудничества между Россией и Индией в

области механики. Им была проведена большая работа по объединению усилий ученых обеих стран для решения важных теоретических и прикладных проблем в рамках проектов Комплексной долгосрочной программы, РФФИ и Министерства науки и технологий Индии. Совместно с координатором от Индии профессором Н. К. Гуптой им организован постоянный российско-индийский семинар, в котором принимают участие ведущие ученые двух стран. Результатом этой деятельности стало опубликование трех коллективных индо-российских монографий.

А.В. Манжиров — лауреат первого конкурса (2001 г.) Фонда содействия отечественной науке. Ему была присуждена Государственная научная стипендия для выдающихся ученых России (1997–2003 гг.).

Благодаря трудам Манжирова А. В. и его учеников, механика растущих тел как новое научное направление получила международное признание. В 1915 г. в Москве в Институте проблем механики состоялся Симпозиум IUTAM по растущим телам. Генеральной ассамблеей IUTAM в Пекине председателем программного комитета этого симпозиума был утвержден А. В. Манжиров.

В 2015 г. по результатам Всемирного конгресса инженеров (World Congress of Engineering 2015) в Лондоне доклад А.В. Манжирова *Mechanical design of viscoelastic parts fabricated using additive manufacturing technologies*, посвященный основам расчета механического поведения вязкоупругих изделий, изготавливаемых при помощи аддитивных технологий, был признан лучшим по направлению „Технологии машиностроения“. Ему было предложено войти в состав оргкомитета следующего Всемирного конгресса инженеров (World Congress of Engineering 2016), который пройдет в Лондоне с 29 июня по 1 июля 2016 г.

В 2015 г. Российский фонд фундаментальных исследований наградил А. В. Манжирова своим дипломом за большой вклад в развитие науки и многолетнюю плодотворную работу по поддержке фундаментальных научных исследований.

Долгие годы А. В. Манжиров ведет активную преподавательскую деятельность. С 1994 г. он работает в должности профессора кафедры высшей математики Московского государственного университета приборостроения и информатики; с 1997 г. — профессор кафедры прикладной математики МГТУ им. Н. Э. Баумана, с 2002 г. — заведующий созданного им филиала указанной кафедры в Институте проблем механики РАН, с 2014 — профессор кафедры высшей математики Национального исследовательского ядерного университета (МИФИ). В разные годы он читает курсы по аналитической геометрии, высшей алгебре, математическому анализу, дифференциальным уравнениям, теории вероятностей и математической статистике, теории массового обслуживания, уравнениям математической физики. Им подготовлены современные оригинальные спецкурсы по теории ползучести неоднородных тел, механике растущих тел, неклассическим задачам механики деформируемого твердого тела, механике конструкционных материалов, интегральным уравнениям. Много времени он уделяет работе с аспирантами в ИПМех РАН, МГТУ им. Н.Э. Баумана и МИРЭА. Он член диссертационных советов по присуждению ученой степени доктора наук при Институте проблем механики РАН и МГТУ им. Н. Э. Баумана, руководитель семинара ИПМех РАН по механике сплошной среды им. Л. А. Галина.

С первых дней работы в Институте проблем механики А. В. Манжиров много времени уделяет научно-организационной работе. Сначала его избирают ученым секретарем (1984–1989 гг.), а позднее (1989–1991 гг.) — председателем Совета молодых ученых и специалистов ИПМех АН СССР. За успехи в организации научно-технического

творчества молодежи он награжден грамотами Гагаринского РК ВЛКСМ и грамотой МГК ВЛКСМ. С 1999 г. А. В. Манжиров является членом Экспертного совета по математике и механике ВАК Минобрнауки РФ, более 10 лет он был заместителем председателя совета и курировал направление механики. С 2000 г. он является научным секретарем, а с 2006 г. — заместителем председателя Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела и отвечает за организацию сессий, конференций и семинаров. За время его работы в совете им были организованы более 40 международных и всероссийских конференций и семинаров.

А. В. Манжиров — член редколлегий журналов „Известия РАН. Механика твердого тела“, „Вычислительная механика сплошных сред“, „Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика“, „Известия НАН Армении. Механика“, „Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия „Механика предельного состояния“, „Математическое моделирование и численные методы“ и Международного научно-образовательного сайта „Мир математических уравнений“. Он — член Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике, член Американского общества инженеров-механиков (ASME), Американского математического общества (AMS), Международной ассоциации по прикладной математике и механике (GAMM), Международной ассоциации инженеров (IAENG), Европейского общества по механике (EUROMECH).

А. В. Манжиров награжден медалью „В память 850-летия Москвы“, ему присуждено почетное звание „Ветеран труда“.

Профессор А. В. Манжиров — человек необыкновенной энергетикой и работоспособности, эрудиции, доброжелательности, искрометного юмора. Он умеет быть и обаятельным, и бескомпромиссным, и вдумчивым, и веселым, ценит настоящую дружбу, умеет работать в больших научных коллективах и привлекать к себе людей. А. В. Манжирова можно назвать ученым с большой буквы. Он всегда стремится быть на переднем крае научного поиска, занимает принципиальные позиции в научных дискуссиях и всегда во главу угла ставит вопросы поиска научной истины, отстаивая точку зрения той части российских ученых, которая превыше всего ставит интересы науки.

Редколлегия журнала *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева* поздравляет Александра Владимировича с избранием иностранным членом НАН Армении и назначением на должность заместителя директора по научной работе Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского и желают ему здоровья и дальнейших творческих успехов в научной и педагогической деятельности.

СПИСОК МОНОГРАФИЙ А. В. МАНЖИРОВА

1. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176 с (Совместно с Н. Х. Арутюняном, В. Э. Наумовым).
2. Справочник по интегральным уравнениям: точные решения. М.: Факториал, 1998. 432 с. (Совместно с А. Д. Поляниным).
3. Handbook of Integral Equations. – Boca Raton–New York: CRC Press, 1998. 816 p. (Совместно с А. Д. Поляниным).
4. Handbuch der Integralgleichungen: Exakte Lösungen. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 1999. 608 s. (Совместно с А. Д. Поляниным).
5. Методы решения интегральных уравнений: Справочник. М.: Факториал, 1999. 272 с. (Совместно с А. Д. Поляниным).
6. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 320 с. (Совместно с Н. Х. Арутюняном).
7. Справочник по интегральным уравнениям: методы решения. М.: Факториал Пресс, 2000. 384 с. (Совместно с А. Д. Поляниным).
8. Справочник по интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 2003. 608 с. (Совместно с А. Д. Поляниным).
9. Handbook of Integral Equations. Second Edition. Boca Raton–London: Chapman & Hall / CRC Press, 2007. 1050 p. (Совместно с А. Д. Поляниным).
10. Handbook of Integral Equations. Second Edition. Boca Raton–London: Chapman & Hall / CRC Press, 2008. 1144 p. (Совместно с А. Д. Поляниным).
11. Topical Problems in Solid Mechanics. New Delhi: Elite Publishing, 2008. XIV+413 p. (Редакция совместно с Н. К. Гуптой).
12. A Concise Handbook of Mathematics, Physics, and Engineering Sciences. / Ed. by A. D. Polyaniin, A. I. Chernoutsan. Boca Raton–London: Chapman & Hall / CRC Press, 2010. 1125 p. (Совместно с А. И. Черноуцаном и А. В. Егоровым).
13. Topical Problems in Solid and Fluid Mechanics. New Delhi: Elite Publishing House, 2011. 411 p. (Совместная редакция с Н. К. Гуптой и Д. А. Индейцевым).
14. Topical Problems in Theoretical and Applied Mechanics. New Delhi: Elite Publishing House, 2013. 441 p. (Редакция совместно с Н. К. Гуптой и Р. Велмуруганом).

СПИСОК УЧЕБНЫХ ПОСОБИЙ А. В. МАНЖИРОВА

1. Интегральные уравнения: учебное пособие. М.: МГАПИ, 1998. 144 с. (Совместно с А. Д. Поляниным).
2. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие. М.: МГАПИ, 2005. 82 с. (Совместно с М. Н. Михиным).
3. Случайные процессы: учебное пособие. М.: МГУПИ, 2010. 64 с. (Совместно с А. Д. Поляниным, М. Н. Михиным и Д. А. Паршиным).
4. Методы решения задач математической физики: учебное пособие. М.: МГУПИ, 2010. 74 с. (Совместно с А. Д. Поляниным и М. Н. Михиным).

СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ А. В. МАНЖИРОВА ЗА ПОСЛЕДНИЕ ДЕСЯТЬ ЛЕТ

2005

1. Смешанные интегральные уравнения контактной механики и трибологии // Смешанные задачи механики деформируемого тела: тезисы докладов V Российской конференции с международным участием. Саратов: Изд-во Саратовского гос. ун-та, 2005. С. 103.
2. Смешанные интегральные уравнения контактной механики и трибологии // Смешанные задачи механики деформируемого тела: труды V Российской конференции с международным участием. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2005. С. 222–226.
3. О кручении растущих тел. Современные проблемы механики сплошной среды // Труды IX Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения академика РАН И. И. Воровича. Ростов-н/Д: Изд-во ООО „ЦВВР“, 2005. С. 131–136. (Совместно с М. Н. Михиным).
4. Формирование гравитирующих тел в процессе аккреции [электронный ресурс] // Вторая всероссийская научная конференция „Внутреннее ядро земли. Геофизическая информация о процессах в ядре“ / ИФЗ РАН: тезисы докладов. – Режим доступа: e-mail: www: <http://innercore.ru/2005/abstracts/551126797963.html> (Совместно с Д. А. Паршиным).

2006

5. Нарастивание вязкоупругого шара в центрально-симметричном силовом поле // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 1. С. 66–83. (Совместно с Д. А. Паршиным).
6. Плоские и осесимметричные контактные задачи для вязкоупругих стареющих тел с поверхностно неоднородными покрытиями // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: сб. статей к 75-летию со дня рождения Е. И. Шемякина. М., 2006. С. 411–422. (Совместно с К. Е. Казаковым).
7. О приложениях механики растущих тел в механике композитов // Ракетно-космическая техника: фундаментальные и прикладные проблемы механики: материалы междунар. науч. конф. М., 2006. С. 57.
8. Нарастивание деформируемых тел под действием массовых сил // XI Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: аннотации докладов. Т. III. Н. Новгород, 2006. С. 142.
9. Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists. Boca Raton–London: Chapman & Hall / CRC Press, 2006. 1544 p. (Совместно с А. Д. Поляниным).
10. Моделирование процессов нарастивания цилиндрических тел на вращающейся оправке с учетом действия центробежных сил // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 6. С. 149–166. (Совместно с Д. А. Паршиным).
11. Wear of elastic foundations with inhomogeneous coatings // 35th Solid Mechanics Conference: volume of Abstracts. Warsaw, 2006. P. 279–280. (Совместно с К. Е. Казаковым, И. Федотовым).
12. Contact problems for covered solids with real surface shape // Indo-Russian workshop on Problems in Nonlinear Mechanics of Solids with Large Deformation: proceedings. New Delhi, 2006. P. 63–70. (Совместно с К. Е. Казаковым).
13. Accretion of solids under mass forces // Indo-Russian workshop on Problems in Nonlinear Mechanics of Solids with Large Deformation: proceedings. New Delhi, 2006. P. 71–79. (Совместно с Д. А. Паршиным).

2007

14. Пространственная краевая задача механики наращиваемых тел // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2007. № 4(54).
15. Износ вязкоупругого основания с неоднородным покрытием // Актуальные проблемы трибологии: сборник трудов международной научно-технической конференции, в 2-х томах. Том 1. М., 2007. С. 338–351. (Совместно с К. Е. Казаковым).
16. Моделирование процесса деформирования наращиваемых конических тел // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. № 4 (54). С. 290–303. (Совместно с Д. А. Паршиным).
17. Механика наращиваемых тел: состояние, проблемы, перспективы // Актуальные проблемы механики сплошной среды: труды Международной конференции, посвященной 95-летию академика НАН Армении Н. Х. Арутюняна. Ереван: Ереванский государственный университет архитектуры и строительства, 2007. С. 243–246.
18. Некоторые задачи кручения растущих тел // Актуальные проблемы механики сплошной среды: труды Международной конференции, посвященной 95-летию академика НАН Армении Н. Х. Арутюняна. Ереван: Ереванский государственный университет архитектуры и строительства, 2007. С. 247–251. (Совместно с М. Н. Михиным, С. В. Юбером).
19. Моделирование процессов формирования, взаимодействия, деформирования и разрушения упруго-вязкопластических тел под действием нагрузок и физических полей: аннотационный отчет ИПМех РАН. — М.: ИПМех РАН, 2007. (Совместно с В. М. Александровым, В. Н. Кукуджановым и др.).

2008

20. Смежные задачи механики наращиваемых тел и геомеханики // Неклассические задачи геомеханики: труды Всероссийской объединенной научной сессии Научных советов РАН по механике деформируемого твердого тела и по проблемам горных наук. Якутск, 2008. С. 107–114. (Совместно с Д. А. Паршиным).
21. О конформном контакте слоистых оснований и штампов // Изв РАН. МТТ. 2008. № 3. С. 227–240. (Совместно с К. Е. Казаковым).
22. Mechanics of accreted solids with applications to technological and natural processes // XXXVI Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics". July 6 – July 10, St. Petersburg (Repino), Russia: Book of Abstracts. СПб, 2008. P. 49–50.
23. Conformal contact between a punch and a layer with thin coating // IPPT - IFTR Reports. 2008. Vol. 2. P. 248–249. (Совместно с К. Е. Казаковым)
24. Raising of a semi-circular vault // IPPT - IFTR Reports. 2008. Vol. 2. P. 358–359. (Совместно с Д. А. Паршиным).
25. Mathematical theory of accreted solids and its applications // XXII International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. Abstract Book / Ed. by J. Denier, M.D. Finn, and T. Mattner. Adelaide: 2008. P. 271.
26. Mathematical theory of accreted solids and its applications // XXII International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. CD-ROM Proceedings. Adelaide: 2008.
27. Conformal contact between foundations and punches // Topical Problems in Solid Mechanics. New Delhi, 2008. P. 92–104. (Совместно с К. Е. Казаковым).
28. Erection of a heavy semicircular arch structure // Topical Problems in Solid Mechanics. New Delhi, 2008. P. 245–265. (Совместно с Д. А. Паршиным).

29. О новых результатах в классических проблемах гео- и горных наук. // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XII Международной конференции. Том 1. Ростов-на-Дону, 2008. С. 145–149. (Совместно с Д. А. Паршиным).

2009

30. Итоги XXII Международного конгресса по теоретической и прикладной механике // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 1. С. 150–155. (Совместно с Ф. Л. Черноусько и И. В. Симоновым).
31. Основы механики наращиваемых тел // III сессия Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела: тез. докл. Всерос. конф. / под ред. профессор Л. Ю. Коссовича. Саратов, 2009. С. 29.
32. The wear contact problem for an elastic foundation with an inhomogeneous coating // Proceedings of World Tribology Congress 2009. Sunday 6th to Friday 11th, September, 2009. Kyoto, Japan. Kyoto: Japanese Society of Tribologist, 2009. P. 157.
33. Механика наращиваемых тел: новый подход // Современные проблемы механики сплошной среды: тезисы докладов XIII Международной конференции. Ростов-на-Дону, 2009. С. 5–6.
34. Механика наращиваемых тел: новый подход // Труды XIII международной конференции. Том 1. Ростов-на-Дону, 2009. С. 142–147.
35. Проекционный метод решения смешанных интегральных уравнений механики и его приложения к контактным задачам для тел с покрытиями // Актуальные проблемы механики: механика деформируемого твердого тела: сб. трудов / под ред. Р. В. Гольдштейна; Ин-т проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН. М.: Наука, 2009. С. 238–263. (Совместно с К. Е. Казаковым).
36. Возведение тяжелого полуциркульного свода // Актуальные проблемы механики: механика деформируемого твердого тела: сб. трудов / Под ред. Р. В. Гольдштейна; Ин-т проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН. М.: Наука, 2009. С. 382–421. (Совместно с Д. А. Паршиным.)

2010

37. Математическая теория растущих тел. Конечные деформации // Современные проблемы механики сплошной среды: тезисы докладов XIV международной конференции. Ростов-на-Дону, 2010. С. 61.
38. Математическая теория растущих тел. Конечные деформации // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XIV Международной конференции. Т. 2. Ростов-на-Дону, 2010. С. 215–219.
39. Основы математической теории растущих тел // Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике, посвященная 110-летию академика М.А. Лаврентьева: тезисы докладов междунар. конф. Новосибирск, 2010. С. 130–131.
40. Смешанные интегральные уравнения и их приложения // Математическая физика и ее приложения: материалы II Междунар. конф. / под ред. чл.-корр. РАН И. В. Волочича и д. ф.-м. н., профессора Ю. Н. Радаева. Самара, 2010. С. 209–214.
41. Problems of contact interaction between coated solids and punches with bases of complicated shape // 37th Solid Mechanics Conference: Book of Abstracts. Warsaw, 2010. P. 54–55. (Совместно с К. Е. Казаковым).
42. New results in mechanics of growing solids // Актуальные проблемы механики сплошной среды: труды II международной конференции. Ереван, 2010. С. 311–315.

43. Контактная задача с износом для упругого основания с неоднородным покрытием // Трибофатика = Tribo-fatigue: труды VI Междунар. симп. по трибофатике МСТФ, в 2 ч. Ч. 1 / под ред. М. А. Журавковой и др. Минск, 2010. С. 325–331. (Совместно с К. Е. Казаковым).
44. Задача множественного контакта с износом для слоя с неоднородным покрытием // Трибология и надежность: сборник научных трудов X Международной конференции / под ред. К. Н. Войнова. СПб, 2010. С. 98–99. (Совместно с К. Е. Казаковым).
45. Исследование процессов изготовления, деформирования, контактного взаимодействия и разрушения неоднородных упруговязкопластических тел и тел со сложной структурой при механических нагрузках, воздействии физических полей и активных сред // Аннотационный отчет ИПМех РАН. М., 2010. (Совместно с В. М. Александровым, В. Н. Кукуджановым и др.).

2011

46. Интегральные уравнения с быстро осциллирующими функциями и их приложения в механике контактных взаимодействий // V сессия Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела: всероссийская конференция. Астрахань, 2011.
47. Математическая теория растущих тел: уравнения, задачи, приложения: секционный доклад на X Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4. С. 1603–1605.
48. Задача теплопроводности для растущего шара // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 6. С. 139–148. (Совместно с С. И. Кузнецовым и И. Федотовым).

2012

49. Развитие идей Н. Х. Арутюняна в современной механике // Актуальные проблемы механики сплошной среды: труды международной конференции посвященной 100-летию академика НАН Армении Н. Х. Арутюняна. Том 2. Ереван, 2012. С. 5–13.
50. On the resonance oscillation of longitudinally vibrating growing rod // Актуальные проблемы механики сплошной среды: труды международной конференции посвященной 100-летию академика НАН Армении Н. Х. Арутюняна. Том 2. Ереван, 2012. С. 255–259. (Совместно с И. Федотовым и М. Шаталовым).
51. Mathematical models of continuous growth // 8th European Solid Mechanics Conference Graz. Austria, 2012. P. 1–2.
52. Краевые задачи наращивания трехмерных тел двумерными поверхностями // VI Сессия Научного совета РАН по механике. Материалы Всероссийской конференции. Барнаул, 2012. С. 15–16.
53. Advanced in mechanics of growing solids // 23rd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics: Abstract Books. Beijing, 2012. P. 300–301.
54. Системы смешанных интегральных уравнений в проблеме множественного конформного контакта // Современные проблемы механики, посвященная 100-летию Л. А. Галина: тез. докл. М., 2012. С. 53–54.
55. Системы смешанных интегральных уравнений с быстро осциллирующими функциями в исходных данных // XVI Международная конференция "Современные проблемы механики сплошной среды": тез. докл. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2012. С. 66–67.

56. Системы смешанных интегральных уравнений с быстро осциллирующими функциями в исходных данных // Современные проблемы механики сплошной среды: XVI Международная конференция. Ростов-на-Дону, 2012. С. 158–162.
57. О согласованном контакте штампов и тел с покрытиями, имеющих сложный профиль поверхности // Изв. Саратовск. ун-та. Новая сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2012. Вып. 4. С. 42–48. (Совместно с С. П. Курдиной и С. Кухарским).
58. On the resonant behaviour of longitudinally vibrating accreting rods // 8th South African Conference on Computational and Applied Mechanics (SACAM2012). 2012. (Совместно с И. Федотовым и М. Шаталовым).

2013

59. Особенности расчета деталей машин и элементов конструкций с учетом технологических процессов их изготовления // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий. Сборник статей по материалам международной научно-практической конференции. Ч. 1. Механика деформируемого твердого тела / под. ред. Б. Г. Миронова. Чебоксары, 2013. С. 178–180.
60. Интегральные уравнения смешанного типа: теория и приложения в механике и трибологии // Современные проблемы механики деформируемого твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений: тезисы докладов Международной научной конференции. Одесса, 2013. С. 86–87.
61. Системы смешанных интегральных уравнений в проблеме множественного конформного контакта // Развитие идей Л. А. Галина в механике. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. С. 280–305. (Совместно с К. Е. Казаковым и С. Кухарским).
62. Multi-body contact problem for a nonhomogeneous elastic coated foundation with wear // World Tribology Congress 2013. Torino. 2013. P. 1–4(390).
63. Braun's effect and isotropic nonlinear damping // Journal of Sound and Vibration. 2013. Vol. 332. № 23. P. 6169–6176. (Совместно с С. В. Юбером и М. И. Федотовым).
64. Mechanics of growing solids and phase transitions // Key Engineering Materials. 2013. Vols. 535–536. P. 89–93.
65. О теоретических и экспериментальных исследованиях в области механики растущих тел, проводимых в Институте проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН // VII Всероссийская (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела: тезисы докладов. Ростов-на-Дону, 2013. С. 107.
66. Conformal contact between a system of punches and a covered foundation taking into account the actual shape of their surfaces // Topical Problems in Theoretical and Applied Mechanics. New Delhi: Elite Publishing House, 2013. P. 128–147. (Совместно с К. Е. Казаковым и С. Кухарским).
67. Mixed-field extended Kantorovich method for accurate prediction of boundary layer stresses in composite and piezolaminated structures // Topical Problems in Theoretical and Applied Mechanics. — New Delhi: Elite Publishing House, 2013. P. 268–278. (Совместно с П. Кумари, С. Капурия и Н. К. Гуптой).

2014

68. Обобщенная проекционная задача теории смешанных интегральных уравнений и ее приложения в механике // Деформирование и разрушение

- структурно-неоднородных сред и конструкций: сборник материалов III Всероссийской конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика Ю. Н. Работнова. Новосибирск, 2014. С. 63–64.
69. Контактные задачи для оснований с произвольно неоднородными покрытиями и сложной формой поверхности // *Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела: в 2 ч. Ч. 2* / под ред. Н. Ф. Морозова, Б. Г. Миронова, А. В. Манжирова. Чебоксары, 2014. С. 33–35.
70. Осесимметричная задача множественного конформного контакта для оснований с поверхностно неоднородными покрытиями // *Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред: труды VIII Международной конференции*. Ереван, 2014. С. 281–285. (совместно с К. Е. Казаковым и Н. К. Гуптой)
71. *Mechanics of growing solids: New track in mechanical engineering* // *Proceedings of ASME 2014 International Mechanical Engineering Congress & Exposition, IMECE2014, November 14–20, 2014, Montreal, Canada. IMECE 2014-36712 (compact disc)*. — 10 p.
72. Контактные задачи для оснований с произвольно неоднородными покрытиями // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2014. № 3(21). С. 1–13.

2015

73. *An approach to modeling of additive manufacturing technologies* // *Transactions on Engineering Technologies: The World Congress on Engineering 2014*. Springer, 2015. P. 99–115. (Совместно с С. А. Лычевым).
74. Lychev S. A., Manzhirov A. V. *Discrete and continuous growth of deformable cylinder* // *Transactions on Engineering Technologies: The World Congress on Engineering 2014*. Springer, 2015. P. 239–254. (Совместно с С. А. Лычевым).
75. *Mechanical design of viscoelastic parts fabricated using additive manufacturing technologies* // *Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of the World Congress on Engineering 2015*. London: WCE, 2015. 5 p.
76. *Mixed integral equations and their applications to contact mechanics and tribology: 9th European Solid Mechanics Conference*. Madrid: ESMC, 2015. 2 p.
77. Интегральные уравнения смешанного типа и их системы в механике контактного взаимодействия и трибологии // *Труды XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики*. Казань, 2015. 3 с.
78. Возведение тяжелой конструкции из стареющего вязкоупругого материала с использованием аддитивной технологии // *Всероссийской научной школы-конференции «Механика предельного состояния и смежные вопросы», посвященной 85-летию профессора Д. Д. Ивлева*. Чебоксары, 2015. 5 с. (Совместно с Д. А. Паршиным).
79. *Problems of growing solids mechanics in modern industrial technologies* // *Proceedings of the IV International Conference on Topical Problems of Continuum Mechanics*. Erevan: EGUAS, 2015. 5 p.

B. G. Mironov¹, Yu. N. Radayev²

**PROFESSOR A. V. MANZHIROV. BY THE ELECTION OF A MEMBER OF
THE ARMENIAN NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES**

¹*Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

²*Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow*

Abstract. Alexander V. Manzhirov, D.Sc. (Phys.&Math.), Ph.D., M.S., is a noted scientist in the fields of mechanics and applied mathematics, integral equations, and their applications.

After graduating with honors from the Department of Mechanics and Mathematics of Rostov State University in 1979, A. V. Manzhirov attended postgraduate courses at Moscow Institute of Civil Engineering. He received his Ph.D. Degree in 1983 at Moscow Institute of Electronic Engineering Industry and D.Sc. Degree in 1993 at the Institute for Problems in Mechanics of the Russian (former USSR) Academy of Sciences. Since 1983, A. V. Manzhirov has been working at the Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences. Currently, he is head of the Laboratory for Modeling in Solid Mechanics at the same institute.

Professor Manzhirov is also head of a branch of the Department of Applied Mathematics at Bauman Moscow State Technical University, professor of mathematics at Moscow State University of Engineering and Computer Science, vice-chairman of Mathematics and Mechanics Expert Council of the Higher Certification Committee of the Russian Federation, vice-chairman of Solid Mechanics Scientific Council of the Russian Academy of Sciences, and expert in mathematics, mechanics, and computer science of the Russian Foundation for Basic Research. He is on the Editorial Advisory Boards of about a dozen important scientific journals, including *Mechanics of Solids*; *Computational Mechanics of Continua*; *News of Saratov State University, New Series, Series of Mathematics, Mechanics, and Computer Science*; *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Series of Mechanics of Limiting State*; *Mathematical Modeling and Numerical Methods*; member of the International Editorial Board of the journal *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Armenia, Mechanics and International Editorial Board of website EqWorld – The World of Mathematical Equations* (<http://eqworld.ipmnet.ru>). He is member of the Russian National Committee on Theoretical and Applied Mechanics, the European Mechanics Society (EUROMECH), and the American Society for Mechanical Engineers (ASME), the American Mathematical Society (AMS), the International Association for Applied Mathematics and Mechanics (GAMM), and the International Association of Engineers (IAENG), Award Winner of the First Competition of the Science Support Foundation (Moscow).

Professor Manzhirov has made important contributions to the fields of accreted solids mechanics, contact mechanics and tribology, viscoelasticity and creep, theory of integral

Mironov Boris Guryevich

e-mail: predel21@mail.ru, Rector, DSc., Prof., Chuvash State Pedagogical University, Russia, Cheboksary.

Radayev Yuri Nikolayevich

e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, Leading Researcher, DSc., Prof., Institute for Problems in Mechanics of RAS, Russia, Moscow.

equations and their applications. He is the author of fourteen books and 4 textbooks in English, Russian, and German including some best-selling handbooks (including *Contact Problems in Mechanics of Growing Solids* [in Russian], Nauka, Moscow, 1991; *Handbook of Integral Equations*, CRC Press, Boca Raton, New York, 1998; *Handbuch der Integralgleichungen: Exakte Lösungen*, Spektrum Akad. Verlag, Heidelberg, Berlin, 1999; *Contact Problems in the Theory of Creep* [in Russian], National Academy of Sciences of Armenia, Erevan, 1999; *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists*, Chapman & Hall/ CRC, Boca Raton, New York, 2006), nearly 200 research papers, and two patents.

Professor Manzhirov is a winner of the First Competition of the Science Support Foundation 2001, Moscow.

In December 27, 2014 Prof. A. V. Manzhirov was inaugurated as a Member of Academy of Science of Armenia. In September 1, 2015 he was appointed a deputy director of Institute for Problems in Mechanics of RAS.

А. В. Манжиров^{1,2,3}, Д. А. Паршин^{1,2}

ВЛИЯНИЕ ГРАВИТАЦИИ НА АДДИТИВНО ИЗГОТАВЛИВАЕМУЮ КОНСТРУКЦИЮ ИЗ СТАРЕЮЩЕГО ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

¹ *Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва*

² *Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва*

³ *Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва*

Аннотация. Изучается влияние сил тяжести на постепенно формируемые в их присутствии объекты. Рассматриваются случаи вязкоупругого стареющего и чисто упругого материалов. В рамках линейной механики наращиваемых тел решена математически двумерная задача о возведении тяжелого полуциркульного свода на гладком жестком основании методом послойного утолщения первоначально установленной заготовки со стороны ее внутренней поверхности. Показана исключительная важность учета при оценках прочности, устойчивости и несущей способности тяжелой конструкции сил тяжести, действующих на нее на протяжении всего процесса возведения, а не только в окончательной конфигурации. Продемонстрированы некоторые возможности весьма эффективного управления напряженным состоянием наращиваемого тела.

Ключевые слова: свод, арка, конструкция, сооружение, возведение, наращивание, сила тяжести, упругость, вязкоупругость, скорость процесса, преднапряженные элементы, локальная поддержка, прочность, устойчивость, несущая способность.

УДК: 539.3

© Манжиров А. В., Паршин Д. А., 2015

Манжиров Александр Владимирович

e-mail: manzh@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией моделирования в механике деформируемого твердого тела, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва; профессор, заведующий филиалом кафедры прикладной математики, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва; профессор кафедры высшей математики, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва.

Паршин Дмитрий Александрович

e-mail: parshin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва; доцент кафедры прикладной математики, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 14-01-00741, 14-08-93964).

Поступила 18.07.2015

Описание задачи. В работе исследуется инженерная задача о последовательном сооружении на гладком жестком горизонтальном основании тяжелого кругового свода методом послойного утолщения (наращивания) по внутренней поверхности некоторой первоначально установленной на это основание арочной заготовки, выполненной заранее без остаточных напряжений. Предполагается, что закрепление на основании подошв наращиваемого свода предотвращает их отслоение, но не препятствует свободному скольжению. Рассматривается случай плоской деформации. Материал считается изотропным однородно стареющим вязкоупругим (в частном случае — чисто упругим) и описывается в рамках линейной теории ползучести стареющих сред [1], [2], [3], [4], широко применяемой при моделировании механического поведения бетона, горных пород, льда, грунтов, полимеров.

Представленные исследования опираются на фундаментальные идеи механики растущих тел, заложенные в конце XX века в Институте проблем механики Российской академии наук научной школой Н. Х. Арутюняна, и математическую теорию наращиваемых тел, развиваемую в работах А. В. Манжирова и его учеников (см., например, [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14]).

Обсуждение результатов. В настоящей работе проводится постановка начально-краевых задач, описывающих квазистатическое деформирование рассматриваемой конструкции до начала, во время и после завершения процесса ее кусочно-непрерывного наращивания (т. е. за несколько этапов непрерывного присоединения материала к ее внутренней цилиндрической поверхности, между которыми выдерживаются паузы произвольной продолжительности) под действием сил тяжести и произвольной переменной во времени нагрузки, симметрично распределенной по наружной цилиндрической поверхности. При этом учитывается возможность использования при наращивании предварительно напряженных конструктивных элементов.

Строятся аналитические решения поставленных задач в рядах и квадратурах. Приводятся результаты многочисленных числовых расчетов, выполненных для различных вариантов и режимов возведения тонкостенных и толстостенных сводов из тонкостенной заготовки, а также усиления исходно толстостенных сводов.

Показано, что напряженно-деформированное состояние возводимых тяжелых объектов определяющим образом зависит от технологии и режима их возведения. При этом характеристики их напряженного состояния могут достигать в процессе изготовления величин, значительно превышающих те, которые устанавливаются спустя длительное время после изготовления, причем в других по отношению к последним зонах.

Исследовано влияние ползучести, старения и веса материала на деформирование тяжелого свода, наращиваемого ненапряженными конструктивными элементами. Выделены и проанализированы центральные тенденции, непрерывное взаимодействие которых определяет процесс формирования напряженно-деформированного состояния возводимого объекта. Рассмотрены различные с точки зрения этих тенденций режимы возведения.

Так, при достаточно быстром изготовлении свода из молодого материала в конечном итоге происходит очень сильное разгружение его исходной части. Однако на начальной стадии такого процесса утолщения свод испытывает напряжения, превышающие первоначальные. В случае тонкой заготовки это превышение весьма значительно.

Если же реализуется медленное возведение, то есть заготовка устанавливается достаточно поздно в смысле возраста материала, перед началом ее наращивания выдерживается достаточно продолжительная пауза или само наращивание протекает слишком медленно (предельным вариантом таких процессов является изготовление тела из чисто упругого материала), то материал, присоединенный на завершающей стадии возведения, остается практически ненапряженным. При этом уровень напряжений в исходной части конструкции значительно возрастает по сравнению с первоначальным. Если заготовка является достаточно тонкостенной, в начальный момент в ней возникают весьма высокие напряжения, и поэтому в готовой конструкции будут иметься области с уровнем напряжений, многократно превышающим максимальный уровень при ее традиционном расчете по конечной конфигурации.

Таким образом, отказ от учета действия сил тяжести на протяжении *всего процесса* возведения тяжелого объекта, а не только в его готовом виде, может привести к радикально неверным представлениям о текущем и результирующем состоянии этого объекта, в том числе к многократному завышению оценок его прочности и устойчивости на стадии возведения и несущей способности во время эксплуатации.

Показано, что при постепенном изготовлении свода из достаточно толстостенной заготовки удастся получить в готовой конструкции заметно более низкие напряжения по сравнению с теми, которые она имела бы, будучи установленной на основании сразу в готовом виде. В случае тонкой заготовки продемонстрировано, что, варьируя в процессе возведения свода надлежащим образом скорость его наращивания, можно добиться в итоге весьма ощутимого снижения в нем напряжений относительно начального состояния заготовки, не превысив при этом неких их допустимых значений во время изготовления.

В ходе исследований обнаружено, что даже весьма толстостенная заготовка после установки на гладкое основание стремится отслоиться от него на периферийных участках своих подошв под действием собственного веса. Избавиться от зон отрывающих контактных напряжений (отрицательного контактного давления) за счет последующего усиления такой заготовки без принятия специальных мер невозможно даже в том случае, когда контактное давление на подошвах ненаращивавшегося (мгновенно установленного) свода окончательной толщины было бы всюду положительным.

Исследован вариант наращивания свода слоями, равномерно растянутыми в окружающем направлении произвольным напряжением, зависящим от радиуса слоя. При таком способе возведения также не удастся избежать неограниченного во времени сохранения удерживающих связей на части подошвы готового свода, препятствующих ее отслоению. Однако созданием в присоединяемых слоях надлежащих начальных напряжений возможно добиться гораздо более выгодного результирующего напряженного состояния всей конструкции, чем при ее наращивании ненапряженными элементами, — в смысле минимизации отрицательного давления на основание и общего уровня напряжений в конструкции.

Рассмотрен также такой вариант процесса, когда вершина свода закрепляется на подвесе с контролируемой силой натяжения, компенсирующей во время возведения заданную долю текущего веса свода и полностью исчезающей после окончательного завершения его формирования. Использование такой технологии позволяет получить во всей готовой конструкции значительно более низкие напряжения, чем при обычном наращивании в том же временном режиме. При этом также оказывается возможным получение гораздо более оптимальной финальной эпюры контактных напряжений по

сравнению с той, которая возникает в случае установки свода на основание уже в готовом виде.

Если же, помимо организации силовой поддержки, еще подвергать присоединяемые к конструкции элементы некоторому начальному растяжению, то удастся добиться того, что возведенный таким образом даже тонкостенный свод, находящийся под действием только сил тяжести, будет оказывать в итоге *всюду положительное* контактное давление на гладкое основание, причем распределенное по подошве достаточно эффективно.

Заключение. Построено полное аналитическое решение задачи о деформировании кругового цилиндрического свода, возводимого методом кусочно-непрерывного наращивания из вязкоупругого стареющего (в частном случае упругого) материала на гладком жестком горизонтальном основании под действием сил тяжести и произвольной переменной во времени нагрузки, симметрично распределенной по его наружной цилиндрической поверхности, при произвольных предварительных напряжениях в присоединяемых в процессе наращивания конструктивных элементах. В результате анализа полученных решений и выполненных числовых расчетов показано, что отказ от учета действия сил тяжести на протяжении всего процесса возведения тяжелых объектов может привести к радикально неверным представлениям об их текущем и результирующем состоянии, в том числе к многократному завышению оценок прочности и устойчивости на стадии возведения и эксплуатационной несущей способности. Напряженно-деформированное состояние таких объектов определяющим образом зависит от технологии и режима их возведения. Продемонстрирована возможность весьма эффективного управления этим состоянием посредством варьирования темпа возведения, создания надлежащих предварительных напряжений в дополнительном материале, временного локального загрузения поверхности возводимого объекта.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 323 с.
- [2] Арутюнян Н. Х. Ползучесть стареющих материалов. Ползучесть бетона // Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. М.: Наука, 1972. С. 155–202.
- [3] Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
- [4] Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 318 с.
- [5] Манжиров А. В. Общая безынерционная начально-краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела // ПММ. 1995. Т. 59, вып. 5. С. 836–848.
- [6] Манжиров А. В., Паршин Д. А. Наращивание вязкоупругого шара в центрально-симметричном силовом поле // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 1. С. 66–83.
- [7] Манжиров А. В., Паршин Д. А. Моделирование процессов наращивания цилиндрических тел на вращающейся оправке с учетом действия центробежных сил // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 6. С. 149–166.
- [8] Манжиров А. В., Паршин Д. А. Моделирование процесса деформирования наращиваемых конических тел // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. № 4 (54). С. 290–303.

[9] Паршин Д. А. Усиление конической опоры методом наращивания // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XI Международной конференции. Т. 1. Ростов-на-Дону, 2007. С. 205–209.

[10] Манжиров А. В., Паршин Д. А. Смежные задачи механики наращиваемых тел и геомеханики // Неклассические задачи геомеханики. Труды Всероссийской объединенной научной сессии Научных советов РАН по механике деформируемого твердого тела и по проблемам горных наук / отв. ред. С. М. Ткач. Якутск, 2008. С. 130–137.

[11] Manzhairov A. V., Lychev S. A. Mathematical modeling of additive manufacturing technologies // Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of the World Congress on Engineering 2014. Volume II. London, 2014. P. 1404–1409.

[12] Manzhairov A. V., Lychev S. A. An approach to modeling of additive manufacturing technologies // Transactions on Engineering Technologies: Proceedings of the World Congress on Engineering 2014. Amsterdam: Springer, 2015. P. 99–115.

[13] Manzhairov A. V. Mechanics of growing solids: New track in mechanical engineering // Proceedings of ASME 2014 International Mechanical Engineering Congress & Exposition. Montreal, Canada. IMECE2014-36712 (compact disc). 10 p.

[14] Manzhairov A. V. Design of additive manufacturing fabricated viscoelastic parts // Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of the World Congress on Engineering 2015. Volume II. London, 2015. P. 710–714.

A. V. Manzhurov^{1,2,3}, D. A. Parshin^{1,2}

THE INFLUENCE OF GRAVITATION ON AN ADDITIVE MANUFACTURING STRUCTURE FROM A VISCOELASTIC AGING MATERIAL

¹ *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow*

² *Bauman Moscow State Technical University, Moscow*

³ *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow*

Abstract. We study the influence of gravity forces on objects gradually formed in their presence. We consider the cases of aging viscoelastic and purely elastic materials. Within the framework of linear mechanics of accreted solids we solve the mathematically two-dimensional problem on the erection of a heavy semicircular arch structure on a smooth rigid foundation by the method of layer-by-layer thickening of an initially installed structure on the side of its internal surface. We show that, to estimate the strength, stability and the bearing capacity of a heavy structure, it is extremely important to take into account the gravity forces acting on this structure not only in its final configuration but during the entire erection process. We also demonstrate certain possibilities of a very efficient control of the stressed state of an accreted solid.

Keywords: vault, arch, structure, building, raising, accretion, gravity, elasticity, viscoelasticity, rate of process, prestressed elements, local support, strength, stability, bearing capacity.

REFERENCES

- [1] Harutyunyan N. H. Some questions of the theory of creep. M.; L.: Gostekhizdat, 1952. 323 p. (in Russian).
- [2] Harutyunyan N. H. Creep aging materials. Creep of concrete // Mechanics in the USSR over 50 years. M.: Nauka, 1972. Vol. 3. P. 155–202. (in Russian).
- [3] Harutyunyan N. H., Kolmanovskii V. B. The theory of creep inhomogeneous bodies. M.: Nauka, 1983. 336 p. (in Russian).
- [4] Harutyunyan N. H., Manzhurov A. V. Contact problems of the theory of creep. Yerevan: Publishing House of the NAS RA, 1999. 318 p. (in Russian).
- [5] Manzhurov A. V. Total inertialess initial boundary value problem for a piecewise continuous incremental viscoelastic aging body // PMM. 1995. Vol. 59, issue 5. P. 836–848. (in Russian).

Manzhurov Alexander Vladimirovich

e-mail: parshin@ipmnet.ru, M.Sc., Ph.D., Sc.D., Professor; Head of the Laboratory for Modeling in Solid Mechanics, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow; Professor, Head of a Branch of the Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow; Professor of the Department of Higher Mathematics, National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow.

Parshin, Dmitry Alexandrovich

e-mail: manzh@ipmnet.ru, M.Sc., Ph.D.; Scientific Researcher of the Laboratory for Modeling in Solid Mechanics, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow; Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow.

- [6] Manzhirov A. V., Parshin D. A. Capacity viscoelastic layer in a centrally symmetric field of force // *Izvestiya RAN. Mechanics of Rigid Body*. 2006. № 1. P. 66–83. (in Russian).
- [7] Manzhirov A. V., Parshin D. A. Modelling of processes of capacity cylindrical bodies on the rotating mandrel taking into account centrifugal forces // *Izvestiya RAN. Mechanics of Rigid Body*. 2006. № 6. P. 149–166. (in Russian).
- [8] Manzhirov A. V., Parshin D. A. Modeling of deformation process stackable conical bodies // *Vestnik of SSU. The natural science series*. 2007. № 4 (54). P. 290–303. (in Russian).
- [9] Parshin D. A. Gain support by building a conical // *Contemporary problems of continuum mechanics. Proceedings of the IX International Conference. Rostov-on-Don, 26–29 November 2007. Vol. 1. Rostov-on-Don: Publishing house Ltd. «TSVVR», 2007. P. 205–209. (in Russian).*
- [10] Manzhirov A. V., Parshin D. A. Related problems of mechanics stackable bodies and geomechanics // *Nonclassical problems of geomechanics. Proceedings of the All-Russia Joint scientific session of the Scientific Council on Solid Mechanics and Mining Sciences on Mining Sciences. Yakutsk, 16–20 June 2008 / Executive Editor S. M. Tkach. Yakutsk YSC Publishing House of SB RAS, 2008. P. 130–137. (in Russian).*
- [11] Manzhirov A. V., Lychev S. A. Mathematical modeling of additive manufacturing technologies // *Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of the World Congress on Engineering 2014, 2–4 July, 2014, London, U.K. Volume II. London: IAENG, 2014. P. 1404–1409.*
- [12] Manzhirov A. V., Lychev S. A. An approach to modeling of additive manufacturing technologies // *Transactions on Engineering Technologies: The World Congress on Engineering 2014. Amsterdam: Springer, 2015. PP. 99–115.*
- [13] Manzhirov A. V. Mechanics of growing solids: New track in mechanical engineering // *Proceedings of ASME 2014 International Mechanical Engineering Congress & Exposition, IMECE2014, November 14–20, 2014, Montreal, Canada. IMECE2014-36712 (compact disc). 10 p.*
- [14] Manzhirov A. V. Design of additive manufacturing fabricated viscoelastic parts // *Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of the World Congress on Engineering 2015, 1–3 July, 2015, London, U.K. Volume II. London: IAENG, 2015. P. 710–714.*

Ю. Н. Радаев¹, В. А. Ковалев²

СВЯЗАННЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

¹Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

²Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва

Аннотация. Рассматриваются полевые теории механики континуума, основой которых выступает вариационный принцип наименьшего действия Гамильтона. Действие представляет собой интегральный функционал над, варьирование которого производится по физическим полевым переменным при неварьируемых пространственно-временных координатах. Более широкие способы варьирования включают трансформацию области интегрирования, т.е. изменение пространственно-временных координат. Совместное варьирование пространственно-временных координат и полевых переменных существенно при выводе „естественных“ граничных условий на неизвестных поверхностях сильного разрыва поля, границах соприкосновения различных фаз и иных неизвестных а priori поверхностей, варьирование которых допускается принципом наименьшего действия. Опираясь на теорию однопараметрических групп преобразований и соотношения совместности разрывов Югонио—Адамара, получены (в терминах, присущих четырехмерным формулировкам полевых теорий физики и механики) общие формы первой вариации действия при совместных трансформациях пространственно-временных координат и физических полей, задаваемых группами преобразований. Учитываются „навязанные“ граничные условия (ограничения) на поверхности, ограничивающей варьлируемую область. Получены обобщенные уравнения Эрдмана—Вейерштрасса на поверхностях сильного разрыва поля.

Ключевые слова: физическое поле, действие, принцип наименьшего действия, уравнения поля, группа преобразований, инфинитезимальный генератор, вариация, варьлируемая область, ограничение.

УДК: 539.374

1. Многие современные теории механики континуума основываются на вариационном подходе и формулируются в терминах исчисления вариаций. Ярким примером в

© Радаев Ю. Н., Ковалев В. А., 2015

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: radaev@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Ковалев Владимир Александрович

e-mail: vlad_koval@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00139).

Поступила 12.08.2015

этом отношении являются полевые теории механики континуума. Отметим попытку систематического изложения вариационных принципов механики жидкости и газа и механики деформируемого твердого тела, предпринятую в известной монографии [1]. Теоретико-полевые формулировки всегда подразумевают существенное и интенсивное использование понятий и формализма вариационного исчисления [2], [3], групп преобразований и теории инвариантных вариационных функционалов и вариационных симметрий [4–6].

Одной из важнейших задач вариационного исчисления выступает учет различного рода связей и ограничений на варьируемые поля (включая также их градиенты), переменные границы и неизвестные а priori поверхности сильных разрывов. В частности, в моделях континуумов с микроструктурой наличие конечных геометрических ограничений (связей), накладываемых на микроструктурные параметры, предполагает формулировку проблемы как связанной задачи вариационного исчисления. Такая постановка, как хорошо известно, впервые была предложена Лагранжем. Ограничения при этом могут накладываться в форме конечных, либо дифференциальных уравнений и неравенств. Решение подобного рода задач обычно выполняется с помощью правила множителей Лагранжа (см., например, [1, с. 114–129]). Рассмотрение вариационных задач для интегрального функционала с ограничениями типа равенств и неравенств на уровне необходимых условий сводится к проблеме безусловного экстремума с помощью правила Лагранжа. Оказывается, что этот принцип распространяется на задачи весьма сложной природы.

В работе рассматриваются вариационные задачи с ограничениями на варьируемых внешних границах или внутренних поверхностях (моделирующих, например, поверхности сильного разрыва физических полей). Опираясь на теорию однопараметрических групп преобразований и соотношения совместности разрывов Югонио—Адамара, получены (в терминах, присущих четырехмерным формулировкам полевых теорий физики и механики) общие формы первой вариации многомерного интегрального функционала при совместных трансформациях пространственно-временных координат и физических полей, задаваемых группами преобразований. Получены обобщенные уравнения Эрдмана—Вейерштрасса на поверхностях сильного разрыва поля. В вариационных постановках учитываются „навязанные“ граничные условия (ограничения) на поверхности, ограничивающей варьируемую область.

Классические теории поля (см., например, монографии [7], [8]) основываются на предположении о том, что непрерывное физическое поле математически представляется некоторым интегральным функционалом \mathfrak{S} , который по историческим причинам называется действием:

$$\mathfrak{S} = \int \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) d^4 X. \quad (1)$$

Здесь характерная для теории поля символика, развитая в [7], [8], имеет следующий смысл: \mathcal{L} — „естественная“ плотность лагранжиана (плотность действия); φ^k — упорядоченный массив физических полевых переменных; X^β ($\beta = 1, 2, 3, 4$) — четыре пространственно-временные координаты.¹

¹В абстрактном случае можно развивать теории поля на M -мерном многообразии. Большинство фундаментальных положений теории поля обобщается на случай пространства—времени с произвольным числом пространственных измерений.

Согласно принципу наименьшего действия действительное поле реализуется таким образом, что действие оказывается экстремальным, т.е. первая вариация действия обращается в нуль для всех допустимых вариаций физических полей φ^k :

$$\delta\mathfrak{S} = 0. \quad (2)$$

Здесь *не подвергаются* варьированию пространственно-временные координаты X^β и 4-область интегрирования.

Принцип наименьшего действия позволяет сформулировать задачу о вычислении поля внутри некоторой 4-области как вариационную задачу об отыскании экстремумов интегрального функционала (1).

2. Рассмотрим вывод формулы первой вариации интегрального функционала, считая варьруемой также область интегрирования и предполагая, что на варьруемой границе могут быть дополнительно сформулированы граничные условия того или иного вида (так называемые „навязанные“ граничные условия).

Рассуждения проведем для случая, когда интегральный функционал

$$\mathfrak{S} = \int \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) d^M X \quad (3)$$

определен в некоторой переменной области пространства размерности M ; плотность действия не зависит от градиентов полевых переменных выше первого порядка. В монографиях [7], [8] могут быть найдены недостающие детали вывода.

Однопараметрической группе преобразований

$$\begin{aligned} \tilde{X}^\beta &= X^\beta + \varepsilon \xi^\beta(\varphi^s, X^\gamma) + \dots, \\ \tilde{\varphi}^k &= \varphi^k + \varepsilon h^k(\varphi^s, X^\gamma) + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

соответствует вариация действия ($\zeta \cdot \partial$ — инфинитезимальный генератор)

$$\frac{\delta\mathfrak{S}}{\varepsilon} = \int ((\zeta \cdot \partial)\mathcal{L} + \mathcal{L}\partial_\sigma \xi^\sigma) d^M X. \quad (5)$$

На основании

$$(\zeta \cdot \partial)\mathcal{L} + \mathcal{L}\partial_\sigma \xi^\sigma = \partial_\sigma(\xi^\sigma \mathcal{L}) + \mathcal{Q}^l \mathcal{E}_l(\mathcal{L}) + \partial_\sigma \mathcal{K}^\sigma, \quad (6)$$

где

$$\mathcal{K}^\sigma = \mathcal{Q}^l \partial_l^\sigma \mathcal{L}, \quad \mathcal{Q}^l = h^l - (\partial_\gamma \varphi^l) \xi^\gamma,$$

и подставляя (6) в (5), получим (\mathcal{E}_l — оператор Эйлера)

$$\delta\mathfrak{S} = \int (\partial_\sigma(\mathcal{L}\delta X^\sigma) + \bar{\delta}\varphi^l \mathcal{E}_l(\mathcal{L}) + \partial_\sigma(\varepsilon \mathcal{K}^\sigma)) d^M X. \quad (7)$$

Полагая выполненными дифференциальные уравнения поля

$$\mathcal{E}_l(\mathcal{L}) = 0,$$

закключаем, что

$$\delta\mathfrak{S} = \int \partial_\sigma(\mathcal{L}\delta X^\sigma + \varepsilon \mathcal{Q}^l \partial_l^\sigma \mathcal{L}) d^M X. \quad (8)$$

Применяя затем к последнему интегралу теорему Гаусса—Остроградского, для первой вариации действия находим

$$\delta\mathfrak{S} = \oint_{\partial} \mathcal{N}_{\sigma} (\mathcal{L} \delta X^{\sigma} + (\partial_1^{\sigma} \mathcal{L}) \bar{\delta} \varphi^l) d^{M-1} \tau, \quad (9)$$

где \mathcal{N}_{σ} — внешняя единичная ($\mathcal{N}_{\sigma} \mathcal{N}^{\sigma} = 1$) нормаль замкнутого $M - 1$ -мерного многообразия ∂ , ограничивающего рассматриваемую M -область; $d^{M-1} \tau$ — инвариантный элемент объема многообразия ∂ .

В разрывных вариационных задачах частичные вариации поля разрывны, а полные — непрерывны. Поэтому удобнее оперировать с полными вариациями полевых переменных. В формулу (9) вместо частичной вариации поля введем полную и, принимая обозначения

$$T_{\cdot\gamma}^{\sigma} = \mathcal{L} \delta_{\gamma}^{\sigma} - (\partial_{\gamma} \varphi^l) \partial_1^{\sigma} \mathcal{L}, \quad S_{\cdot l}^{\sigma} = -\partial_1^{\sigma} \mathcal{L}, \quad (10)$$

соответственно для 4-тензора энергии—импульса поля и тензора напряжений Пиола—Кирхгофа в результате имеем следующее выражение первой вариации интегрального функционала действия:

$$\delta\mathfrak{S} = \oint_{\partial} \mathcal{N}_{\sigma} T_{\cdot\gamma}^{\sigma} \delta X^{\gamma} d^{M-1} \tau - \oint_{\partial} \mathcal{N}_{\sigma} S_{\cdot l}^{\sigma} \delta \varphi^l d^{M-1} \tau. \quad (11)$$

Формула (11) для первой вариации интегрального функционала действия сразу же позволяет получить обобщенные уравнения Эрдмана—Вейерштрасса на поверхностях сильного разрыва поля. В силу непрерывности и независимости вариаций δX^{γ} и $\delta \varphi^l$ на неизвестной поверхности сильных разрывов полевых переменных находим следующие уравнения, связывающие скачки канонических полевых тензоров — 4-тензора энергии—импульса $T_{\cdot\gamma}^{\sigma}$ и тензора напряжений Пиола—Кирхгофа $S_{\cdot l}^{\sigma}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\sigma} [T_{\cdot\gamma}^{\sigma}] &= 0, \\ \mathcal{N}_{\sigma} [S_{\cdot l}^{\sigma}] &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Преобразуем первое из уравнений совместности сильных разрывов поля (12). Сначала заметим, что поверхности сильного разрыва

$$\mathcal{N}_{\sigma} T_{\cdot\gamma}^{\sigma} = \mathcal{N}_{\sigma} (\mathcal{L} \delta_{\gamma}^{\sigma} + (\partial_{\gamma} \varphi^l) S_{\cdot l}^{\sigma}) = \mathcal{L} \mathcal{N}_{\gamma} + (\partial_{\gamma} \varphi^l) \mathcal{N}_{\sigma} S_{\cdot l}^{\sigma},$$

а также в силу второго из уравнений совместности сильных разрывов поля (12)

$$\mathcal{N}_{\sigma} [T_{\cdot\gamma}^{\sigma}] = [\mathcal{L}] \mathcal{N}_{\gamma} + \mathcal{N}_{\sigma} S_{\cdot l}^{\sigma} [\partial_{\gamma} \varphi^l].$$

Здесь значения $\mathcal{N}_{\sigma} S_{\cdot l}^{\sigma}$ можно брать с любой стороны поверхности сильного разрыва, поскольку указанные значения совпадают.

Привлекая условия совместности разрывов Югонио—Адамара:

$$[\partial_{\gamma} \varphi^l] = \mathcal{V}^l \mathcal{N}_{\gamma} \quad (\gamma = \overline{1, M}), \quad (13)$$

где \mathcal{V}^l — „неопределенные“ переменные, заданные на поверхности сильного разрыва, приходим к соотношению

$$\mathcal{N}_{\sigma} [T_{\cdot\gamma}^{\sigma}] = \mathcal{N}_{\gamma} ([\mathcal{L}] + \mathcal{N}_{\sigma} \mathcal{V}^l S_{\cdot l}^{\sigma}),$$

откуда можно заключить, что 4-вектор \mathcal{N}_γ — собственный вектор 4-тензора $[T_\gamma^\sigma]$; с помощью (12) можно утверждать, что соответствующее собственное значение равно нулю, что дает, помимо

$$\mathcal{N}_\sigma[S_i^\sigma] = 0, \quad (14)$$

всего одно существенное условие совместности сильных разрывов поля:

$$[\mathcal{L}] + \mathcal{N}_\sigma \mathcal{V}^l S_i^\sigma = 0 \quad (15)$$

или

$$[\mathcal{L}] + [\partial_\sigma \varphi^l] S_i^\sigma = 0. \quad (16)$$

3. Формула (11) подлежит дальнейшему преобразованию в том случае, когда вариации δX^γ и $\delta \varphi^l$ на границе варьируемой области не будут независимыми. Это происходит тогда, когда постановка вариационной задачи включает ограничения в виде „навязанных“ граничных условий на границе переменной области интегрирования. В частности, на замкнутой $M - 1$ -мерной поверхности ∂ могут задаваться значения полевых переменных:

$$\varphi^l = \Gamma^l(X^\gamma) \quad (\gamma = \overline{1, M}). \quad (17)$$

Вариации координат и полевых переменных на ∂ будут, очевидно, связаны между собой соотношениями

$$\delta \varphi^l = (\partial_\gamma \Gamma^l) \delta X^\gamma. \quad (18)$$

Формула (11) преобразуется, следовательно, к виду

$$\delta \mathfrak{S} = \oint_{\partial} \mathcal{N}_\sigma (T_\gamma^\sigma - (\partial_\gamma \Gamma^l) S_i^\sigma) \delta X^\gamma d^{M-1} \tau, \quad (19)$$

где все вариации δX^γ на границе варьируемой области независимы и произвольны. В силу последнего обстоятельства на основании (19) получаем граничные условия на ∂ :

$$\mathcal{N}_\sigma (T_\gamma^\sigma - (\partial_\gamma \Gamma^l) S_i^\sigma) = 0 \quad (\gamma = \overline{1, M}) \quad (20)$$

или

$$\mathcal{N}_\sigma (\mathcal{L} \delta_\gamma^\sigma + (\partial_\gamma \varphi^l - \partial_\gamma \Gamma^l) S_i^\sigma) = 0 \quad (\gamma = \overline{1, M}). \quad (21)$$

Можно считать, что поля φ^l непрерывно продолжаются за варьируемую границу ∂ заданием Γ^l . Тогда в силу условий совместности разрывов Югионо—Адамара на ∂ выполняются

$$\partial_\gamma \varphi^l - \partial_\gamma \Gamma^l = \mathcal{W}^l \mathcal{N}_\gamma \quad (\gamma = \overline{1, M}), \quad (22)$$

где \mathcal{W}^l — „неопределенные“ переменные, заданные на ∂ ; следовательно, на варьируемой границе должны выполняться следующие условия:

$$\mathcal{N}_\sigma (\mathcal{L} \delta_\gamma^\sigma + \mathcal{W}^l \mathcal{N}_\gamma S_i^\sigma) = 0 \quad (\gamma = \overline{1, M}). \quad (23)$$

Простыми преобразованиями граничное условие (23) приводится к виду

$$\mathcal{N}_\gamma (\mathcal{L} + \mathcal{W}^l \mathcal{N}_\sigma S_i^\sigma) = 0 \quad (\gamma = \overline{1, M}), \quad (24)$$

т.е. на самом деле имеется всего одно существенное граничное условие:

$$\mathcal{L} + \mathcal{W}^l \mathcal{N}_\sigma S_i^\sigma = 0, \quad (25)$$

откуда на основании условий совместности разрывов Югонио—Адамара на ∂ приходим к следующему уравнению, которое должно удовлетворяться на варьируемой граничной поверхности ∂ :

$$\mathcal{L} + (\partial_\sigma \varphi^l - \partial_\sigma \Gamma^l) S_l^\sigma = 0. \quad (26)$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
- [2] Гюнтер Н. М. Курс вариационного исчисления. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1941. 308 с.
- [3] Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 228 с.
- [4] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
- [5] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 639 с.
- [6] Olver P. J. Equivalence, Invariants and Symmetry. Cambridge; N. Y.; Melbourne: Cambridge University Press, 1995. 526 pp.
- [7] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 156 с.
- [8] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 328 с.

Y. N. Radayev¹, V. A. Kovalev²

COUPLED VARIATIONAL MECHANICS PROBLEMS WITH MOVING BOUNDARY

¹*Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow*

²*Moscow City University of Management of Moscow Government, Moscow*

Abstract. Theories of the continuum mechanics based on the least action principle are considered. Variation of the action integral in the least action principle is due to variations of the field variables while space–time coordinates are not varied. A wider variation procedure includes variations of the space–time coordinates. Simultaneous variations of the field variables and space–time coordinates are required in variational problems with strong discontinuities of field variables or other a priori unknown free boundaries which variations are admissible. A form of the first variation of the action integral corresponding simultaneous variations of the space–time coordinates and field variables is obtained. This form is given in terms of 4-dimensional covariant formalism of field theories of the continuum mechanics and physics. The first variation of the action integral over a varied domain is given for variational problems with constraints which are formulated on unknown free boundaries.

Keywords: physical field, action, least action principle, field equations, transformation group, infinitesimal generator, variation, varied domain, constraint.

REFERENCES

- [1] Berdichevsky V. L. Variational principles of continuum mechanics. M.: Nauka, 1983. 448 p. (in Russian).
- [2] Gunther N. M. The course of the calculus of variations. M.; L.: Gostehteoretizdat, 1941. 308 p. (in Russian).
- [3] Gelfand I. M., Fomin S. V. Calculus of variation. M.: Fizmatgiz, 1961. 228 p. (in Russian).
- [4] Ovsyannikov L. V. Group analysis of differential equations. M.: Nauka, 1978. 400 p. (in Russian).
- [5] Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. M.: Mir, 1989. 639 p. (in Russian).
- [6] Olver P. J. Equivalence, Invariants and Symmetry. Cambridge; N. Y.; Melbourne: Cambridge University Press, 1995. 526 pp.
- [7] Kovalev V. A., Radayev Y. N. Elements of field theory: variational symmetry and geometric invariants. M.: FIZMATLIT, 2009. 156 p. (in Russian).

Radayev Yuri Nikolayevich

e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, Leading Researcher, DSc., Prof., Institute for Problems in Mechanics of RAS, Russia, Moscow.

Kovalev Vladimir Alexandrovich

e-mail: vlad_koval@mail.ru, DSc. (Phys.&Math.), Prof., Moscow City University of Management of Moscow Government, Moscow.

[8] Kovalev V. A., Radayev Y. N. Wave problems of the theory and field thermomechanics. Saratov: Publishing house of Saratov University, 2010. 328 p. (in Russian).

А. А. Артемьева¹, В. Г. Баженов¹, Д. В. Жегалов¹, В. А. Иванов¹, А. И. Кибец¹,
Т. В. Кузмичева²

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ
КОМБИНИРОВАННЫХ НАГРУЖЕНИЯХ РАСТЯЖЕНИЕМ,
ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ, КРУЧЕНИЕМ**

¹ Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного
университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород

² Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
г. Нижний Новгород

Аннотация. Проблема упругопластических деформаций оболочек вращения при комби-

© Артемьева А. А., Баженов В. Г., Жегалов Д. В., Иванов В. А., Кибец А. И., Кузмичева Т. В., 2015

Артемьева Анастасия Анатольевна

e-mail: agapan@mail.ru, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород.

Баженов Валентин Георгиевич

e-mail: bazhenov@mch.unn.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород.

Жегалов Дмитрий Владимирович

e-mail: zhegalov@mch.unn.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород.

Иванов Виктор Анатольевич

e-mail: bazhenov@mch.unn.ru, младший научный сотрудник, Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород.

Кибец Александр Иванович

e-mail: kibec@mch.unn.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород.

Кузмичева Татьяна Владимировна

e-mail: kuzmicheva.tata@gmail.com, аспирант, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород.

нированных нагружениях и больших деформациях в осесимметричной постановке изучена недостаточно. Имеющиеся публикации [1], [2], [3] посвящены решению задач с малыми деформациями и немалыми перемещениями металлических оболочек. В работе представлен вариационно-разностный метод решения подобных задач с учетом больших деформаций, комбинированного нагружения и неоднородности НДС. Приводятся результаты исследования процессов упругопластического деформирования и локализации деформаций при комбинированном нагружении кручением, растяжением и давлением.

Ключевые слова: упругопластичность, большие деформации, осесимметричные оболочки, кручение, численное моделирование, вариационно-разностный метод.

УДК: 539.3

Обзор работ, посвященных численным решениям геометрически нелинейных задач упругопластического деформирования и устойчивости оболочек при статических и динамических нагружениях, представлен в [1], [2], [3]. Данная методика основана на геометрически нелинейной теории оболочек типа Тимошенко и теории пластичности с нелинейным изотропным и кинематическим упрочнением, которые учитывают затухающую память материала при сложных процессах деформирования. Это позволяет решать задачи при комбинированных непропорциональных нагружениях растяжением, сжатием, кручением, внутренним и внешним давлением, а также при упругопластическом выпучивании, для которого характерно сложное нагружение. Кинематические соотношения формулируются в скоростях и строятся в метрике текущего состояния, что позволяет учитывать большие деформации и формоизменения оболочки. Уравнения движения оболочки выводятся из уравнения баланса виртуальных мощностей работы. Решение определяющей системы уравнений при заданных начальных и граничных условиях основано на моментной схеме метода конечных элементов и явной конечно-разностной схеме интегрирования по времени типа «крест». Исследование неосесимметричной потери устойчивости оболочек вращения с учетом сложного нагружения, начальных несовершенств формы, волновых и краевых эффектов осуществляется в трехмерной постановке на базе сертифицированного вычислительного комплекса «Динамика-3» [4]. Для решения задачи применяется моментная схема метода конечных элементов [5] с полилинейной аппроксимацией скоростей перемещений в 8-узловом изопараметрическом элементе. Наряду с общей эйлеровой декартовой системой координат, в которой формируются уравнения движения, в каждом конечном элементе вводится местная (сопутствующая) система координат, в которой определяются тензоры скоростей деформаций и напряжений Коши. Предполагается, что сдвиговые и изгибные деформации малы, а смещения и углы поворота КЭ как жесткого целого произвольны. Скорости деформаций по толщине аппроксимируются безмоментными и моментными составляющими, как это принято в 6-модальной теории оболочек типа Тимошенко [5]. При выполнении численного интегрирования по

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-38-20759 мол_а_вед, № 15-38-50138 мол_нр), гранта Президента РФ для ведущих научных школ РФ (НШ-593.2014.8), гранта Министерства образования и науки РФ (соглашение № 02.В.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ от 27.08.2013) и при частичном финансировании в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки РФ (проект № 2014/134 2226).

Поступила 18.09.2015

пространственным переменным применяются квадратурные формулы Гаусса. Проводится сравнение результатов расчетов в двухмерной и трехмерной постановках с данными натуральных экспериментов.

Осесимметричная потеря устойчивости. Исследуется процесс упругопластического деформирования цилиндрической оболочки при совместном кинематическом действии растяжения и кручения. Геометрические параметры оболочки: средний радиус $R_0 = 1,45 \cdot 10^{-2}$ м, длина $L_0 = 9,2 \cdot 10^{-2}$ м, толщина $h = 1 \cdot 10^{-3}$ м. Характеристики материала: сталь 12Х18Н10Т, модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$. При квазистатическом нагружении начальное распределение скоростей перемещений вдоль оболочки полагается линейным, а скорость перемещения торца оболочки – постоянной, чтобы вклад сил инерции в решение задачи был пренебрежимо мал. В качестве диаграммы деформирования принималась $\sigma_*(\kappa)$, построенная на основе эксперимента по монотонному кручению до разрушения, параметры модели теории пластичности с изотропным и кинематическим упрочнением представлены в [6].

До момента потери устойчивости форма оболочки определяется только с ее относительным удлинением и не зависит от доли кручения. Увеличение доли кручения приводит к образованию шейки на более ранней стадии деформирования (по сравнению с чистым растяжением), при этом интенсивность деформаций возрастает [7]. С увеличением скорости нагружения область локализации пластических деформаций в шейке расширяется и смещается к нагружаемому торцу, что объясняется неоднородностью НДС при динамическом растяжении оболочки с увеличением деформаций у нагружаемого торца [8]. При этом прогибы и деформации остальной части оболочки, примыкающей к неподвижно зашпечленному торцу, уменьшаются. На рис. 1 и 2 приведены сравнения расчетных (сплошная кривая) и экспериментальных (штриховая кривая) значений безразмерной осевой силы F^* (слева) и крутящего момента M^* (справа) при кинематическом параметре $q=0,1$. Расхождение в приведенных данных составляет менее 10 %.

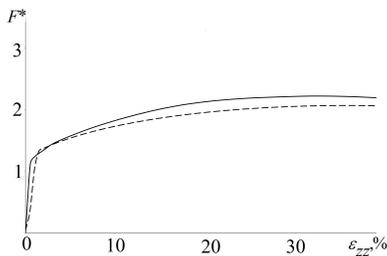


Рис. 1.

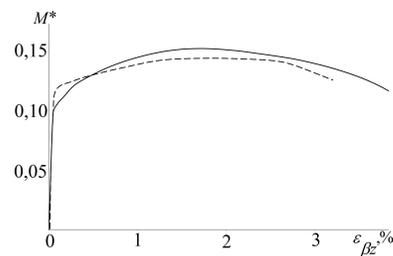


Рис. 2.

Проведено исследование процесса упругопластического деформирования цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении давлением – кручением по четырехзвенным ломаным. На рис. 3 приведена диаграмма нагружения OABCD, сплошной кривой отмечены значения внутреннего давления Q , штриховой – угол закручивания свободного торца u_β . На участке OA задается линейный рост внутреннего давления Q до 30 МПа при отсутствии кручения, на участке АВ – падение давления до 20

МПа с одновременным кручением торца до угла $u_\beta = 14$ град, на участке ВС происходит рост давления до 28 МПа при неизменном угле закручивания, на участке CD – падение давления до 18 МПа с одновременным кручением до 28 град. На рис. 4 представлены значения безразмерного крутящего момента M^* в зависимости от условной сдвиговой деформации $\varepsilon_{z\beta}$, полученные в расчете (сплошная кривая) и эксперименте (штриховая). Участки АВ, CD характеризуются ростом крутящего момента при падении давления, участок ВС – падением крутящего момента при увеличении давления.

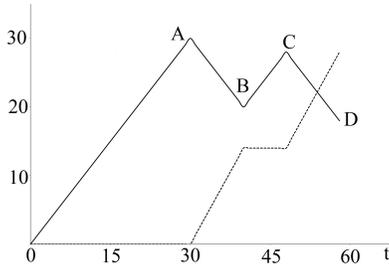


Рис. 3.

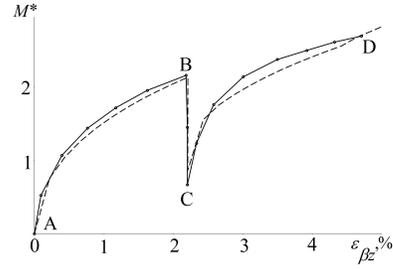


Рис. 4.

Решение задачи показывает увеличение прогиба оболочки при наложении кручения на предварительно нагруженную давлением оболочку [9]. Таким образом, в зависимости от предварительно достигнутого уровня давления при наложении кручения могут быть достигнуты предельные состояния оболочки.

Неосесимметричная потеря устойчивости. На рис. 5 показано, что до момента потери устойчивости результаты расчетов в двухмерной и трехмерной постановках совпадают. Потеря устойчивости по неосесимметричной форме и закритическое поведение оболочки хорошо описываются трехмерной КЭ моделью (расхождение с экспериментом составляет менее 8%). Распределение интенсивности напряжений на момент окончания счета изображено на рис. 6.

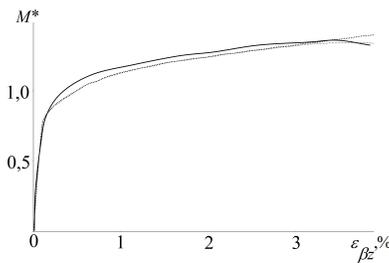


Рис. 5.

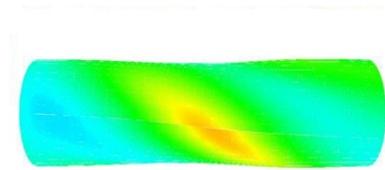


Рис. 6.

Заключение. Разработанная методика позволяет проводить численное моделирование обобщенных осесимметричных упругопластических процессов деформирования и оценивать предельные состояния оболочек вращения в широком диапазоне скоростей нагружения – от квазистатических до динамических. Она может быть использована для верификации математических моделей и программных кодов численного

исследования процессов деформирования и потери устойчивости оболочек вращения в условиях сложного нагружения. Эффективность методики обоснована соответствием результатов теоретических и экспериментальных исследований больших деформаций металлических трубчатых образцов при комбинированных сложных нагружениях растяжением – кручением и давлением – кручением.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Аннин Б. Д., Жигалкин В. М. Поведение материалов в условиях сложного нагружения. Новосибирск: Изд-во СО РАН. 1999. С. 341.
- [2] Баженов В. Г., Баранова М. С., Кибец А. И. Выпучивание упругопластических цилиндрических и конических оболочек при осевом ударном нагружении // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2010. Т. 152, № 4. С. 86–105.
- [3] Зубчанинов В. Г., Гультияев В. И. Экспериментальное исследование устойчивости оболочек при сложном нагружении материала // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2011. №2 (10). С. 21–24.
- [4] Вычислительный комплекс "Динамика-3". Научно-технический центр по ядерной и радиационной безопасности. Аттестационный паспорт программного средства. Регистрационный паспорт аттестации ПС № 325 от 18.04.2013.
- [5] Баженов В. Г., Артемьева А. А., Гоник Е. Г. Конечно-элементное моделирование упругопластического выпучивания незамкнутых сферических оболочек при сжатии // Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб. Н. Новгород: Изд-во ННГУ. 2012. № 74. С. 84–91.
- [6] Баженов В. Г., Жегалов Д. В., Павленкова Е. В. Численное и экспериментальное исследование упругопластических процессов растяжения-кручения осесимметричных тел при больших деформациях // Механика твердого тела. 2011. № 2. С. 57–66.
- [7] Баженов В. Г., Жегалов Д. В., Павленкова Е. В. Численное решение обобщенных осесимметричных задач динамики упругопластических оболочек вращения при больших деформациях // Вычислительная механика сплошных сред. 2012. Т. 5, № 4. С. 427–434.
- [8] Артемьева А. А., Баженов В. Г., Казаков Д. А., Кибец А. И., Нагорных Е. В. О больших деформациях и предельных состояниях упругопластических оболочек вращения при комбинированных сложных нагружениях // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79, № 3. С. 1–14.
- [9] Митенков Ф. М., Баженов В. Г., Артемьева А. А., Казаков Д. А., Нагорных Е. В. Метод анализа больших деформаций и предельных состояний упругопластических оболочек вращения при комбинированных сложных нагружениях // Доклады академии наук. 2015. Т. 460, № 4. С. 408–411.
- [10] Васин Р. А., Ильюшин А. А., Моссаковский П. А. Исследование определяющих соотношений и критериев разрушения на сплошных и толстостенных трубчатых цилиндрических образцах // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 2. С. 177–184.

A. A. Artemyeva¹, V. G. Bazhenov¹, D. V. Zhegalov¹, V. A. Ivanov¹, A. I. Kibets¹,
T. V. Kuzmicheva²

**NUMERICAL MODELING OF THE LIMIT STATES OF ELASTOPLASTIC
CYLINDRICAL SHELLS UNDER THE COMBINED LOADING OF TENSION,
INNER PRESSURE AND TORSION**

¹*Research Institute of Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni
Novgorod*

²*Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod*

Abstract. The problem of elastoplastic deformations of shells of revolution under combined loading and large deformations in axisymmetric formulation is poorly understood. Available publications [1], [2], [3] devoted to solving the problems with small deformations and considerable movements of the metal shells. This paper presents a variational-difference method for solving such problems with taking into account high strains, combined loading and heterogeneity of stress-strain state. The results of the research processes of elastoplastic deformation and strain localization under combined loading of torsion, tension and pressure are provided.

Keywords: elastoplasticity, high strains, axisymmetric shells, torsion, numerical modeling, variational difference method.

REFERENCES

- [1] Annin B. D., Zhigalkin V. M. The behavior of materials under complex loading. Novosibirsk: Publishing House of SB RAS. 1999. P. 341. (in Russian).
[2] Bazhenov V. G., Baranova M. S., Kibets A. I. Buckling of elastic-plastic cylindrical and conical shells under axial impact loading // Scientific notes of the Kazan University. Series: Physics and mathematics. 2010. Vol. 152, № 4. P. 86–105. (in Russian).

Artemyeva Anastasia Anatolevna

e-mail: aranan@mail.ru, Researcher, Ph.D., Research Institute of Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod.

Bazhenov Valentin Georgievich

e-mail: bazhenov@mech.unn.ru, Chief Researcher, D.Sc., Prof., Honored Scientist RF, Research Institute of Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod.

Zhegalov Dmitry Vladimirovich

e-mail: zhegalov@mech.unn.ru, Senior Researcher, Ph.D., Research Institute of Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod.

Ivanov Viktor Anatolevich

e-mail: bazhenov@mech.unn.ru, Junior Researcher, Research Institute of Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod.

Kibets Alexander Ivanovich

e-mail: kibec@mech.unn.ru, Chief Researcher, D.Sc., Prof., Research Institute of Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod.

Kuzmicheva Tatiana Vladimirovna

e-mail: kuzmicheva.tata@gmail.com, Graduate, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod.

[3] Zubchaninov V. G., Gulyaev V. I. Experimental study of stability of shells under complex loading material // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2011. № 2(10). P. 21–24. (in Russian).

[4] Computing system "Dynamics-3". Scientific and Technical Center for Nuclear and Radiation Safety. Attestation passport software. Registration Passport certification PS № 325 from 18.04.2013. (in Russian).

[5] Bazhenov V. G., Artemyeva A. A., Gonick E. G. Finite element modeling of elastic-plastic buckling unclosed spherical shells under compression // Problems of strength and ductility. Interuniversity collection. N. Novgorod: MGU. 2012. № 74. P. 84–91. (in Russian).

[6] Bazhenov V. G., Zhegalov D. V., Pavlenkova E. V. Numerical and experimental study of the processes of elastoplastic stress-torsion of axisymmetric bodies under large deformations // Механика твердого тела. 2011. № 2. P. 57–66. (in Russian).

[7] Bazhenov V. G., Zhegalov D. V., Pavlenkova E. V. Numerical solutions of generalized axisymmetric dynamics problems of elastic-plastic shells of revolution under large deformations // Computational Continuum Mechanics. 2012. Vol. 5, № 4. P. 427–434. (in Russian).

[8] Artemyeva A. A., Bazhenov V. G., Kazakov D. A., Kibets A. I., Nagornykh E. V. On large deformations and limit states of elastic-plastic shells of revolution under the combined complex loading // Applied Mathematics and Mechanics. 2015. Vol. 79, № 3. P. 1–14. (in Russian).

[9] Mitenkov F. M., Bazhenov V. G., Artemyeva A. A., Kazakov D. A., Nagornykh E. V. The method of analysis of large deformations and limit states of elastic-plastic shells of revolution under the combined complex loading // Reports of the Academy of Sciences. 2015. Vol. 460, № 4. P. 408–411. (in Russian).

[10] Vasin R. A., Ilyushin A. A., Mossakovskii P. A. Study of constitutive relations and failure criteria on the solid and thick-walled tubular cylindrical samples // Izvestiya RAN. Mechanics of Solids. 1994. № 2. P. 177–184. (in Russian).

В. Г. Баженов¹, М. С. Баранова¹, Д. Л. Осетров², С. Л. Осетров²

**МЕТОД ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОГО
ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕФОРМАЦИОННЫХ И ПРОЧНОСТНЫХ
ХАРАКТЕРИСТИК УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ
МАТЕРИАЛОВ МЕТОДОМ ПРЯМОГО УДАРА**

¹Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета имени Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород

²Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород

Аннотация. Предлагается развитие экспериментально-расчетного подхода к исследованию прочностных характеристик упруговязкопластических материалов при неоднородном НДС. Интегральные характеристики (силы, перемещения и скорости перемещений) процесса деформирования образцов колпачкового типа при растяжении определяются методом прямого удара, а их напряженно-деформированное состояние – численным решением осесимметричной задачи. Получены результаты экспериментального и теоретического исследования процесса деформирования и разрушения образцов-колпачков при наличии концентраторов напряжений.

© Баженов В. Г., Баранова М. С., Осетров Д. Л., Осетров С. Л., 2015

Баженов Валентин Георгиевич

e-mail: bazhenov@mech.unn.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород.

Баранова Мария Сергеевна

e-mail: mari.baranova18@gmail.com, кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник, Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород.

Осетров Дмитрий Львович

e-mail: osetrovdmitry@mail.ru, аспирант, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород.

Осетров Сергей Львович

e-mail: osetrovdmitry@mail.ru, кандидат физико-математических наук, докторант, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-38-20759 мол_а_вед), гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ НШ-593.2014.8 и гранта Министерства образования и науки (соглашение № 02.В.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ от 27.08.2013).

Поступила 18.09.2015

Ключевые слова: экспериментально-расчетный подход, упруговязкопластические материалы, образцы колпачкового типа, копровая установка.

УДК: 539.3

В 1924 году был предложен разрезной стержень и разработана методика обработки результатов, получившая название по имени автора – Кольского. Эта методика получила наибольшее распространение в последние 50 лет при динамических испытаниях материалов сначала на сжатие, а затем и на растяжение. Она позволяет реализовать диапазон скоростей деформирования $5 \cdot 10^2 - 1 \cdot 10^3$ 1/сек при умеренных степенях деформации [1]. При испытаниях металлов и сплавов на растяжение до разрушения диапазон скоростей деформации еще более сужается из-за недостаточности энергии удара, реализуемой через передающий стержень на образец до разрушения. Для достижения большей энергии удара в методе прямого удара выбирается ударник значительно большего диаметра, чем мерный стержень. При реализации на вертикальной копровой установке метод прямого удара позволяет не только увеличить скорости и степени деформации, но и охватить диапазон низких скоростей деформации до 10^1 1/сек при энергии удара, достаточной для разрушения образцов колпачкового типа при растяжении. Методики обработки результатов эксперимента – построение диаграмм деформирования методом прямого удара – развиты и верифицированы недостаточно по сравнению с методикой Кольского для разрезного стержня Гопкинсона. Обработка результатов испытаний образцов колпачкового типа на растяжение проводилась в предположении однородности НДС в рабочей части образцов и неизменности скорости удара. Из-за сложностей в изготовлении образцов с целевыми вырезами и неоднородности напряженно-деформированного состояния методика не получила широкого применения и дальнейшего развития. В России практически отсутствуют реализация метода прямого удара на вертикальных газодинамических установках для построения динамических диаграмм деформирования и исследования прочностных характеристик материалов при растяжении. Те, которые ранее были созданы, не удовлетворяют требованиям по точности для использования их при математическом моделировании процессов деформирования и оценки прочности современных конструкций. Современное состояние изучаемой проблемы представлено в [2].

Предлагается развитие экспериментально-расчетного подхода к исследованию прочностных характеристик упруговязкопластических материалов при неоднородном НДС. Полагается, что динамические диаграммы деформирования материала определены ранее при испытаниях образцов-таблеток [3]. Верификация разработанного подхода осуществляется путем замены физического эксперимента численным. Разработана методика получения интегральных параметров процесса деформирования (сил, перемещений и скоростей перемещений на контактных поверхностях "ударник" – "колпачок" – "мерный стержень") образцов-таблеток при сжатии и образцов колпачкового типа при растяжении методом прямого удара с использованием показаний двух датчиков деформаций на мерном – опорном стержнях [4]. Как показывают исследования, погрешность восстановления методом характеристик кинематических параметров, характеризующих перемещения контактных поверхностей колпачка, не превышает 5%. Далее осуществляется численное моделирование осесимметричного процесса деформирования и разрушения образца колпачкового типа при задании критерия прочности и кинематических граничных условий на контактных поверхностях.

С учетом характера разрушения и вида НДС производится уточнение параметров модели разрушения как в статическом, так и в динамическом эксперименте.

Были проведены теоретические и экспериментальные исследования процесса деформирования методом прямого удара образцов колпачкового типа (рис. 1) при наличии концентраторов напряжений в виде галтелей на внутренней и внешней поверхности рабочей части при скорости удара $V=13,8$ м/с.



Рис. 1. Образцы колпачкового типа

Характер разрушения определялся локализацией сдвиговых деформаций под углом 45 градусов к оси вращения. Подобный характер разрушения был получен в численном расчете при задании в качестве критерия прочности максимума интенсивности пластических деформаций (16%). Материал образца – упрочненный алюминий.

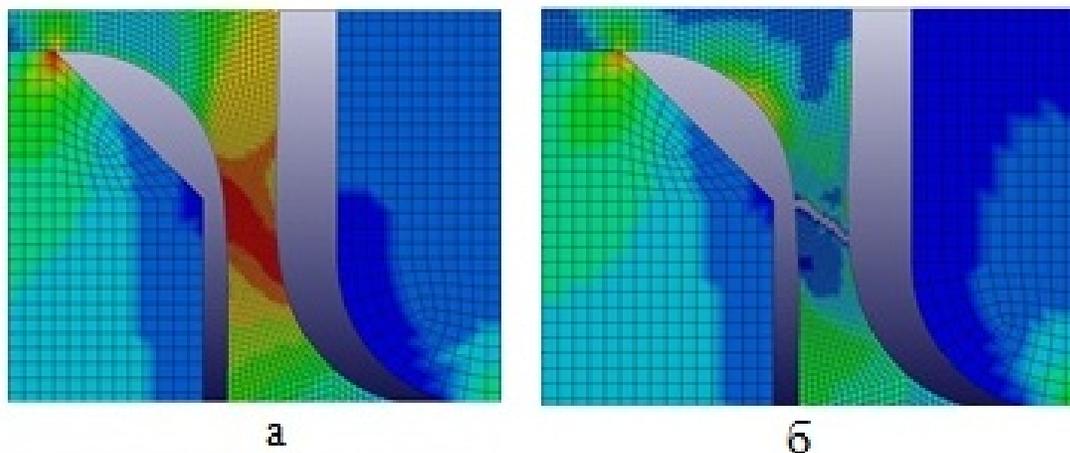


Рис. 2. Интенсивности напряжений

На рис. 2 представлены интенсивности напряжений в моменты времени $t = 6,7494 \cdot 10^{-5}$ с (рис. 2а), $7,1998 \cdot 10^{-5}$ с (рис. 2б).

При достижении максимальной интенсивности пластической деформации (16%) происходит разрушение. При этом нормальные к поверхности разрушения напряжения в соответствующих конечных элементах обнуляются.

На рис. 3 приведены зависимости изменения силы от времени при расчете без учета (отмечено цифрой 1) и с учетом разрушения (отмечено цифрой 2).

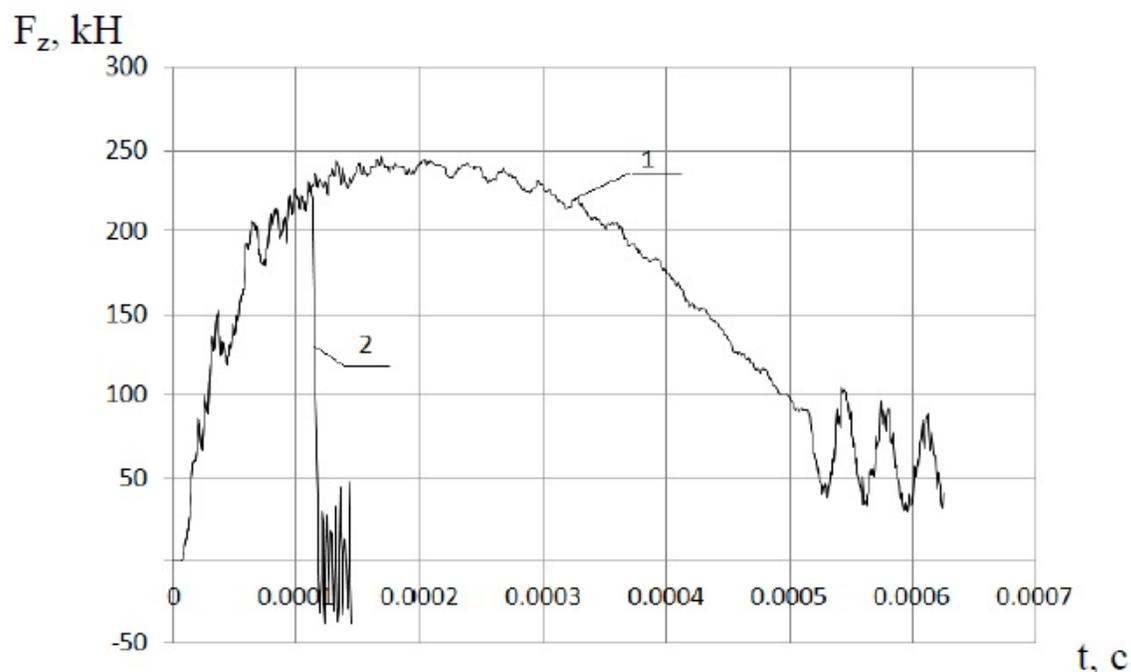


Рис. 3. Зависимости изменения силы от времени

Заметим, что исследования прочностных параметров материала на образцах колпачкового типа имеют некоторые преимущества по сравнению с корсетными осесимметричными сплошными образцами, т. к. позволяют реализовать более широкий диапазон изменения вида напряженного состояния, варьируя толщиной и длиной рабочей части. При малой толщине стенки по сравнению с длиной рабочей части напряженно-деформированное состояние близко к одноосному, а при наличии концентратора напряжения – к объемному НДС. Для корсетных образцов характерно объемное напряженное состояние. В образцах колпачкового типа можно реализовать как вязкое, так и хрупкое разрушение. Было проведено также сопоставление методик испытания по схеме разрезного стержня Гопкинсона и методом прямого удара с использованием двух датчиков деформации. В итоге сделан вывод о некоторых преимуществах по диапазону скоростей деформаций $10^2 - 10^4$ 1/с при скоростях удара 3–100 м/с и степеней деформаций, определяющих возможности разрушения, использования метода прямого удара в сочетании с газодинамической копровой установкой вертикального типа.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bragov A. M, Igumnov L. A., Konstantinov A. Yu., Lomunov A. K. A combined approach to dynamic testing of structural materials // Hopkinson Centenary Conference, Cambridge, UK, September 9-11, 2014. Fraunhofer EMI, Freiburg, Germany, 2014. P. 51–67.

[2] Bacon C., Lataillade J. L. Development of the Kolsky-Hopkinson techics and applications for non-conventional testing // New Experimental methods in material dynamics and impact. Series: Trends in mechanics of materials. Volume 3.2011. INB ZTUREK, Warsaw. P. 1–58.

[3] Bazhenov V.G., Baranova M. S., Pavlyonkova E. V. A method for research viscoplastic characteristics of materials using a vertical gas-gun stand // 10th International Conference on the Mechanical and Physical Behaviour of Materials under Dynamic Loading, September 2-7, 2012. Fraunhofer EMI, Freiburg, Germany, 01059-p-1 - 01059-p-4.

[4] Баженов В. Г., Баранова М. С., Павленкова Е. В., Жегалов Д. В., Жестков М. Н. Численный анализ экспериментов на растяжение образцов колпачкового типа при ударном нагружении // Проблемы прочности и пластичности. Н. Новгород, 2013. Вып. 75 (2). С. 88–95.

V. G. Bazhenov¹, M. S. Baranova¹, D. L. Osetrov², S. L. Osetrov²

**METHOD OF EXPERIMENTAL AND THEORETICAL STUDY OF THE
DEFORMATION AND STRENGTH CHARACTERISTICS OF
ELASTOVISCOPLASTIC MATERIALS BY DIRECT IMPACT**

¹*Research Institute of Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod*

²*Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod*

Abstract. It is proposed to develop experimental and computational approach to the study of strength characteristics of elastoviscoplastic materials in a non-uniform stress-strain state. Integral characteristics (forces, displacements and displacement rate) of the deformation process the hat-shaped specimens in tension are determined by direct impact.

Their stress-strain state is determined by the numerical solution of the axisymmetric problem. The results of experimental and theoretical study of the deformation and failure of the hat-shaped specimens in the presence of stress concentrators are presented.

Keywords: experimental and computational approach, elastoviscoplastic materials, hat-shaped specimens, gas-gun testing stand.

REFERENCES

- [1] Bragov A. M., Igumnov L. A., Konstantinov A. Yu., Lomunov A. K. A combined approach to dynamic testing of structural materials // Hopkinson Centenary Conference, Cambridge, UK, September 9-11, 2014. Fraunhofer EMI, Freiburg, Germany, 2014. P. 51–67.
- [2] Bacon C., Lataillade J. L. Development of the Kolsky-Hopkinson techics and applications for non-conventional testing // New Experimental methods in material dynamics and impact. Series: Trends in mechanics of materials. Volume 3.2011. INB ZTUREK, Warsaw. P. 1–58.
- [3] Bazhenov V.G., Baranova M. S., Pavlyonkova E. V. A method for research viscoplastic characteristics of materials using a vertical gas-gun stand // 10th International Conference on the Mechanical and Physical Behaviour of Materials under Dynamic

Bazhenov Valentin Georgievich

e-mail: bazhenov@mech.unn.ru, Chief Researcher, D.Sc., Prof., Honored Scientist RF, Research Institute of Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod.

Baranova Maria Sergeevna

e-mail: mari.baranova18@gmail.com, Junior Researcher, PhD in Physics and Mathematics, Research Institute of Mechanics Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod.

Osetrov Dmitry Lvovich

e-mail: osetrovdmitry@mail.ru, Postgraduate student, Department of Mechanics and Mathematics, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod.

Osetrov Sergey Lvovich

e-mail: osetrovdmitry@mail.ru, Doctoral student, PhD in Physics and Mathematics, Department of Mechanics and Mathematics, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod.

Loading, September 2-7, 2012. Fraunhofer EMI, Freiburg, Germany, 01059-p-1 - 01059-p-4.

[4] Bazhenov V. G., Baranova M. S., Pavlenkova E. V., Zhigalov D. V., Zhestkov M. N. Numerical analysis of tensile experiments cap-type samples under impact loading // Problems Strength and ductility. Nizhni Novgorod, 2013. Issue 75 (2). P. 88–95. (in Russian).

К. З. Хайрнасов

ВЛИЯНИЕ СМЕШАННОЙ СТРУКТУРЫ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА НА ПРОЧНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛОПАСТЕЙ ДВИГАТЕЛЕЙ

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
г. Москва*

Аннотация. В статье рассматривается проблема прочностного анализа лопастей винтовентиляторов из композиционных материалов. Лопатки винтовентиляторов подвержены действию центробежных и газовых нагрузок. Исследования проводятся для композиционного материала при различном сочетании стеклопластика и углепластика и ориентации основы и утка. При определении прочностных характеристик лопатка рассматривается как естественно закрученный стержень. Принимаются справедливыми гипотезы плоских сечений по толщине пакета, материал подчиняется закону Гука.

Получены прочностные параметры лопаток, имеющих различное соотношение разнородных материалов. По результатам полученных прочностных характеристик предложена наиболее компромиссная структура лопатки. Приводится сопоставление результатов для лопатки из композита и титана.

Ключевые слова: методы конечных элементов, аналитические методы.

УДК: 624.074:678.067

Применение композиционного материала находит все большее распространение в областях техники, предъявляющих повышенные требования к прочностным и динамическим характеристикам. Это относится и к лопаткам винтовентиляторов, применяемых в турбинах реактивных двигателей, компрессорах и других конструкциях. В связи с этим важно провести исследование лопаток винтовентилятора, изготовленных из композиционных материалов.

Лопатки двигателей при работе подвержены статическим, динамическим и температурным воздействиям. Динамические нагрузки, возникающие при колебаниях, обычно определяются экспериментально. Температурные воздействия, обусловленные неравномерным нагревом, зависят от режима работы двигателя, и их влияние учитывается при выборе запаса прочности.

© Хайрнасов К. З., 2015
Хайрнасов Камилль Зайнутдинович
e-mail: kamilh@mail.ru, кандидат технических наук, доцент, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва.

Поступила 18.09.2015

Поэтому в настоящей работе исследование прочности лопаток двигателей производится исходя из статических нагрузок: центробежных и газовых сил, возникающих при обтекании профиля лопатки газовым потоком.

При определении прочностных параметров лопатка рассматривается как естественно закрученный стержень [1], [2]. Для материала выполняются условия жесткого контакта на границах слоев и принимаются справедливыми гипотезы плоских сечений по толщине пакета, материал подчиняется закону Гука, граничные условия – консольное защемление лопатки в ободке диска. Геометрия лопатки и необходимые обозначения показаны на рис. 1.

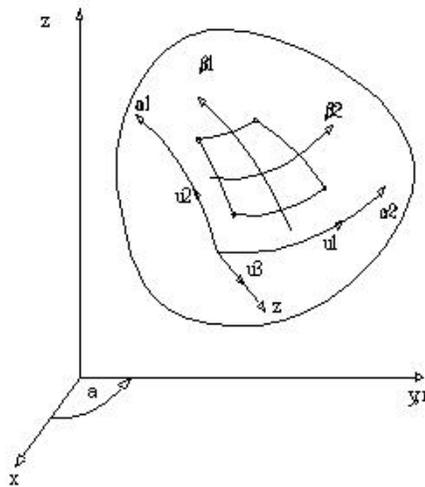


Рис. 1. Конечный элемент

При рассмотрении прямых закрученных стержней используются две основные системы координат: неподвижная и подвижная (рис. 1). В качестве неподвижной системы примем прямоугольную правую систему координат x, y, z , оси x, y которой расположены в плоскости начального сечения стержня, а ось z направлена вдоль оси последнего. Оси x и y в дальнейшем центральные, т. е. начало координат O расположено в центре масс начального сечения. Оси ξ, η подвижной системы координат ξ, η, ζ при движении вдоль оси поворачиваются вместе с сечением, оставаясь главными центральными осями любого сечения. Ось ζ совпадает с осью z и в дальнейшем не выделяется.

Угол $\alpha(z)$, отсчитываемый между осями x и ξ против направления вращения часовой стрелки, называется углом установки текущего сечения, или углом начальной закрученности стержня. Тогда соотношения между координатами таковы:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Уравнения равновесия отсеченной части лопатки записывается в виде

$$\int_F \sigma dF; -M_{кр}^n + \int_F \sigma s^2 \Theta dF = M_{кр}; \int_F \sigma \xi dF = -M_\eta; \int_F \sigma \eta dF = -M_\xi, \quad (1)$$

где σ — нормальное напряжение в точках поперечного сечения;

P — центробежная сила, действующая на данное сечение;

M_ξ, M_η — изгибающие моменты относительно главных осей;

$M_{кр}^n$ — крутящий момент от центробежных сил;

$M_{кр}$ — полный крутящий момент, вызывающий раскрутку профиля;

$\Theta = \frac{\partial \alpha}{\partial z}$ — относительный угол закрутки пера лопатки;

$s = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ — расстояние от центра до текущей точки сечения;

F — площадь поперечного сечения.

Напряженное состояние предполагается одномерным и записывается в виде

$$\sigma = E\varepsilon = E(\varepsilon_0 - k_\eta \eta - k_\xi \xi - s^2 \Theta \frac{d\Phi}{dr}).$$

Через $\varepsilon_0, k_\eta \eta, k_\xi \xi, \frac{d\Phi}{dr}$ здесь обозначены неизвестные, определяемые из уравнения 1 и означающие деформации растяжения оси лопатки, составляющие кривизны и относительный угол закрутки сечения, возникающий при кручении.

Модуль упругости E определяется из известных соотношений для многослойного пакета [3].

Касательные напряжения тангенциального и поперечного сдвигов находятся из уравнения

$$T_{\eta\xi} = 2G \frac{d\Phi}{dr} \xi; T_{\xi\eta} = G\Theta s.$$

Запас прочности в каждом i -м слое j -сечения определяется на основе критерия максимальных напряжений:

$$k_{ij} = \frac{\sigma_b}{\sigma_{ij}}; k^o = \frac{T_{b,\xi\eta}}{T_{\xi\eta}}; K^* = \frac{T_{b,\eta\xi}}{T_{\eta\xi}},$$

где в качестве допустимых напряжений принимаются пределы прочности при растяжении (сжатии) σ_b^+ (σ_b^-), в тангенциальном $T_{b,\xi\eta}$ и поперечном $T_{b,\eta\xi}$ сдвигах.

При исследовании частотных характеристик лопатка моделируется четырехугольными конечными элементами естественной кривизны, имеющими форму произвольного четырехугольника и полностью совместимыми по геометрии и перемещениям [4]. Этот конечный элемент учитывает деформацию поперечного сдвига, обжатие нормали, инерцию вращения и имеет 48 степеней свободы (по 12 в каждом узле). В качестве узловых перемещений принимаются три линейных перемещения u_1^i, u_2^i, u_3^i , шесть производных от этих перемещений по криволинейным координатам к поверхности оболочки $\frac{1}{A_1} u_1^* \alpha_1, \frac{1}{A_1} u_2^* \alpha_1, \frac{1}{A_1} u_3^* \alpha_1, \frac{1}{A_2} u_1^* \alpha_2, \frac{1}{A_2} u_2^* \alpha_2, \frac{1}{A_2} u_3^* \alpha_2$ — углы поворота относительно осей координат и аналоги линейного перемещения вдоль осей $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, моделирующие поперечный сдвиг по соответствующим осям. Два поворота Y_1, Y_2 , моделирующие влияние обжатия слоев в соответствующем направлении, и “угол” обжатия нормали Y_3 — аналог угла поворота относительно оси z . Основные типы степеней свободы отвечают мембранным и изгибным деформациям, а их аналоги — деформациям поперечного сдвига и обжатия. Угол поворота $\frac{1}{A_1} u_3^* \alpha_3$ и его аналог Y_3 не входят в

число узловых параметров, определяющих деформации элемента, и в местной системе координат равны нулю. Эти степени свободы появляются при стыковке элементов, не лежащих в одной плоскости, и необходимы для учета пространственной работы конструкции.

Геометрия конечного элемента и необходимые обозначения приведены на рис. 2 и 3. При этом ширина лопатки у основания была равна 0,23 м, у вершины – 0,154 м, максимальная толщина лопатки – 0,043 м, длина от зацебления до вершины – 1,046 м.

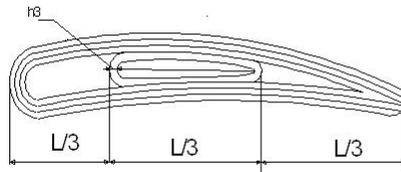


Рис. 2. Профиль лопатки винтовентилятора и расположение слоев (слой показаны условно), L – ширина пера лопатки

Линейные перемещения аппроксимируются бикубическими, а углы поворота и обжатия – билинейными полиномами относительно узловых неизвестных. В элементе представлены 21 силовой фактор срединной поверхности $\{N\}$ и соответствующий им вектор компонент деформаций $\{e\}$.

$$\{N\} = [N_1, N_2, M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{21}, M_{22}, M_{23}, S_{12}, H_{11}, H_{12},] \quad (2)$$

$$[S_{21}, H_{21}, H_{22}, Q_1, P_{13}, P_{11}, Q_2, P_{23}, P_{22}, N_3].$$

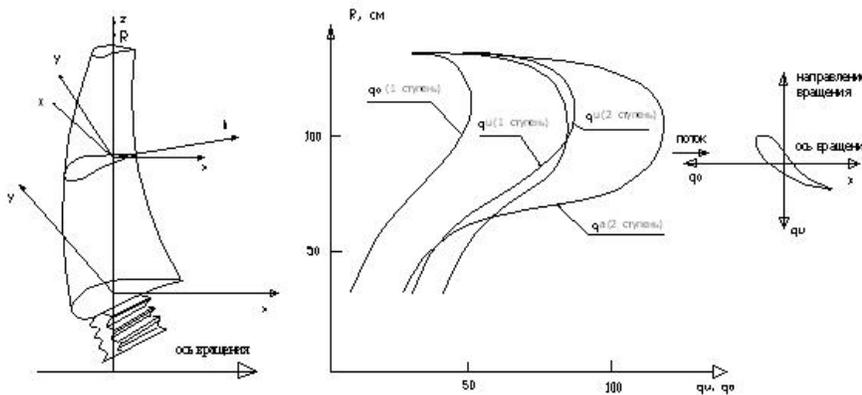


Рис. 3. Расположение осей лопасти винтовентилятора и параметры нагрузок, действующих на лопасть

Обозначая вектор перемещений через $\{S\} = (u_1, u_2, u_3, Y_4, Y_5, Y_6)$, можно записать

$$\{S\} = [L]\{q\}^e; \{e\} = [d]\{S\} = [B]\{q\}^e; N = [D][d]\{q\}^e, \quad (3)$$

где $[B] = [d][L]$ — матрица аппроксимирующих функций;

$[D]$ — матрица упругих характеристик материала [1];

$\{q\}^e$ — вектор узловых перемещений элемента;

$[d]$ — операторная матрица.

Опуская промежуточные выкладки, матрицы жесткости и масс можно записать в виде

$$[K]^e = \iint_{S^e} [B]^T [D] [B] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2; \quad (4)$$

через S^e здесь обозначена поверхность элемента.

Объединение матриц элементов в глобальные матрицы производится по известным правилам.

Применяемая методика расчета прочности, основанная на теории естественно закрученных стержней, позволяет проводить оценку прочности произвольно армированной лопатки по сечениям и послойно.

Рассматривались лопатки гидродинамических двигателей первой и второй ступени при действии центробежных и газовых нагрузок. Напряжение определялось в 17 точках 21 поперечного сечения послойно.

Исследуем влияние слоев, расположенных под углом ноль градусов с осевым линиям кривизны в наружных слоях лопасти, на прочностные характеристики. При этом для восприятия сдвиговых напряжений 25 слоев от толщины примем перекрестными $\pm 15, \pm 30, \pm 15$.

Изменение структуры наружных слоев позволило сделать следующие выводы.

При низком содержании в наружных слоях материала, расположенного под углом ноль градусов к осевой линии кривизны лопатки, прочностные характеристики малы (рис. 3).

Повышение содержания наружных слоев с ориентацией основы ноль градусов к осевой линии кривизны ведет к монотонному повышению прочностных характеристик (рис. 4). Причем эти выводы распространяются как на стеклопластиковые, так и на углеродные материалы.

Исходя из этого, в первом приближении можно предложить следующую структуру пера лопатки: в наружных слоях следует равномерно распределить слои с ориентацией ноль градусов к осевым линиям кривизны лопатки и перекрестные слои $\pm 15, \pm 30, \pm 15$ в соотношении 2:1 соответственно. Такая схема, на наш взгляд, является наиболее компромиссной, учитывая, что внутренние слои исчезают при приближении к краям лопасти.

Исходя из принятой схемы, проведем исследование влияния соотношения стеклопластика и углепластика на прочностные характеристики лопатки при действии центробежных и газовых нагрузок. В результате проведенного исследования получены прочностные параметры лопатки, имеющей различное соотношение разнородных материалов (рис. 4). Было выявлено, что наиболее рациональным с точки зрения

прочностных характеристик является отношение, при котором процентное содержание стеклопластика в углепластиковой лопатке составляет не более 40%. В то же время, несмотря на более высокие прочностные характеристики углепластиковых материалов, полностью исключить стеклопластик не рекомендуется. Это связано с тем, что углепластик имеет более низкую ударную вязкость и эрозионную стойкость и плохо поддается механической обработке.

Проведены также прочностные расчеты для лопатки из титана – наиболее употребляемого материала металлических лопастей. Прочностные параметры при этом составили $K_{ij}=2.1$, $K^0=3.6$, $K^*=3.8$, а масса титановой лопатки превышала массу лопатки от композита в 2.5 и более раз. Сопоставление прочностных и весовых характеристик показывает, что лопасти, выполненные из композитных материалов, выгодно отличаются от лопастей, изготовленных из титана, как по прочностным, так и по весовым характеристикам.

Таким образом, основываясь на проведенных расчетах, можно сказать, что лопасти, выполненные из композиционного материала, имеют значительные преимущества по прочностным и весовым характеристикам по сравнению с лопастями, выполненными из материалов, традиционно применяемых в технике при изготовлении винтовентиляторов.

Таблица 1

Влияние слоев, расположенных под углом 0 градусов к оси, на прочностные характеристики лопаток первой ступени следующей структуры: h1 0°y/h2 0°y/0.9 ±15°y/0.9 ±15°c/1.2 ±30°y/1.2±30°c/0.9±15°y/0.9±15°c/0.9±15°c/h3 0°y//симметрично

h1, мм	0.1	1.0	2.0	3.0	4.0	4.5	5.0	6.0	8.0
h2, мм	0.1	1.0	2.0	3.0	4.0	4.5	5.0	6.0	8.0
h3, мм	16.8	15	13	11	9	8	7	5	1
масса, кг	11.76	11.93	12.06	12.09	12.42	12.0	11.96	11.84	11.62
Запас прочности, К	2.9	3.7	4.8	6.0	7.1	7.4	7.7	8.0	8.1
сечение	14	14	14	14	14	14	14	14	7
Запас прочности, К ⁰	5.5	8.6	11	13	15	16	16	17	18
сечение	9	9	9	9	9	9	9	9	9
Запас прочности, К*	4.5	6.0	7.6	9.5	11	12	13	12	12
сечение	14	14	14	15	15	14	14	14	14

Примечание: здесь и далее обозначено: наклонная черта – граница изменения структуры слоев, h1 (верхний поверхностный слой) (h2 (второй от поверхности слой), 0.5, ...) толщина слоя в мм, 0y(0c, ±15°y, ...) – угол армирования, отсчитываемый от вертикальной оси лопасти, и тип материала: y – УОЛ-300, c – Т-25-ВМ-78, две наклонные черты – нейтральная ось лопасти.

Таблица 2

h1, мм	9.0	9.0	7.4	5.1	2.8	0.5	0.0	
h2, мм	0.0	0.0	1.6	3.9	6.2	8.5	9.0	
h3, мм	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	
стекло уголь+стекло	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	.05	1.0	титан
масса, кг	10.68	10.93	11.25	11.81	12.62	13.59	11.36	30.59
Запас прочности, К	8.5	8.6	8.3	7.8	6.3	3.9	4.6	2.1
сечение	14	14	14	14	14	14	14	7
Запас прочности, К°	17	17	18	16	13	7	6	3.8
сечение	9	9	9	9	9	9	9	9
Запас прочности, К*	13	13	13	12	10	6	9	3.6
сечение	14	14	14	15	15	14	14	14

Примечание: первая и последняя структуры лопасти полностью выполнены из углепластика и стеклопластика.

Таблица 3

Влияние смешанной структуры на прочностные характеристики лопасти первой ступени

Структура лопасти	1	2	3	4	5
1 слой	1.5±15°y	1.5±30°c	1.5±30°y	1.5±30°c	1.5±30°c
2 слой	3.0 0°y	3.0 0°y	3.0 0°c	3.0 0°y	3.0 0°c
3 слой	1.5±15°y	1.5±30°c	1.5±15°y	1.5±15°c	1.5±15°c
4 слой	1.5 0°y	1.5 0°y	1.5 0°c	1.5 0°y	1.5 0°c
5 слой	1.5 0°y	1.5 0°c	1.5 0°y	1.5 0°c	1.5 0°c
6 слой	1.5±30°y	1.5±30°y	1.5±30°c	1.5±30°y	1.5±30°c
7 слой	3.0 0°y	3.0 0°y	3.0 0°y	3.0 0°c	3.0 0°c
8 слой	1.5 0°y	1.5 0°c	1.5 0°y	1.5 0°c	1.5 0°c
9 слой	7.0 0°y	7.0 0°y	7.0 0°y	7.0 0°y	7.0 0°c
Слои 10...18 симметричны относительно срединной линии					
масса, кг	8.69	9.94	10.18	10.12	11.69
Запас прочности, К	7.7	5.7	3.3	5.7	3.0
сечение	9	9	9	9	9
Запас прочности, К°	16	13	6.9	13	5.9
сечение	9	9	9	9	9
Запас прочности, К*	11	7.3	4.6	7.3	5.9
сечение	9	9	9	9	9

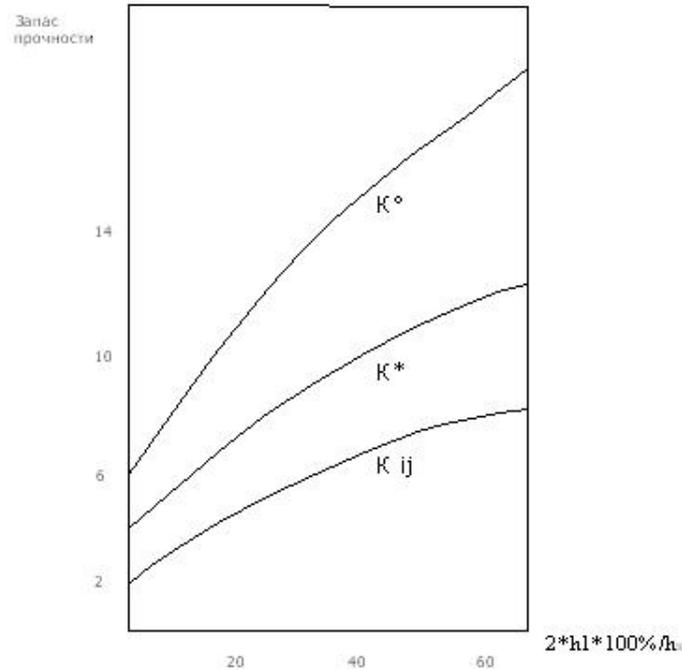


Рис. 4. Влияние слоев, расположенных под углом ноль градусов к осевым линиям кривизны, на прочностные характеристики лопатки 2 ступени следующей структуры: $h_1 0^\circ y / h_2 0^\circ c / 0.9 \pm 15^\circ y / 0.9 \pm 15^\circ c / 1.2 \pm 30^\circ y / 1.2 \pm 30^\circ c / 0.9 \pm 15^\circ y / 0.9 \pm 15^\circ c / 0.9 \pm 15^\circ c / h_3 0^\circ y //$ симметрично. Расчеты проведены при $h_1 = h_2$. Здесь и далее обозначено: наклонная черта – граница изменения структуры слоев, h_1 ($h_2, 0.5, \dots$) – толщина слоя в мм, $0^\circ c$ ($0c \pm 15^\circ y, \dots$) – угол армирования, отсчитываемый от оси лопасти, и тип материала: y – УОЛ-300, c – Т-25-ВМ-78, две наклонные черты – нейтральная ось лопасти

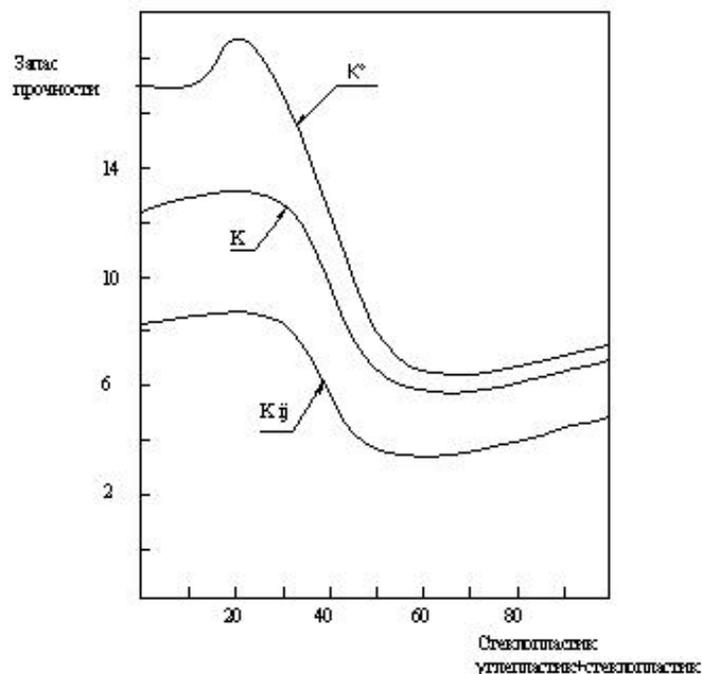


Рис. 5. Влияние соотношения стеклопластика и углепластика на прочностные характеристики лопатки структуры, рассмотренной на рис. 1, при $h_1 = 0.9 - h_2$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Биргер И. А. Руководство для конструкторов по расчету на прочность газотурбинного двигателя. Расчет лопаток на прочность. М.: Оборонгиз, 1956. Вып. 2. С. 101–112.
- [2] Шорр Б. Ф. Расчет на прочность естественно закрученных лопаток // Труды ЦИАМ, 1951. № 256. С. 2–18.
- [3] Веселов С. И., Карташов Г. Г. Композиционные материалы в авиадвигателестроении. Куйбышев, 1986. 121 с.
- [4] Кузнецов Н. Д., Карташов Г. Г. Собственные колебания слоистых анизотропных пластин и пологих оболочек // Прикл. механика. 1981. Т. 17, № 4. С. 31–37.
- [5] Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982.

K. Z. Khayrnasov

EFFECT MIXED STRUCTURE COMPOSITE MATERIAL STRENGTH CHARACTERISTICS ENGINE BLADES

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow

Abstract. This study is devoted to the modelling and determination of the strength of the blades of aircraft engines from composite materials depending on the location of layers. The aim of the research determination of strength characteristics depending on the ratio of composite materials, as well as their orientation. As a method of study of the problem applies the method of finite elements and analytical methods. The worked out methodology and algorithms allow: to defined strength characteristics of blades; optimized characteristics of blades with of different characteristic composite materials, having a great a technical, scientific and application importance.

Keywords: blades of engines, toughness, composite materials, finite element methods, analytical methods.

REFERENCES

- [1] Birger I. A. Guidelines for designers on the calculation of the strength of the gas turbine engine. The calculation of the strength of the blades. M.: Oborongiz, 1956. Issue 2. P. 101–112. (in Russian).
- [2] Schorr B. F. Calculation of the strength of naturally twisted blades // Proceedings of the CIAM, 1951. № 256. P. 2–18. (in Russian).
- [3] Veselov S. I., Kartashov G. G. Composite materials aircraft engine. Kuibyshev, 1986. 121 p. (in Russian).
- [4] Kuznetsov N. D., Kartashov G. G. Natural oscillations layered anisotropic plates and shallow shells // Applied mechanics. 1981. Vol. 17, № 4. P. 31–37. (in Russian).
- [5] Bath K., Wilson E. Numerical methods for the analysis and the method of finite element. M.: Stroyizdat, 1982. (in Russian).

Khayrnasov Camille Zainutdinovich

e-mail: kamilh@mail.ru, Candidate of Engineering Science, Associate professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow.

В. А. Ковалев¹, Е. В. Мурашкин², Ю. Н. Радаев²

ЭКСТРАДЕФОРМАЦИИ МИКРОСТРУКТУРНОГО КОНТИНУУМА С ОДНИМ СВОБОДНЫМ ДИРЕКТОРОМ

¹Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва

²Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

Аннотация. В работе рассматривается теоретико-полевая модель нелинейного термоупругого континуума с микроструктурой. Построение модели осуществляется в терминах 4-ковариантного полевого лагранжева формализма. Микроструктура континуума задается одним свободным микроструктурным d -вектором. Указывается плотность вариационного интегрального функционала термоупругого действия и сформулирован соответствующий вариационный принцип наименьшего действия. Даны канонические формы дивергентных законов сохранения термоупругого поля в плоском 4-пространстве–времени. Сформулированы дифференциальные и функциональные условия ротационной инвариантности лагранжиана. Найдена полная система независимых ротационно-инвариантных функциональных аргументов лагранжиана.

Ключевые слова: термоупругость, микроструктура, поле, действие, закон сохранения, тензор энергии-импульса, ротационная инвариантность, тензор экстра-деформации.

УДК: 539.374

Современные материалы зачастую проявляют физические свойства, которые невозможно описать в рамках теории классической механики сплошных сред, например,

© Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н., 2015

Ковалев Владимир Александрович

e-mail: vlad_koval@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва.

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: radaev@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00139, 15-31-21111).

Поступила 18.09.2015

поведение нематических жидких кристаллов, аномальный пьезоэффект в кварце, дисперсия упругих волн, эффект „второго звука“, а также ряд других экспериментально наблюдаемых упругих свойств чистых кристаллов. Поэтому развитие фундаментальных основ математического моделирования процессов синтеза материалов с легко управляемыми ориентационными микроструктурами и прогнозирование их механических свойств является актуальной задачей современной континуальной механики. Построение математических теорий подобного поведения материалов может быть выполнено привлечением аппарата теории поля [1]. Последовательное применение теоретико-полевого подхода в механике континуума приводит к естественным формулировкам определяющих уравнений. Переход к ротационно-инвариантным формам лагранжиана, наряду с требованием галилеевой трансляционной инвариантности, позволяет получить полную систему мер деформаций и экстра-деформаций континуума.

Принцип наименьшего действия. Формализм теории поля предполагает использование для математического описания физических полей интегрального функционала действия. Дальнейшие рассуждения проведем для плоского 4-пространства–времени с элементарным объемом $d^4X = dX^1 dX^2 dX^3 dX^4$, а общую форму действия примем в виде

$$\mathfrak{S} = \int \mathcal{L}(X^\beta, \varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k) d^4X, \quad (1)$$

где φ^k — массив физических полей, ∂_α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) — оператор *полного* дифференцирования по пространственно-временной координате X^α .

Принцип наименьшего действия устанавливает, что действительное поле реализуется в 4-пространстве–времени таким образом, что действие (1) оказывается экстремальным, т. е. для всех допустимых вариаций физических полей φ^k и неварьируемых координат X^α имеем $\delta\mathfrak{S} = 0$.

Из принципа наименьшего действия получаются классические уравнения Эйлера–Лагранжа:

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \varphi^k)} = 0.$$

В теории поля любой закон сохранения имеет вид $\partial_\beta J^\beta = 0$, где вектор J^β называется вектором тока. Для него в конечных вариациях $\delta^\nabla = \delta/\varepsilon$ можно получить:

$$J^\beta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \delta^\nabla \varphi^k + \left(\mathcal{L} \delta_\alpha^\beta - (\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \right) \delta^\nabla X^\alpha. \quad (2)$$

Вариацию действия, отвечающую конечным вариациям пространственно-временных координат и физических полей, можно представить в форме

$$\delta^\nabla \mathfrak{S} = \int (\partial_\beta J^\beta) d^4X. \quad (3)$$

Действие и уравнения поля для континуума с одним свободным микроструктурным директором. Термоупругое действие для континуума с одним свободным микроструктурным директором можно принять в форме [2], [3]

$$\mathfrak{S} = \int \mathcal{L}(X^\alpha, x^j, d^j, \vartheta, \partial_4 x^j, \partial_4 d^j, \partial_4 \vartheta, \partial_\beta x^j, \partial_\beta d^j, \partial_\beta \vartheta) dX^1 dX^2 dX^3 dX^4. \quad (4)$$

Здесь X^α ($\alpha = 1, 2, 3$) — лагранжевы координаты; x^j ($j = 1, 2, 3$) — эйлеровы координаты; d^j — полярный директор, определяющий микроструктуру; ϑ — температурное смещение.

Плотность действия (4) зададим в форме

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_4 x^k) \rho_{kj} (\partial_4 x^j) + \frac{1}{2}(\partial_4 d^i) \mathfrak{I}_{ij} (\partial_4 d^j) - \psi(X^\alpha, x^j, d^j, \vartheta, \partial_4 \vartheta, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d^j, \partial_\alpha \vartheta). \quad (5)$$

Здесь \mathfrak{I}_{ij} — тензор микроинерции; ρ_{ij} — тензор плотности масс; ψ — плотность свободной энергии Гельмгольца. Для тензоров \mathfrak{I}_{ij} и ρ_{ij} , очевидно, выполняются условия симметрии: $\rho_{ij} = \rho_{ji}$, $\mathfrak{I}_{ij} = \mathfrak{I}_{ji}$.

Уравнения поля в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned} \partial_\alpha S_{\cdot j}^\alpha - \partial_4 P_j &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} & (\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha M_{\cdot j}^\alpha + A_j - \partial_4(Q_j) &= 0 & (\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha j_{\text{R}}^\alpha + \partial_4 s &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} & (\alpha = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (6)$$

и дополняются определяющими уравнениями:

$$\begin{aligned} S_{\cdot j}^\alpha &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha x^j)}, & M_{\cdot j}^\alpha &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha d^j)}, & A_j &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d^j}, \\ P_j &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_4 x^j)}, & Q_j &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_4 d^j)}, \\ s &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_4 \vartheta)}, & j_{\text{R}}^\alpha &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \vartheta)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Законы сохранения в континууме с одним свободным микроструктурным директором. Определим компоненты канонического тензора энергии–импульса термоупругого поля $T_{\cdot \lambda}^\mu$ ($\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4$) в континууме с микроструктурой:

$$T_{\cdot \lambda}^\mu = \mathcal{L} \delta_\lambda^\mu + S_{\cdot l}^\mu (\partial_\lambda x^l) + M_{\cdot l}^\mu (\partial_\lambda d^l) - j_{\text{R}}^\mu (\partial_\lambda \vartheta) = -P_{\cdot \lambda}^\mu \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3), \quad (8)$$

$$T_{\cdot 4}^\mu = S_{\cdot l}^\mu \dot{x}^l + M_{\cdot l}^\mu \dot{d}^l - j_{\text{R}}^\mu \dot{\vartheta} = \Gamma^\mu \quad (\lambda = 4; \mu = 1, 2, 3), \quad (9)$$

$$T_{\cdot \lambda}^4 = -(\partial_\lambda x^l) P_l - (\partial_\lambda d^l) Q_l - s (\partial_\lambda \vartheta) = \mathcal{P}_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, 3; \mu = 4), \quad (10)$$

$$T_{\cdot 4}^4 = \mathcal{L} - \dot{x}^l P_l - \dot{d}^l Q_l - s \dot{\vartheta} = -\mathcal{H}. \quad (\lambda = 4; \mu = 4). \quad (11)$$

Приведенные выше компоненты тензора энергии–импульса термоупругого поля позволяют быстро найти полный гамильтониан поля \mathcal{H} , вектор псевдоимпульса поля \mathcal{P}_λ , вектор Умова–Пойнтинга Γ^μ и тензор напряжений Эшелби $P_{\cdot \lambda}^\mu$.

4-ковариантный закон сохранения, соответствующий вариационным симметриям действия в форме трансляций пространственно-временных координат

$$\partial_\mu T_{\cdot \lambda}^\mu = 0 \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4), \quad (12)$$

естественным образом распадается на два симметричных канонических уравнения баланса энергии и псевдоимпульса термоупругого поля:

$$-\dot{\mathcal{H}} + \partial_\mu \Gamma^\mu = 0, \quad (13)$$

$$-\dot{\mathcal{P}}_\lambda + \partial_\mu P_{\cdot \lambda}^\mu = 0. \quad (14)$$

Полная система мер деформаций и экстра-деформаций. Действие и лагранжиан обязаны обладать определенными свойствами инвариантности по отношению к выбору эйлеровой координатной системы и начала отсчета времени, поскольку выбор эйлеровых координат произволен и не должен никак сказываться на физических

следствиях дифференциальных уравнений поля. Это, в свою очередь, подразумевает инвариантность действия относительно поворотов и трансляций эйлеровых координат [2], [3].

Можно показать, что потенциальная часть лагранжиана является некоторой функцией от переменных

$$X^\beta, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha \vartheta, \quad (15)$$

в запись которых не входят эйлеровы индексы, а также следующих независимых инвариантных относительно вращений эйлеровой координатной системы тензорных аргументов:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j), \\ \mathcal{R}_\alpha &= g_{ij}(\partial_\alpha x^i)d^j, \\ \mathcal{T}_{\alpha\beta} &= g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta d^j). \end{aligned} \quad (16)$$

Каждая из величин, перечисленных в (16), действительно инвариантна относительно произвольных вращений эйлеровой координатной системы, поскольку по всем эйлеровым индексам производится сворачивание с помощью эйлеровых метрических коэффициентов g_{ij} . Можно доказать, что полученная система мер деформаций и экстрадеформаций континуума (16) полна [3].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 328 с.
- [2] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Ротационная инвариантность и объективные формы лагранжианов нелинейного микрополярного термоупругого континуума второго типа // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, № 4 (1). С. 96–102.
- [3] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. О нелинейных тензорах и векторах экстрадеформации в теории и механике континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2014. № 1 (34). С. 66–85.

V. A. Kovalev¹, E. V. Murashkin², Y. N. Radayev²

EXTRASTRAINS OF THE MICROSTRUCTURAL CONTINUUM WITH FREE DIRECTOR

¹*Moscow City University of Management of Moscow Government, Moscow*

²*Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow*

Abstract. A non-linear mathematical model of thermoelastic continuum with microstructure is developed. The model is described in terms of 4-covariant field theoretical formalism. A Lagrangian density for thermoelastic continuum with one free microstructure director is given and the least action principle is formulated. Corresponding 4-covariant field equations of micropolar thermoelasticity are derived. Constitutive equations of thermoelasticity with one free microstructural director are discussed. Variational symmetries of the thermoelastic action are used to formulate covariant conservation laws in a plane spacetime. Following the usual procedure for micropolar thermoelastic Lagrangians functionally independent rotationally invariant arguments are obtained.

Keywords: thermoelasticity, microstructure, field, action, conservation law, energy–momentum tensor, rotation, extrastrain tensor.

REFERENCES

- [1] Kovalev V. A., Radayev Y. N. Wave problems of field theory and thermomechanics. Saratov: Publishing house of Saratov University, 2010. 328 p. (in Russian).
- [2] Kovalev V. A., Radayev Y. N. Rotation invariance and objective forms of nonlinear Lagrangians micropolar thermoelastic continuum of the second type // News of Saratov University. New Series Series Mathematics. Mechanics. computer science. 2013. Vol. 13, № 4 (1). P. 96–102. (in Russian).
- [3] Kovalev V. A., Radayev Y. N. Nonlinear tensors and vectors extra strain in the theory and mechanics of the continuum // Bulletin of the Samara State Technical University. A series of physical and mathematical sciences. 2014. № 1 (34). P. 66–85. (in Russian).

Kovalev Vladimir Aleksandrovich

e-mail: vlad_koval@mail.ru, DSc., Prof., Moscow City University of Management, Moscow.

Murashkin Evgenii Valeryevich

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, PhD., Senior Researcher, Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow.

Radayev Yuri Nikolayevich

e-mail: radayev@ipmnet.ru, DSc., Prof., Leading Researcher, Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow.

И. В. Руднев, В. И. Жаданов

ВЫДЕРГИВАНИЕ СТАЛЬНЫХ ПЛАСТИН, ВКЛЕЕННЫХ В ДРЕВЕСИНУ. АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ И ЭКСПЕРИМЕНТ

Оренбургский государственный университет, г. Оренбург

Аннотация. Вклеенные в древесину элементы достаточно давно, более полувека, используются в строительстве в качестве соединительных деталей для увеличения жесткости и прочности узлов и стыков деревянных конструкций. Одним из вариантов такого соединения является предложенное авторами вклеивание в стыкуемые деревянные элементы соединительных стальных пластин, работающих на выдергивание-продавливание. Известные методики расчета соединений деревянных конструкций на вклеенных элементах не дают исчерпывающего ответа на вопрос об определении несущей способности узловых сопряжений на стальных пластинах. Отсутствуют и правила конструирования таких соединений, а также какие-либо экспериментальные данные по этому вопросу. Проведенные испытания образцов предложенного способа до разрушения соединения подтвердили его достаточную несущую способность и позволили перейти к детальному изучению напряженно-деформированного состояния клеевого соединения стальных пластин с древесиной при их выдергивании-продавливании.

Точное аналитическое решение задачи по определению НДС соединения при выдергивании стальной пластины из массива древесины в трехмерной постановке на сегодняшний день отсутствует. В предлагаемой работе в качестве расчетной схемы была выбрана плоская деформация полубесконечной полосы с ребром жесткости. Решение представляется в виде явных разложений по собственным функциям краевой задачи – функциям Фадля–Папковича. Техника построения таких решений была разработана совсем недавно. Найдено точное решение задачи, выполнен расчет соединения с параметрами экспериментального образца и получены качественные и количественные результаты. Для подтверждения правильности полученных аналитическим и численным методами значений параметров НДС клеевого соединения стальных пластин с древесиной были проведены эксперименты с применением методов натурной тензометрии. Показаны этапы подготовки образца для испытаний. Приведены схемы наклейки тензодатчиков, подключения тензосистемы и испытательной установки, дано описание методики проведения эксперимента.

© Руднев И. В., Жаданов В. И., 2015

Руднев Игорь Владимирович

e-mail: ru403@mail.ru, инженер кафедры “Строительные конструкции”, Оренбургский государственный университет, г. Оренбург.

Жаданов Виктор Иванович

e-mail: organ-2003@bk.ru, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой “Строительные конструкции”, Оренбургский государственный университет, г. Оренбург.

Поступила 11.08.2015

Приведены сравнительные графики распределения основных компонентов НДС соединения. Получена хорошая качественная и количественная согласованность результатов расчетов с экспериментальными данными. Полученное точное аналитическое решение позволило понять общую картину НДС соединения в момент разрушения образца. Экспериментальные данные подтвердили основные результаты теоретических расчетов.

Ключевые слова: стальная пластина, клей, древесина, соединение, аналитический расчет, функции Фадля–Папковича, напряженно-деформированное состояние, экспериментальные исследования, тензодатчик.

УДК: 624.011.2

С появлением промышленных клеев, обладающих рядом универсальных качеств, а именно: пониженной токсичностью, пожаро- и взрывобезопасностью, повышенной водо- и атмосферостойкостью, возможностью склеивать различные материалы, – началось активное применение клеевых композиций в строительстве, в том числе в стыках деревянных конструкций в сочетании с более прочными материалами, такими как сталь. При этом соединения деревянных элементов при помощи вклеенных в древесину стальных деталей исключают один из существенных недостатков безклеевых соединений – наличие податливости – и позволяют получать практически жесткие стыки [1].

Одним из вариантов такого соединения является предложенное авторами вклеивание в стыкуемые деревянные элементы соединительных стальных пластин, работающих на выдергивание-продавливание [2]. Однако на настоящий момент какие-либо сведения о методиках расчёта соединений такого типа в нормативно-технической литературе отсутствуют, в частности, из-за окончившихся неудачно экспериментов по выдергиванию из древесины пластин с неподготовленной поверхностью.



а) образцы для испытаний



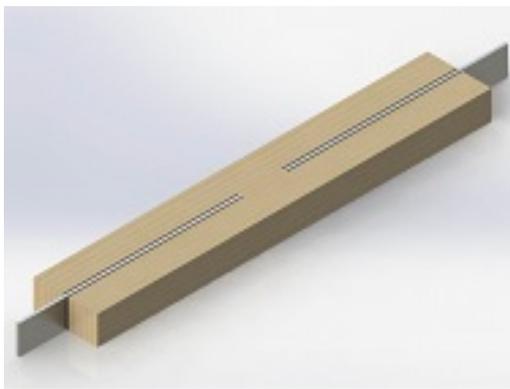
б) общий вид испытательной установки

Рис. 1. Натурные испытания образцов до разрушения

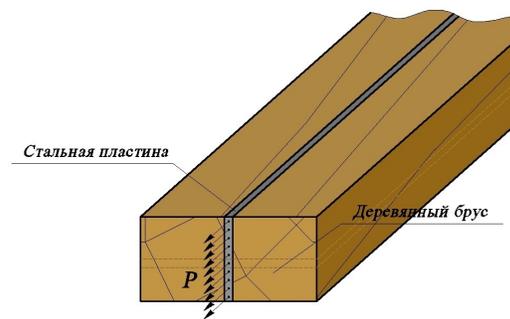
Авторами были проведены эксперименты на двусторонних образцах с вклеенными пластинами, поверхности которых предварительно развивались путем нанесения

неглубоких пазов и надрезов. Свободные концы пластин образца закреплялись в захваты испытательной машины (рис. 1).

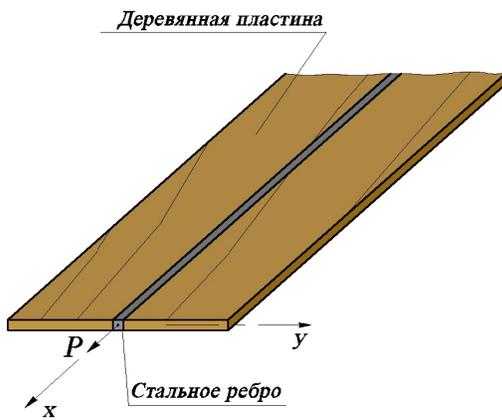
Испытания на выдергивание пластин из стали СтЗпс, вклеенных на эпоксидную композицию между брусками из сосны 2-го сорта, показали жизнеспособность соединения. В частности, несущая способность клевого соединения при нанесении на поверхности пластины 5 миллиметровой толщины пазов и надрезов глубиной 1 мм оказалась соизмерима с несущей способностью пластины, а разрушение образца происходило либо от скола древесины вдоль волокна, либо от нормального отрыва по контакту “клей-металл”. Результаты испытаний позволили перейти к детальному изучению напряженно-деформированного состояния клевого соединения стальных пластин с древесиной при их выдергивании-продавливании.



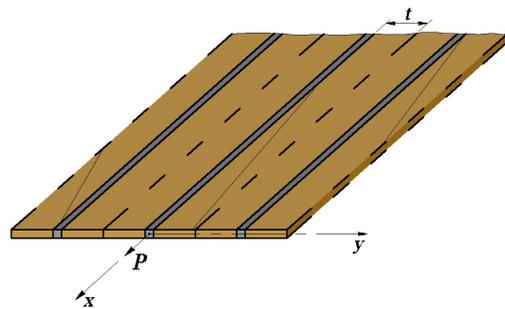
а) экспериментальный образец



б) трехмерная задача;



в) задача плоской деформации для конечных канонических областей



г) аналогичная периодическая задача

Рис. 2. Общий вид и расчетные схемы задач на выдергивание вклеенной пластины из бруса

Точное аналитическое решение задачи по определению НДС соединения вклеенной пластины при ее выдергивании из массива древесины, в частности, осуществленном

при испытаниях образцов (рис. 2а), в трехмерной постановке на сегодняшний день отсутствует. Однако, если из реальной трехмерной конструкции (рис. 2б) вырезать двумя параллельными горизонтальными плоскостями пласт единичной толщины (рис. 2в), полагая, что в нем реализуется плоская деформация, и рассмотреть более простую периодическую задачу (рис. 2г), в которой интересующая нас область расположена между штрих-пунктирными линиями, то, в силу принципа Сен-Венана, решение такой задачи не приведет к существенной погрешности в области, прилегающей к ребру (стальной полосе), при условии достаточной ширины деревянного бруса t . Кроме этого, вместо конечной пластины можно рассматривать полубесконечную, когда длина вклеенной в древесину части, по крайней мере вдвое больше ширины, что соответствует реальной расчетной схеме.

Полученная расчетная схема плоской деформации относится к краевой задаче теории упругости для конечных канонических областей с угловыми точками границы и ребрами жесткости. Точное аналитическое решение для краевых задач в конечных канонических областях с сингулярной границей были получены совсем недавно [3]–[5]. Решения представляются в виде явных разложений по собственным функциям краевой задачи – функциям Фадля–Папковича. Функции Фадля–Папковича точно удовлетворяют нулевым граничным условиям на двух противоположных сторонах канонической области, например, на продольных сторонах полуполосы. Удовлетворяя граничным условиям на торце, приходим к проблеме разложения заданных здесь двух граничных функций (например, нормального и касательного напряжений) в ряды по двум системам функций Фадля–Папковича. Разложения какой-либо функции по той или иной системе функций Фадля–Папковича можно рассматривать как обобщение разложений в тригонометрические ряды Фурье, а решение краевых задач в виде разложений по этим функциям – как обобщение разложений Файлона–Рибьера.

Рассматривалась полуполоса, у которой продольные стороны периодически подкреплены ребрами жесткости, работающими только на растяжение-сжатие и не воспринимающими изгибных нагрузок (рис. 2 г). Обозначим: G – модуль сдвига пластины, E_1 – модуль упругости ребра; f – площадь поперечного сечения ребра; $U(x, y) = G u(x, y)$, $V(x, y) = G v(x, y)$, где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – соответственно продольное и поперечное перемещения в пластине.

Из условия равновесия элемента ребра (рис. 3), на основании закона Гука, можно получить следующее дифференциальное уравнение:

$$D \frac{d^2 U(x \pm 1)}{dx^2} - \tau_{xy}(x \pm 1) = 0, \quad D = \frac{E_1 f}{2Gt}. \quad (1)$$

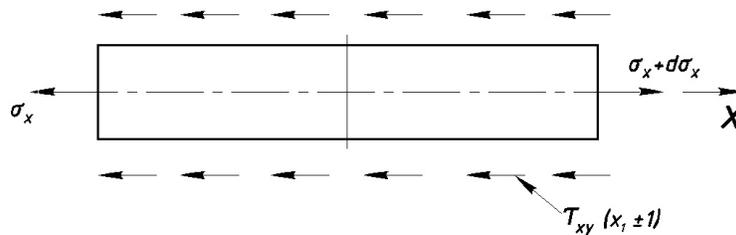


Рис. 3 Условие равновесия элемента ребра длиной dx

Второе граничное условие вытекает из условия симметрии задачи:

$$V(x, \pm 1) = 0. \quad (2)$$

Граничные условия при $x = 0$ могут быть различными, в частности, к ребрам могут быть приложены сосредоточенные силы F , действующие вдоль ребер.

Для построения решения краевой задачи применялся метод начальных функций, который позволяет получать выражения для функций Фадля-Папковича. Основные соотношения метода начальных функций имеют вид:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= L_{UU}(y)U_0(x) + L_{UV}(y)V_0(x) + L_{UY}(y)Y_0(x) + L_{UX}(y)X_0(x), \\ V(x, y) &= L_{VU}(y)U_0(x) + L_{VV}(y)V_0(x) + L_{VY}(y)Y_0(x) + L_{VX}(y)X_0(x), \\ \sigma_x(x, y) &= A_U(y)U_0(x) + A_V(y)V_0(x) + A_Y(y)Y_0(x) + A_X(y)X_0(x), \\ \sigma_y(x, y) &= L_{YU}(y)U_0(x) + L_{YV}(y)V_0(x) + L_{YY}(y)Y_0(x) + L_{YX}(y)X_0(x), \\ \tau_{xy}(x, y) &= L_{XU}(y)U_0(x) + L_{XV}(y)V_0(x) + L_{XY}(y)Y_0(x) + L_{XX}(y)X_0(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $L_{UU}(y)$ и т.д. – известные дифференциальные операторы метода начальных функций. В результате были получены следующие формулы для перемещений и напряжений:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k U(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k U(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k V(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k V(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \sigma_x(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \sigma_y(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tau_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \tau_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}. \end{aligned} \quad (4)$$

В этих формулах функции Фадля-Папковича $U(\lambda_k, y)$, $V(\lambda_k, y)$ и др. имеют вид ($\nu = 0.3$ – коэффициент Пуассона):

$$\begin{aligned} U(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1+\nu}{4} \cos \lambda_k + \frac{\nu-3}{4\lambda_k} \sin \lambda_k \right) \cos \lambda_k y + \frac{1+\nu}{4} y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y, \\ V(\lambda_k, y) &= \frac{1+\nu}{4} (-\cos \lambda_k \sin \lambda_k y + y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y), \end{aligned}$$

$$\sigma_x(\lambda_k, y) = \left(\frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k - \frac{3+\nu}{2} \sin \lambda_k \right) \cos \lambda_k y + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y, \quad (5)$$

$$\sigma_y(\lambda_k, y) = \left(\frac{1-\nu}{2} \sin \lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \cos \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y,$$

$$\tau_{xy}(\lambda_k, y) = \left(\sin \lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \sin \lambda_k y + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y.$$

Числа λ_k – комплексные корни некоторого характеристического уравнения. Их значения зависят от соотношения жесткостей ребра и пластины D . Удовлетворяя с помощью выражений (5) граничным условиям, заданным на торце полуполосы, приходим к задаче определения, a_k, \bar{a}_k из разложений по функциям Фадля–Папковича. Они находятся с помощью биортогональных (к функциям Фадля–Папковича) систем функций. После построения биортогональных систем функций, решая рассматриваемую краевую задачу для того случая, когда на торце полуполосы к концам ребер жесткости приложены сосредоточенные силы, найдем коэффициенты a_k, \bar{a}_k и получим формулы для определения напряжений и перемещений. Приведем для иллюстрации одну из формул:

$$\sigma_x(x, y) = - \sum_{k=1}^n 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\sigma_x(\lambda_k, y)}{M_k} \sigma_k \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right). \quad (6)$$

В этой формуле числа M_k, σ_k – явные алгебраические выражения, зависящие от λ_k и D .

Был выполнен расчет соединения со следующими параметрами образца: размеры сечения пластины – 4x40 мм, размеры сечения бруса – 80x40 мм, длина вклеенной части пластин – 240 мм, при действии выдергивающей силы в 20кН – разрушающей нагрузки для экспериментального образца.

Несмотря на то, что при решении задачи в расчет не вводились отдельные физико-механические параметры соединения, аналитические решения дали возможность понять физическую природу разрушения соединения, а именно:

- касательные напряжения τ_{xy} в древесине превышают значения расчетного сопротивления древесины сколу вдоль волокна 2,1 МПа;
- в соединении возникают раздирающие напряжения σ_y , действующие перпендикулярно продольной оси образца, максимальные значения которых соизмеримы с пределом прочности клеевого соединения на отрыв;
- значения разрушающих напряжений максимальны в непосредственной близости от торца соединения по линии контакта “сталь-древесина”.

Для подтверждения полученных аналитическим и численным методами значений параметров НДС клеевого соединения стальных пластин с древесиной были проведены эксперименты с применением методов натурной тензометрии.

Для сопоставления данных образец для исследования НДС клеевого соединения пластины с древесиной методом тензометрии изготовлен с геометрическими параметрами теоретически рассчитанного образца. Перед наклейкой тензодатчиков в пластине с обеих сторон выбирали пазы (рис. 4а) под их наклейку. Затем, для увеличения адгезии по контакту “клей-металл”, обе поверхности стальных пластин были развиты наклонными пазами под углом 50° к продольной оси шириной 2,5 мм глубиной 0,75

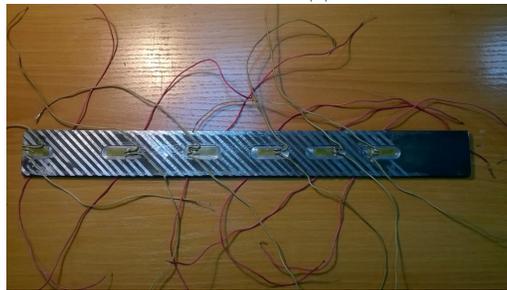
мм, нанесенными на вертикально-фрезерном станке с шагом 2,5 мм (рис. 4б). После монтажа датчиков типа ПКС-12-200 (рис 4в) пластину вклеивали в деревянный брус.



а) фрезерование пазов под тензодатчики

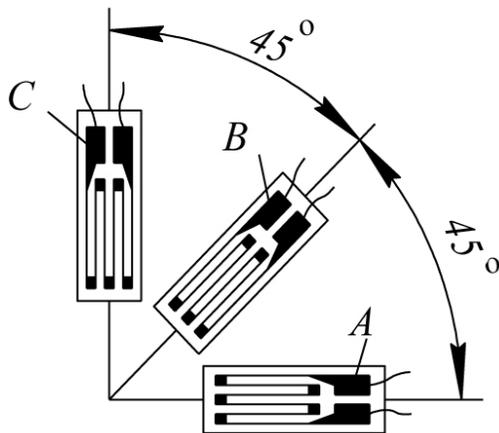


б) фрезерование пазов для увеличения адгезии пластины с клеевой композицией

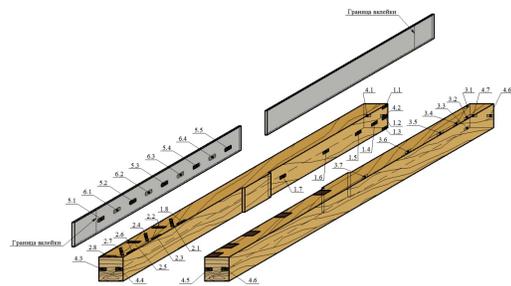


в) монтаж тензодатчиков

Рис. 4. Подготовка пластины перед вклеиванием в брус



а) тензорозетка



б) расположение датчиков на образце

Рис. 5. Схемы наклейки датчиков на экспериментальном образце

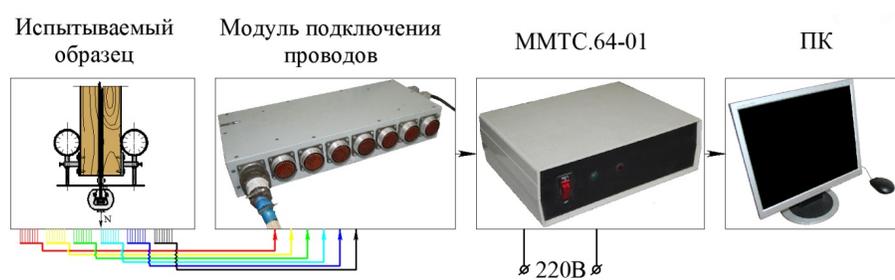


Рис. 6. Схема подключения тензосистемы

Для определения продольных напряжений в сечениях деревянных брусков в плоскости контакта “клей-древесина” на внутреннюю поверхность брусков наклеивали одиночные тензодатчики типа ПКС-12-200. Для определения напряжений τ_{xy} на верхних гранях брусков монтировали прямоугольные трехэлементные тензорозетки (рис. 5а). Для определения напряжений σ_y датчики приклеивали к их торцам (рис. 5б).

Подготовленный образец закреплялся в захватах испытательной машины ИР-50-47, подключался к тензосистеме ММТС 64.01 по схеме, приведенной на рисунке 6, и нагружался до нагрузки в 20 кН в соответствии с рекомендациями [6], [7]. Общий вид экспериментальной установки показан на рис. 7.

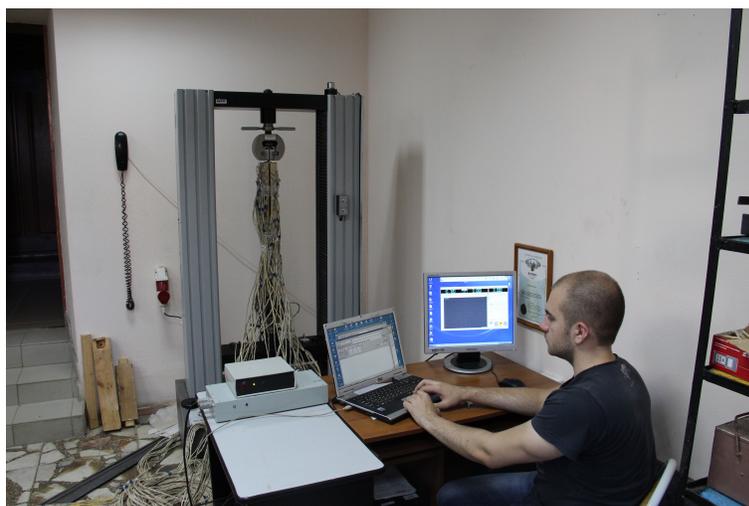
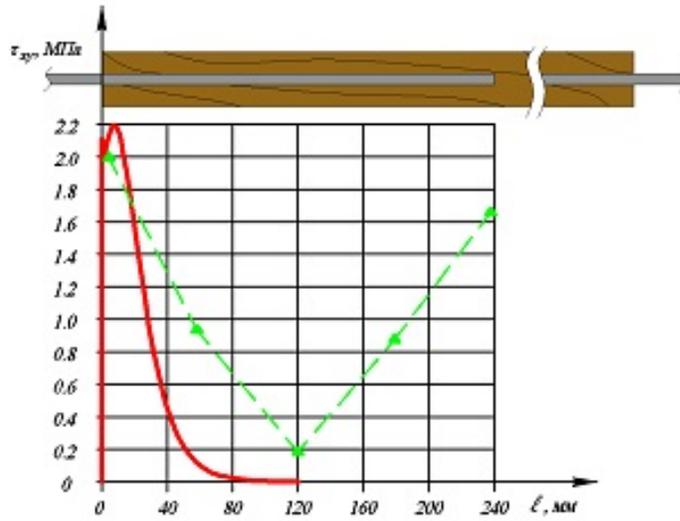
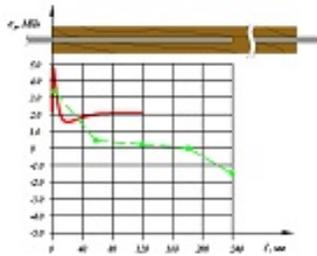


Рис. 7. Испытательная установка для изучения НДС соединения

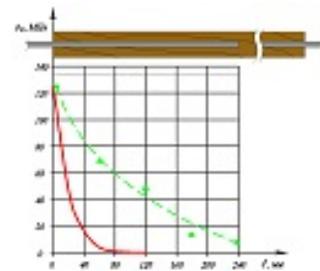


- экспериментальные данные; - аналитический расчет

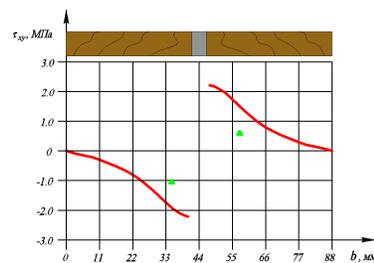
Рис. 8. Распределение касательных напряжений τ_{xy} в древесине по длине клеики по линии контакта с древесиной



а) τ_{xy} в древесине по сечению



б) σ_x по длине



в) σ_y в древесине по длине

- экспериментальные данные; - аналитический расчет

Рис. 9. Распределение компонентов НДС

На рис. 8 приведены сравнительные графики распределения напряжений по длине клеенной части пластины и по поперечному сечению в непосредственной близости от торца образца, построенные по результатам аналитического расчета и экспериментальным данным.

Оценивая результаты определения компонентов НДС клеевого соединения стальных пластин с древесиной, полученные аналитическим расчетом и экспериментальными методами, можно констатировать следующие факты:

- полученные законы распределения компонентов НДС по длине вклеенной части пластины и поперечному сечению бруса имеют хорошую качественную сходимость;
- расхождение теоретических и экспериментальных данных по максимальным касательным напряжениям τ_{xy} , вызывающим скол древесины, и максимальным раздирающим напряжениям σ_y , вызывающим отрыв клея от поверхности пластины, не превысило 15%,
- аналогичное расхождение по напряжениям σ_x , действующим нормально к сечению стальной пластины, составило до 12%.

По результатам проведенных исследований на выдергивание вклеенной стальной пластины из древесины авторы делают следующие выводы.

1. Натурные испытания и характер разрушения образцов подтвердили аналитические выводы о причинах разрушения образцов от действия касательных напряжений, вызывающих скол древесины, или нормальных к поверхности стальной пластины напряжений, вызывающих отрыв ее клеевой композиции.
2. Полученные аналитические зависимости позволили точно определить характер распределения напряжений и деформаций по сечению и вдоль соединения при выдергивании стальной пластины из бруса.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Руднев И. В., Жаданов В. И., Дмитриев П. А. К вопросу применения вклеенных металлических пластин в соединениях деревянных конструкций. Архангельск, 2014. С. 378–383.
- [2] Руднев И. В., Жаданов В. И., Лисов С. В. Соединения элементов деревянных конструкций с применением вклеенных стальных пластин // Известия высших учебных заведений. Строительство. Новосибирск, 2014. № 4. С. 5–8.
- [3] Коваленко М. Д., Шибырин С. В. Полуполоса под действием сосредоточенной силы. Точное решение // Доклады РАН. 1997. Т. 356, № 6. С. 763–765.
- [4] Коваленко М. Д., Меньшова И. В. Аналитические решения двумерных краевых задач теории упругости в конечных областях с угловыми точками границы. Чебоксары, 2014. 123 с
- [5] СП 64.13330.2011. Деревянные конструкции. Актуализированная версия СНиП II-25-80. ЦНИИСК им. В. А. Кучеренко – институт ОАО “НИЦ “Строительство”. М., 2011. 87 с.
- [6] Рекомендации по испытанию соединений деревянных конструкций ЦНИИСК им. Кучеренко. М.: Стройиздат, 1981. 41 с.

I. V. Rudnev, V. I. Zhadanov

CALCULATION METHODS FOR COMPOUNDS OF ELEMENTS OF WOODEN STRUCTURES ON GLUED STEEL PLATES

Orenburg State University, Orenburg

Abstract. For a long time glued in wood elements, more than half a century used in construction as the connecting parts to increase stiffness and strength of the nodes and joints of wooden structures. One option for such a compound is proposed by the authors pasting in abutting wooden elements connecting with steel plates, working on pulling-punching. Known methods of calculation of the compounds of wooden structures in the glued elements do not answer the question about determining the carrying capacity of the node interfaces on steel plates. There are no rules and design of such compounds, as well as any of the experimental data on this subject. The tests samples of the proposed method of connection to the destruction proved its sufficient bearing capacity and allowed to proceed to a detailed study of the stress-strain state of the adhesive bonding of steel plates with the wood when pulling-punching.

Exact analytical solution for the determination of the SSS (stress-strain state) connections when pulling the steel plate out of solid wood in three-dimensional statement today is missing. However, the resulting settlement schemes of plane strain belong to the boundary value problem of elasticity theory for the end of the canonical domains with corners borders and ribs, for which solutions are obtained recently. The solutions are presented in the form of explicit expansions in eigenfunctions of a boundary value problem – Fadle-Papkovich functions. Satisfies the boundary conditions at the end, we come to the problem of decomposition by given two boundary functions in series of two systems of functions Fadle-Papkovich. Expansions of a function of one or another system of functions-Fadle-Papkovich viewed as a generalization of expansions in trigonometric Fourier series and the solution of boundary value problems in the form of expansions in these functions - as a generalization expansions Filon-Ribiere. An exact analytical solution is made, analytical calculation of connections with the parameters of the experimental sample and received qualitative and quantitative results. To confirm the obtained analytical and numerical methods parameters SSS adhesive bonding of steel plates with wood, experiments were conducted using the methods of full-scale tensometry. The stages of preparation of the test samples are shown. Schemes stickers load cells connect of the tensor sistem and test are set, description of the experimental techniques are given. Comparative graphs of the spreading of basic components of SSS connections. Received a good qualitative and quantitative results of the analytical calculation with the experimental data. Analytical solution is possible to understand the overall picture of the SSS connection at the time of the destruction of the sample. Experimental data confirmed the main results of theoretical calculations.

Keywords: calculation method, steel plate, glue, wood, compound, joint, analytical calculation, Fourier series, Fadle-Papkovich functions, numerical research, finite element model, stress-strain state, toughness, stiffness, experimental research, calculation, strain gauge.

Rudnev Igor Vladimirovich

e-mail: ru403@mail.ru, Department of Building construction engineer, Orenburg State University, Orenburg.

Zhadanov Viktor Ivanovich

e-mail: organ-2003@bk.ru, Doctor of Engineering, Professor, Head of Department of Building construction, Orenburg State University, Orenburg.

REFERENCES

1. Rudnev I. V., Zhadanov V. I., Dmitriev P. A. To the question of the application of glued metal plates in joints of wooden structures // 22-23 may 2014. Arkhangelsk: Publishing house LLC "Typography "ТОЧКА" , 2014. P. 378–383. (in Russian).
2. Rudnev I. V., The compounds of elements of wooden structures with glued steel plates / I. V. Rudnev, V. I. Zhadanov, S. V. Lisov // Proceedings of the higher educational institutions. Construction. Novosibirsk, 2014. № 4. P. 5–8. (in Russian).
3. Kovalenko M. D., Shibirin S.V. Halfstrips under effect of concentrated force. Precise solution. RAS Reports, Vol. 356, № 6. P. 763–765. (in Russian).
4. Kovalenko M. D., Menshova I. V. Analytical solutions of two-dimensional boundary problems of the theory of elasticity in finite areas with corner points of the border. Cheboksary: publishing house of CSPU, 2014. 123 p. (in Russian).
5. SP 64.13330.2011. Wood construction. Actualization version II-25-80. CNIISK of V.A. Kucherenko – institute JSC “Research center “Building”. M.: 2011. 87 p. (in Russian).
6. Recommendations for testing the compounds of wooden structures CNIISK of V. A. Kucherenko. M.: Stroyizdat, 1981. 41 p. (in Russian).

Н. В. Минаева¹, М. Г. Хвостов²

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА УПРУГОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

¹Воронежский государственный университет, г. Воронеж

²Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж

Аннотация. Условия сформулированной теоремы о непрерывной зависимости решения вариационной задачи от функций, входящих в нее, приняты в качестве критерия существования состояния исследуемого объекта, соответствующего рассматриваемому решению. Рассмотрен вопрос о границе применимости квадратичного функционала для исследования поведения неоднородной пластины при продольно-поперечном изгибе.

Ключевые слова: вариационная задача, напряжение, деформация, упругость, неоднородная прямоугольная пластина.

УДК: 539.3

Пусть поведение исследуемого объекта описывается решением вариационной задачи

$$\delta w[z(x, y)] = \delta \iint_{\Omega} H(x, y, f, z, \xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{21}, \dots, \xi_{nn}) dx dy = 0, \quad (1)$$

где $\xi_{ij} = \frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i \partial y^j}$, а функция $f(x, y)$ характеризует рассматриваемый объект.

Граничные условия запишем в следующем виде:

$$R_i(f(\gamma), q_{11}, q_{12}, q_{21}, \dots, q_{nn}) = 0 \quad (i = 1, \dots, 2n), \quad (2)$$

где $q_{kl} = \frac{\partial^{k+l-2} z}{\partial x^{k-1} \partial y^{l-1}} \Big|_{(x,y) \in \Gamma}$ ($k, l = 1, \dots, n$), $\gamma \in \Gamma$, Γ – граница области Ω .

Пусть при $f(x, y) = f^0(x, y)$ задача (1), (2) имеет решение

$$z(x, y) = z^0(x, y). \quad (3)$$

© Минаева Н. В., Хвостов М. Г., 2015

Минаева Надежда Витальевна

e-mail: minaeva@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

Хвостов Михаил Геннадьевич, аспирант, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж.

Поступила 05.08.2015

Рассмотрим вопрос о непрерывности зависимости решения задачи (1), (2) от $f(x, y)$ при $f(x, y) = f^0(x, y)$.

Для этого построим следующую вспомогательную задачу относительно функции $z'(x, y)$:

$$\delta v[z'(x, y)] = \delta \iint_{\Omega} H(x, y, f^0, z^0 + z', \xi_{11}^0 + \xi'_{11}, \xi_{12}^0 + \xi'_{12}, \dots, \xi_{nn}^0 + \xi'_{nn}) dx dy = 0 \quad (4)$$

$$R_i(f^0, q_{11}^0 + q'_{11}, q_{12}^0 + q'_{12}, \dots, q_{nn}^0 + q'_{nn}) = 0 \quad (i = 1, \dots, 2n) \quad (5)$$

$$\xi_{kl}^0 = \frac{\partial^{k+l} z^0}{\partial x^k \partial y^l}, \quad \xi'_{kl} = \frac{\partial^{k+l} z'}{\partial x^k \partial y^l}$$

$$q_{kl}^0 = \frac{\partial^{k+l-2} z^0}{\partial x^{k-1} \partial y^{l-1}} \Big|_{(x,y) \in \Gamma}; \quad q'_{kl} = \frac{\partial^{k+l-2} z'}{\partial x^{k-1} \partial y^{l-1}} \Big|_{(x,y) \in \Gamma}.$$

Вариационная задача относительно квадратичного функционала, соответствующего функционалу в (4) и линеаризованные граничные условия, соответствующие условиям (5), будут такими

$$\delta v_2[z'(x, y)] = \delta \iint_{\Omega} \sum_{i,j,k,l}^n H_{\xi_{ij} \xi_{kl}} \Big|_{\substack{f = f^0 \\ z = z^0}} \xi'_{ij} \xi'_{kl} dx dy = 0; \quad (6)$$

$$\sum_{k,l}^n \frac{\partial R_i}{\partial q_{kl}} \Big|_{\substack{f = f^0 \\ z = z^0}} q'_{kl} = 0 \quad (i = 1, \dots, m, \quad m \leq 2n), \quad (7)$$

где учтено, что функция $z^0(x, y)$ является решением задачи (1), (2) при $f = f^0$. Путем построения уравнения Эйлера-Пуассона, соответствующего вариационной задаче (1), (2), можно показать, что, как следует из [1]–[3], решение задачи (1), (2) непрерывно зависит от функции $f(x, y)$ при $f(x, y) = f^0(x, y)$, если вариационная задача (6), (7) имеет только тривиальное решение.

Рассмотрим задачу о продольно-поперечном изгибе упругой пластины размерами $a \times b$, нагруженной поперечной распределенной нагрузкой интенсивности $f_1(x, y)$ и продольной распределенной по краю нагрузкой интенсивности σ_y . Вариационная задача, описывающая состояние пластины, будет следующей [4, 5, 6]:

$$\delta \int_0^a \int_0^b \left\{ D [(\nabla^2 z)^2 - (1 - \mu)N(z)] - \sigma_y \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 - 2f_1 z \right\} dx dy = 0, \quad (8)$$

$$\nabla^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} (1 + f_2(x, y)),$$

$$N(z) = 2 \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right].$$

Если нагруженные кромки пластины закреплены шарнирно, а ненагруженные – жестко защемлены, то граничные условия имеют следующий вид:

$$z(0, y) = z(a, y) = z(x, 0) = z(x, b) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0.$$

Пусть при $f_1(x, y) = f_1^0(x, y)$ и $f_2(x, y) = f_2^0(x, y)$ задача (8), (9) допускает решение $z = z^0(x, y)$. Чтобы это решение имело физический смысл, решение задачи (9), (10) должно непрерывно зависеть от $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ при $f_1 = f_1^0$ и $f_2 = f_2^0$.

Как следует из изложенного выше, для проведения анализа этой непрерывности следует построить вспомогательную вариационную задачу (6) с граничными условиями (7), которые в данном случае примут вид

$$\delta v_2[z'(x, y)] = \delta \int_0^a \int_0^b \left\{ D^0 [(\nabla^2 z')^2 - (1 - \mu)N(z')] - \sigma_y \left(\frac{\partial^2 z'}{\partial y^2} \right)^2 \right\} dx dy = 0; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} z'(0, y) = z'(a, y) = z'(x, 0) = z'(x, b) = 0, \\ \frac{\partial z'}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial z'}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$D^0 = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}(1 + f_2^0(x, y)).$$

Удовлетворяя граничным условиям (10), решение задачи (11) будем искать, например, в виде

$$z' = C \sin \frac{m\pi y}{b} \sin^2 \frac{n\pi x}{a}. \quad (12)$$

В результате подстановки (12) в (10) получим, что функционал становится функцией, зависящей от C . Особая точка найдется из условия, что $C = 0$, т.е.

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b \left\{ D^0 \left[\nabla^2 \left(\sin \frac{m\pi y}{b} \sin^2 \frac{n\pi x}{a} \right) \right]^2 - (1 - \mu)N \left(\sin \frac{m\pi y}{b} \sin^2 \frac{n\pi x}{a} \right)^2 \right\} dx dy = \\ = \sigma_y \int_0^a \int_0^b \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \left(\sin \frac{m\pi y}{b} \sin^2 \frac{n\pi x}{a} \right)^2 dx dy. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом,

$$\sigma_y^* = \frac{\int_0^a \int_0^b D^0 \left\{ \left[\nabla^2 \left(\sin \frac{m\pi y}{b} \sin^2 \frac{n\pi x}{a} \right) \right]^2 - (1 - \mu)N \left(\sin \frac{m\pi y}{b} \sin^2 \frac{n\pi x}{a} \right)^2 \right\} dx dy}{\frac{m^2 \pi^2}{b^2} \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{m\pi y}{b} \sin^4 \frac{n\pi x}{a} dx dy}. \quad (14)$$

Например, при $f^0(x, y) = 0$, т.е. для однородной пластины постоянной толщины получаем из (14), что

$$\sigma_y^* = \frac{D^0 \pi^2}{b^2 h} \left(\frac{m^2 b^2}{a^2} + \frac{8}{3} + \frac{16}{3} \frac{a^2}{m^2 b^2} \right). \quad (15)$$

Если внешние нагрузки и параметры пластины таковы, что точка, соответствующая им, находится вне области, ограниченной линией (15), то при построении функционала в (8) следует учесть величины не только второго порядка малости, но и более высокого.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.
- [2] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1968. 526 с.
- [3] Гриценко А. В., Минаева Н. В., Шашкин А. И. Об исследовании квазистатического поведения деформируемых систем и адекватности решений уравнений статики // Изв. ВУЗОВ. Машиностроение. 2009. № 3. С. 17–21.
- [4] Ковалев А. В. Об учете ассоциированной сжимаемости упругопластических тел в случае плоской деформации // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1 (15). С. 63–68.
- [5] Абовский Н. П., Андреев Н. П., Деруга А. П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М.: Наука, 1978. 287 с.
- [6] Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.

N. V. Minaeva¹, M. G. Khvostov²

**ON THE INVESTIGATION THE LONGITUDINAL-TRANSVERSE BENDING
OF INHOMOGENEOUS ELASTIC PLATES BASED ON THE SOLUTION OF
THE VARIATIONAL PROBLEM**

¹ *Voronezh State University, Voronezh*

² *Voronezh State University of engineering technologies, Voronezh*

Abstract. The conditions formulated in the theorem on continuous dependence of the solution of the variational problem from the functions included in it, taken as a criterion of existence of the state of the object corresponding to the solution. Consider the boundary of applicability of the quadratic functional to study the behavior of an inhomogeneous plate under longitudinal-transverse bending.

Keywords: a variational problem, stress, strain, elasticity, non-uniform rectangular plate.

REFERENCES

- [1] Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elements of theory of functions and functional analysis. M.: Nauka, 1976. 542 p. (in Russian).
- [2] Naimark M. A. Linear differential operators. M.: Nauka, 1968. 526 p. (in Russian).
- [3] Gritsenko A. V., Minaeva N. V., Shashkin A. I. About the study the quasi-static behavior of deformable systems and the adequacy of the solutions of the equations of statics // *Izv. Vuzov Engineering*. 2009. № 3. P. 17–21. (in Russian).
- [4] Kovalev A.V. About accounting associate of compressibility of elastic-plastic bodies in plane strain case // *Bulletin of the ChSPU named Yakovlev. Series: Mechanics of the limit state*. 2013. № 1(15). P. 63–68. (in Russian).
- [5] Abovsky N. P., Andreev N. P., Deruga A. P. Variational principles of elasticity theory and shell theory. M.: Nauka, 1978. 287 p. (in Russian).
- [6] Washizu K. Variational methods in the theory of elasticity and plasticity. M.: Mir, 1987. 542 p. (in Russian).

Minaeva Nadezhda Vitalevna

e-mail: minaeva@yandex.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh State University, Voronezh.

Khvostov Michael Gennadevich, Postgraduate Voronezh State University of engineering technologies, Voronezh.

Н. Д. Вервейко, О. А. Фролова

ПРЕДЕЛЬНОЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СЖИМАЕМОГО СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж

Аннотация. Механика сыпучих материалов описывает напряженное и деформированное состояние таких реальных материалов как пески, гранулированные материалы, горные породы и другие материалы, которые наряду со свойством пластичности и сцепления обладают свойством сыпучести, возможностью проскальзывания частиц относительно друг друга и возможностью независимого поворота отдельных частиц. Характерной особенностью таких материалов является их фрактальность, раздробленность, наличие пустот и общая пористость. Рассмотрено напряженное состояние пространства, заполненного сыпучим материалом, в цилиндрической системе координат. Напряженное состояние представительного элемента удовлетворяет условиям равновесия, которые выполняются в точке пространства, совпадающей с центром масс представительного элемента. Наличие микроструктуры предполагает возможность объемной пластической деформации за счет сдвига. Это следует из ассоциированного закона течения к условию пластичности, предполагающего зависимость предельного касательного напряженного состояния от давления, что допускает возможность замкнутого вида условия пластичности в пространстве главных напряжений. Для пластически сжимаемого сыпучего материала построено поле напряжений одномерного осесимметричного предельного напряженного состояния материала с цилиндрической полостью. Рассмотрены три случая нагружения. В случае невесомого материала с внутренним цилиндрическим вырезом, на поверхности которого задано давление, показано, что материал находится в состоянии растяжения вдоль оси z и сжатия по r, θ . Для цилиндрического невесомого слоя, находящегося в пластическом состоянии за счет внутреннего и внешнего давления, получен радиус зоны пластического деформирования. Для случая сжатия цилиндра из невесомого материала получено выражение для критического давления, когда зона пластического деформирования выходит на внешнюю границу.

© Вервейко Н. Д., Фролова О. А., 2015

Вервейко Николай Дмитриевич

e-mail: ver38@mail.ru, доктор технических наук, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

Фролова Оксана Александровна

e-mail: OksanaFrolA@yandex.ru, аспирант кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

Поступила 13.08.2015

Ключевые слова: предельное напряженное состояние, грунты, сыпучие материалы, осесимметричное течение, материал с микроструктурой.

УДК: 539.215+624.131

Рассмотрим пространство, заполненное сыпучим материалом, в цилиндрической системе координат r, θ, z . Заданные нагрузки и смещения обладают осевой симметрией, поля деформаций и напряжений обладают свойством осесимметричности, т. е. компоненты напряжения и смещения не зависят от полярного угла θ .

Компоненты тензора скорости деформации имеют вид [1], [2], [3], [4]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{h^2}{6} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 U_r}{\partial r^3} + \frac{\partial^3 U_r}{\partial z^2 \partial r} \right), \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{U_r}{r} + \frac{h^2}{6} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial r} \right), \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{h^2}{6} \left(\frac{\partial^3 U_z}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 U_z}{\partial r^2 \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_z}{\partial r \partial z} \right), \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^3 U_r}{\partial r^2 \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_r}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^3 U_r}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 U_z}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 U_z}{\partial r \partial z^2} \right), \\ \varepsilon_{r\theta} &= \varepsilon_{\theta z} = 0,\end{aligned}$$

где h – параметр микроструктуры.

Предполагается, что напряженное состояние представительного элемента с характерным размером h определяется напряженным состоянием, условия равновесия которого выполняются в точке пространства.

Компоненты напряжения удовлетворяют двум уравнениям равновесия [5], [6], [7]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{f}{\sqrt{2}} (I_{1\sigma})_{,z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \frac{f}{\sqrt{2}} (I_{1\sigma})_{,r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} - \frac{f}{r\sqrt{2}} I_{1\sigma} &= -\gamma,\end{aligned}\tag{1}$$

где γ – сила тяжести.

Наличие микроструктуры в представительном элементе предполагает возможность объемной пластической деформации за счет сдвига, и тем самым имеет место зависимость предельного касательного напряженного состояния от давления. Таким образом представляется оправданным вид замкнутого условия пластичности в пространстве главных напряжений [8], [9], [10]:

$$\Phi = \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{zz}^2 + 2\sigma_{rz}^2 - \beta I_{1\sigma}^2 - 2\alpha Y I_{1\sigma} - Y^2 = 0,\tag{2}$$

где $\beta = \frac{1}{3} + \alpha^2 - f^2$, Y – сцепление, α – коэффициент внутреннего трения, f – коэффициент трения качения.

Из условия (2) следует ограничение на определение области существования условия пластичности на оси $I_{1\sigma}$:

$$f \leq \left(\alpha + \frac{Y}{I_{1\sigma}} \right),$$

которое позволяет описать множество условий пластичности в плоскости инвариант тензора напряжения.

На рисунке 1 представлено множество условий пластичности: 1 – условие пластичности Кулона–Мизеса–Соколовского; 2 – замкнутое условие пластичности (2). Условие пластичности в пространстве второго инварианта симметричного тензора напряжений и первого инварианта тензора напряжений представляют собой семейства: гипербол при $\alpha > f$, парабол при $\alpha = f$ или эллипсов при $\alpha < f$. При условии малости коэффициента трения качения $f \approx 0$, условие пластичности (2) переходит в условие пластичности Мизеса–Шлейхера, которое при малом угле внутреннего трения $\alpha \approx 0$ переходит в условие пластичности Мизеса. При $f > \alpha$ условие пластичности (2) является замкнутым и представляет собой семейство эллипсов, проходящих через точку $I_{1\sigma} = 0$, $I_{2(\sigma)}^2 = Y^2$.

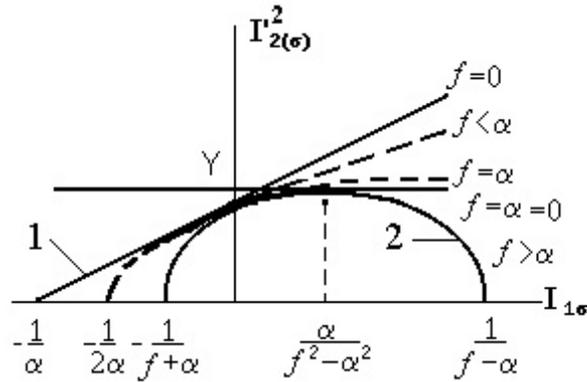


Рис. 1

Предположим, что компоненты перемещений удовлетворяют условиям:

$$U_z = 0, U_r = U_r(r),$$

тогда компоненты тензора скорости деформации примут вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{rz} &= 0, \\ \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{h^2}{6} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 U_r}{\partial r^3} \right), \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{U_r}{r} + \frac{h^2}{6} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Система уравнений в напряжениях, содержащая три уравнения и четыре неизвестные, является незамкнутой. Для ее замыкания воспользуемся ассоциированным законом пластического течения [5], [7]:

$$\varepsilon_{ij} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (4)$$

где λ – неопределенный множитель Лагранжа.

Из условия (4), исключив ε_{ij} , с учетом условия пластичности (2) и выражений (3) получим:

$$\begin{aligned} 2\lambda(\sigma_{rr} - \beta I_{1\sigma} - \alpha Y) &= \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{h^2}{6} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 U_r}{\partial r^3} \right), \\ 2\lambda(\sigma_{\theta\theta} - \beta I_{1\sigma} - \alpha Y) &= \frac{U_r}{r} + \frac{h^2}{6} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} 2\lambda(\sigma_{zz} - \beta I_{1\sigma} - \alpha Y) &= 0, \\ 4\lambda\sigma_{rz} &= 0. \end{aligned}$$

Из четвертого уравнения (5) следует, что касательное напряжение σ_{rz} отсутствует

$$\sigma_{rz} = 0.$$

Из третьего уравнения (5) следует, что нормальное напряжение σ_{zz} пропорционально давлению $P = -I_{1\sigma}$

$$\sigma_{zz} = \beta I_{1\sigma} + \alpha Y. \quad (6)$$

Предположим, что $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(r)$. Тогда с учетом последнего выражения (6) уравнения равновесия и условия пластичности примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{f}{\sqrt{2}}(I_{1\sigma})_{,r} + \frac{f}{r\sqrt{2}}I_{1\sigma} &= \gamma, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Phi = \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{zz}^2 - \beta I_{1\sigma}^2 - 2\alpha Y I_{1\sigma} - Y^2 = 0. \quad (8)$$

Из уравнения (6) следует, что

$$I_{1\sigma} = \frac{1}{\beta}(\sigma_{zz} - \alpha Y).$$

Продифференцируем последнее выражение по r , получим:

$$(I_{1\sigma})_{,r} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial r}.$$

С учетом этого второе уравнение (7) примет вид:

$$\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{zz}}{r} = \frac{\gamma\beta\sqrt{2}}{f} + \frac{\alpha Y}{r}.$$

Решение последнего уравнения дает выражение для компоненты тензора напряжений σ_{zz}

$$\sigma_{zz} = \frac{\gamma\beta}{f\sqrt{2}}r^2 + \alpha Y + Cr, \quad (9)$$

где C – константа интегрирования.

Из выражения (6) следует, что

$$\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{rr} = \frac{1-\beta}{\beta}\sigma_{zz} - \frac{\alpha Y}{\beta}$$

или с учетом σ_{zz}

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(1-\beta)\gamma}{f\sqrt{2}}r^2 + \frac{(1-\beta)C_1 r}{\beta} - \alpha Y - \sigma_{rr}. \quad (10)$$

Подставляя последнее выражение в первое уравнение (7), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для σ_{rr} :

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{rr}}{r} = \frac{(1-\beta)\gamma}{f\sqrt{2}}r - \frac{\alpha Y}{r} + \frac{1-\beta}{\beta}C,$$

решение которого имеет вид:

$$\sigma_{rr} = \frac{(1-\beta)\gamma}{f\sqrt{2}}r^2 + \frac{(1-\beta)C}{\beta}r + \frac{C_1}{r^2} - \frac{\alpha Y}{2}. \quad (11)$$

Из выражения (10), с учетом σ_{rr} , получим выражение для компоненты $\sigma_{\theta\theta}$:

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{C_1}{r^2} - \frac{\alpha Y}{2}. \quad (12)$$

Таким образом мы получили значения компонент напряжений в случае одномерного осесимметричного напряженного состояния материала с цилиндрической полостью.

Рассмотрим различные случаи нагружения.

1. Случай невесомого материала ($\gamma = 0$) с внутренним цилиндрическим вырезом ($r = R_-$) на поверхности которого задано давление P_0 (рис.2).

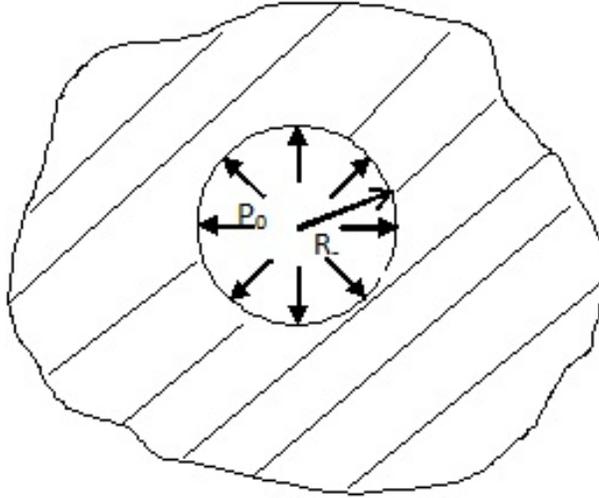


Рис. 2

Из ограниченности напряженного состояния на бесконечности ($R \rightarrow \infty$) следует, что $C = 0$ и $I_{1\sigma} \equiv 0$, а материал находится в состоянии растяжения вдоль оси z :

$$\sigma_{zz} = \alpha Y$$

и сжатия по направлениям r, θ :

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -\frac{\alpha Y}{2},$$

что соответствует предельному напряженному состоянию вдали от выреза.

2. Случай напряженного состояния цилиндрического слоя, находящегося в пластическом состоянии для невесомого материала ($\gamma = 0$) (рис. 3).

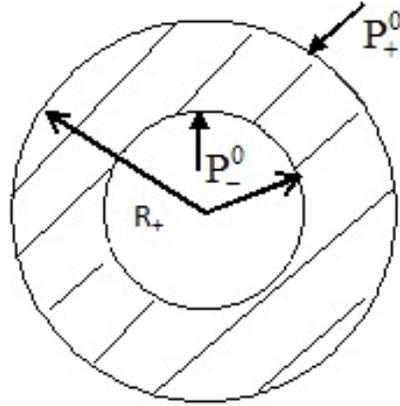


Рис. 3

Граничные условия для данного случая имеет вид:

$$\sigma_{rr}(R_-) = -P_-^0, \quad \sigma_{rr}(R_+) = -P_+^0. \quad (13)$$

Граничные условия (13) дают систему двух уравнений для постоянных C и C_1 :

$$\begin{aligned} -P_-^0 &= \frac{1-\beta}{\beta} CR_- + C_1 R_-^{-2} - \frac{\alpha Y}{2}, \\ -P_+^0 &= \frac{1-\beta}{\beta} CR_+ + C_1 R_+^{-2} - \frac{\alpha Y}{2}. \end{aligned}$$

Последние уравнения позволяют найти константы C и C_1 :

$$\begin{aligned} C &= \frac{-\beta}{1-\beta} \frac{P_+^0 R_+^2 - P_-^0 R_-^2}{R_+^3 - R_-^3} - \frac{\alpha Y \beta}{1-\beta} \frac{1}{R_+ - R_-}, \\ C_1 &= \frac{(P_+^0 R_- - P_-^0 R_+) R_+^2 R_-^2}{R_+^3 - R_-^3} + \frac{\alpha Y}{2} \frac{R_+^2 R_-^2}{R_+^2 - R_-^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Найдем зону пластического деформирования, воспользовавшись условием пластичности:

$$\left(2 - \frac{3}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}\right) C^2 R_P^2 + \frac{2C_1^2}{R_P^4} + \frac{2(1-\beta)}{\beta} C C_1 \frac{1}{R_P} + \left(\frac{3}{2}\alpha^2 - 1\right) Y^2 = 0,$$

где R_P – радиус зоны пластического деформирования. Для материалов, у которых отсутствует сцепление ($Y = 0$) или коэффициент внутреннего трения $\alpha = \sqrt{2/3}$, получим:

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{3}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}\right) C^2 R_P^2 + \frac{2C_1^2}{R_P^4} + \frac{2(1-\beta)}{\beta} C C_1 \frac{1}{R_P} &= 0, \\ R_P &= \left(\frac{C_1(\beta - 1 \pm \sqrt{-3\beta^2 + 4\beta - 1})}{C(2\beta - 3 + \frac{1}{\beta})} \right)^{1/3}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\beta \in [\frac{1}{3}; 1]$.

В случае разрушения цилиндрического слоя за счет внутреннего давления ($P_+^0 = 0$) предельный радиус зоны пластического деформирования $R_P = R_+$.

В случае разрушения кольца из сыпучего материала за счет внешнего давления ($P_-^0 = 0$) $R_P = R_-$.

3. Случай сжатия цилиндра из невесомого материала ($\gamma = 0$) (рис.4). В этом случае $C_1 \neq 0$. Так как σ_{zz} постоянно во всей области, то $C = 0$, тогда:

$$\sigma_{zz} = \alpha Y. \quad (16)$$

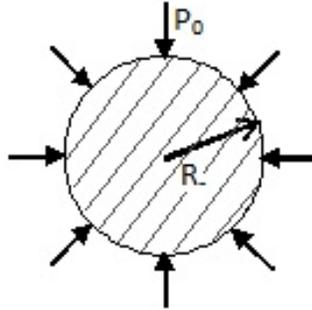


Рис. 4

Граничное условие для данного случая

$$\sigma_{rr}(R_-) = -P_0$$

позволяет получить значение для постоянной C_1

$$C_1 = -P_0 R_-^2 + \frac{\alpha Y}{2} R_-^2.$$

С учетом C_1 компоненты напряжений примут вид:

$$\sigma_{rr} = -\frac{\alpha Y}{2} - \frac{R_-^2}{r^2} \left(P_0 - \frac{\alpha Y}{2} \right), \quad (17)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{\alpha Y}{2} + \frac{R_-^2}{r^2} \left(P_0 - \frac{\alpha Y}{2} \right). \quad (18)$$

Подставляя выражения для компонент напряжений в условие пластичности, найдем зону пластического деформирования.

$$R_P = \frac{R_- \sqrt{\frac{2P_0}{Y} - \alpha}}{\sqrt[4]{2 - 6\alpha^2}}, \alpha \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Условием разрушения цилиндра будет $R_P = R_-$, тогда компоненты напряжений примут вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -P_0, \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\alpha Y + P_0, \\ \sigma_{zz} &= \alpha Y. \end{aligned} \quad (19)$$

Подставляя компоненты напряжений (19) в условие пластичности, получим выражения для критического давления ($P_0^* = \frac{P_{0кр}}{Y}$):

$$P_0^* = \frac{\alpha \pm \sqrt{2 - 3\alpha^2}}{2}, \alpha \in \left[-\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}} \right].$$

Таким образом построено напряженное состояние сжимаемого сыпучего материала в трех случаях нагружения и определены размеры зоны пластического деформирования материала.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Eringen A. C. Theory of micropolar fluid // J. Math. Mech. 1966. № 1. Vol. 16. P. 1–16.
- [2] Быкова М. И., Вервейко Н. Д., Сумец П. П., Шашкина С. А. Течение и деформирование материалов однородной микроструктуры. Воронеж, 2010. 192 с.
- [3] Фролов А. Л., Фролова О. А. Осесимметричное напряженное состояние связного сыпучего материала с учетом микроструктуры // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1 (15). С. 214–221.
- [4] Вервейко Н. Д., Фролова О. А. Влияние характерного размера представительного элемента сыпучей среды на осесимметричное напряженное состояние // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов междунар. конф. Воронеж, 2011. С. 106–109.
- [5] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
- [6] Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. М.: Наука, 1990. 272 с.
- [7] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [8] Никитин Л. В., Рыжак Е. И. Закономерности разрушения горной породы с внутренним трением и дилатансией // Физика земли. 1977. № 5. С. 22–37.
- [9] Вервейко Н. Д., Фролов А. Л. Кинематика предельного осесимметричного состояния сыпучих материалов со сцеплением // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: сборник статей к 75-летию Е. И. Шемякина. 2006. С. 107–114.
- [10] Фролов А. Л. Осесимметричное деформирование микрополярных связных сыпучих материалов // Материалы школы семинара посвященного 70-летию профессора Д. Д. Ивлева. Воронеж, 2000. Ч. 2. С. 474–480.

N. D. Verveiko, O. A. Frolova

**LIMIT AXISYMMETRIC STRESSFUL STATE OF COMPRESSIBLE LOOSE
MATERIAL WITH CYLINDRICAL AIR SPACE**

Voronezh State University, Voronezh

Abstract. Mechanics of loose materials describes the stressful and strained state of such materials like sands, granulated materials, rocks and other materials. All of this materials have the properties of plasticity, adhesion and flowability. A characteristic traits of such materials are fractality, fragmentation, existence of interstices the total porosity. It is considered the stressful state of space filled with loose material in a cylindrical coordinate system. The density state of representative element satisfies the conditions of equilibrium in point of space coinciding with the center of mass of a representative element. It is assumed the possibility of volume plastic deformation due to displacement. This follows from an associate of the law reaches to the condition of plasticity, which anticipated a busy limit dependence with-standing the pressure that allows closed-type condition of plasticity in the principal stresses. It is constructed the stress field of one dimensional axisymmetric limit stressful state material with cylindrical air space for plastic compressible loose material. It is considered three cases of stressing. In the case of imponderable material with inner cylindrical surface cut and surface pressure it is shown that material is in a stretch along the z axis and compression on r, . For cylindrical imponderable layer in the plastic state due to internal and external pressures it is obtained the radius of the area of plastic deformation. For the case of cylinder compression of imponderable material it is obtained the expression for the critical pressure, when the area of plastic deformation on the outer edge.

Keywords: limit stress state, soils, loose materials, axial-symmetric flow, microstructure of material.

REFERENCES

- [1] Eringen A. C. Theory of micropolar fluid // J. Math. Mech. 1966. № 1. Vol. 16. P. 1–16.
- [2] Bikova M. I., Verveiko N. D., Sumets P. P., Shashkin S. A. The flow and deformation of materials homogeneous microstructure. Voronezh, 2010. 192 p. (in Russian).
- [3] Frolov A. L., Frolova O. A. Axisymmetric stress state cohesive granular material, taking into account the microstructure // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2013. № 1 (15). P. 214–221. (in Russian).
- [4] Verveiko N. D., Frolova O. A. Influence of the characteristic size of the representative element of granular material in the axially symmetric stress state // Recent developments in applied mathematics, computer science and mechanics: a collection of the works of the international conference. Voronezh, 2011. P. 106–109. (in Russian).

Verveiko Nikolay Dmitrievich

e-mail: ver38@mail.ru, Dr. Sci. Tech., Professor, Department of mechanics and computer simulation, Voronezh State University, Voronezh.

Frolova Oksana Alexandrovna

e-mail: OksanaFrolA@yandex.ru, Postgraduate student, Department of mechanics and computer simulation, Voronezh State University, Voronezh.

- [5] Ivlev D. D. The theory of ideal plasticity. M.: Nauka, 1966. 232 p. (in Russian).
- [6] Sokolovsky V. V. Static granular medium. M.: Nauka, 1990. 272 p. (in Russian).
- [7] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. The theory of plasticity. Vladivostok: Dal'nauka, 1998. 528 p. (in Russian).
- [8] Nikitin Л. Б., Ryzhak E. I. Laws of breaking rock with internal friction and dilatancy // Physics of the Earth. 1977. № 5. P. 22–37. (in Russian).
- [9] Verveyko N. D., Frolov A. L. Kinematics limit axisymmetric state of bulk materials with a clutch // Problems of Deformable solids and rocks: a collection of articles on the 75th anniversary of E. I. Shemyakin. 2006. P. 107–114. (in Russian).
- [10] Frolov A. L. Axisymmetric deformation micropolar cohesive bulk materials // Materials school seminar dedicated to the 70th anniversary of Professor D. Ivlev. Voronezh, 2000. Part 2. P. 474–480. (in Russian).

ВЛИЯНИЕ ХАРАКТЕРНОГО РАЗМЕРА МИКРОСТРУКТУРЫ СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА НА ОДНОМЕРНОЕ ПРЕДЕЛЬНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Воронежский государственный университет, г. Воронеж

Аннотация. Рассмотрено одномерное предельное напряженное состояние тонкого вертикального цилиндрического слоя заполненного сжимаемым сыпучим материалом под действием вертикальной нагрузки. Получены выражения, определяющие компоненты тензора напряжений, из которых следует, что имеет место линейное распределение вертикальных напряжений за счет собственного веса. Показано, что при принятых кинематических условиях микроструктура не влияет на напряженное состояние. Оценена зона пластического деформирования материала в зависимости от внутреннего трения и трения качения в представительном элементе.

Ключевые слова: предельное напряженное состояние, грунты, сыпучие материалы, осесимметричное течение, материал с микроструктурой.

УДК: 539.215+624.131

Рассмотрим полупространство, заполненное сыпучим материалом, в цилиндрической системе координат r, θ, z . Пусть заданные внешние нагрузки и смещения обладают осевой симметрией, тогда поля деформации и напряжений обладают свойством осесимметричности, т.е. компоненты напряжения и смещения не зависят от полярного угла θ .

Компоненты тензора скорости деформации имеют вид [1], [2], [3], [4]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{h^2}{6} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 U_r}{\partial r^3} + \frac{\partial^3 U_r}{\partial z^2 \partial r} \right), \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{U_r}{r} + \frac{h^2}{6} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial r} \right), \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{h^2}{6} \left(\frac{\partial^3 U_z}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 U_z}{\partial r^2 \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_z}{\partial r \partial z} \right), \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^3 U_r}{\partial r^2 \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_r}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^3 U_r}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 U_z}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 U_z}{\partial r \partial z^2} \right),\end{aligned}\tag{1}$$

© Фролова О. А., 2015
Фролова Оксана Александровна
e-mail: OksanaFrolA@yandex.ru, аспирант кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

Поступила 10.08.2015

$$\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta z} = 0,$$

где h – параметр микроструктуры.

Компоненты напряжений удовлетворяют двум уравнениям равновесия и условию пластичности [5], [6], [7], [8], [9]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{\sqrt{2}}(I_{1\sigma})_{,z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \frac{1}{\sqrt{2}}(I_{1\sigma})_{,r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} - \frac{1}{r\sqrt{2}}I_{1\sigma} = -\gamma, \quad (2)$$

$$\Phi = \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{zz}^2 + 2\sigma_{rz}^2 - \beta I_{1\sigma}^2 - 2\alpha Y I_{1\sigma} - Y^2 = 0, \quad (3)$$

где Y – сцепление, α – коэффициент внутреннего трения, f – коэффициент трения качения, γ – сила тяжести, $\beta = \frac{1}{3} + \alpha^2 - f^2$.

Наличие микроструктуры в представительном элементе предполагает возможность объемной пластической деформации за счет сдвига, и тем самым имеет место зависимость предельного касательного напряженного состояния от давления. Таким образом, представляется оправданным вид замкнутого условия пластичности в пространстве главных напряжений. Из условия (2) следует ограничение на определение области существования условия пластичности на оси $I_{1\sigma}$:

$$f \leq \left(\alpha + \frac{Y}{I_{1\sigma}} \right),$$

которое позволяет описать множество условий пластичности в плоскости инварианта тензора напряжения (рис. 1).

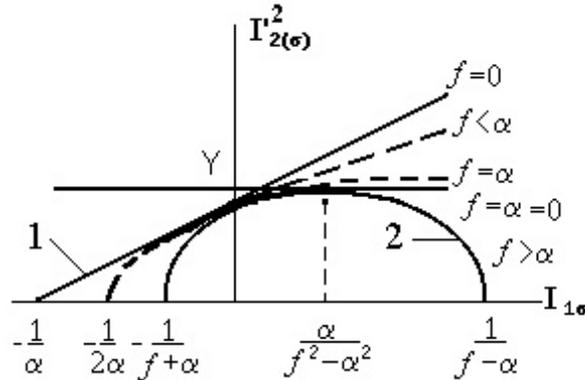


Рис. 1

На рис. 1 представлено множество условий пластичности: 1 – условие пластичности Кулона–Мизеса–Соколовского; 2 – замкнутое условие пластичности (2). Условие пластичности в пространстве второго инварианта симметричного тензора напряжений и первого инварианта тензора напряжений представляют собой семейства: гипербол при $\alpha > f$, парабол при $\alpha = f$ или эллипсов при $\alpha < f$. При условии малости коэффициента трения качения $f \approx 0$, условие пластичности (2) переходит в условие пластичности Мизеса–Шлейхера, которое при малом угле внутреннего трения $\alpha \approx 0$

переходит в условие пластичности Мизеса. При $f > \alpha$ условие пластичности (2) является замкнутым и представляет собой семейство эллипсов, проходящих через точку $I_{1\sigma} = 0$, $I_{2(\sigma)}^2 = Y^2$.

Предполагается, что компоненты перемещений удовлетворяют условиям $U_r = 0$, $U_z = U_z(z)$, что кинематически соответствует деформированию тонкого вертикального цилиндрического слоя под действием вертикальных нагрузок.

На рисунке 2 изображен элемент осесимметричного тонкого слоя, занятого сжимаемым сыпучим материалом (например, осесимметричный цилиндрический фундамент) при условии отсутствия радиальных перемещений, так что в уравнениях (2), (3) r выступает как параметр характерного радиуса цилиндрической области, заполненной сжимаемым материалом.

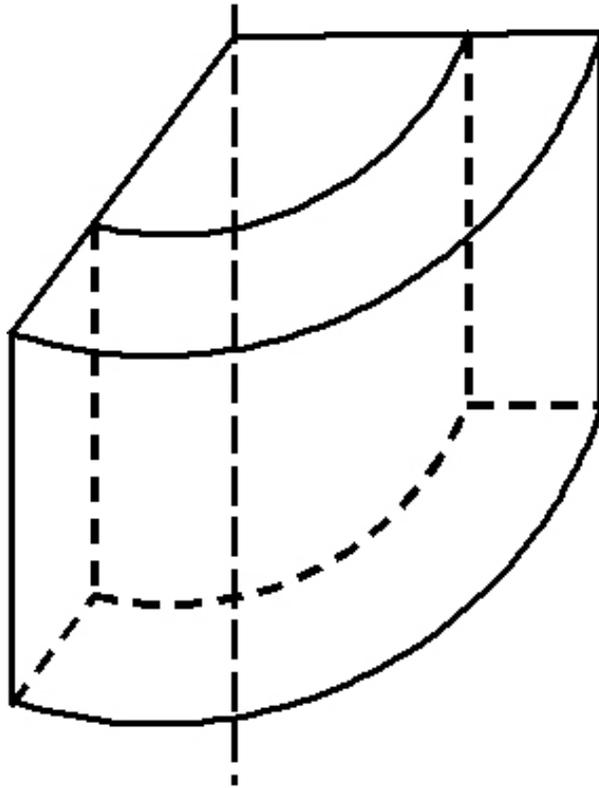


Рис. 2

Компоненты тензора скорости деформации примут вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{rz} = 0, \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 U_z}{\partial z^3}. \end{aligned} \quad (4)$$

Система уравнений в напряжениях (2), (3), содержащая три уравнения и четыре неизвестные, является незамкнутой. Для замыкания системы уравнений в напряжениях воспользуемся ассоциированным законом пластического течения [5], [7]:

$$\varepsilon_{ij} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (5)$$

где λ – неопределенный множитель Лагранжа.

Продифференцируем условия пластичности (3) с учетом (4), (5):

$$2\lambda(\sigma_{rr} - \beta I_{1\sigma} - \alpha Y) = 0, \quad (6)$$

$$2\lambda(\sigma_{\theta\theta} - \beta I_{1\sigma} - \alpha Y) = 0, \quad (7)$$

$$2\lambda(\sigma_{zz} - \beta I_{1\sigma} - \alpha Y) = \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 U_z}{\partial z^3}, \quad (8)$$

$$4\lambda\sigma_{rz} = 0. \quad (9)$$

Из уравнения (9) следует, что $\sigma_{rz} = 0$.

Из уравнений (6) и (7) следует, что:

$$\sigma_{rr} = \beta I_{1\sigma} + \alpha Y,$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \beta I_{1\sigma} + \alpha Y,$$

т.е. $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$.

С учетом последнего и того, что $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(z)$, уравнения равновесия и условия пластичности примут вид:

$$\frac{f}{\sqrt{2}}(I_{1\sigma})_{,z} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \frac{f}{r\sqrt{2}} I_{1\sigma} = -\gamma, \quad (10)$$

$$\Phi = 2\sigma_{rr}^2 + \sigma_{zz}^2 - \beta I_{1\sigma}^2 - 2\alpha Y I_{1\sigma} - Y^2 = 0. \quad (11)$$

Из первого уравнения (10) следует, что $I_{1\sigma} = C_1 = const$, тогда из второго уравнения получим:

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \frac{fC_1}{r\sqrt{2}} - \gamma.$$

Проинтегрировав последнее уравнение, получим:

$$\sigma_{zz} = \left(\frac{fC_1}{r\sqrt{2}} - \gamma \right) z + C_2. \quad (12)$$

Пусть к стержню приложена нагрузка, соответствующая напряженному состоянию $\sigma_{zz}^0, \sigma_{rr}^0, \sigma_{\theta\theta}^0$, тогда при $z = 0$ из (12) получим $C_2 = \sigma_{zz}^0 = -p_0$.

$$I_{1\sigma} = C_1 = \sigma_{rr}^0 + \sigma_{\theta\theta}^0 + \sigma_{zz}^0 = -3p_0, \quad (13)$$

и выражение (12) примет вид:

$$\sigma_{zz} = \left(\frac{-3fp_0}{r\sqrt{2}} - \gamma \right) z - p_0. \quad (14)$$

Так как $I_{1\sigma} = C_1$, то $2\sigma_{rr} + \sigma_{zz} = -3p_0$.

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -p_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{3fp_0}{r\sqrt{2}} + \gamma \right) z. \quad (15)$$

Выражения (14), (15), определяющие компоненты тензора напряжений, представлены на графиках.

Из рисунков 3–4 для $\sigma_{zz}, \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$ следует, что эти напряжения уменьшаются с увеличением радиуса цилиндрического слоя, и имеет место линейное распределение вертикальных напряжений за счет собственного веса, так что выполняется условие:

$$\sigma_{zz} + p_0 = -2(\sigma_{rr} + p_0) = -2(\sigma_{\theta\theta} + p_0),$$

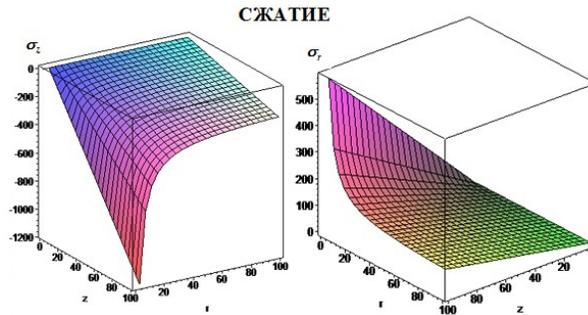


Рис. 3

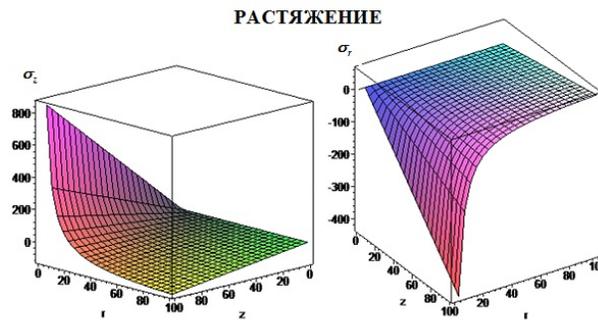


Рис. 4

что соответствует классической технической гипотезе распределения напряжения в грунтах [10]. При принятых кинематических условиях микроструктура не влияет на напряженное состояние.

Рассмотрим условие пластического деформирования материала (11), получим с учетом (13)-(15):

$$\Phi = \left(\frac{Az}{r} + \gamma z - 2p_0 \right)^2 + 2 \left(\frac{Az}{r} + \gamma z + p_0 \right)^2 - 18\beta p_0^2 + 12\alpha Y p_0 - 2Y^2 = 0,$$

где

$$A = \frac{3fp_0}{\sqrt{2}}.$$

Решая, получим уравнение для оценки зоны пластического деформирования материала

$$z^2 \left(\frac{A}{r} + \gamma \right)^2 = B^2$$

или

$$z = \pm \frac{Br}{A + \gamma r},$$

где

$$B^2 = 6p_0^2(\alpha^2 - f^2) - 4\alpha Y p_0 + \frac{2}{3}Y^2 \geq 0.$$

Пусть $k = \frac{p_0}{Y}$, тогда

$$3k^2(\alpha^2 - f^2) - 2\alpha k + \frac{1}{3} \geq 0.$$

Таким образом,

$$k_{1,2} = \frac{\alpha \pm f}{3(\alpha^2 - f^2)}.$$

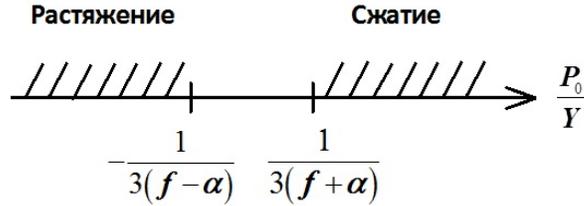


Рис. 5

На рисунке 5 представлена зона пластического деформирования материала в зависимости от начального давления. Если $\frac{p_0}{Y} > \frac{1}{3(f+\alpha)}$, происходит сжатие материала. Если $\frac{p_0}{Y} < -\frac{1}{3(f-\alpha)}$, то – растяжение материала.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Eringen A. C. Theory of micropolar fluid // J. Math. Mech. 1966. Vol.16, № 1. P. 1–16.
- [2] Быкова М. И., Вервейко Н. Д., Сумец П. П., Шашкина С. А. Течение и деформирование материалов однородной микроструктуры. Воронеж, 2010. 192 с.
- [3] Фролов А. Л., Фролова О. А. Осесимметричное напряженное состояние связного сыпучего материала с учетом микроструктуры // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1 (15). С. 214–221.
- [4] Вервейко Н. Д., Фролова О. А. Влияние характерного размера представительного элемента сыпучей среды на осесимметричное напряженное состояние // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов междунар. конф. Воронеж, 2011. С. 106–109.
- [5] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
- [6] Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. М.: Наука, 1990. 272 с.
- [7] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [8] Вервейко Н. Д., Фролов А. Л. Кинематика предельного осесимметричного состояния сыпучих материалов со сцеплением // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: сборник статей к 75-летию Е. И. Шемякина. 2006. С. 107–114.
- [9] Фролов А. Л. Осесимметричное деформирование микрополярных связных сыпучих материалов // Материалы школы семинара посвященного 70-летию профессора Д. Д. Ивлева. Воронеж, 2000. Ч. 2. С. 474–480.
- [10] Вялов С. С. Реологические основы механики грунтов. М.: Высшая школа, 1978. 447 с.

O. A. Frolova

**THE INFLUENCE OF THE MICROSTRUCTURE'S CHARACTERISTIC
DIMENSION OF A LOOSE MATERIAL ON A ONE-DIMENSIONAL LIMITING
STRESS STATE OF A HALF-SPACE**

Voronezh State University, Voronezh

Abstract. The one-dimensional limiting stress state of thin vertical cylindrical layer filled with a compressible loose material under vertical load is considered. The expressions for the components of the stress tensor are obtained. It follows that there is a linear distribution of vertical stresses due to its own weight. It is shown that the microstructure has no effect on the stress state under the assumed kinematic conditions. The plastic deformation area of the material is estimated according to the internal friction and rolling friction in a representative element.

Keywords: limit stress state, soils, loose materials, axial-symmetric flow, microstructure of material.

REFERENCES

- [1] Eringen A. C. Theory of micropolar fluid // J. Math. Mech. 1966. № 1. Vol. 16. P. 1–16.
- [2] Bikova M. I., Vervevko N. D., Sumets P. P., Shashkin S. A. The flow and deformation of materials homogeneous microstructure. Voronezh, 2010. 192 p. (in Russian).
- [3] Frolov A. L., Frolova O. A. Axisymmetric stress state cohesive granular material, taking into account the microstructure // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2013. № 1 (15). P. 214–221. (in Russian).
- [4] Vervevko N. D., Frolova O. A. Influence of the characteristic size of the representative element of granular material in the axially symmetric stress state // Recent developments in applied mathematics, computer science and mechanics: a collection of the works of the international conference. Voronezh, 2011. P. 106–109. (in Russian).
- [5] Ivlev D. D. The theory of ideal plasticity. M.: Nauka, 1966. 232 p. (in Russian).
- [6] Sokolovsky V. V. Static granular medium. M.: Nauka, 1990. 272 p. (in Russian).
- [7] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. The theory of plasticity. Vladivostok: Dal'nauka, 1998. 528 p. (in Russian).
- [8] Vervevko N. D., Frolov A. L. Kinematics limit axisymmetric state of bulk materials with a clutch // Problems of Deformable solids and rocks: a collection of articles on the 75th anniversary of E. I. Shemyakin. 2006. P. 107–114. (in Russian).
- [9] Frolov A. L. Axisymmetric deformation micropolar cohesive bulk materials // Materials school seminar dedicated to the 70th anniversary of Professor D. Ivlev. Voronezh, 2000. Part 2. P. 474–480. (in Russian).
- [10] Vyalov S. S. Rheological Principles of Mechanics soil. M.: Graduate School, 1978. 447 p. (in Russian).

Frolova Oksana Alexandrovna

e-mail: OksanaFrolA@yandex.ru, Postgraduate student, Department of mechanics and computer simulation, Voronezh State University, Voronezh.

Ю. Н. Радаев, В. А. Ковалев

НЕЗАТУХАЮЩИЕ ТЕПЛОВЫЕ ВОЛНЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва

Аннотация. В статье рассматриваются различные подходы к моделированию транспорта тепла через термоупругие среды: классическая теория связанной термоупругости Фурье—Био (СТЕ), теория Лорда—Шульмана (LS), теория Грина—Линдсей (GL) и обобщенная теория связанной термоупругости Грина—Нахди (GN). Выполнен их сравнительный анализ в плане аналитических возможностей описания теплопроводности как волнового процесса. С помощью линейных связанных уравнений теории термоупругости GN исследуются задачи о распространении связанных гармонических термоупругих волн заданного азимута в длинных цилиндрических волноводах.

Ключевые слова: термомеханика, термоупругость, GN, волновод, волновое число, азимутальный порядок.

УДК: 539.374

1. Классическая теория термоупругости (СТЕ, conventional thermoelasticity) основывается на законе теплопроводности Фурье, содержание которого, как хорошо известно, сводится к следующему: как только в заданном месте пространства возникает градиент температуры $\nabla\theta$, мгновенно (т.е. без всякой задержки по времени) устанавливается противоположно направленный поток тепла. В линейном приближении закон теплопроводности выражается следующим определяющим уравнением:

$$\mathbf{h} = -\Lambda_* \nabla\theta,$$

где \mathbf{h} — вектор потока тепла, Λ_* — коэффициент теплопроводности, θ — температура, ∇ — векторный оператор Гамильтона.

Таким образом, закон теплопроводности Фурье устанавливает коллинеарность вектора потока тепла и пространственного антиградиента температуры. Известно, что

© Радаев Ю. Н., Ковалев В. А., 2015

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: radaev@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Ковалев Владимир Александрович

e-mail: vlad_koval@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00139).

соответствующее закону Фурье уравнение теплопроводности относится к параболическому аналитическому типу; уравнения такого типа допускают бесконечные скорости распространения возмущений, а в том случае, когда решение имеет „волновой“ характер, тепловые волны будут иметь затухающие амплитуды. Совершенно ясно, что возможность распространения теплового сигнала с бесконечно большой скоростью явно не соответствует реальным физическим наблюдениям и нарушает принцип причинности. Парадокс бесконечной скорости распространения температурных возмущений впервые обсуждался Максвеллом в 1867 г. [1]. В 1956 г. Био [2] впервые методами термодинамики необратимых процессов корректно построил теорию связанной термоупругости. Связанные соотношения этой теории, классифицируемые в настоящее время как СТЕ, включают векторное уравнение движения, относящееся к гиперболическому типу, и параболическое уравнение теплопроводности. Очевидно, что теория Био предсказывает конечную скорость распространения упругой волны и бесконечную — для теплового импульса.

Дифференциальные уравнения СТЕ для связанных (сопряженных) перемещений и температуры в линейном приближении состоят из одного векторного и сопряженных ему скалярных связанных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha \nabla \theta - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \Lambda_* \Delta \theta - \kappa \dot{\theta} - \alpha \theta_0 \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

В этих классических уравнениях \mathbf{u} — вектор перемещения; λ, μ — упругие постоянные Ламе (для изотермической деформации); α — термомеханическая постоянная ($\alpha = 1/3(3\lambda + 2\mu)\beta^*$); β^* — коэффициент объемного теплового расширения; θ — абсолютная температура, точнее, ее превышение (инкремент) над отсчетной (референциальной) температурой θ_0 ; θ_0 — отсчетная (равновесная) температура (при температуре, равной θ_0 , отсутствуют деформации и напряжения); κ — теплоемкость (на единицу объема) при нулевой постоянной деформации; $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ — трехмерный оператор Лапласа.

Связанность уравнений СТЕ-теории обуславливается взаимным влиянием нагрева (охлаждения) и объемной деформации тела, проявляется через определяющую постоянную α и является следствием основных принципов термодинамики.

Второе из уравнений системы (1), сформулированное для недеформируемого проводника тепла, представляет собой одно из наиболее важных линейных параболических дифференциальных уравнений математической физики — уравнение диффузии:

$$\Delta \theta - \frac{\kappa}{\Lambda_*} \dot{\theta} = 0. \quad (2)$$

2. В последние несколько десятков лет было предложено достаточно много различных обобщений теории связанной термоупругости СТЕ Фурье—Био с тем, чтобы устранить парадокс бесконечной скорости распространения тепла и допустить теоретическую возможность волнового характера транспорта тепла в форме незатухающих волн (undamped heat waves). Последнее из указанных явлений называется „вторым звуком“. Обзор работ по проблеме „второго звука“, включая весьма интересный исторический аспект, дан в статье [3] и в добавлении к ней [4].

Эксперименты, проведенные в разные годы разными исследователями, подтверждают вывод о том, что тепло при определенных условиях может распространяться как незатухающая волна „второго звука“. Первоначально (1946 г.) термические волны „второго звука“ были экспериментально обнаружены в жидком гелии, а позднее

(1966 г.) — в твердом гелии. Феномен „второго звука“ наблюдается лишь при весьма низких температурах и только в кристаллах высокой чистоты.

Рассмотрим некоторые из наиболее часто встречающихся в прикладных задачах термомеханики обобщениях основополагающих уравнений СТЕ (1). Одно из них было дано Лордом и Шульманом (LS-theory) [5]. Указанными авторами было получено гиперболическое уравнение распространения тепла, основанное на новом законе теплопроводности, заменившем классический закон теплопроводности Фурье. В законе LS-теплопроводности введена дополнительная определяющая постоянная — время релаксации τ_{rel} в соответствии с уравнением Каттанео [6] (независимо от Каттанео аналогичное уравнение было получено в работе [7]):

$$\mathbf{h} + \tau_{\text{rel}} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = -\Lambda_* \nabla \theta. \quad (3)$$

Время релаксации представляет собой (всегда весьма малое) время запаздывания после возникновения температурного градиента, необходимое для того, чтобы в элементе тела сформировался установившийся поток тепла.

Приведенное выше уравнение (3) часто выводится на основании принципа „запаздывания“ и соответствующего уравнения (the lag equation):

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t + \tau_{\text{rel}}) = -\Lambda_* \nabla \theta(\mathbf{x}, t), \quad (4)$$

которое формулируется для заданного места в пространстве \mathbf{x} и, как уже отмечалось, устанавливает, что поток тепла формируется с некоторым запаздыванием по отношению к пространственному градиенту температуры. Принимая во внимание, что

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t + \tau_{\text{rel}}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) + \tau_{\text{rel}} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \dots,$$

где частное дифференцирование по времени выполняется при фиксированном положении \mathbf{x} , и ограничиваясь лишь первыми двумя слагаемыми в приведенном разложении, приходим к уравнению (3).

Дифференциальные уравнения LS-теории для связанных перемещений и температуры в линейном приближении состоят из одного векторного (совпадающего с соответствующим уравнением СТЕ-теории) и сопряженных ему скалярных гиперболических связанных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha \nabla \theta - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \Lambda_* \Delta \theta - \kappa (\dot{\theta} + \tau_{\text{rel}} \ddot{\theta}) - \alpha \theta_0 (\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} + \tau_{\text{rel}} \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}}) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Второе из этих уравнений, сформулированное для недеформируемого тела, оказывается одним из важнейших гиперболических дифференциальных уравнений математической физики — телеграфным уравнением (telegraphist's equation):

$$\Delta \theta - \frac{\kappa \tau_{\text{rel}}}{\Lambda_*} \ddot{\theta} - \frac{\kappa}{\Lambda_*} \dot{\theta} = 0. \quad (6)$$

Телеграфное уравнение (6) относится к гиперболическому типу и уже в состоянии описывать процессы распространения волн с конечной скоростью, хотя волны, определяемые телеграфным уравнением, имеют затухающие амплитуды. Тем самым в LS-теории как уравнение движения, так и уравнение транспорта тепла принадлежат к гиперболическому аналитическому типу, что и обеспечивает конечную скорость распространения как тепловых, так и упругих волн деформации.

Еще одним достаточно хорошо известным обобщением связанной теории термоупругости Био, допускающим „второй звук“, является теория, предложенная Грином и Линдсей [8]. GL-теория характеризуется тем, что вектор потока тепла в термоупругом теле \mathbf{h} зависит от скорости изменения абсолютной температуры θ и градиента температуры; закон GL-теплопроводности имеет форму

$$\mathbf{h} = -\mathbf{b}\dot{\theta} - \mathbf{\Lambda}_* \cdot \nabla\theta,$$

где \mathbf{b} — антисимметричный вектор, $\mathbf{\Lambda}_*$ — тензор теплопроводности. Тензор второго ранга $\mathbf{\Lambda}_*$ в GL-теории симметричен: $\mathbf{\Lambda}_* = \mathbf{\Lambda}_*^T$. Заметим, что в случае центральной материальной симметрии выполняется равенство $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Уравнение транспорта тепла оказывается гиперболическим.

Интересно отметить, что GL-теория в случае $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ допускает „второй звук“, не нарушая при этом классического закона теплопроводности Фурье.

Определяющее уравнение GL-теории связанной термоупругости имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon} - \alpha \left(1 + \tau^* \frac{\partial}{\partial t} \right) (\theta - \theta_0)\mathbf{I}, \quad (7)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор малых деформаций, \mathbf{I} — единичный тензор.

Замкнутая система дифференциальных уравнений GL-теории состоит из уравнения движения

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha \left(1 + \tau^* \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla\theta - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (8)$$

и уравнения распространения тепла

$$\mathbf{\Lambda}_*\Delta\theta - \alpha\theta_0\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} - \kappa \left(1 + \tau_* \frac{\partial}{\partial t} \right) \dot{\theta} = 0. \quad (9)$$

Определяющие постоянные GL-теории τ^* и τ_* , имеющие смысл времен релаксации, подчиняются неравенствам $\tau^* \geq \tau_* \geq 0$, гарантирующим неотрицательность внутреннего производства энтропии при распространении волн деформаций и температуры. Если $\tau^* = \tau_* = 0$, то GL-теория сводится к СТЕ.

Заметим, что теории LS и GL принципиально отличаются друг от друга и не получаются одна из другой как частные случаи.

Уравнение (9), сформулированное для недеформируемого теплопроводящего тела, представляет собой телеграфное уравнение вида

$$\Delta\theta - \frac{\kappa\tau_*}{\mathbf{\Lambda}_*}\ddot{\theta} - \frac{\kappa}{\mathbf{\Lambda}_*}\dot{\theta} = 0. \quad (10)$$

3. Четверть века назад Грином и Нахди была развита теория обобщенной термоупругости (GN-theory) [9], [10]. Предложенная теория сочетает в себе как свойства классической термоупругости СТЕ, выстроенной согласно закону теплопроводности Фурье, так и свойства недиссипативной термоупругости, предполагающей отсутствие производства энтропии и волновой характер распространения теплового сигнала. GN-теория была сформулирована в трех различных термодинамически корректных вариантах: GNI, GNII и GNIII. В линейном приближении первый вариант (GNI) полностью эквивалентен закону теплопроводности Фурье и параболическому уравнению теплопроводности; второй вариант (GNII) — предлагает считать распространение тепла как волновой недиссипативный процесс, не сопровождающийся внутренним производством энтропии, и приводит к гиперболическому уравнению транспорта тепла;

третий (GNIII) — наиболее общий из рассматриваемых — включает GNI и GNII в качестве предельных случаев. Именно по этой причине GN-теория в состоянии моделировать значительно более широкий круг явлений, связанных с переносом тепла, по сравнению с теорией Фурье.

Отличительной чертой теории GNII гиперболической термоупругости является то, что она полностью согласуется с основными принципами термодинамики (и в этом смысле она термодинамически корректна) и предсказывает нулевое внутреннее производство энтропии, т.е. отсутствие рассеяния энергии, при распространении термической волны „второго звука“. Отсутствие диссипации энергии в GNII-термоупругом теле позволяет дать вариационную (а следовательно, и полевую) формулировку теории с целью дальнейшего поиска вариационных симметрий связанной системы дифференциальных уравнений в частных производных термоупругости.

Приведем линейные связанные уравнения движения и теплопроводности термоупругости третьего типа (GNIII):

$$\begin{cases} \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha \nabla \theta - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \Lambda \Delta \theta + \Lambda_* \Delta \dot{\theta} - \kappa \ddot{\theta} - \alpha \theta_0 \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} = 0, \end{cases} \quad (11)$$

где определяющая постоянная Λ — характерная скорость теплопроводности.

Если теплопроводящая среда недеформируема и определяющий параметр $\Lambda_* \rightarrow 0$, то температурное поле согласно уравнениям GN-теории третьего типа удовлетворяет волновому уравнению:

$$\Delta \theta - \frac{\kappa}{\Lambda} \ddot{\theta} = 0. \quad (12)$$

С помощью линейных связанных уравнений теории термоупругости GN исследуются задачи о распространении связанных гармонических термоупругих волн заданного азимута в длинных цилиндрических волноводах. Боковая стенка волновода теплоизолирована, или через нее допускается теплообмен. Исследование выполняется для всех трех вариантов теории GN. Часть результатов, полученных в этом направлении, включена в монографию [11]. Показано, что термоупругие волны различных азимутов распространяются в волноводе независимо друг от друга. При этом численно с помощью системы компьютерной алгебры Mathematica находятся волновые числа (постоянные распространения), соответствующие затухающим и незатухающим (в случае теории GNII) связанным термоупругим волнам. В последнем случае волны тепла распространяются без энергетических потерь на неограниченные расстояния вдоль волновода. Определены формы радиальных и осевых перемещений, температуры и температурного смещения, деформаций и напряжений. Исследуется также волновая картина в эллиптическом термоупругом волноводе. Основой исследования являются эффективные алгоритмы вычисления собственных чисел угловых функций Матье и элементарных волновых функций эллиптического цилиндра, которые возникают при разделении переменных в гиперболических уравнениях для волновых потенциалов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Maxwell J. C. On the Dynamical Theory of Gases // Phil. Trans. Royal Soc. Lond. 1867. Vol. 157. P. 49–88.
 [2] Biot M. A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics // J. Appl. Phys. 1956. Vol. 27(3). P. 240–253. [3] Joseph D. D., Preziosi L. Heat waves // Rev. Modern Physics.

1989. Vol. 61. № 1. P. 41–73. [4] Joseph D. D., Preziosi L. Addendum to the paper „Heat waves“ [Rev. Modern Physics. **61**. 41 (1989)] // Rev. Modern Physics. 1990. Vol. 62. № 2. P. 375–391. [5] Lord H., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity // J. Mech. Phys. Solid. 1967. Vol. 15. P. 299–309. [6] Cattaneo C. Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée // Journal of Comptes-Rendus Hebdomadaires des Seances de l'Académie des Sciences. 1958. Vol. 247. P. 431–433 [7] Vernotte P. Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur // Journal of Comptes-Rendus Hebdomadaires des Seances de l'Académie des Sciences. 1958. Vol. 246. P. 3154–3155. [8] Green A. E., Lindsay K. A. Thermoelasticity // J. Elasticity. 1972. Vol. 2. P. 1–7. [9] Green A. E., Naghdi P. M. On undamped heat waves in an elastic solid // J. Thermal Stresses. 1992. Vol. 15. P. 253–264. [10] Green A. E., Naghdi P. M. Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity. 1993. Vol. 31. P. 189–208. [11] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.

Y. N. Radayev¹, V. A. Kovalev²

UNDAMPED THERMAL WAVES IN CILINDRICAL WAVEGUIDE

¹*Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow*²*Moscow City University of Management of Moscow Government, Moscow*

Abstract. Different approaches to modelling heat transport via thermoelastic media are considered. The most remarkable of them are the Fourier–Bio coupled thermoelasticity (CTE), the Lord–Shulman theory (LS), the Green–Lindsay thermoelasticity and the generalized Green–Naghdi thermoelasticity (GN). A comparative study of these approaches is given in order to understand their analytical power to formulate the heat transport problem as a wave problem for hyperbolic partial differential equations. In the frameworks of GN-theory solutions of problems of propagation of coupled thermoelastic waves of a given azimuthal number via long waveguides are obtained.

Keywords: thermomechanics, thermoelasticity, GN, waveguide, wavenumber, azimuthal number.

REFERENCES

- [1] Maxwell J. C. On the Dynamical Theory of Gases // *Phil. Trans. Royal Soc. Lond.* 1867. Vol. 157. P. 49–88.
- [2] Biot M. A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics // *J. Appl. Phys.* 1956. Vol. 27(3). P. 240–253.
- [3] Joseph D. D., Preziosi L. Heat waves // *Rev. Modern Physics.* 1989. Vol. 61. № 1. P. 41–73.
- [4] Joseph D. D., Preziosi L. Addendum to the paper „Heat waves“ [*Rev. Modern Physics.* 61. 41 (1989)] // *Rev. Modern Physics.* 1990. Vol. 62. № 2. P. 375–391.
- [5] Lord H., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity // *J. Mech. Phys. Solid.* 1967. Vol. 15. P. 299–309.
- [6] Cattaneo C. Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée // *Journal of Comptes-Rendus Hebdomadaires des Seances de l'Académie des Sciences.* 1958. Vol. 247. P. 431–433
- [7] Vernotte P. Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur // *Journal of Comptes-Rendus Hebdomadaires des Seances de l'Académie des Sciences.* 1958. Vol. 246. P. 3154–3155.
- [8] Green A. E., Lindsay K. A. Thermoelasticity // *J. Elasticity.* 1972. Vol. 2. P. 1–7.
- [9] Green A. E., Naghdi P. M. On undamped heat waves in an elastic solid // *J. Thermal Stresses.* 1992. Vol. 15. P. 253–264.
- [10] Green A. E., Naghdi P. M. Thermoelasticity without energy dissipation // *J. Elasticity.* 1993. Vol. 31. P. 189–208.

Radayev Yuri Nikolayevich

e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, Leading Researcher, DSc., Prof., Institute for Problems in Mechanics of RAS, Russia, Moscow.

Kovalev Vladimir Alexandrovich

e-mail: vlad_koval@mail.ru, DSc. (Phys.&Math.), Prof., Moscow City University of Management of Moscow Government, Moscow.

[11] Kovalev V. A., Radayev Y. N. Wave problems of the theory and field thermomechanics. Saratov: Publishing house of Saratov University, 2010. 328 p. (in Russian).

Т. Д. Семькина¹, Е. А. Листров²

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРВОНАЧАЛЬНОЙ ФОРМЫ ОТВЕРСТИЯ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ ЛИСТЕ, ПЕРЕХОДЯЩЕЙ В ЗАДАННУЮ ПРИ ДВУХОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

¹Воронежский государственный университет, г. Воронеж

²Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I,
г. Воронеж

Аннотация. В работе рассматривается проектирование отверстия в растягиваемой плоскости, переходящего в отверстие заданной формы. Первоначально отверстие описывается тригонометрическим рядом, на коэффициенты которого накладывается условие перехода в процессе деформирования в отверстие заданной формы при двухосном растяжении плоскости. Решение проводится методом малого параметра.

Ключевые слова: трансверсальная изотропия, отверстие произвольной формы, метод малого параметра.

УДК: 539.374

Определим исходную конфигурацию отверстия в листе из трансверсально-изотропного материала, переходящую при двухосном растяжении усилиями P_1 и P_2 в заданную форму.

Границу отверстия, близкого к круговому, зададим в виде

$$\rho = a + \delta \bar{d} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta. \quad (1)$$

При этом граничные условия для первого приближения при использовании метода малого параметра [1] примут вид

$$\sigma'_{\rho} + \frac{\bar{d}}{a} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta = 0, \quad \sigma'_{\rho\theta} + \frac{\bar{d}n}{a} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta = 0, \quad \text{при } \rho = a. \quad (2)$$

© Семькина Т. Д., Листров Е. А., 2015

Семькина Татьяна Дмитриевна

e-mail: tdsem@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

Листров Евгений Адольфович

e-mail: ListrovEA@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и теоретической механики, Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I, г. Воронеж.

Поступила 25.08.2015

Граничные условия на бесконечности запишем в виде

$$\sigma_\rho^\infty = q - \delta \bar{d} \cos 2\theta, \quad \sigma_\theta^\infty = q + \delta \bar{d} \cos 2\theta, \quad \tau_{\rho\theta}^\infty = \delta \bar{d} \sin 2\theta, \quad (3)$$

здесь напряжения отнесены к пределу текучести $2k$, $\delta \bar{d} = \frac{P_1 - P_2}{2k}$, $q = \frac{P_1 + P_2}{2k}$.

С учетом изменения границы и неравномерного нагружения на бесконечности выпишем напряжения в пластической области [2]:

$$\sigma_\rho'^p = \bar{d} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{\alpha-1}{2}} \frac{a_n}{a} \left[\frac{\rho - \alpha + n}{2s_n} \sin\left(s_n \ln \frac{\rho}{a}\right) - \cos\left(s_n \ln \frac{\rho}{a}\right) \right] \cos n\theta \quad (4)$$

$$\sigma_\theta'^p = \alpha \sigma_\rho'^p,$$

где $\alpha = 1 - \sqrt{\frac{r+1}{2}}$, $s_n^2 = \frac{4(n^2-1)}{\alpha} - \left(\frac{\alpha+1}{2\alpha}\right)^2$.

Таким образом, в пластической зоне на напряженное состояние оказывает влияние только изменение формы отверстия.

Переходя к определению перемещений в пластической зоне, необходимо учесть ассоциированный закон пластического течения:

$$\alpha \varepsilon_\rho'^p + \varepsilon_\theta'^p = 0, \quad \varepsilon_{\rho\theta}'^p = 0. \quad (5)$$

Перемещения с учетом влияния двух факторов, обусловленными параметрами $\delta \bar{d}$ и \bar{d} , будем записывать в виде

$$u = u^0 + \delta(\bar{d}u + \bar{d}\bar{u}), \quad v = v^0 + \delta(\bar{d}v + \bar{d}\bar{v}). \quad (6)$$

Первое приближение деформаций в пластической области также будет определяться в виде суммы двух слагаемых:

$$\varepsilon_{ij}'^p = \bar{d}\bar{\varepsilon}_{ij}'^p + \bar{d}\bar{\varepsilon}_{ij}'^p. \quad (7)$$

Напряжения в пластической области таковы:

$$\sigma_\rho^p = \sigma_\rho^{0p} + \delta \bar{d} \bar{\sigma}_\rho'^p, \quad \sigma_\theta^p = \sigma_\theta^{0p} + \delta \bar{d} \bar{\sigma}_\theta'^p, \quad \sigma_{\rho\theta}^p = \delta \bar{d} \bar{\sigma}_{\rho\theta}'^p + \delta \bar{d} \bar{\sigma}_{\rho\theta}'^p. \quad (8)$$

Переходя к определению перемещений в пластической зоне вблизи отверстия, необходимо учитывать ассоциированный закон пластического течения:

$$\alpha \varepsilon_\rho'^p + \varepsilon_\theta'^p = 0, \quad \varepsilon_{\rho\theta}'^p = 0. \quad (9)$$

Учитывая, что $\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^e$, получим:

$$\alpha \bar{\varepsilon}_\rho' + \bar{\varepsilon}_\theta'^p = \alpha \bar{\varepsilon}_\rho' + \bar{\varepsilon}_\theta' - \alpha \bar{\varepsilon}_\rho^e - \bar{\varepsilon}_\theta^e, \quad (10)$$

где $\bar{\varepsilon}_{ij}^e$ определяется по закону Гука через $\bar{\sigma}_{ij}'^p$.

Для перемещений получаем [2] систему уравнений

$$\alpha \frac{\partial \bar{u}'^p}{\partial \rho} + \frac{\bar{u}'^p}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{v}'^p}{\partial \rho} = \frac{2\alpha - v'(1 + \alpha^2)}{E'} \bar{\sigma}_\rho'^p, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \bar{v}'^p}{\partial \rho} - \frac{\bar{v}'^p}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{u}'^p}{\partial \rho} = \frac{1 + v'}{E'} \bar{\sigma}_{\rho\theta}'^p.$$

Решение системы (11) ищем в виде:

$$u'^p = \sum_{i=1}^{\infty} R_{1n}(\rho) \cos n\theta, \quad v'^p = \sum_{n=1}^{\infty} R_{2n}(\rho) \sin n\theta. \quad (12)$$

После подстановки (12) в (11) общее решение системы будет следующим:

$$R_{1n}^{\text{общ}} = \frac{1}{n} \rho^{-\frac{\alpha+1}{2\alpha}} \left[\left(-C_{1n} \frac{\alpha+1}{2\alpha} + C_{2n} s_n \right) \cos(s_n \ln \rho) + \right. \\ \left. + \left(-C_{2n} \frac{\alpha+1}{2\alpha} + C_{1n} s_n \right) \sin(s_n \ln \rho) \right]. \quad (13)$$

Частное решение системы (11) представим в виде

$$R_{1n}^{\text{част}} = \frac{a_n}{a} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\frac{\alpha-3}{2}} \left(A_{1n} \cos \left(s_n \ln \frac{\rho}{a} \right) + B_{1n} \sin \left(s_n \ln \frac{\rho}{a} \right) \right), \\ R_{2n}^{\text{част}} = \frac{a_n}{a} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\frac{\alpha-3}{2}} \left(A_{2n} \cos \left(s_n \ln \frac{\rho}{a} \right) - B_{2n} \sin \left(s_n \ln \frac{\rho}{a} \right) \right), \quad (14)$$

где $A_{1n} = \frac{a_{1n}\varphi + b_{1n}\psi}{e_n}$; $A_{2n} = \frac{a_{2n}\varphi + b_{2n}\psi}{e_n}$;

$$B_{1n} = -\frac{b_{1n}\varphi + a_{1n}\psi}{e_n}; \quad B_{2n} = -\frac{b_{2n}\varphi + a_{2n}\psi}{e_n};$$

$$a_{1n} = c(p-1) - d_n(\alpha-p) + (c+d_n)(\alpha-p+n);$$

$$a_{2n} = -d_n((\alpha-p)(1+\alpha p) + \alpha s_{1n}^2) - nc + 2bp(\alpha-p+n);$$

$$b_{1n} = -(c+d_n) - (c(p-1) + d_n(\alpha-p))(\alpha-p+n);$$

$$b_{2n} = -2cp - (c(\alpha-p)(1+\alpha p) + \alpha s_{1n}^2 + na_n)(\alpha-p+n).$$

Окончательно, перемещения \bar{u}'^p и \bar{v}'^p определяются следующим образом:

$$\bar{u}'^p = \left[\left(-C_1 - \frac{1}{\alpha} C_2 \rho^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right) + \frac{c(\alpha^2 - \alpha + 1) + d_1}{E'(\alpha-1)^3} a_1 \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\alpha-1} \right] \cos \theta + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} (R_{1n}^{\text{общ}} + R_{1n}^{\text{част}}) \cos n\theta; \\ \bar{v}'^p = \left[\left(C_1 + C_2 \rho^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right) + \frac{d_1(\alpha^2 - \alpha + 1) + c_1}{E'(\alpha-1)^3} a_1 \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\alpha-1} \right] \sin \theta + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} (R_{2n}^{\text{общ}} + R_{2n}^{\text{част}}) \sin n\theta. \quad (15)$$

Перейдем к определению перемещений $\bar{u}_i'^p$. Так как напряжения $\bar{\sigma}_{ij}'^p$ равны нулю, для перемещений $\bar{u}_i'^p$ получаем однородную систему уравнений

$$\alpha \frac{\partial \bar{u}'^p}{\partial p} + \frac{\bar{u}'^p}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{v}'^p}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial \bar{v}'^p}{\partial p} - \frac{\bar{v}'^p}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{u}'^p}{\partial \theta} = 0. \quad (16)$$

Так как на бесконечности граничные условия имеют вид (2) перемещения \bar{u}'^e в упругой области, будут пропорциональны $\cos 2\theta$. Исходя из условий сопряжения, перемещения будем искать в виде

$$\bar{u}'^p = R_1(\rho) \cos 2\theta, \quad \bar{v}'^p = R_2(\rho) \sin 2\theta. \quad (17)$$

$$R_1 = \rho^{-\frac{\alpha+1}{2\alpha}} \left[\left(-C_1 \frac{\alpha+1}{2\alpha} + C_2 s_1 \right) \cos(s_1 \ln \rho) + \left(-C_2 \frac{\alpha+1}{2\alpha} + C_1 s_1 \right) \sin(s_1 \ln \rho) \right],$$

$$R_2 = \rho^{-\frac{\alpha+1}{2\alpha}} (C_1 \cos(s_1 \ln \rho) + C_2 \sin(s_1 \ln \rho)).$$

Постоянные интегрирования определим из условия сопряжений перемещений на упруго-пластической границе. Решение в упругой зоне при двухосном растяжении получено в работе [1]. Таким образом на упруго-пластической границе, условия сопряжения имеют вид

$$\bar{u}'^p = \frac{2}{E} \left(\frac{1}{a} - 4 \right) \cos 2\theta, \quad \bar{v}'^p = \frac{4}{E} \sin 2\theta \quad \text{при } \rho = 1. \quad (18)$$

Подставляя (17) в (18), получим:

$$C_1 = \frac{4}{E}, \quad C_2 = \frac{2}{E s_1} \left(\frac{1}{a} + \frac{1 - 3\alpha}{2\alpha} \right). \quad (19)$$

Определим форму отверстия, полученную при деформировании:

$$\bar{\rho}_k = \bar{\rho} + \bar{u}_\rho + \bar{u}_\theta. \quad (20)$$

С учетом разложения в ряд по малому параметру, учитывая члены первого порядка относительно параметра, получим:

$$\bar{\rho}_k^2 = \bar{\rho} \cdot \bar{\rho} + 2\bar{\rho} \cdot \bar{u}_\rho + 2\bar{\rho} \cdot \bar{u}_\theta + \bar{u}_\rho^2 + 2\bar{u}_\rho \cdot \bar{u}_\theta + \bar{u}_\theta^2. \quad (21)$$

Отметим, что \bar{u}_ρ и \bar{u}_θ , а так же $\bar{\rho}$ и \bar{u}_θ , ортогональны, их скалярные произведения равны 0, после чего запишем (21) в виде

$$\bar{\rho}_k^2 = (\rho_0 + u_\rho^0)^2 \left[1 + 2\delta \frac{\rho_0 u'_\rho + u_\rho^0 \rho_1 + u_\rho^0 u'_\rho}{\rho_0 + u_\rho^0} \right].$$

После разложения в ряд Тейлора с сохранением членов первого порядка относительно малого параметра получим

$$\rho_k = (\rho_0 + u_\rho^0)(1 + A + 2\delta A^2), \quad (22)$$

где $A = \frac{\rho_0 u'_\rho + u_\rho^0 \rho_1 + u_\rho^0 u'_\rho}{\rho_0 + u_\rho^0}$.

Учитывая, что

$$\rho_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{1n} \cos n\theta, \quad u'_\rho = \sum_{n=1}^{\infty} u'_{\rho n} \cos n\theta,$$

приравнивая при независимых тригонометрических функциях, получим

$$(\rho_0 + u_\rho^0)u'_{\rho n} + u_\rho^0 \rho_{1n} = 0. \quad (23)$$

Заключение. Из соотношения (23), задавая параметры требуемого после деформирования отверстия, можно определить параметры исходного отверстия. С другой стороны, по заданным в начале нагружения параметрам исходного отверстия определяется, в какую форму оно перейдет.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д. Д. Механика пластических сред: в 2 т. Т. 2. М.: Физматлит, 2001. 448 с.
 [2] Вульман С. А., Семькина Т. Д. Упругопластическое напряженно-деформированное состояние плоскости с круговым отверстием из листового материала // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2011. № 1 (9). С. 78–82.

T. D. Semykina¹, E. A. Listrov²

DETERMINATION OF THE ORIGINAL FORM HOLES IN TRANSVERSELY ISOTROPIC SHEET PASSING IN THE SET OF THE BIAXIAL STRETCHING

¹ *Voronezh State University, Voronezh*

² *Voronezh State Agrarian University named after Emperor Peter I, Voronezh*

Abstract. In this paper the design of the holes in the stretched plane rolling into the hole desired shape. Initially, the hole is described by a trigonometric series, which is imposed on the coefficients of the transition condition in the process of deformation of a predetermined shape in the hole with biaxial stretching plane. The solution is held by a small parameter.

Keywords: transversal isotropy, hole freeform, small parameter method.

REFERENCES

- [1] Ivlev D. D. Mechanics of plastic media : in 2 t. Vol. 2. M.: FIZMATLIT, 2001. 448 p. (in Russian).
- [2] Woolman S. A., Semykina T. D. Elastoplastic stress-strain state of the plane with a circular aperture of the sheet material // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2011. № 1 (9). P. 78–82. (in Russian).

Semykina Tatiana Dmitrievna

e-mail: tdsem@mail.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh.

Listrov Eugene Adol'fovich

e-mail: ListrovEA@yandex.ru, Cand. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Higher Mathematics and Theoretical Mechanics, Voronezh State Agrarian University named after Emperor Peter I., Voronezh.

Н. И. Петров

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ МАЛЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары

Аннотация. В работе рассматривается полиномиальное решение линеаризованных уравнений теории малых упругопластических деформаций, в случае плоской задачи в полярных координатах при степенном упрочнении.

Ключевые слова: напряжение, упругопластические деформации, линеаризация, степенное упрочнение, уравнения равновесия.

УДК: 539.375

Полиномиальные решения ряда задач в теории упругости и пластичности рассмотрены в работах [1]–[3]. В настоящей работе рассматриваются полиномиальные решения линеаризованных уравнений теории малых упругопластических деформаций в случае плоской задачи в полярных координатах.

Соотношения теории малых упругопластических деформаций в полярной системе координат имеет вид [4]

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} (e_r - e_\theta), \quad \tau_{r\theta} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_{r\theta}, \quad (1)$$

где согласно степенному упрочнению

$$\sigma_i = A e_i^k, \quad A, k - const, \quad (2)$$

σ_i , e_i – соответственно интенсивность напряжения и интенсивность деформаций, определяемые соотношениями

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2}, \quad e_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(e_r - e_\theta)^2 + 4e_{r\theta}^2}. \quad (3)$$

В силу (2) и условия несжимаемости, соотношения (1) и (3) примут вид

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{4}{3} A e_i^{k-1} e_r, \quad \tau_{r\theta} = \frac{2}{3} A e_i^{k-1} e_{r\theta}, \quad (4)$$

© Петров Н. И., 2015
Петров Николай Ильич
e-mail: anfiska@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары.

Поступила 08.06.2015

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2}, \quad e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{e_r^2 + e_{r\theta}^2} \quad (5)$$

Линеаризируем компоненты напряжений и перемещений по безразмерному малому параметру δ :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \delta\sigma_{ij}^*, \quad e_{ij} = e_{ij}^0 + \delta e_{ij}^*, \quad (6)$$

где индекс градус наверху приписан компонентам невозмущенного состояния, а индекс штрих – компонентам возмущения.

В невозмущенном состоянии перемещение вдоль оси θ $u_\theta^0 = 0$, а $u_r^0 = u_r^0(r)$. Тогда по формулам Коши получим

$$e_r^0 = \frac{\partial u_r^0}{\partial r}, \quad e_\theta^0 = \frac{u_r^0}{r}, \quad e_{r\theta}^0 = 0 \quad (7)$$

В силу (7) и условия несжимаемости находим

$$u_r^0 = \frac{C_1}{r}, \quad e_r^0 = -e_\theta^0 = -\frac{C_1}{r^2}, \quad C_1 > 0 \quad (8)$$

В силу (5)–(7) получаем

$$e_i^0 = \frac{2}{\sqrt{3}} |e_r^0|, \quad e_i^* = \frac{2}{\sqrt{3}} e_r^* \quad (9)$$

В силу (4)–(9) получаем

$$\tau_{r\theta}^0 = 0, \quad \sigma_i^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0)$$

$$\sigma_i^* = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_r^* - \sigma_\theta^*), \quad \tau_{r\theta}^* = 2Br^q e_{r\theta}^* \quad (10)$$

$$q = 2(1 - k), \quad B = \frac{A}{3} \left(\frac{2C_1}{\sqrt{3}} \right)^{k-1} \quad (11)$$

$$\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0 = -4BC_1 r^{-2k} \quad (12)$$

$$\sigma_r^* = \sigma^* + 2Bkr^q e_r^*, \quad \sigma_\theta^* = \sigma^* - 2Bkr^q e_r^* \quad (13)$$

Уравнения равновесия в нулевом состоянии примут вид

$$\frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} + \frac{\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0}{r} = 0 \quad (14)$$

Подставим (12) в уравнение (14) и найдем решение полученного дифференциального уравнения

$$\sigma_r^0 = -\frac{2BC_1}{k} r^{-2k} + C_2, \quad C_2 - const. \quad (15)$$

Из (15) и (12) находим

$$\sigma_\theta^0 = -\frac{2BC_1}{k} r^{-2k} (1 - 2k) + C_2 \quad (16)$$

Удовлетворим условию несжимаемости, положив

$$u_r^* = -\frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \theta}, \quad u_\theta^* = \frac{\partial \xi}{\partial r}. \quad (17)$$

Тогда будем иметь

$$e_r^* = \frac{\partial u_r^*}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \xi}{\partial r \partial \theta},$$

$$e_{r\theta}^* = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \frac{u_\theta^*}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^*}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} \right]. \quad (18)$$

Из (13), (18) и (10) получаем

$$\sigma_r^* = \sigma^* + B(2-q) \left[r^{q-2} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} - r^{q-1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta \partial r} \right], \quad (19)$$

$$\sigma_\theta^* = \sigma^* - B(2-q) \left[r^{q-2} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} - r^{q-1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta \partial r} \right], \quad (20)$$

$$\tau_{r\theta}^* = B \left[r^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} - r^{q-1} \frac{\partial \xi}{\partial r} - r^{q-2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} \right]. \quad (21)$$

Подставим соотношения (19)–(21) в уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \end{aligned}$$

получим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^*}{\partial r} + B \left[(2-q) q r^{q-3} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + (q^2 - 2q - 1) r^{q-2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial r \partial \theta} + (q-1) r^{q-1} \frac{\partial^3 \xi}{\partial r^2 \partial \theta} - r^{q-3} \frac{\partial^3 \xi}{\partial \theta^3} \right] &= 0, \\ \frac{\partial \sigma^*}{\partial \theta} + B \left[-(q+1) q r^{q-2} \frac{\partial^3 \xi}{\partial \theta^2 \partial r} + (q+1) r^{q-1} \frac{\partial \xi}{\partial r} + (q+1) r^q \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + r^{q+1} \frac{\partial^3 \xi}{\partial r^3} \right] &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

которая сводится к дифференциальному уравнению четвертого порядка в частных производных

$$\nabla_1 \xi + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \nabla_2 \xi + \frac{\partial^4 \xi}{\partial \theta^4} = 0, \quad (23)$$

где $\nabla_1 = r^4 \frac{\partial^4}{\partial r^4} + 2(q+1) r^3 \frac{\partial^3}{\partial r^3} + (q^2 - 1) r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - (q^2 - 1) r \frac{\partial}{\partial r}$,

$$\nabla_2 = 2(1-q) r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 4qr \frac{\partial}{\partial r} + q(q-2).$$

Решение уравнения (23) будем искать в виде разложений по четным и нечетным степеням z . Положим

$$\xi = \xi_1 + \xi_2,$$

где

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \sum_{i=0}^n R_{2(n-i)} \theta^{2(n-i)}, \\ \xi_2 &= \sum_{i=0}^{n-1} R_{2(n-i)-1} \theta^{2(n-i)-1}, \end{aligned}$$

тогда решение уравнения (23) сведется к решению двух независимых совокупностей дифференциальных уравнений второго порядка в полных производных

$$1) \nabla_1 R_{2n} = 0,$$

$$\nabla_1 R_{2(n-1)} + \alpha_{2n} \nabla_2 R_{2n} = 0,$$

$$\nabla_1 R_{2(n-i)} + \alpha_{2(n-i+1)} \nabla_2 R_{2(n-i+1)} + \beta_{2(n-i+2)} R_{2(n-i+2)} = 0, \quad i = \overline{2, n},$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_{2(n-i+1)} &= 2(n-i+1)(2n-2i+1), & i = \overline{1, n}; \\ \beta_{2(n-i+2)} &= 4(n-i+2)(2n-2i+3)(n-i+1)(2n-2i+1) & i = \overline{1, n}. \\ & 2\nabla_1 R_{2n-1} = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_1 R_{2(n-3)} + \alpha_{2n-1} \nabla_2 R_{2n-1} &= 0, \\ \nabla_1 R_{2(n-i)-1} + \alpha_{2(n-i+1)-1} \nabla_2 R_{2(n-i+1)-1} + \beta_{2(n-i+2)-1} R_{2(n-i+2)-1} &= 0, & i = \overline{2, n},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_{2(n-i+1)-1} &= 2(n-i)(2n-2i+1), & i = \overline{1, n}; \\ \beta_{2(n-i+2)-1} &= 4(2n-2i+3)(n-i+1)(2n-2i+1)(n-i), & i = \overline{1, n}.\end{aligned}$$

Для простоты возьмем $n = 4$. Тогда функция ξ примет вид

$$\xi = R_0 \theta^4 + R_0 \theta^3 + R_1 \theta^2 + R_1 \theta + R_2$$

и решение уравнения (23) сведется к решению следующих уравнений

$$\nabla_1 R_4 = 0, \quad \nabla_1 R_3 = 0, \quad (24)$$

$$\nabla_1 R_2 + 12\nabla_2 R_4 = 0, \quad \nabla_1 R_1 + 6\nabla_2 R_3 = 0, \quad (25)$$

$$\nabla_1 R_0 + 2\nabla_2 R_2 + 24R_4 = 0. \quad (26)$$

Для уравнений (24) решение имеет вид

$$R_4 = A_{10} r^2 + B_{10} r^{2-q} + C_{10} r^{-q} + D_{10}, \quad (27)$$

$$R_3 = A_{20} r^2 + B_{20} r^{2-q} + C_{20} r^{-q} + D_{20}, \quad (28)$$

В силу (27), (28), уравнения (25) примут вид

$$\begin{aligned}\nabla_1 R_2 &= -12(q^2 + 2q + 4) A_{10} r^2 - 12(2-q)(2q^2 - q + 2) B_{10} r^{2-q} + \\ &+ 12q^2(2q + 3) C_{10} r^{-q} - 12q(q-2) D_{10}, \\ \nabla_1 R_1 &= -6(q^2 + 2q + 4) A_{20} r^2 - 6(2-q)(2q^2 - q + 2) B_{20} r^{2-q} + \\ &+ 6q^2(2q + 3) C_{20} r^{-q} - 6q(q-2) D_{20},\end{aligned}$$

решения которых имеют вид

$$\begin{aligned}R_2 &= A_{11} r^2 + B_{11} r^{2-q} + C_{11} r^{-q} + D_{11} - \frac{3A_{10}(q^2 + 2q + 4)}{q(q+2)} (2\ln r - 1) r^2 + \\ &+ \frac{6B_{10}(2q^2 - q + 2)}{q(2-q)} ((2-q)\ln r - 1) r^{2-q} - \frac{6C_{10}(2q+3)}{q+2} (q\ln r + 1) r^{-q} + 3D_{10} \ln r, \quad (29)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_1 &= A_{21} r^2 + B_{21} r^{2-q} + C_{21} r^{-q} + D_{21} - \frac{3A_{20}(q^2 + 2q + 4)}{2q(q+2)} (2\ln r - 1) r^2 + \\ &+ \frac{3B_{20}(2q^2 - q + 2)}{q(2-q)} ((2-q)\ln r - 1) r^{2-q} - \frac{3C_{20}(2q+3)}{q+2} (q\ln r + 1) r^{-q} + 3D_{20} \ln r. \quad (30)\end{aligned}$$

В силу (29), уравнение (26) примет вид

$$\begin{aligned}\nabla_1 R_0 &= -2(q^2 + 2q + 4) A_{11} r^2 - 2(2-q)(2q^2 - q + 2) B_{11} r^{2-q} + 2q^2(2q + 3) C_{11} r^{-q} - \\ &- 2q(q-2) D_{11} + \frac{6A_{10}(q^2 + 2q + 4)}{q(q+2)} (2\ln r (q^2 + 2q + 4) - q^2 - 6q + 8) r^2 -\end{aligned}$$

$$-\frac{12B_{10}(2q^2 - q + 2)}{q} ((2 - q) \ln r (2q^2 - q + 2) + 2q^2 - 5q + 4) r^{2-q} -$$

$$-\frac{12C_{10}(2q + 3)}{q + 2} (q^2 \ln r (2q + 3) - 2q^2 + q + 2) r^{-q} + 6D_{10} (q(2 - q) \ln r + 2(1 - 3q)),$$
 решение которого имеет вид

$$\begin{aligned}
 R_0 = & A_{12}r^2 + B_{12}r^{2-q} + C_{12}r^{-q} + D_{12} + \frac{3A_{10}(q^2 + 2q + 4)^2}{q^2(q + 2)^2} (\ln r (\ln r - 2) + 1) r^2 - \\
 & - (A_{11}q^2)(q + 2)^2 + 3A_{10}(q^4 + 12q^3 + 16q^2 + 8q + 16)) \frac{(q^2 + 2q + 4)(2 \ln r - 1)}{2q^3(q + 2)^3} r^2 + \\
 & + \frac{3B_{10}(2q^2 - q + 2)^2}{q(3q^2 + q - 1)(2 - q)} ((2 - q) \ln r (\ln r - 2) + 2) r^{2-q} + \\
 & + (6B_{10}(6q^4 - 17q^3 + 15q^2 + q - 4) + \\
 & + (2 - q)q(3q^2 + q - 1)B_{11}) \frac{(2q^2 - q + 2)((2 - q) \ln r - 1)}{q(1 - q - 3q^2)^2(2 - q)^2} + \\
 & + \frac{3C_{10}(2q + 3)^2q}{(2q^2 + 8q + 7)(q + 2)} (-q \ln r (\ln r - 2) + \\
 & + 2) r^{-q} - (3C_{10}(8q^4 + 30q^3 + 7q^2 - 46q - 28) + \\
 & + (q + 2)(2q^2 + 8q + 7)C_{11}) \frac{2(2q + 3)(q \ln r + 1)}{q(q + 2)(2q^2 + 8q + 7)(3q - 5)} r^{-q} + \frac{3(\ln r)^2}{2} D_{10} + \\
 & + (3D_{10}(q + 6) + 2(2 - q)D_{11}) \frac{q \ln r}{2q^2 - 4q + 1}. \tag{31}
 \end{aligned}$$

Из соотношений (27), (28), (29), (30), (31) определяется функция

$$\begin{aligned}
 \xi = & \left[A_{12}r^2 + B_{12}r^{2-q} + C_{12}r^{-q} + D_{12} + \frac{3A_{10}(q^2 + 2q + 4)^2}{q^2(q + 2)^2} (\ln r (\ln r - 2) + 1) r^2 - \right. \\
 & - \left(A_{11}q^2(q + 2)^2 + 3A_{10}(q^4 + 12q^3 + 16q^2 + 8q + 16) \right) \frac{(q^2 + 2q + 4)(2 \ln r - 1)}{2q^3(q + 2)^3} r^2 + \\
 & \frac{3B_{10}(2q^2 - q + 2)^2}{q(3q^2 + q - 1)(2 - q)} ((2 - \\
 & - q) \ln r (\ln r - 2) + 2) r^{2-q} + (6B_{10}(6q^4 - 17q^3 + 15q^2 + q - 4) + (2 - q)q(3q^2 + q - \\
 & - 1)B_{11}) \frac{(2q^2 - q + 2)((2 - q) \ln r - 1)}{q(1 - q - 3q^2)^2(2 - q)^2} + \frac{3C_{10}(2q + 3)^2q}{(2q^2 + 8q + 7)(q + 2)} \cdot \\
 & \cdot (-q \ln r (\ln r - 2) + 2) r^{-q} - (3C_{10}(8q^4 + \\
 & + 30q^3 + 7q^2 - 46q - 28) + (q + 2)(2q^2 + 8q + 7)C_{11}) \frac{2(2q + 3)(q \ln r + 1)}{q(q + 2)(2q^2 + 8q + 7)(3q - 5)} r^{-q} + \\
 & \left. + \frac{3(\ln r)^2}{2} D_{10} + (3D_{10}(q + 6) + 2(2 - q)D_{11}) \frac{q \ln r}{2q^2 - 4q + 1} \right] + \\
 & \theta [A_{21}r^2 + B_{21}r^{2-q} + C_{21}r^{-q} + D_{21} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3A_{20}(q^2+2q+4)}{2q(q+2)}(2\ln r-1)r^2 + \frac{3B_{20}(2q^2-q+2)}{q(2-q)}((2-q)\ln r-1)r^{2-q}- \\
& \quad \frac{3C_{20}(2q+3)}{q+2}(q\ln r+ \\
& \quad +1)r^{-q} + 3D_{20}\ln r] + \theta^2[A_{11}r^2 + B_{11}r^{2-q} + C_{11}r^{-q} + D_{11}- \\
& \quad \frac{3A_{10}(q^2+2q+4)}{q(q+2)}(2\ln r-1)r^2+ \\
& + \frac{6B_{10}(2q^2-q+2)}{q(2-q)}((2-q)\ln r-1)r^{2-q} - \frac{6C_{10}(2q+3)}{q+2}(q\ln r+1)r^{-q} + 3D_{10}\ln r] + \\
& + \theta^3[A_{20}r^2 + B_{20}r^{2-q} + C_{20}r^{-q} + D_{20}] + \theta^4[A_{10}r^2 + B_{10}r^{2-q} + C_{10}r^{-q} + D_{10}]. \quad (32)
\end{aligned}$$

Величина σ определяется из соотношений (22) и (32), компоненты напряжений находятся согласно (19)–(21), (32), компоненты деформации определяются из (18) и (32), а компоненты перемещения из (17) и (32). Таким образом, все компоненты напряжения, деформации и перемещения могут быть определены.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тимошенко С. П. Теория упругости. Л.; М.: ОНТИ, 1937. 452 с.
 [2] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
 [3] Захарова Т. Л., Ивлев Д. Д. О течении трубы, ослабленной пологими выточками // Известия НАНИ ЧР. 1996. № 6. С. 28–31.
 [4] Михайлова М. В., Петров Н. И. Полиномиальное решение линеаризованных уравнений теории малых упругопластических деформаций в полярных координатах // Известия РАН. Механика твердого тела. 2000. № 5. С. 46–53.

N. I. Petrov

**ABOUT POLYNOMIAL SOLUTIONS OF THE LINEARIZED EQUATIONS OF
THE THEORY OF SMALL PLASTO-ELASTIC DEFORMATIONS IN POLAR
COORDINATES**

Chuvash State University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary

Abstract. We consider the polynomial solution of the linearized equations of the theory of small elastic-plastic deformations in the case of the plane problem in polar coordinates with the degree of hardening.

Keywords: tension, elastoplastic deformation, linearization, degree of reinforcement, the equilibrium equation.

REFERENCES

- [1] Tymoshenko S. P. Theory of elasticity. L.; M.: ONTI, 1937. 452 p. (in Russian).
- [2] Ivlev D. D., Yershov L. V. Perturbation method in the theory of elastic-plastic body. M.: Nauka, 1978. 208 p. (in Russian).
- [3] Zaharova T. L., Ivlev D. D. The flow pipe, weakened sloping darts // Proceedings of National Academy of Sciences. 1996. № 6. P. 28–31. (in Russian).
- [4] Mikhailova M. V., Petrov N. I. The polynomial solution of the linearized equations of the theory of small elastic-plastic deformations in polar coordinates // Izvestiya RAN. Mechanics of rigid body. 2000. № 5. P. 46–53. (in Russian).

Petrov Nikolay Iluich

e-mail: anfiska@mail.ru, Candidate Sci. Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of general physics, Chuvash State University, Cheboksary.

Н. Д. Вервейко, М. В. Егоров

ЛУЧЕВОЙ МЕТОД РАСЧЕТА ДИНАМИЧЕСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж

Аннотация. В работе предлагается построение динамического поля перемещений тонкой оболочки в приближении С. П. Тимошенко в окрестности ударных волн, возникающих при нагружении оболочки по торцу. Показано существование двух типов изолированных ударных волн, за которыми возникают: за Σ_1 – только продольная деформация и поворот срединного сечения, за Σ_2 – только деформация сдвига, а продольная деформация и поворот срединного сечения отсутствуют. Построены и решены обыкновенные дифференциальные уравнения переноса интенсивностей продольного и поперечного растяжения, а также поворота срединного сечения на фронтах как функции пройденного расстояния фронтом, что позволило построить поведение искомых функций путем разложения в ряд Тейлора с третьим порядком точности.

Ключевые слова: оболочка вращения, динамические перемещения, ударные волны.

УДК: 519.633+531.295

Уравнения динамического деформирования оболочки вращения толщиной h и радиуса R [1] представляют линейную относительно старших вторых производных по пространственной координате и времени (x, t) систему в частных производных второго порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_1^2 \frac{\nu}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c_1^2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{c_1^2 \nu}{R^2} v \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{12c_2^2 k^2}{h^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{12c_2^2 k^2}{h^2} \psi - \frac{2c_1^2 \nu}{R^3} v \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c_2^2 k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c_2^2 k^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{c_1^2}{R^2} v - \frac{c_1^2 \nu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c_1^2 \nu}{2R} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{c_1^2 \nu}{R} v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{3c_2^2}{2R^3} v^2. \end{cases} \quad (1)$$

$$c_1^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu)}; \quad c_2^2 = \frac{E}{2\rho(1+\nu)}, \quad (2)$$

© Вервейко Н. Д., Егоров М. В., 2015

Вервейко Николай Дмитриевич

e-mail: ver38@mail.ru, доктор технических наук, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

Егоров Михаил Валерьевич

e-mail: egorovmv89@mail.ru, аспирант кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

Поступила 13.08.2015

где c_1, c_2 – скорости распространения продольных и поперечных возмущений в неограниченной среде, E – модуль продольной упругости, ρ – массовая плотность, ν – коэффициент Пуассона, R – радиус срединной поверхности, k – коэффициент, характеризующий параметры поперечного сечения (площадь, момент инерции относительно нейтральной оси, статический момент относительно нейтральной оси, ширину в месте расположения нейтральной оси).

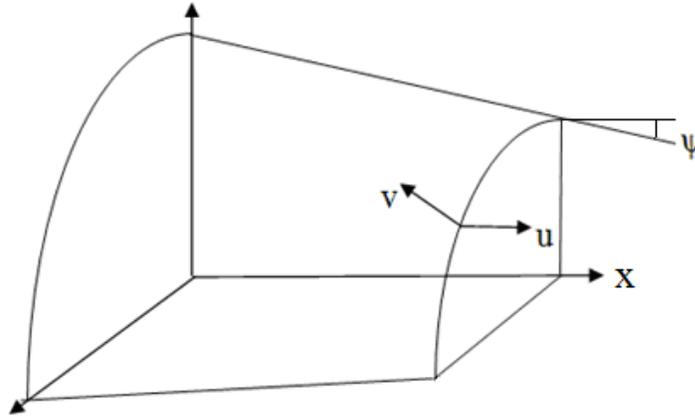


Рис. 1. Элемент оболочки вращения

Распространение сильных и гармонических волн вдоль оболочки допускает существование двух типов изолированных волн разрыва деформаций и градиента угла поворота срединного сечения оболочки. Этот факт позволяет аппроксимировать поведение перемещений (u, v) точек срединной поверхности и угла ψ ее поворота кусочно – постоянным образом за поверхностями волн, что дает большую погрешность порядка расстояния $\Delta = ct$ за фронтом. Для повышения точности приближения u, v, ψ за фронтом волн желательно знать коэффициенты разложения функций в ряд Тейлора в окрестностях волновых фронтов. Эти знания позволяют представить решения для перемещений u, v и угла поворота срединного сечения оболочки ψ в виде $y = (u, v, \psi)$ [4]:

$$y = \sum_0^{\infty} \frac{1}{l!} y(c_1 t)^{-l} \theta(n) + \sum_0^{\infty} \frac{1}{(l!)} y((c_1 - c_2 k)t)^{-n} \theta((c_1 - c_2 k)t), \quad (3)$$

где $\theta(\xi) = 1, \xi \geq 0; 0, \xi \leq 0$ – тета функция Хевисайда, знак $-$ функции $y^-(0)$ означает величину функции y на левой поверхности разрыва, l – порядок производной.

Для их определения рассмотрим в окрестностях волн сами уравнения и их линейное продолжение, которое получим путем дифференцирования системы уравнений (1) по x необходимое количество раз.

Безразмерный вид системы уравнений (1):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{t}^2} = \tilde{c}_1^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \tilde{c}_1^2 \frac{\nu}{R} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \frac{L_0}{R_0} + \tilde{c}_1^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\tilde{c}_1^2 \nu}{R^2} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \frac{L_0^2}{R_0^2}; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{t}^2} = \tilde{c}_1^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{12\tilde{c}_2^2 k^2}{\tilde{h}^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} - \frac{12\tilde{c}_2^2 k^2 \psi}{\tilde{h}^2} - \frac{2\tilde{c}_1^2 \nu}{R^3} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \frac{L_0^3}{R_0^3}; \\ \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{t}^2} = \tilde{c}_2^2 k^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \tilde{c}_2^2 k^2 \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}} - \frac{\tilde{c}_1^2}{R^2} \tilde{v} \frac{L_0^2}{R_0^2} - \frac{\tilde{c}_1^2 \nu}{R} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \frac{L_0}{R_0} + \\ \frac{\tilde{c}_1^2 \nu}{2R} \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{x}} \frac{L_0}{R_0} + \frac{\tilde{c}_1^2 \nu}{R} \tilde{v} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} \frac{L_0}{R_0} - \frac{3\tilde{c}_2^2}{2R^3} \tilde{v}^2 \frac{L_0^3}{R_0^3}, \end{cases} \quad (4)$$

где $\tilde{x} = x/L_0$, $\tilde{v} = v/R_0$, $\tilde{u} = u/L_0$, $\tilde{c}_1 = c_1 T/L_0$, $\tilde{c}_2 = c_2 T/L_0$, $\tilde{t} = t/T$, $\tilde{R} = r/R_0$, $\tilde{h} = h/L_0$.

В дальнейшем знак безразмерности опустим.

В системе уравнений (1) перейдем к подвижной системе координат, перемещающейся со скоростью c по оси x , вводя пройденное фронтом расстояние n , используя соотношения [2], [3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\delta}{\delta t} - c \frac{\delta}{\delta n}; \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\delta^2}{\delta t^2} - 2c \frac{\delta}{\delta t} \frac{\delta}{\delta n} + c^2 \frac{\delta^2}{\delta n^2}. \end{cases} \quad (5)$$

Для получения соотношений для скачков $[u, n]$, $[v, n]$, $[\psi, n]$ проинтегрируем систему уравнений (1) по нормали к распространению возмущений для больших R и введем скачок возмущений согласно выражению [2]:

$$\int_{-\Delta}^{+\Delta} \frac{\partial f}{\partial n} dn = f|_{-}^{+} = [f]. \quad (6)$$

Полученная система относительно $[u, n]$, $[v, n]$, $[\psi, n]$ примет вид

$$\begin{cases} c^2 [u, n] = c_1^2 [u, n]; \\ c^2 [\psi, n] = c_1^2 [\psi, n]; \\ c^2 [v, n] = c_1^2 k^2 [u, n]. \end{cases} \quad (7)$$

Из выполнения системы (7) следует существование изолированных волн: разрыва продольной деформации и изгиба формы срединной поверхности $[u, n]$, $[\psi, n]$ на волне Σ_1 , перемещающейся со скоростью $c_I = c_1$ и разрыва деформации сдвига на волне Σ_2 , бегущей со скоростью $c_{II} = kc_2$. Построим уравнения переноса скачков деформации $[u, n]$, $[v, n]$, $[\psi, n]$ на фронтах соответствующих волн Σ_1 , Σ_2 , для чего представим производные в системе уравнений (1) согласно выражению (5,6):

$$\begin{cases} 2c \frac{\delta}{\delta t} [u, n] - c^2 [u, nn] + c_1^2 [u, nn] + \frac{c_1^2 \nu}{R} [v, n] \frac{L_0}{R_0} + c_1^2 [v, n] [v, nn] = 0; \\ 2c \frac{\delta}{\delta t} [\psi, n] - c^2 [\psi, nn] + c_1^2 [\psi, nn] - \frac{12c_1^2 k^2}{\tilde{h}^2} [v, n] = 0; \\ 2c \frac{\delta}{\delta t} [v, n] - c^2 [v, nn] + c_2^2 k \cdot [v, nn] + c_2^2 k^2 [\psi, n] - \\ \frac{c_1^2 \nu}{R} [u, n] \frac{L_0}{R_0} + \frac{c_1^2 \nu}{2R} [v, n]^2 \frac{L_0}{R_0} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Рассмотрим систему уравнений (8) на поверхности Σ_1 , которая движется со скоростью $c = c_1$, и перейдем к производной по пройденному расстоянию в подвижной системе координат:

$$\begin{cases} 2 \frac{\delta}{\delta n} [u, n] + \frac{\nu}{R} [v, n] \frac{L_0}{R_0} + [v, n] [v, nn] = 0; \\ 2 \frac{\delta}{\delta n} [\psi, n] - \frac{12k^2}{h^2} [v, n] = 0; \\ 2 \frac{\delta}{\delta n} [v, n] + [v, nn] \frac{c_2^2 k^2 - c_1^2}{c_1^2} + \frac{c_2^2 k^2}{c_1^2} [\psi, n] - \frac{\nu}{R} [u, n] \frac{L_0}{R_0} - \frac{\nu}{2R} [v, n]^2 \frac{L_0}{R_0}. \end{cases} \quad (9)$$

Из системы уравнений (7) на фронте волны Σ_1 при $c = c_1$ имеем:

$$[u, n] \neq 0; [\psi, n] \neq 0; [v, n] = 0. \quad (10)$$

Подставляя соотношения (10) в систему уравнений (9), получим соотношения для $[u, n]$, $[v, n]$, $[\psi, n]$:

$$\begin{cases} 2 \frac{\delta}{\delta n} [u, n] = 0; \\ 2 \frac{\delta}{\delta n} [\psi, n] = 0; \\ [v, nn] \frac{c_2^2 k^2 - c_1^2}{c_1^2} + \frac{c_2^2 k^2}{c_1^2} [\psi, n] - \frac{\nu}{R} [u, n] \frac{L_0}{R_0} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Из системы (11) следует постоянство $[u, n] = [u, n]_0(t)$, $[v, n] = 0$, $[\psi, n] = [\psi, n]_0(t)$.

Из третьего уравнения системы (11) следует, что на фронте волны Σ_1 зарождается $[v, nn] \neq 0$.

$$[v, nn] = \frac{\nu [u, n]_0(t) L_0 / (R R_0) - k^2 [\psi, n]_0(t) c_2^2 / c_1^2}{c_2^2 k^2 / c_1^2 - 1}. \quad (12)$$

Построим уравнения переноса для $[u, n]$, $[v, n]$, $[\psi, n]$ на фронте волны Σ_2 , для чего запишем систему уравнений (8) на поверхности Σ_2 , которая движется со скоростью $c_{II} = k c_2$, и перейдем к производной по пройденному расстоянию в подвижной системе координат:

$$\begin{cases} 2 \frac{\delta}{\delta n} [u, n] - [u, nn] + \frac{c_1^2}{k^2 c_2^2} [u, nn] + \frac{c_1^2 \nu}{k^2 c_2^2 R} [v, n] \frac{L_0}{R_0} + \\ \frac{c_1^2}{k^2 c_2^2} [v, n] [v, nn] = 0; \\ 2 \frac{\delta}{\delta n} [\psi, n] - [\psi, nn] + \frac{c_1^2}{k^2 c_2^2} [\psi, nn] - \frac{12c_1^2}{c_1^2 h^2} [v, n] = 0; \\ 2 \frac{\delta}{\delta n} [v, n] + [\psi, n] - \frac{c_1^2 \nu}{k^2 c_2^2 R} [u, n] \frac{L_0}{R_0} + \frac{c_1^2 \nu}{2R k^2 c_2^2} [v, n]^2 \frac{L_0}{R_0} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

На поверхности Σ_2 из (7) следует при $c = k \cdot c_2$:

$$[u, n] = 0; [\psi, n] = 0; [v, n] \neq 0. \quad (14)$$

т. е., на Σ_2 отсутствуют скачки продольной деформации и градиента угла поворота. Уравнения переноса (13) с учетом (14) примут вид

$$\begin{cases} \frac{c_1^2 - k^2 c_2^2}{k^2 c_2^2} [u, nn] + \frac{c_1^2}{k^2 c_2^2} [v, n] \frac{\nu L_0 + [v, nn] R R_0}{R R_0} = 0; \\ [\psi, nn] \frac{c_1^2 - k^2 c_2^2}{k^2 c_2^2} - \frac{12c_1^2}{c_2^2 h^2} [v, n] = 0; \\ 2 \frac{\delta}{\delta n} [v, n] + \frac{c_1^2 \nu}{2R k^2 c_2^2} [v, n]^2 \frac{L_0}{R_0} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Представим третье уравнение системы (15) в виде

$$\frac{\delta[v,n]}{[v,n]^2} = B\delta n, \quad (16)$$

где $B = \frac{-c_1\nu L_0}{4Rk^2c_2^2R_0}$.

Интегрирование уравнения (16) дает

$$[v,n] = \frac{-1}{Bn - \frac{1}{[v,n]_0(t)}}. \quad (17)$$

Из системы уравнений (15) определяется $[u,nn], [\psi,nn]$ на фронте Σ_2 :

$$[u,nn] = -\frac{c_1^2[v,n](\frac{\nu L_0}{RR_1} + [v,nn])}{c_1^2 - k^2c_2^2}. \quad (18)$$

$$[\psi,nn] = \frac{12c_1^2k^2[v,n]}{h^2(c_1^2 - k^2c_2^2)}. \quad (19)$$

Вычисление $[v,nn]$ на Σ_2 на данном шаге не представляется возможным.

В системе уравнений (1) проведем дифференцирование по x и построим уравнения переноса скачков функций и их производных:

$$\begin{cases} \frac{\delta^2}{\delta t^2}[u,n] - 2c\frac{\delta}{\delta t}[u,nn] + c^2[u,nnn] = c_1^2[u,nnn] + \frac{c_1^2\nu L_0}{RR_0}[v,nn] + \\ c_1^2[v,n][v,nnn] + c_1^2[v,nn][v,nn] + \frac{c_1^2\nu L_0^2}{R^2R_0^2}; \\ \frac{\delta^2}{\delta t^2}[\psi,n] - 2c\frac{\delta}{\delta t}[\psi,nn] + c^2[\psi,nnn] = c_1^2[\psi,nnn] - \\ \frac{12c_2^2k^2}{h^2}[v,nn] - \frac{12c_2^2k^2}{h^2}[\psi,n] - \frac{2c_1^2\nu L_0^3}{R^3R_0^3}[v,n][v,n]; \\ \frac{\delta^2}{\delta t^2}[v,n] - 2c\frac{\delta}{\delta t}[v,nn] + c^2[v,nnn] = c_2^2k^2[v,nnn] + c_2^2k^2[\psi,nn] - \\ \frac{c_1^2L_0^2}{R^2R_0^2}[v,n] - \frac{c_1^2\nu L_0}{RR_0}[u,nn] + \frac{c_1^2\nu L_0}{RR_0}[v,nn] + \frac{c_1^2\nu L_0}{RR_0}[v,n][v,n]. \end{cases} \quad (20)$$

Запишем систему уравнений (20) на поверхности Σ_1 , $c_I = c_1$ и построим уравнения переноса интенсивностей скачков функций и их производных по пройденному расстоянию фронтом:

$$\begin{cases} -2\frac{\delta}{\delta n}[u,nn] = c_1^2[v,nn]\frac{\nu L_0 + [v,nn]RR_0}{RR_0}; \\ 2\frac{\delta}{\delta n}[\psi,nn] = \frac{12c_2^2k^2}{c_2^2h^2}[v,nn] + \frac{12c_2^2k^2}{c_1^2h^2}[\psi,n]_0(t); \\ -2\frac{\delta}{\delta n}[v,nn] = \frac{c_2^2k^2}{c_1^2}[\psi,nn] - \frac{\nu L_0}{RR_0}[u,nn] + \\ [v,nnn]\frac{c_2^2k^2-1}{c_1^2} + [v,nn]\frac{\nu L_0}{RR_0}. \end{cases} \quad (21)$$

Из системы уравнений (21) получим:

$$\begin{cases} [u,nn] = -c_1^2 n [v,nn] \frac{\nu L_0 + [v,nn] RR_0}{RR_0} + \frac{\delta}{\delta n} [u,n]_0(t); \\ [\psi,nn] = \frac{6nc_2^2 k^2}{c_1^2 h^2} [v,nn] + \frac{6nc_2^2 k^2}{c_1^2 h^2} [\psi,n]_0(t) + \frac{\delta}{\delta n} [\psi,n]_0(t); \\ [v,nnn] = \frac{c_1^2 \nu L_0 [u,nn] - RR_0 c_2^2 k^2 [\psi,nn] - c_1^2 \nu L_0 [v,nn]}{RR_0 (c_2^2 k^2 - c_1^2)}. \end{cases} \quad (22)$$

Запишем систему уравнений (20) на поверхности Σ_2 , $c_{II} = kc_2$ и построим уравнения переноса интенсивностей скачков функций и их производных по пройденному расстоянию фронтом:

$$\begin{cases} -2 \frac{\delta}{\delta n} [u,nn] + [u,nnn] = \frac{c_1^2}{k^2 c_2^2} [u,nnn] + \frac{c_1^2 \nu L_0}{k^2 c_2^2 RR_0} [v,nn] + \\ \frac{c_1^2}{k^2 c_2^2} [v,n] [v,nnn] + \frac{c_1^2}{k^2 c_2^2} [v,nn] [v,nn] + \frac{c_1^2 \nu L_0}{k^2 c_2^2 RR_0} [v,n] [v,n]; \\ -2 \frac{\delta}{\delta n} [\psi,nn] + [\psi,nnn] = c_1^2 [\psi,nnn] - \frac{12}{h^2} [v,nn] - \frac{2c_1^2 \nu L_0^3}{k^2 c_2^2 RR_0^3} [v,n] [v,n]; \\ \frac{\delta^2}{\delta n^2} [v,n] - 2 \frac{\delta}{\delta n} [v,nn] = [\psi,nn] - \frac{c_1^2 L_0^2}{k^2 c_2^2 R^2 RR_0} [v,n] - \frac{c_1^2 \nu L_0}{k^2 c_2^2 RR_0} [u,nn] + \\ \frac{c_1^2 \nu L_0}{k^2 c_2^2 RR_0} [v,nn] + \frac{c_1^2 \nu L_0}{k^2 c_2^2 RR_0} [v,n] [v,nn]. \end{cases} \quad (23)$$

Дифференциальное уравнение для $[v,nn]$: $[v,nn] + f(n)[v,n] = g(n)$.
Построим полное решение для $[v,nn]$:

$$[v,nn] = e^{-F(n)} \left(\eta + \int_{\xi}^n g(n) e^{-F(n)} dn \right), \quad (24)$$

где $F(n) = \int_{\xi}^n f(n) dn$, ξ, η – координаты точки, через которую проходит интегральная кривая при условии непрерывности функций $f(n), g(n)$.

$$\xi = n_0 + \frac{1}{f(n_0)}, \eta = \frac{g(n_0)}{f(n_0)}. \quad (25)$$

Выпишем остальные компоненты скачков:

$$[\psi,nnn] = \frac{2 \frac{\delta}{\delta n} [\psi,nn] - \frac{12}{h^2} [v,nn] - \frac{2\nu L_0^3}{k^2 c_2^2 R^2 RR_0^3} [v,n] [v,n]}{1 - c_1^2}; \quad (26)$$

$$[u,nnn] = \frac{2k^2 c_2^2 \frac{\delta}{\delta n} [u,nn] + \frac{c_1^2 \nu L_0}{RR_0} [v,nn] + c_1^2 [v,n] [v,nnn]}{k^2 c_2^2 - c_1^2}. \quad (27)$$

В системе уравнений (1) проведем 2 раза дифференцирование по x и построим уравнения переноса скачков функций и их производных:

$$\begin{cases}
\frac{\delta^2}{\delta t^2}[u,nn] - 2c\frac{\delta}{\delta t}[u,nnn] + c^2[u,nnnn] = c_1^2[u,nnnn] + \\
3c_1^2[v,nnn][v,nn] \\
+ c_1^2[v,n][v,nnnn] + \frac{3c_1^2\nu L_0^2}{R^2 R_0^2}[v,n][v,nn]; \\
\frac{\delta^2}{\delta t^2}[\psi,nn] - 2c\frac{\delta}{\delta t}[\psi,nnn] + \\
c^2[\psi,nnnn] = c_1^2[\psi,nnnn] - \frac{12ck^2}{h^2}[v,nnn] - \\
\frac{12ck^2}{h^2}[\psi,nn] - \frac{6c_1^2\nu L_0^3}{R_6 R_0^3}[v,n][v,nn]; \\
\frac{\delta^2}{\delta t^2}[v,nn] - 2c\frac{\delta}{\delta t}[v,nnn] + c^2[v,nnnn] = c_2^2 k^2[v,nnnn] \\
+ c_2^2 k^2[\psi,nnn] - \frac{c_1^2 L_0^2}{R^2 R_0^2}[v,nn] - \frac{c_1^2 \nu L_0}{RR_0}[u,nnn] + \\
\frac{c_1^2 \nu L_0}{RR_0}[v,nnn] + \frac{2c_1^2 \nu L_0}{RR_0}[v,nn][v,nn] + \\
\frac{4c_1^2 \nu L_0}{RR_0}[v,n][v,nnn] - \frac{3c_2^2 L_0^3}{R^3 R_0^3}[v,n][v,n].
\end{cases} \quad (28)$$

Запишем систему уравнений (28) на поверхности Σ_1 , $c_I = c_1$ и построим уравнения переноса интенсивностей скачков функций и их производных по пройденному расстоянию фронтом:

$$\begin{cases}
\frac{\delta^2}{\delta n^2}[u,nn] - 2\frac{\delta}{\delta n}[u,nnn] = 3[v,nnn][v,nn]; \\
\frac{\delta^2}{\delta n^2}[u,nn] - 2\frac{\delta}{\delta n}[u,nnn] = -\frac{12c_2^2 k^2}{c_1 h^2}[v,nnn] - \frac{12c_2^2 k^2}{c_1 h^2}[\psi,nn]; \\
\frac{\delta^2}{\delta n^2}[v,nn] - 2\frac{\delta}{\delta n}[v,nnn] + [v,nnnn] = \frac{c_2^2 k^2}{c_1^2}[v,nnnn] + \frac{c_2^2 k^2}{c_1^2}[\psi,nn] - \\
\frac{L_0^2}{R^2 R_0^2}[v,nn] - \frac{\nu L_0}{RR_0}[u,nnn] + \frac{\nu L_0}{RR_0}[v,nnn] + \frac{2\nu L_0}{RR_0}[v,nn][v,nn].
\end{cases} \quad (29)$$

Найдем переменные системы уравнений (29):

$$[u,nnn] = \frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta n}[u,nn] - \frac{3}{2}\int[v,nnn][v,nn]\delta n + \frac{\delta^2}{\delta n^2}[u,n]_0(t). \quad (30)$$

$$[\psi,nnn] = \frac{6c_2^2 k^2}{c_1^2 h^2}\int[v,nnn]\delta n + \frac{6c_2^2 k^2}{c_1^2 h^2}\int[\psi,nn]\delta n + \frac{\delta}{\delta n}[\psi,nn] + \frac{\delta^2}{\delta n^2}[\psi,n]_0(t). \quad (31)$$

Запишем систему уравнений (28) на поверхности Σ_2 , $c_{II} = kc_2$ и построим уравнения переноса интенсивностей скачков функций и их производных по пройденному расстоянию фронтом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta^2}{\delta n^2} [u, nn] - 2 \frac{\delta}{\delta n} [u, nnn] + [u, nnnn] = \frac{c_1^2}{k^2 c_2^2} [u, nnnn] + \frac{3c_1^2}{k^2 c_2^2} [v, nn][v, nn] + \\ \frac{c_1^2}{k^2 c_2^2} [v, n][v, nnnn] + \frac{3c_1^2 \nu L_0^2}{k^2 c_2^2 R^2 R_0^2} [v, n][v, nn]; \\ \frac{\delta^2}{\delta n^2} [\psi, nn] - 2 \frac{\delta}{\delta n} [\psi, nnn] + [\psi, nnnn] = \frac{c_1^2}{k^2 \cdot c_2^2} [\psi, nnnn] - \\ \frac{12}{h^2} [v, nnn] - \frac{12}{h^2} [\psi, nn] - \frac{6c_1^2 \nu L_0^3}{k^2 c_2^2 R^3 R_0^3} [v, n][v, nn]; \\ \frac{\delta^2}{\delta n^2} [v, nn] - 2 \frac{\delta}{\delta n} [v, nnn] = [\psi, nnn] - \frac{c_1^2 \cdot L_0^2}{k^2 c_2^2 R^2 \cdot R_0^2} [v, nn] - \frac{c_1^2 \nu L_0}{k^2 \cdot c_2^2 R R_0} [u, nnn] + \\ \frac{c_1^2 \nu L_0}{k^2 c_2^2 R R_0} [v, nnn] + \frac{2c_1^2 \nu L_0}{k^2 c_2^2 R R_0} [v, nn][v, nn] + \frac{4c_1^2 \nu L_0}{k^2 c_2^2 R R_0} [v, n][v, nnn] - \\ \frac{3 \cdot L_0^3}{k^2 \cdot R^3 \cdot R_0^3} \cdot [v, n] \cdot [v, n]. \end{array} \right. \quad (32)$$

Из третьего уравнения системы (32) следует:

Дифференциальное уравнение для $[v, nnn]$: $[v, nnn] + f(n)[v, n] = g(n)$:

$$[v, nnn] = e^{-F(n)} \left(\eta + \int_{\xi}^n g(n) e^{-F(n)} dn \right), \quad (33)$$

где $F(n) = \int_{\xi}^n f(n) dn$, ξ, η – координаты точки, через которую проходит интегральная кривая при условии непрерывности функций $f(n), g(n)$.

$$\xi = n_0 + \frac{1}{f(n_0)}, \eta = \frac{g(n_0)}{f(n_0)}. \quad (34)$$

Зададим начальные условия на торце оболочки: $[u, n]_0(t) = A_1 \alpha_1 e^{\alpha_1 t}$, $[\psi, n]_0(t) = B_1 \beta_1 e^{\beta_1 t}$, $[v, n]_0(t) = C_1 \gamma_1 e^{\gamma_1 t}$.

Приведем пример вычисления перемещений срединной оболочки и её формы для конкретных условий и параметров.

Графики продольного и сдвигового перемещения при безразмерных константах $A_1 = 1, B_1 = 1, C_1 = 1, \alpha_1 = 0.001, \beta_1 = 0.001, \gamma_1 = 0.001, c_1 = 1500, c_2 = 1000, \nu = 0.3, L_0 = 1, R = 1, R_0 = 1, k = 0.85, h = 0.001$ представлен на рис. 1.

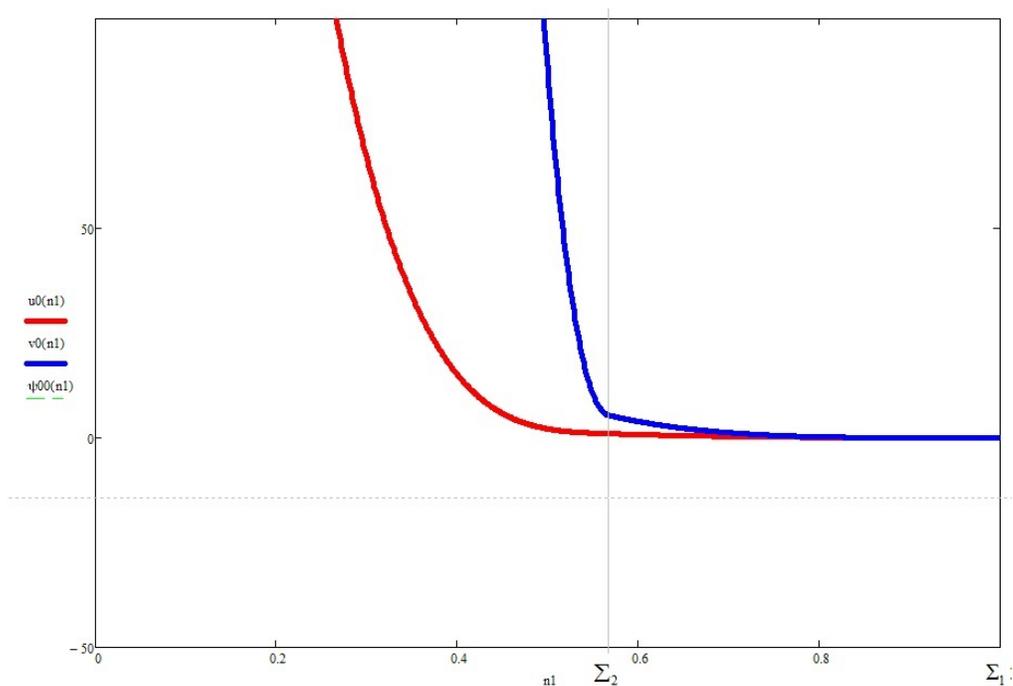


Рис. 2. Значение продольного u_0 и сдвигового v_0 перемещений за фронтами Σ_1, Σ_2

Заключение. Применение лучевого метода к расчету напряженного состояния тонкой оболочки в приближении С. П. Тимошенко позволило построить решения для продольного, сдвигового перемещения, а также угла поворота срединного сечения путем разложения этих функций в ряд Тейлора в окрестностях ударных волн с точностью до третьего порядка.

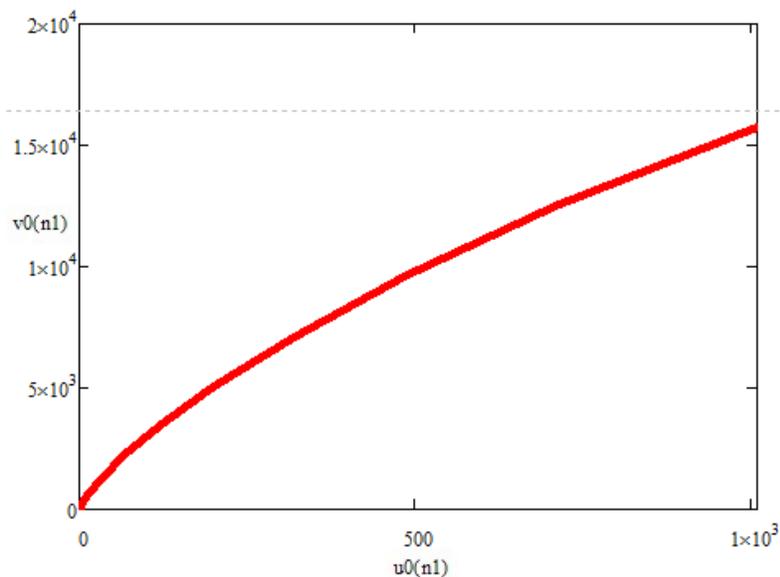


Рис. 3. Форма поверхности оболочки вращения

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Сагомонян А. Я. Волны напряжения в сплошных средах. М.: Изд-во МГУ, 1985. 416 с.
- [2] Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Наука, 1964. 306 с.
- [3] Вервейко Н. Д. Лучевая теория упруговязкопластических волн и волн гидроудара. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1997. 204 с.
- [4] Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.

N. D. Verveyko, M. V. Yegorov

ROTATING SHELL DYNAMIC STRESS CONDITION RAY CALCULATION METHOD

Voronezh State University, Voronezh

Abstract. In this work the building of thin shell dynamic displacement field in S. P. Timoshenko approximation in shock waves vicinity, arising due to shell face loading is offered. Shock waves two types isolated have shown, followed by: after Σ_1 - only longitudinal deformation and mindsection turn, after Σ_2 - only shift deformation, and longitudinal deformation and mindsection turn are absent. Ordinary differential equations of longitudinal, shift deformation, and mindsection turn intensity transfer on the fronts like front traveled distance function were built and resolved, allowing build sought functions by Teylor's row with third order accuracy decomposition.

Keywords: rotating shell, dynamic deformation, shock waves.

REFERENCES

- [1] Sagomonyan A. Ya. Wave voltage in continuous media. M.: MGU, 1985. 416 p. (in Russian).
- [2] Tomas T. Plastic flow and fracture in solids. M.: Nauka, 1964. 306 p. (in Russian).
- [3] Verveyko N. D. Radiation theory of visco elastic plastic waves and water hammer. Voronezh: Publishing house of Voronezh State University, 1997. 204 p. (in Russian).
- [4] Samarsky A. A. The theory of difference schemes. M.: Nauka, 1989. 616 p. (in Russian).

Verveyko Nikolay Dmitrievich

e-mail: ver38@mail.ru, Dr. Sci. Tech., Professor, Department of mechanics and computer simulation, Voronezh State University, Voronezh.

Yegorov Mikhail Valerievich

e-mail: egorovmv89@mail.ru, Postgraduate student, Department of mechanics and computer simulation, Voronezh State University, Voronezh.

О. Н. Любимова, А. В. Морковин, Э. П. Солоненко

ТЕРМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СТЕКЛОМЕТАЛЛОКОМПОЗИТНОМ СТЕРЖНЕ С УЧЕТОМ СВОЙСТВ ЗОНЫ СОЕДИНЕНИЯ

Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток

Аннотация. В работе проведен анализ напряженно-деформированного состояния в соединении стекло-металл с учетом физико-механических свойств зоны соединения, отличающихся от исходных материалов. Используя классические приемы теории термоупругости, получены аналитические зависимости тензора напряжений от температуры и коэффициента линейного температурного расширения на границе соединения.

Ключевые слова: стеклометаллокомпозит, напряжения, зона соединения, термообработка, математическая модель, коэффициент линейного температурного расширения, механика, теория термоупругости.

УДК: 608.4

Введение. Получение новых прочных, экономичных и экологичных материалов является актуальной задачей nanoиндустрии. Поэтому созданию новых композитных изделий из стекла, керамики и металла, получаемых методом диффузионной сварки и с помощью наплавления одного материала на другой, посвящено много исследований. Например, применение слоистого композиционного материала на основе стекла и металла — стеклометаллокомпозита — для создания корпусов подводной техники [1] и разработка стеклометаллокомпозитной арматуры [2] являются хорошей альтернативой таких материалов, как сталь, титан и даже углепластики. Технология изготовления этого нового материала остается в стадии разработки, структура и свойства

© Любимова О. Н., Морковин А. В., Солоненко Э. П. 2015

Любимова Ольга Николаевна

e-mail: berms@mail.ru, кандидат физико-математических наук, профессор, Инженерная школа, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток.

Морковин Андрей Витальевич

e-mail: fly.88@mail.ru, ассистент, Инженерная школа, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток.

Солоненко Элеонора Павловна

e-mail: el-solonenko@yandex.ru, ассистент, Инженерная школа, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток.

Исследование выполнено при поддержке ФЦП (Соглашение №14.575.21.0009, уникальный идентификатор RFMEFI57514X0009).

Поступила 10.09.2015

до конца не изучены. Среди технологических проблем выделяются следующие: различные механические характеристики соединяемых материалов и технологический режим влияют на структуру получаемого изделия. Например, разница коэффициентов линейного температурного расширения приводит к существенному скачку напряжений в соединяемых материалах и, как следствие, к разрушению (трещине) около границы соединения (рис. 1). Другой особенностью соединяемых материалов является наличие специфической зоны соединения с образованием структуры, отличающейся от структуры соединяемых материалов. Поэтому исследование напряженно-деформированного состояния композита в целом позволяет проанализировать параметры технологического режима, подобрать оптимальные и определить их влияние на конечные свойства композита.

Целью работы является получение аналитических зависимостей напряженно-деформированного состояния длинного трехслойного цилиндра (стекло – диффузионная зона – металл) под действием температуры с учетом изменяющегося коэффициента температурного линейного расширения всех слоев и геометрических характеристик диффузионной зоны.

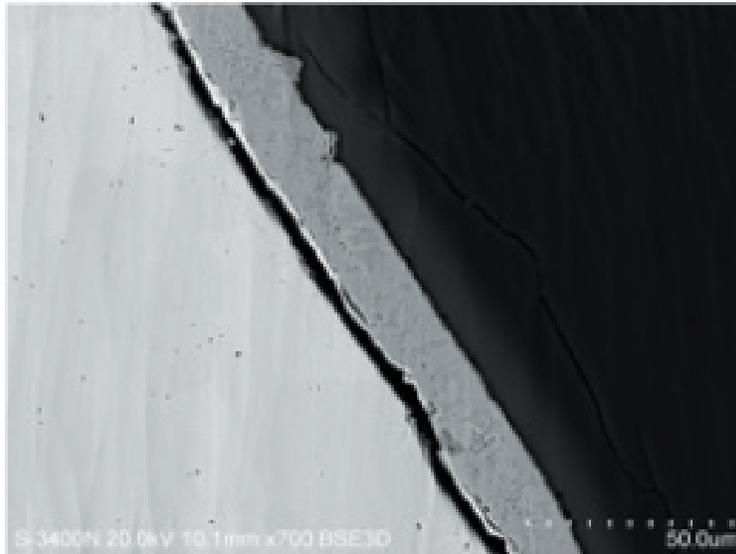


Рис. 1. Трещина на границе зоны соединения металла и стекла [3]

Математическая модель. Длинный полый цилиндр (рис. 2), составленный из трех слоев (стекло – диффузионная зона – металл) $r_1 < r < r_1 + \delta$, $r_1 + \delta < r < r_2 - \delta$ и $r_2 - \delta < r < r_2$, с модулями упругости $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, $E^{(3)}$ и коэффициентами температурного линейного расширения $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$ подвергается охлаждению от нижней температуры отжига до температуры окружающей среды. Коэффициенты линейного температурного расширения первого и третьего слоев линейно зависят от температуры $\alpha^{(1)} = \alpha^{(1)}(T)$ и $\alpha^{(3)} = \alpha^{(3)}(T)$. Учитывая неоднородную структуру диффузионной зоны (второго слоя), температурный коэффициент линейного расширения представляется в виде нелинейной зависимости от размера и линейной зависимости от температуры $\alpha^{(2)} = \alpha^{(2)}(r, T)$. Считаем, что на границах диффузионной зоны выполняются

условия:

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^{(1)}(r_1 + \delta, t) = \sigma_{rr}^{(2)}(r_1 + \delta, t) \\ \sigma_{rr}^{(2)}(r_2 - \delta, t) = \sigma_{rr}^{(3)}(r_2 - \delta, t) \\ u_r^{(1)}(r_1 + \delta, t) = u_r^{(2)}(r_1 + \delta, t) \\ u_r^{(2)}(r_2 - \delta, t) = u_r^{(3)}(r_2 - \delta, t). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь и ниже верхний индекс (1) соответствует стеклу, (2) — диффузионной зоне, (3) — металлу.

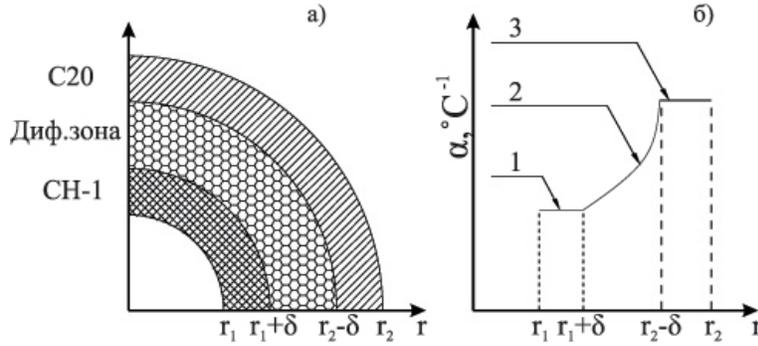


Рис. 2. а) Геометрия слоистого композита; б) Коэффициент линейного температурного расширения.

Считаем, что при определенных размерах слоев температура в них постоянна по объему и изменяется в процессе охлаждения. При записи основных уравнений использовалось условие плоского деформированного состояния и осевой симметрии. С учетом принятых предположений компоненты тензора деформаций в полярной системе координат принимают вид

$$\varepsilon_{rr}^{(k)}(r, t) = \frac{\partial u_r^{(k)}(r, t)}{\partial r}, \varepsilon_{\phi\phi}^{(k)}(r, t) = \frac{u_r^{(k)}(r, t)}{r}, k = 1, 2, 3.$$

Напряженно-деформированное состояние определяется в рамках теории Дюамеля — Неймана [4]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(k)}(r, t) &= \lambda^{(k)}(\varepsilon_{\phi\phi}^{(k)}(r, t) + \varepsilon_{rr}^{(k)}(r, t)) + 2\mu^{(k)}\varepsilon_{rr}^{(k)}(r, t) - 3K^{(k)}\alpha^{(k)}(T(t) - T_0), \\ \sigma_{\phi\phi}^{(k)}(r, t) &= \lambda^{(k)}(\varepsilon_{\phi\phi}^{(k)}(r, t) + \varepsilon_{rr}^{(k)}(r, t)) + 2\mu^{(k)}\varepsilon_{\phi\phi}^{(k)}(r, t) - 3K^{(k)}\alpha^{(k)}(T(t) - T_0), \\ \sigma_{zz}^{(k)}(r, t) &= \lambda^{(k)}(\varepsilon_{\phi\phi}^{(k)}(r, t) + \varepsilon_{rr}^{(k)}(r, t)) - 3K^{(k)}\alpha^{(k)}(T(t) - T_0), \end{aligned}$$

где $\lambda^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ — параметры Ламе, $K^{(k)}$ — модуль объемного расширения, $T(t)$ — текущая температура, T_0 — начальная температура. Уравнение Ламе имеет вид

$$\frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_r^{(k)} = \frac{3 \cdot K_k \cdot (T(t) - T_0)}{(\lambda_k + 2 \cdot \mu_k)} \cdot \frac{\partial \alpha_k}{\partial r}. \quad (2)$$

Уравнение (2) вместе с условиями (1) и условиями отсутствия давления на поверхности цилиндра $\sigma_{rr}^{(3)}(r_2, t) = 0$ и $\sigma_{rr}^{(1)}(r_1, t) = 0$ образует систему дифференциальных

уравнений, однозначно определяющих напряженно-деформированное состояние цилиндра. Решение уравнения равновесия представляется в следующем виде

$$u_r^{(k)} = C_1^{(k)}(t) \cdot r + \frac{C_2^{(k)}(t)}{r} + \frac{3 \cdot K_k \cdot (T(t) - T_0)}{(\lambda_k + 2 \cdot \mu_k)r} \int_{r_*}^r r \cdot (\alpha_k(r) - \alpha_k(r_k)) dr, \quad (3)$$

где $r_* = r_1$, при $k = 1$, $r_* = r_1 + \delta$ при $k = 2$, $r_* = r_2 - \delta$ при $k = 3$.

Обсуждение результатов моделирования. При вычислении напряжений в трехслойном полом цилиндра в качестве слоя 1 были использованы характеристики стекла СН-1, в слое 3 использовались характеристики стали 20, для которых необходимые параметры имели следующие значения: $r_1 = 3,0$ мм, $\delta = 1,0$ мм, $r_2 = 5,5$ мм, $T_0 = 500$ °С, $E^{(1)} = 0,67 \cdot 10^5$ МПа, $E^{(2)} = 1,4 \cdot 10^5$ МПа, $E^{(3)} = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = \nu^{(3)} = 0,2$. Коэффициент линейного температурного расширения стекла и металла принимается в следующем виде $\alpha^{(1)}(500) = 110 \cdot 10^{(-7)} 1/^\circ\text{C}$, $\alpha^{(1)}(50) = 50 \cdot 10^{(-7)} 1/^\circ\text{C}$, $\alpha^{(3)}(500) = 160 \cdot 10^{(-7)} 1/^\circ\text{C}$, $\alpha^{(3)}(50) = 115 \cdot 10^{(-7)} 1/^\circ\text{C}$. Охлаждение происходит со скоростью $2,5$ °С/мин.

Было установлено, что вид зависимости коэффициентов линейного температурного расширения от радиуса во втором слое представленный в следующем виде $\alpha_2 = a \cdot r^2 + b \cdot r + c$, $\alpha_2 = a \cdot r^3 + b \cdot r^2 + c \cdot r + d$ и $\alpha_2 = a \cdot e^{b \cdot r}$ не оказывает существенного влияния на напряженно-деформированное состояние слоистого цилиндра. Поэтому анализ напряжений будет выполнен для зависимости температурной кривой в виде $\alpha_2 = \alpha \cdot r^2 + b \cdot r + c$.

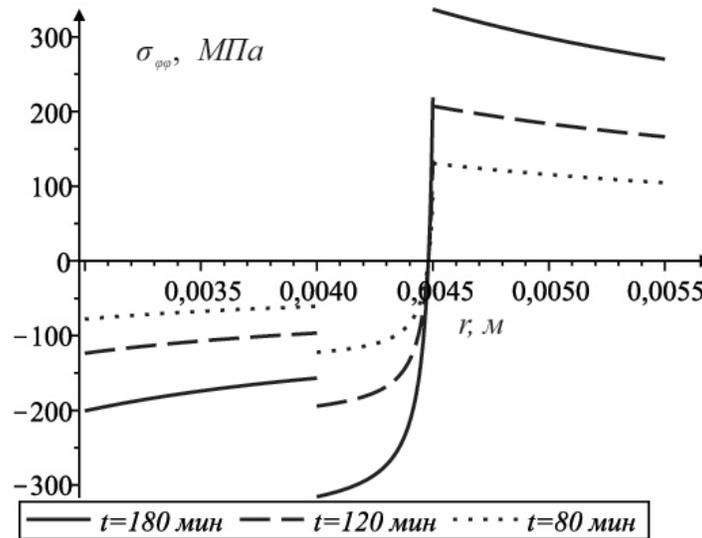


Рис. 3. Тангенциальные напряжения по толщине сая с учетом диффузионной зоны (охлаждение в разные моменты времени).

Радиальные напряжения, появляющиеся во всех слоях, не вызывают опасения (рис. 4). Анализ тангенциальных напряжений (рис. 3) на границе "стекло — диффузионная зона" показывает, что между слоями появляется достаточно плотный контакт за счет того, что сжимающие напряжения в диффузионной зоне больше, чем в стекле.

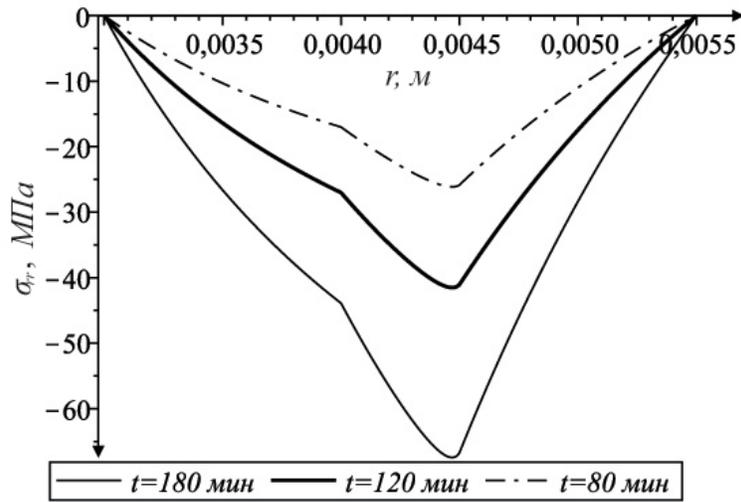


Рис. 4. Радиальные напряжения по толщине спая с учетом диффузионной зоны (охлаждение в разные моменты времени).

На границе "металл – диффузионная зона" разрыв в тангенциальных напряжениях влияет на качество соединения и может способствовать "отрыву" металла в зоне соединения.

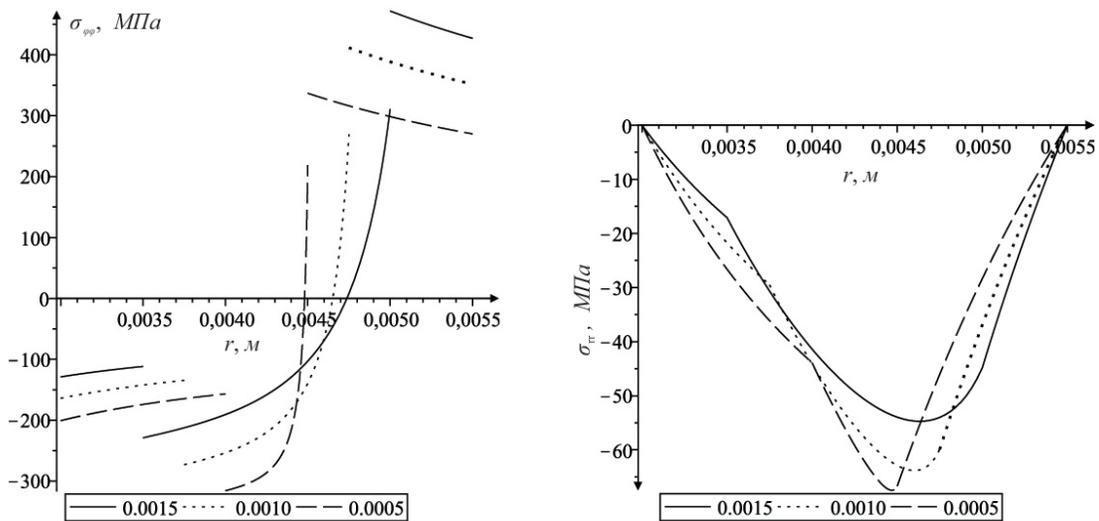


Рис. 5. Влияние толщины диффузионной зоны на напряжения (толщина указана в мм)

Рис. 5 показывает, что размеры диффузионной зоны влияют на механические характеристики композита. Увеличение размеров диффузионной зоны приводит к сдвигу кривой распределения тангенциальных напряжений в сторону увеличения растягивающих напряжений. Поэтому при выборе технологического режима следует стараться получить соединение с меньшим размером зоны соединения. Структуру и размеры диффузионной зоны планируется контролировать такими технологическими параметрами, как обработка металлической поверхности промежуточным материалом, способствующим получению прочного соединения "стекло – металл", управление температурным режимом и давлением.

Вывод. Результаты математического моделирования показывают, что размеры диффузионной зоны и характер изменения ее коэффициента линейного температурного расширения оказывают существенное влияние на величину остаточных напряжений. Поэтому при моделировании технологического режима предлагается изменить параметры таким образом, чтобы уменьшить диффузионную зону или совсем избежать ее образования. Данное теоретическое предположение требует экспериментальной оценки влияния характера и свойств диффузионно зоны на прочность стеклометаллокомпозита.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Пикуль В. В. Патент РФ № 2361771. Способ изготовления цилиндрической оболочки прочного корпуса подводного аппарата // Оpubл. 20.07.2009. Бюл. изобр. № 20.
- [2] Морковин А. В., Любимова О. Н. Стеклометаллические стержни для решения практических задач в строительной индустрии // Международная научная конференция "Современные технологии и развитие политехнического образования", 14–18 сентября 2015 г.: Материалы конференции / Дальневост. федерал. ун-т. 2015. С. 413–416.
- [3] Lyubimova O. N., Morkovin A. V., Dryuk S. A, Nikiforov P. A. Structure and constitution of glass and steel compound in glass-metal composite // AIP conference Proceedings. 2014. № 1623. P. 379–382.
- [4] Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. Математические модели термомеханики. М.: ФИЗМАЛИТ, 2002. 168 с.

O. N. Lyubimova, A. V. Morkovin, E. P. Solonenko

**THERMAL STRESS IN GLASS-AND-METAL COMPOSITE BAR WITH
TAKING INTO CONSIDERATION THE PROPERTIES OF WELDING ZONE.**

Far Eastern Federal University, Vladivostok

Abstract. The analysis of stress-strain state in the compound of glass and metal was made with taking into consideration the physical and mechanical properties of welding zone with properties differ from properties of these materials. Using the classical methods of thermoelasticity the analytical dependencies of the stress tensor from temperature and linear thermal expansion coefficient of compound zone were obtained.

Keywords: glass-and-steel composite, strain, joint zone, heat treat process, simulation model, thermal coefficient of linear expansion, mechanics, the theory of elasticity.

REFERENCES

[1] Pikul V. V. Patent of the Russian Federation № 2361771. Production method of high strength cylindrical shell for underwater vehicle's hull // Publ. 20.07.2009. Bull. Rec. № 20. (in Russian).

[2] Morkovin A. V., Lyubimova O. N. Glass-metal rods for practical problem solving in construction industry // International scientific conference "Modern technology and the development of polytechnic education", Vladivostok, 14-18 September 2015: Proceedings / FEFU. 2015. P. 413–416. (in Russian).

[3] Lyubimova O. N., Morkovin A. V., Dryuk S. A., Nikiforov P. A. Structure and constitution of glass and steel compound in glass-metal composite // AIP conference Proceedings. 2014. № 1623. P. 379–382.

[4] Zarubin V. S., Kuvyrkin G. N. Mathematical models of thermal mechanics. M.: FIZMALIT, 2002. 168 p. (in Russian).

Lyubimova Olga Nikolaevna

e-mail: berms@mail.ru, PhD in Physical and Mathematical Sciences, Professor, Far Eastern Federal University, Vladivostok.

Morkovin Andrey Vitalyevich

e-mail: fly.88@mail.ru, Teaching assistant, Far Eastern Federal University, Vladivostok.

Solonenko Eleonora Pavlovna

e-mail: el-solonenko@yandex.ru, Teaching assistant, Far Eastern Federal University, Vladivostok.

С. В. Тихонов, Т. И. Рыбакова

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ОТВЕРСТИЕМ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ВКЛЮЧЕНИЕМ, ОГРАНИЧЕННОЙ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОЙ ОКРУЖНОСТЬЮ, ПРИ ДВУОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,
г. Чебоксары

Аннотация. Понятие трансляционной анизотропии введено в работах [2]–[5]. Двуосное растяжение упругопластической пластины с круговым отверстием в случае трансляционной анизотропии исследовано в работе [6]. Упругопластическое состояние двухслойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления при трансляционной анизотропии, в случае, когда контур включения ограничен окружностью, рассмотрено в работе [7]. В работе [8] определено напряженное состояние неоднородной плоскости, ослабленной круговым отверстием, подкрепленной включениями, ограниченными эксцентрическими окружностями, при двуосном растяжении. В настоящей статье обобщаются работы [7], [8] в случае двуосного растяжения анизотропной плоскости, ослабленной отверстием, подкрепленной включением, ограниченной эксцентрической окружностью. Предполагается, что каждый слой обладает своими свойствами трансляционной анизотропии. Определена граница упругопластической зоны, рассматривается влияние анизотропного включения на напряженное состояние плоскости.

Ключевые слова: пластичность, упругость, включение, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.374

Рассмотрим плоскость с включением, ограниченным окружностью. Пластина находится в состоянии двуосного растяжения под действием усилий на бесконечности p_1, p_2 , на контуре отверстия действует нормальное давление q (рис. 1).

© Тихонов С. В., Рыбакова Т. И., 2015

Тихонов Сергей Владимирович

e-mail: strangcheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Рыбакова Татьяна Ивановна

e-mail: rti2112@mail.ru, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №15-41-02453 р_поволжье_a, №14-01-31323 мол_a) в рамках выполнения государственного задания (код проекта 1179).

Поступила 18.09.2015

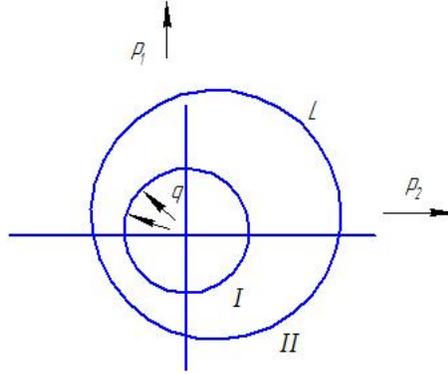


Рис. 1

Условие предельного состояния для включения I примем в виде

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_{11} - k_{21}}{2} \right)^2 + (\tau_{xy} - k_{31})^2 = K_1^2, \quad k_{11}, k_{21}, k_{31}, K_1 - const. \quad (1)$$

Условие предельного состояния для слоя II примем в виде

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_{12} - k_{22}}{2} \right)^2 + (\tau_{xy} - k_{32})^2 = K_2^2, \quad k_{12}, k_{22}, k_{32}, K_2 - const, \quad (2)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты напряжения в декартовой системе координат; $k_{11}, k_{21}, k_{31}, K_1, k_{12}, k_{22}, k_{32}, K_2$ – константы анизотропии.

Положим, что искомое решение зависит от некоторого параметра δ . Будем искать решение в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(I)} \delta + \sigma_{ij}^{(II)} \delta^2 + \dots \quad (3)$$

Уравнение упругопластической границы запишем в виде

$$r_s = r_s^{(0)} + \delta r_s^I + \delta^2 r_s^{II} + \dots \quad (4)$$

Уравнение контура L

$$(x + \delta a)^2 + (y + \delta b)^2 = \alpha_2^2 \quad (5)$$

представим в виде

$$r_L = r_L^{(0)} + \delta r_L^I + \delta^2 r_L^{II} + \dots = \alpha_2 + \delta(-a \cos \theta - b \sin \theta + \alpha_2) + \dots \quad (6)$$

Уравнения равновесия в полярной системе координат имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

В дальнейшем все величины, имеющие размерность длины, отнесем к величине $r_s^{(0)}$. Примем $\rho_s = r_s/r_s^{(0)}$, $\rho_L = r_L/r_s^{(0)}$. Величины $a\delta/r_s^{(0)}$, $b\delta/r_s^{(0)}$, $(p_1 - p_2)/2k_1$, k_{1n} , k_{2n} , k_{3n} будем считать достаточно малыми, порядка δ , и обозначим

$$\begin{aligned} \frac{(p_1-p_2)}{2k_1} &= d_3\delta, \quad d_3 - \text{const}, \quad 0 \leq d_3 \leq 1, \\ k_{1n} &= \delta k'_{1n}, \quad k_{2n} = \delta k'_{2n}, \quad k_{3n} = \delta k'_{3n}. \end{aligned} \quad (8)$$

Компонентам напряжений в пластической области напишем индекс p , а в упругой области – индекс e .

Граничные условия на бесконечности в упругой области запишем в виде

$$\sigma_{\rho 2}^e = q_0 - \delta \cos(2\theta), \quad \sigma_{\theta 2}^e = q_0 + \delta \cos(2\theta), \quad \tau_{\rho\theta 2}^e = \delta \sin(2\theta). \quad (9)$$

Используя связь между компонентами напряжения в декартовой системе координат x, y и компонентами в полярной системе координат ρ, θ запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos(2\theta) + \tau_{\rho\theta} \sin(2\theta), \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos(2\theta) - \tau_{\rho\theta} \sin(2\theta), \\ \tau_{xy} &= -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin(2\theta) + \tau_{\rho\theta} \cos(2\theta). \end{aligned} \quad (10)$$

Согласно (10) соотношения (1) и (2) запишем в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_{\rho n}^p - \sigma_{\theta n}^p}{2} \right)^2 + \left(\tau_{\rho\theta n}^p \right)^2 - 2R_n \left(\frac{\sigma_{\rho n}^p - \sigma_{\theta n}^p}{2} \right) \cos(2\theta + \mu_n) - \\ - 2\tau_{\rho\theta n}^p R_n \sin(2\theta + \mu_n) + R_n^2 - K_n^2 = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$R_n = \sqrt{\left(\frac{k_{1n} - k_{2n}}{2} \right)^2 + k_{3n}^2}, \quad \frac{k_{1n} - k_{2n}}{2R_n} = \cos(\mu_n), \quad \frac{k_{3n}}{R_n} = \sin(\mu_n).$$

В нулевом осесимметричном состоянии положим

$$\tau_{\rho\theta n}^{(0)p} = 0. \quad (12)$$

Согласно (3), (11) и (12) имеем

$$\sigma_{\rho n}^{(0)p} - \sigma_{\theta n}^{(0)p} = \pm 2K_n. \quad (13)$$

При действии внутреннего давления $\sigma_{\theta n} > \sigma_{\rho n}$, поэтому в (13) имеет место нижний знак, соотношение (13) перепишем в виде

$$\sigma_{\theta n}^{(0)p} = \sigma_{\rho n}^{(0)p} + 2K_n. \quad (14)$$

На контуре отверстия справедливо

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)p} = -q \quad \text{при} \quad \rho = \alpha_1. \quad (15)$$

Тогда из (7), (14), (15) найдем напряжения во внутренней пластической области I:

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)p} = -q + 2K_1 \ln \frac{\rho}{\alpha_1}, \quad \sigma_{\theta 1}^{(0)p} = -q + 2K_1 \left(1 + \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right), \quad \tau_{\rho\theta 1}^{(0)p} = 0. \quad (16)$$

Из условия сопряжения решений

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)p} = \sigma_{\rho 2}^{(0)p} \quad \text{при} \quad \rho = \alpha_2 \quad (17)$$

и из соотношений (7), (14), (16) получим напряжения во второй пластической области:

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho 2}^{(0)p} &= -q + 2K_2 \ln \frac{\rho}{\alpha_2} + 2K_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \\ \sigma_{\theta 2}^{(0)p} &= -q + 2K_2 \left(1 + \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) + 2K_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.\end{aligned}\quad (18)$$

В упругой области решение будем искать в виде

$$\sigma_{\rho 2}^{(0)e} = A - \frac{B}{\rho^2}, \quad \sigma_{\theta 2}^{(0)e} = A + \frac{B}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta 2}^{(0)e} = 0. \quad (19)$$

Из условия сопряжения компонент напряжения на упругопластической границе и определим постоянные A , B

$$\sigma_{\rho 2}^{(0)p} = \sigma_{\rho 2}^{(0)e}, \quad \sigma_{\theta 2}^{(0)p} = \sigma_{\theta 2}^{(0)e} \quad \text{при} \quad \rho = 1, \quad (20)$$

откуда получим напряженное состояние в упругой области

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho 2}^{(0)e} &= -q + K_2 (1 - 2 \ln \alpha_2) + 2K_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{K_2}{\rho^2}, \\ \sigma_{\theta 2}^{(0)e} &= -q + K_2 (1 - 2 \ln \alpha_2) + 2K_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{K_2}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta 2}^{(0)e} = 0.\end{aligned}\quad (21)$$

Радиус упругопластической зоны в нулевом приближении определяется соотношениями

$$-q + K_2 (1 - 2 \ln \alpha_2) + 2K_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = q_0. \quad (22)$$

Из (1), (2), (4) получим для первого приближения

$$\sigma_{\rho n}^{(I)p} - \sigma_{\theta n}^{(I)p} = 2R_n^{(I)} \cos(2\theta + \mu_n). \quad (23)$$

Уравнения равновесия (7) удовлетворим, полагая

$$\sigma_{\rho}^{(I)p} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(I)p} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(I)p} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right). \quad (24)$$

Из (23), (24) получим напряженное состояние в первой области:

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho 1}^{(I)p} &= -R_1' \left\{ \frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) - 1 \right) \right\} \cos(2\theta + \mu_1), \\ \sigma_{\theta 1}^{(I)p} &= -R_1' \left\{ \frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) + 1 \right) \right\} \cos(2\theta + \mu_1), \\ \tau_{\rho\theta 1}^{(I)p} &= R_1' \left\{ \frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) - 1 \right) \right\} \sin(2\theta + \mu_1).\end{aligned}\quad (25)$$

Условие сопряжения компонент напряжений на границе первого включения имеет вид

$$\begin{aligned}\left(\sigma_{\rho 1}^{(I)p} + \frac{d\sigma_{\rho 1}^{(0)p}}{d\rho} \rho_L' \right) \Big|_{\rho=\alpha_2} &= \left(\sigma_{\rho 2}^{(I)p} + \frac{d\sigma_{\rho 2}^{(0)p}}{d\rho} \rho_L' \right) \Big|_{\rho=\alpha_2}, \\ \left(\tau_{\rho\theta 1}^{(I)p} - \left(\sigma_{\theta 1}^{(0)p} - \sigma_{\rho 1}^{(0)p} \right) \frac{\rho_L'}{\alpha_2} \right) \Big|_{\rho=\alpha_2} &= \left(\tau_{\rho\theta 2}^{(I)p} - \left(\sigma_{\theta 2}^{(0)p} - \sigma_{\rho 2}^{(0)p} \right) \frac{\rho_L'}{\alpha_2} \right) \Big|_{\rho=\alpha_2},\end{aligned}\quad (26)$$

где точка наверху означает дифференцирование по θ .

Из соотношений (6), (25), (26) получим напряженное состояние во второй области:

$$\begin{aligned}
& \sigma_{\rho 2}^{(I)p} = \frac{2\alpha_2(K_1-K_2)}{\alpha_1} + \frac{2(K_2-K_1)}{\rho} (a \cos(\theta) + b \sin(\theta)) + \\
& + \left\{ -\frac{3}{\rho} \left(C_{11}^{(3)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{12}^{(3)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) + \right. \\
& + \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{12}^{(3)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{12}^{(3)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \left. \right\} \cos(2\theta) + \\
& + \left\{ -\frac{3}{\rho} \left(C_{21}^{(3)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{22}^{(3)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) + \right. \\
& + \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{22}^{(3)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{21}^{(3)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \left. \right\} \sin(2\theta) + R'_2 \cos(2\theta + \mu_2), \\
& \sigma_{\theta}^{(I)p} = \frac{2\alpha_2(K_1-K_2)}{\alpha_1} + \frac{2(K_2-K_1)}{\rho} (a \cos(\theta) + b \sin(\theta)) + \\
& + \left\{ -\frac{3}{\rho} \left(C_{11}^{(3)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{12}^{(3)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) + \right. \\
& + \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{12}^{(3)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{12}^{(3)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \left. \right\} \cos(2\theta) + \\
& + \left\{ -\frac{3}{\rho} \left(C_{21}^{(3)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{22}^{(3)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) + \right. \\
& + \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{22}^{(3)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{21}^{(3)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \left. \right\} \sin(2\theta) - R'_2 \cos(2\theta + \mu_2), \\
& \tau_{\rho\theta 2}^{(I)p} = \frac{2(K_2-K_1)}{\rho} (a \sin(\theta) - b \cos(\theta)) + \\
& + 2 \left\{ \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{12}^{(3)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{11}^{(3)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \right\} \sin(2\theta) + \\
& - 2 \left\{ \frac{\sqrt{3}}{\rho} \left(C_{22}^{(3)} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{21}^{(3)} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \right\} \cos(2\theta) - R'_2 \cos(2\theta + \mu_2),
\end{aligned} \tag{27}$$

где

$$\begin{aligned}
C_{11}^{(3)} &= -\frac{\sqrt{3}\alpha_2}{18} (2\sqrt{3}T_{11} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - \sqrt{3}T_{22} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + 3T_{22} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2)), \\
C_{12}^{(3)} &= -\frac{\sqrt{3}\alpha_2}{18} (2\sqrt{3}T_{11} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - 3T_{22} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - \sqrt{3}T_{22} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2)), \\
C_{21}^{(3)} &= -\frac{\sqrt{3}\alpha_2}{18} (2\sqrt{3}T_{12} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \sqrt{3}T_{21} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - 3T_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2)), \\
C_{22}^{(3)} &= -\frac{\sqrt{3}\alpha_2}{18} (2\sqrt{3}T_{12} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + 3T_{21} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \sqrt{3}T_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2)), \\
T_{11} &= -R'_2 \cos \mu_2 - R'_1 \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(\cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \right) \right\} \cos \mu_1, \\
T_{12} &= R'_2 \sin \mu_2 + R'_1 \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(\cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \right) \right\} \sin \mu_1, \\
T_{21} &= R'_2 \cos \mu_2 + R'_1 \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(\cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) - \sqrt{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \right) \right\} \cos \mu_1, \\
T_{22} &= R'_2 \sin \mu_2 + R'_1 \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(\cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) - \sqrt{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \right) \right\} \sin \mu_1.
\end{aligned}$$

Граничные условия на бесконечности в упругой области в первом приближении имеют вид

$$\sigma_{\rho 2}^{(I)e} = -\cos(2\theta), \quad \tau_{\rho\theta 2}^{(I)e} = \sin(2\theta) \quad \text{при} \quad \rho = \infty. \tag{28}$$

На границе раздела упругой и пластической областей справедливо

$$\sigma_{\rho 2}^{(I)p} = \sigma_{\rho 2}^{(I)e}, \quad \tau_{\rho\theta 2}^{(I)p} = \tau_{\rho\theta 2}^{(I)e} \quad \text{при} \quad \rho = 1. \tag{29}$$

Согласно [1], из соотношений (27), (28), (29) получим напряженное состояние в упругой области:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho 2}^{(I)e} &= \frac{2\alpha_2(K_1-K_2)}{\alpha_1\rho^2} + \frac{2(K_2-K_1)}{\rho^3} (a \cos \theta + b \sin \theta) + \left(-1 + \frac{4}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4}\right) \cos(2\theta) + \\
&+ \left(-\frac{1}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^2}\right) (a_2'' \cos(2\theta) + b_2'' \sin(2\theta)) + \left(\frac{2}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2}\right) (a_2''' \sin(2\theta) + b_2''' \cos(2\theta)), \\
\sigma_{\theta 2}^{(I)e} &= -\frac{2\alpha_2(K_1-K_2)}{\alpha_1\rho^2} - \frac{2(K_2-K_1)}{\rho^3} (a \cos \theta + b \sin \theta) + \left(1 + \frac{3}{\rho^4}\right) \cos(2\theta) + \\
&+ \frac{1}{\rho^4} (a_2'' \cos(2\theta) + b_2'' \sin(2\theta)) - \frac{2}{\rho^4} (-a_2''' \sin(2\theta) + b_2''' \cos(2\theta)), \\
\tau_{\rho\theta 2}^{(I)e} &= \frac{2(K_2-K_1)}{\rho^3} (a \sin \theta + b \cos \theta) + \left(1 + \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4}\right) \sin(2\theta) + \\
&+ \left(-\frac{1}{\rho^4} + \frac{1}{\rho^2}\right) (a_2'' \sin(2\theta) - b_2'' \cos(2\theta)) + \left(\frac{2}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2}\right) (a_2''' \cos(2\theta) + b_2''' \sin(2\theta)),
\end{aligned} \tag{30}$$

где

$$\begin{aligned}
a_2'' &= \alpha_2 T_{11} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \frac{2}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{22} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - \\
&\quad - \frac{1}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{11} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + R_2' \cos \mu_2, \\
b_2'' &= -\frac{2}{3} \sqrt{3} \alpha_2 T_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - \frac{1}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{12} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \\
&\quad + \alpha_2 T_{12} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - R_2' \sin \mu_2, \\
a_2''' &= \alpha_2 T_{21} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \frac{2}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{12} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \\
&\quad + \frac{1}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - R_2' \sin \mu_2, \\
b_2''' &= -\frac{2}{3} \sqrt{3} \alpha_2 T_{11} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \frac{1}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{22} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \\
&\quad + \alpha_2 T_{22} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - R_2' \cos \mu_2.
\end{aligned}$$

Радиус раздела упругой и пластической областей в первом приближении определим из соотношений

$$\begin{aligned}
\rho_s^{(I)} &= \frac{\sigma_{\theta 2}^{(I)p} - \sigma_{\theta 2}^{(I)e}}{\frac{d\sigma_{\theta 2}^{(0)e}}{d\rho} - \frac{d\sigma_{\theta 2}^{(0)p}}{d\rho}} \Bigg|_{\rho=1} = \frac{1}{4K_2} \left(\sigma_{\theta 2}^{(I)e} - \sigma_{\theta 2}^{(I)p} \right) \Bigg|_{\rho=1} = \\
&= \frac{\alpha_2(K_1-K_2)}{K_2\alpha_1} + \frac{(K_2-K_1)}{K_2} (a \cos \theta + b \sin \theta) + \\
&+ \frac{1}{4K_2} \left((-4 - a_2'' + 2b_2''') \cos 2\theta + (b_2'' - 2a_2''') \sin 2\theta - R_2' \cos(2\theta + \mu_2) \right) \Bigg|_{\rho=1}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Таким образом полностью определено напряженное состояние в нулевом и первом приближениях в пластических областях и в упругой области. Определена граница раздела упругой и пластической областей.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
- [2] Ивлев Д. Д., Максимова Л. А., Миронов Б. Г. О соотношениях теории трансляционной идеально-пластической анизотропии в случае плоской деформации // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 2. С. 41–43.
- [3] Ивлев Д. Д., Максимова Л. А. О соотношениях теории трансляционной идеально-пластической анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. Т. 3. № 2 (8). С. 583–584.

[4] Ивлев Д. Д., Миронов Б. Г. О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. Т. 3. № 2 (8). С. 576–579.

[5] Ивлев Д. Д., Максимова Л. А., Миронов Б. Г. О соотношениях теории трансляционной идеальнопластической анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. Т. 3. № 2 (8). С. 580–583.

[6] Фоминых С. О. Двусное растяжение упругопластической пластины с круговым отверстием в случае трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. Т. 3. № 2 (8). С. 610–622.

[7] Кержаев А. П. Упругопластическое состояние двухслойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, при трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 2 (16). С. 71–81.

[8] Кузнецов П. Н. Упругопластическое состояние неоднородной плоскости, ослабленной круговым отверстием, подкрепленной включениями, ограниченными эксцентрическими окружностями, при двусном растяжении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1 (6). С. 134–141.

S. V. Tikhonov, T. I. Rybakova

BIAXIAL STRETCHING OF ELASTOPLASTIC PLAIN WITH ECCENTRIC, CIRCULAR AND ANISOTROPIC INCLUSION

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Abstract. The concept of transmitting anisotropy is entered in works [2]-[5]. Biaxial stretching of an elastoplastic plate with a circular opening in case of transmitting anisotropy is investigated in work [6]. Elasto-plastic condition of the two-layer thick-walled pipe which is under the influence of internal pressure at transmitting anisotropy, in a case when the contour of inclusion is limited by a circle is considered in work [7]. In work [8] the tension non-uniform is defined the plane weakened by a circular opening, supported inclusions, limited eccentric circles, at biaxial stretching. In the present article works [7], [8] in case of biaxial stretching of the anisotropic plane are generalized, inclusion, the limited eccentric circle weakened by an opening, supported. It is supposed that each layer possesses the properties of transmitting anisotropy. The border of an elasto-plastic zone is defined, influence of anisotropic inclusion on the intense is considered condition of the plane.

Keywords: plasticity, elasticity, inclusion, transmitting anisotropy.

REFERENCES

- [1] Ivlev D. D., Yershov L. V. Method of indignations in the theory of an elasto-plastic solids. M.: Science, 1978. 208 p. (in Russian).
- [2] Ivlev D. D., Maximova L. A., Mironov B. G. About ratios of the theory of transmitting ideal and plastic anisotropy in case of flat deformation // *Izv. Russian Academy of Sciences. Mech. Sol.* 2011. № 2. P. 41–43. (in Russian).
- [3] Ivlev D. D., Maximova L.A. About ratios of the theory of transmitting elastoplastic anisotropy at generalization of a condition of plasticity of Mises // *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State.* 2010. Vol. 3. № 2 (8). P. 583–584. (in Russian).
- [4] Ivlev D. D., Mironov B. G. About ratios of transmitting elastoplastic anisotropy at torsion // *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State.* 2010. Vol. 3. № 2 (8). P. 576–579. (in Russian).
- [5] Ivlev D. D., Maximova L. A., Mironov B. G. About ratios of the theory of transmitting elastoplastic anisotropy // *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State.* 2010. Vol. 3. № 2 (8). P. 580–583. (in Russian).
- [6] Fominykh S. O. Biaxial stretching of an elastic plastic plate with a circular opening in case of transmitting anisotropy // *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State.* 2010. Vol. 3. № 2 (8). P. 610–622. (in Russian).

Tikhonov Sergey Vladimirovich

e-mail: strangcheb@mail.ru, Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Department Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary.

Rybakova Tatyana Ivanovna

e-mail: rti2112@mail.ru, Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Department Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary.

[7] Kerzhayev A. P. An elasto-plastic condition of the two-layer thick-walled pipe which is under the influence of internal pressure, at transmitting anisotropy // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2013. № 2 (16). P. 71–81. (in Russian).

[8] Kuznetsov P. N. Elasto-plastic condition of the non-uniform the plane weakened by a circular opening, supported inclusions, limited eccentric circles, at biaxial stretching // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2009. № 1 (6). P. 134–141. (in Russian).

Ю. В. Немировский

ЭФФЕКТИВНОСТЬ РАБОТЫ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ ПЕРЕКРЕСТНЫХ СВЯЗЕЙ В ДИНАМИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича Сибирского
отделения РАН, г. Новосибирск*

Аннотация. Плоские системы перекрёстных балок являются основой защитных преград при воздействии интенсивных нагрузок взрывного типа и широко используются в судостроительной промышленности, на предприятиях химической промышленности, атомной и горнодобывающей промышленности. Расчет степени их повреждаемости в режиме воздействий высокоинтенсивных взрывных нагрузок в случае конструкций из однородных материалов достаточно детально проработан и сводится к расчету повреждаемости совокупности отдельных балок при различных условиях их закрепления [1]–[4]. В последние десятилетия развито большое количество технологий создания слоистых металл – композитных конструкций с практически любым набором конструкционных материалов. В связи с этим возникает необходимость качественного и количественного сравнения эффективности использования слоистых композитных конструкций с эквивалентными конструкциями из однородных материалов. Как и в работах [1]–[4] для всех конструкционных материалов используем модель идеального жесткопластического тела и рассмотрим слоистые конструкции, симметричные в поперечном сечении относительно осей $z = 0$ и $y = 0$.

Ключевые слова: упругопластичность, большие деформации, осесимметричные оболочки, кручение, численное моделирование, вариационно-разностный метод.

УДК: 539.374; 620.17

Для всех конструкционных материалов используем модель идеального жесткопластического тела и рассмотрим слоистые конструкции, симметричные в поперечном сечении относительно осей $z = 0$ и $y = 0$ (рис. 1а).

А в качестве эталонной конструкции будем рассматривать однослойную балку прямоугольного сечения (рис. 1б).

© Немировский Ю. В., 2015
Немировский Юрий Николаевич
e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00102а.)

Поступила 18.09.2015

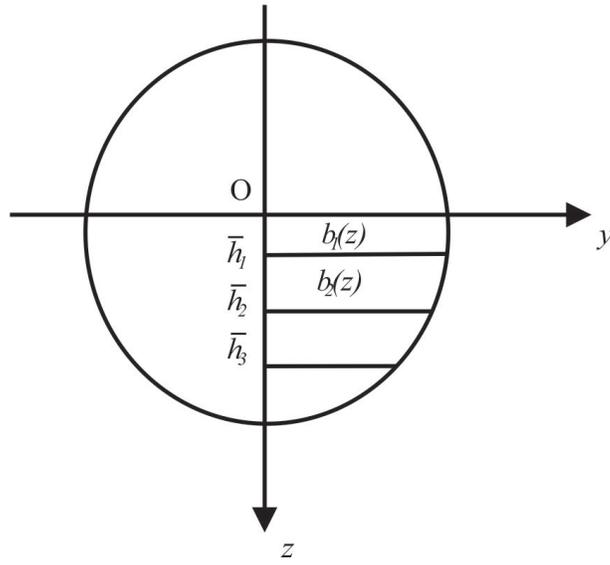


Рис. 1а

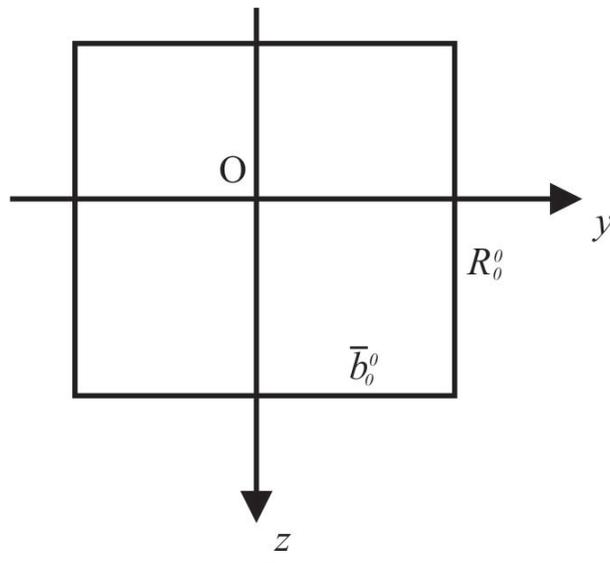


Рис. 1б

Для простоты и определённости будем считать контурную линию на рис. 1а кусочно-линейной. Тогда будем иметь

$$\bar{b}_1(\bar{z}) = \bar{a}_1 + \bar{c}_1 \bar{z}, \bar{a}_1 = \frac{\bar{b}_{i-1} \bar{h}_i - \bar{b}_i \bar{h}_{i-1}}{\bar{h}_i - \bar{h}_{i-1}}, \bar{c}_1 = \frac{\bar{b}_i - \bar{b}_{i-1}}{\bar{h}_i - \bar{h}_{i-1}},$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, \bar{h}_0 = 0$$

Погонный вес сечения слоистой балки

$$\bar{q}_s = 4 \sum_{i=1}^n \bar{q}_{s_i}, \bar{q}_{s_i} = \bar{p}_i \bar{F}_i, \bar{F}_i = \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{b}_i(\bar{z}) d\bar{z}$$

Предельный изгибающий момент

$$\bar{M}_0 = 4 \sum_{i=1}^n \bar{\sigma}_0, \bar{S}_i, \bar{S}_j = \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{b}_i(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z}$$

$\rho_i, \bar{\sigma}_{0i}$ – плотность и предел текучести материала i -го слоя. Для рассматриваемого кусочно-линейного профиля сечения слоистой балки.

$$\bar{F}_i = \frac{1}{2} (\bar{b}_i + \bar{b}_{i-1}) (\bar{h}_i - \bar{h}_{i-1}), \bar{M}_0 = \frac{1}{6} [(\bar{b}_i + \bar{b}_{i-1}) \bar{h}_i^2 + \bar{b}_i \bar{h}_i^2 - 4\bar{b}_i \bar{h}_{i-1}^2]$$

Распределенная нагрузка взрывного типа выбирается в виде:

$$\bar{q}(t) = q^* \phi(t), \phi(t) = e^{-rt}, r = 12/A5;$$

предельная нагрузка будет равна

$$\bar{q}_0 = \bar{q}_s^* - \bar{q}_s, \bar{q}_s^* = \frac{2\bar{M}_0 (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2}{l^2};$$

l – длина балки;

$\alpha = \beta = 1$ – когда оба края шарнирно оперты;

$\alpha = \beta = 2$ – при заземлении краев;

$\alpha = 1, \beta = 2$ – когда левый край шарнирно оперт, правый заземлен;

$\alpha = 2, \beta = 1$ – когда левый край шарнирно оперт, правый заземлен.

Повторяя процедуры, описанные в [1]–[4], нетрудно установить, что если амплитуда нагрузки находится в пределах $\bar{q}_0 \leq \bar{q}^* \leq 3\bar{q}_0$, то степень повреждаемости слоистой балки определяется формулой

$$\bar{\delta}_1(\bar{t}_{1f}) = \frac{3}{2} g \left[\frac{\bar{q}_s^*}{\bar{q}_s^* \left(1 - \frac{\bar{q}_s}{\bar{q}_s^*}\right)} \int_0^{\bar{t}_{1f}} \psi(\bar{t}) d\bar{t} - \frac{\bar{t}_{1f}}{2} \right],$$

\bar{t}_{1f} – время завершения динамического процесса, определяемое из уравнения

$$\frac{\bar{t}_{1f}}{\psi(\bar{t}_{1f})} = \frac{\bar{q}_s^*}{\bar{q}_s^* \left(1 - \frac{\bar{q}_s}{\bar{q}_s^*}\right)}, \psi(t) = \int_0^t \phi(t) dt.$$

При высоких уровнях нагрузки с амплитудами $3\bar{q}_s^* \left(1 - \frac{\bar{q}_s}{\bar{q}_s^*}\right) \leq q^*, (\bar{q}_s \leq \bar{q}_s^*)$ повреждаемость определяется формулой

$$\bar{\delta}_2(\bar{t}_{2f}) = \frac{g\bar{q}_s^*}{\bar{q}_s} \left[\int_0^{\bar{t}_2} \psi(t) dt + \frac{3}{2} \int_{\bar{t}_2}^{\bar{t}_{2f}} \psi(t) dt \right] + \frac{g}{2} \left[\bar{t}_2 - \frac{3\bar{q}_0}{\bar{q}_s} (\bar{t}_{2f}^2 - \bar{t}_2^2) \right].$$

Значения \bar{t}_2 и \bar{t}_{2f} определяются из уравнений

$$\frac{\bar{t}_2}{\psi(\bar{t}_2)} = \frac{\bar{q}_s^*}{3\bar{q}_0}, \quad \frac{\bar{q}_s^*}{\bar{q}_g} \psi(\bar{t}_2) - \frac{\bar{q}_0}{\bar{q}_s} \psi(\bar{t}_{2f}) + 2\bar{t}_2 = 0$$

Для эталонной балки с размерами сечения $2\bar{b}_0^0 \times 2\bar{H}_0^0$ из материала с удельным весом $\bar{\rho}_0^0$ и пределом текучести $\bar{\sigma}_0^0$ будем иметь

$$\bar{M}_0^0 = 2\bar{\sigma}_0^0 \bar{b}_0^0 (\bar{H}_0^0)^2, \bar{q}_s^0 = 4\rho_0^0 \bar{b}_0^0 \bar{H}_0^0$$

Предельные времена и степень повреждаемости эталонной балки обозначим

$$\bar{t}_{1f}^0, \bar{t}_{2f}^0, \bar{\delta}_2^0(\bar{t}_{1f}^0), \bar{\delta}_2^0(\bar{t}_{2f}^0).$$

Они определяются по вышеописанным формулам как частный случай. Тогда можно рассмотреть два случая эффективности:

Эквивалентность по предельным нагрузкам:

$$\bar{q}_0 = \bar{q}_0^0.$$

Соответствующие коэффициенты эффективности будут определяться выражениями:

$$k_5 = \frac{\bar{\delta}_1(\bar{t}_{1f})}{\bar{\delta}_1^0(\bar{t}_{1f})} \text{ при } \min(q_0, \bar{q}_0^0) \leq \bar{q}^* \leq 3 \min(q_0, \bar{q}_0^0),$$

$$k_6 = \frac{\bar{\delta}_1(\bar{t}_{1f})}{\bar{\delta}_2^0(\bar{t}_{2f})} \text{ при } \bar{q}_0 \leq \bar{q}^* \leq 3\bar{q}_0 \text{ и } \bar{q}^* > 3q_0^0,$$

$$k_7 = \frac{\bar{\delta}_2(\bar{t}_{2f})}{\bar{\delta}_1^0(\bar{t}_{1f})} \text{ при } \bar{q}^* \geq 3\bar{q}_0^0 \text{ и } \bar{q}_0 \leq \bar{q}^* \leq 3q_0,$$

$$k_8 = \frac{\bar{\delta}_2(\bar{t}_{2f})}{\bar{\delta}_2^0(\bar{t}_{2f})} \text{ при } \bar{q}^* \geq 3\bar{q}_0 \text{ и } \bar{q}^* \geq 3q_0^0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кейл А. Проблемы пластичности корабельных конструкций при взрывном и ударном нагружении // Механика. 1961, № 2. С. 197–223.
2. Иванов Г. В., Немировский Ю. В., Работнов Ю. Н. Динамика жестко-пластической системы перекрестных связей // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 2. С. 51–57.
3. Немировский Ю. В. Влияние сдвига и инерции вращения на динамический изгиб пластических балок // Динамика сплошной среды. ИГ СО АН СССР. 1975. Вып. 19–20. С. 83–100.
4. Немировский Ю. В. Динамический изгиб армированных пластических стержней // Динамика сплошной среды. ИГ СО АН СССР. 1979. Вып. 41. С. 37–44.

Yu. V. Nemirovsky

EFFICIENCY OF HYBRID SYSTEMS CROSSLINKING DYNAMICALLY

Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk

Abstract. The flat system of cross beams are the backbone of protective barriers when exposed to intensive loads explosive and is widely used in the shipbuilding industry, the chemical industry, nuclear and mining industry. The calculation of the degree of damage to their mode of intensive exposure to high explosive load in the case of structures made of homogeneous materials sufficiently detailed and is reduced to the calculation of damage to the aggregate of individual beams under different conditions of their attachment [1-4]. In recent decades, developed a large number of technologies for creating layered metal composite structures with virtually any set of structural materials. In this regard, it becomes necessary to qualitatively and quantitatively comparing the efficiency of use of layered composite structures with equivalent structures made of homogeneous materials. As in [1-4] for all structural materials using a model of ideal rigid-plastic body and consider layered structure, symmetrical in cross-section relative to the axis $z = 0$ and $y = 0$.

Keywords: elastic-plastic problem, stress, strain, displacement, viscosity, hardening.

REFERENCES

1. Cale A. Problems plasticity ship designs under explosive and impact loading // Mechanics. 1961. № 2. P. 197–223. (in Russian).
2. Ivanov G. V., Nemirovsky Y. V., Rabotnov N. dynamics of rigid-plastic cross links // Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. OTN. Mechanics and Mechanical Engineering. 1963. № 2. P. 51–57. (in Russian).
3. Nemirovsky Y. V. Effect of translation and rotational inertia in the dynamic bending plastic beams // Dynamics of continuous media. IG SB RAS. 1975. Issue 19–20. P. 83–100. (in Russian).
4. Nemirovsky Y. V. The dynamic bending of reinforced plastic rods // Dynamics of continuous media. IG SB RAS. 1979. Issue 41. P. 37–44. (in Russian).

Nemirovsky Yuri Vladimirovich

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk.

В. Д. Кулиев, Н. Л. Борисова

ТРЕЩИНА ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА В ДВУХСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛАХ

Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва

Аннотация. Предполагается, что биупругие слои в композите жестко сцеплены между собой вдоль плоскостей $y = \pm h_1$. Центральный слой $|y| \leq h_1, |x| < \infty$ содержит трещину продольного сдвига $y = 0, |x| \leq l$, параллельную плоскостям $y = \pm h_1$ и $y = \pm h_2$ ($h_2 > h_1$). Поверхности полосы $y = \pm h_2$ свободны от внешних нагрузок. К берегам трещины приложены по величине и противоположно направленные напряжения.

Методы, разработанные в статье [1], позволяют построить решение этой задачи. Определен коэффициент интенсивности напряжений K_{III} и дан соответствующий анализ.

Ключевые слова: коэффициент интенсивности напряжений, сингулярное (особое) интегральное уравнение второго рода типа Коши, интегральное уравнение Фредгольма второго рода с непрерывным ядром, упругая среда, косинус-преобразование Фурье.

УДК: 539.375

§1. Предварительные замечания. Пусть функция $f(x) \in K_{1/2}[-l, l]$, т. е.

$$f(x) = \frac{f_0(x)}{\sqrt{l^2 - x^2}}, f_0(x) = -f_0(-x), \quad (1.1)$$

$$f_0(x) \in H^\beta[0, l], \quad 1/2 < \beta \leq 1.$$

Рассмотрим интеграл

$$B(x) = \frac{d}{dx} \frac{2}{\pi} \int_0^l f(t) \left(\int_0^\infty \frac{\sin ty \sin xy}{y} dy \right) dt. \quad (1.2)$$

© Кулиев В. Д., Борисова Н. Л., 2015

Кулиев Валех Джафарович

e-mail: pmdekanat@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва.

Борисова Наталья Львовна

e-mail: nbolo@yandex.ru, старший преподаватель кафедры прикладной математики, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва.

Поступила 16.02.2015

В монографии [2] двумя способами (с учетом (1.1)): первый способ – с помощью применения аналога регулярного метода Чезаро для рядов [3] к расходящемуся интегралу (см. [2] с. 45–47):

$$\int_0^{\infty} \sin ty \cos xy dy = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \sin y(t+x) dy + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \sin y(t-x) dy. \quad (1.3)$$

и второй способ – с помощью известного в анализе метода вычисления интеграла Фруллани (см. [2], с. 59–60):

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ty \sin xy}{y} dy \quad (1.4)$$

доказано, что

$$B(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{f(t)}{t-x} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{tf(t)}{t^2-x^2} dt. \quad (1.5)$$

Замечание 1. Для нахождения “обобщенного значения” расходящихся интегралов в правой части (1.3) применим и аналог метода Пуассона–Абеля для рядов [3].

Формула (1.5), получаемая разными способами из (1.2) с учетом (1.1), необходима для применения второго метода, разработанного в [1], к решению класса смешанных краевых задач.

Замечание 2. Важно отметить, что существуют различные теоремы тауберова типа (“лимитирующие теоремы”) для методов Чезаро и Пуассона–Абеля в теории расходящихся рядов [3]. А это говорит о том, что никакие методы, в том числе и методы Чезаро и Пуассона–Абеля, не в силах суммировать быстро или слишком медленно расходящиеся ряды. Следовательно, аналог этих и других методов неприменим к быстро расходящимся интегралам.

§2. Смешанная краевая задача и ее решение. Пусть однородные изотропные упругие слои (первый слой с упругим свойством μ_1 занимает область $|y| \leq h_1, |x| < \infty$, а второй слой с упругим свойством μ_2 – область $h_1 \leq y \leq h_2, |x| < \infty$ и $-h_2 \leq y \leq -h_1, |x| < \infty$) жестко сцеплены между собой вдоль плоскостей $y = \pm h_1$ (рис. 1).

Далее, пусть центральный слой $|y| \leq h_1, |x| < \infty$ содержит трещину продольного сдвига $y = 0, |x| \leq l$, параллельную плоскостям $y = \pm h_1$ и $y = \pm h_2$. Поверхности полосы $y = \pm h_2$ свободны от внешних нагрузок. К берегам трещины приложены равные по величине и противоположно направленные напряжения. На бесконечности (при $x \rightarrow \infty$) напряжения и смещения равны нулю.

Таким образом, приходим к смешанной краевой задаче:

Граничные условия:

$$|x| < \infty, (\sigma_{yz})_2(x, \pm h_2) = 0; \quad (2.1)$$

$$|x| < \infty, (\sigma_{yz})_2(x, \pm h_1 \pm 0) = (\sigma_{yz})_1(x, \pm h_1 \mp 0); \quad (2.2)$$

$$|x| < \infty, w_1(x, \pm h_1 \mp 0) = w_2(x, \pm h_1 \pm 0); \quad (2.3)$$

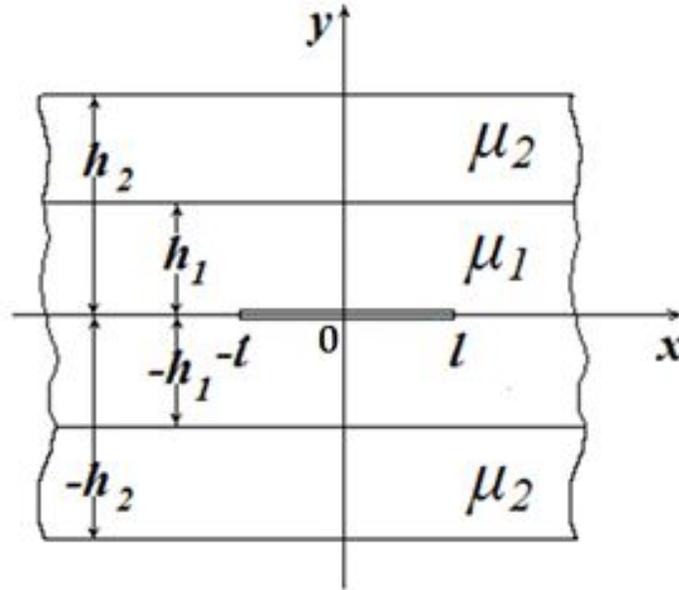


Рис. 1

$$|x| \leq l, (\sigma_{yz})_1(x, \pm 0) = -\sigma(x); \quad (2.4)$$

$$|x| > l, w_1(x, \pm 0) = 0. \quad (2.5)$$

Условия на конце трещины:

$$\lim_{x \rightarrow l-0} \left\{ \sqrt{2\pi(l-x)} (\sigma_{xz})_1(x, +0) \right\} = -K_{III} \quad (2.6)$$

или

$$\lim_{x \rightarrow l+0} \left\{ \sqrt{2\pi(x-l)} (\sigma_{yz})_1(x, 0) \right\} = K_{III}. \quad (2.7)$$

Условия на бесконечности (с учетом (2.4) и (2.5)):

$$|x| \rightarrow \infty, |y| \leq h_2, \quad (\sigma_{xz})_j \rightarrow 0, (\sigma_{yz})_j \rightarrow 0, w_j \rightarrow 0 \quad (2.8)$$

$$(j = 1, 2).$$

Здесь $\sigma(x)$ – заданная четная непрерывная функция, причем $\sigma(x) \in H^\beta[0, a]$, где $1/2 < \beta \leq 1$.

Остальные обозначения – общепринятые (см., например, [2]). Рассматриваемая задача, очевидно, симметрична относительно плоскостей $x = 0$ и $y = 0$. Поэтому построим решение смешанной краевой задачи (2.1)–(2.8) в области $0 \leq y \leq h_2, x \geq 0$.

Поступая точно также, как в [4], в силу условий (2.1)–(2.3) и (2.8) имеем: во второй среде ($h_1 \leq y \leq h_2, x \geq 0$, упругое свойство μ_2):

$$w_2(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} A(\lambda) \frac{ch\lambda(h_2 - y)}{ch\lambda h_2} \cos \lambda x d\lambda, \quad (2.9)$$

$$(\sigma_{yz})_2(x, y) = -\mu_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda A(\lambda) \frac{sh\lambda(h_2 - y)}{ch\lambda h_2} \cos \lambda x d\lambda, \quad (2.10)$$

$$(\sigma_{xz})_2(x, y) = -\mu_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda A(\lambda) \frac{ch\lambda(h_2 - y)}{ch\lambda h_2} \sin \lambda x d\lambda; \quad (2.11)$$

в первой среде ($0 \leq y \leq h_1, x \geq 0$, упругое свойство μ_1):

$$w_1(x, y) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{A(\lambda)}{ch\lambda h_2} [kch\lambda h \cdot ch\lambda(h_1 - y) + sh\lambda h \cdot sh\lambda(h_1 - y)] \cos \lambda x d\lambda, \quad (2.12)$$

$$(\sigma_{yz})_1(x, y) = -\mu_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda \frac{A(\lambda)}{ch\lambda h_2} [kch\lambda h \cdot sh\lambda(h_1 - y) + sh\lambda h \cdot ch\lambda(h_1 - y)] \cos \lambda x d\lambda, \quad (2.13)$$

$$(\sigma_{xz})_1(x, y) = -\mu_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda \frac{A(\lambda)}{ch\lambda h_2} [kch\lambda h \cdot ch\lambda(h_1 - y) + sh\lambda h \cdot sh\lambda(h_1 - y)] \sin \lambda x d\lambda \quad (2.14)$$

$$(h = h_2 - h_1, k = \mu_1/\mu_2).$$

В формулах (2.9)–(2.14) $A(\lambda)$ - неизвестная функция, подлежащая к определению из оставшихся условий (2.4)–(2.7).

Функция $w_1(x, +0)$ будет удовлетворять условию (2.5) только в том случае, если функция $A(\lambda)$ определяется так (см. [1]):

$$A(\lambda) = \frac{kch\lambda h_2}{kch\lambda h \cdot ch\lambda h_1 + sh\lambda h \cdot sh\lambda h_1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^l f(t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt, \quad (2.15)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^l f(t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^l t \psi(t) J_0(\lambda t) dt, \quad (2.16)$$

$$\psi(t) = \frac{2}{\pi} \int_t^l \frac{f(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - t^2}} d\tau, f(t) = -\frac{d}{dt} \int_t^l \frac{\tau \psi(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - t^2}} d\tau. \quad (2.17)$$

Здесь $f(t)$ (или $\psi(t)$) – новая неизвестная функция.

Действительно, учитывая (2.15) в (2.12) силу разрывного множителя Дирихле (см. [4]) или разрывного множителя Вебера (см. [2], с.44), если учесть и (2.16), условие (2.5) удовлетворяется автоматически.

При этом легко доказывается, что $f(t) \in K_{1/2}[0, l]$ (см. [4]). Поэтому, в силу теоремы 3 в [1], четная функция $\psi(t) \in H^\beta[0, l]$, $1/2 < \beta \leq 1$. Эти условия в силу леммы 5 и теорем 1, 3, 4 и 5 в [1] дают возможность равносильного перехода от одного интегрального уравнения к другому.

Равенство (2.5) следует учесть в формулах (2.9)–(2.14).

Учитывая (2.5) в (2.13), получим:

$$(\sigma_{yz})_1(x, y) = -\mu_1 \frac{2}{\pi} \int_0^l f(t) \left[\int_0^\infty \frac{kch\lambda h \cdot sh\lambda(h_1 - y) + sh\lambda h \cdot ch\lambda(h_1 - y)}{kch\lambda h \cdot ch\lambda h_1 + sh\lambda h \cdot sh\lambda h_1} \times \right. \\ \left. \sin \lambda t \cos \lambda x d\lambda \right] dt. \quad (2.18)$$

Отсюда при $h=0$, (т. е. $h_1 = h_2$), поступая точно так же, как в [4], удовлетворив условию (2.4), приходим к сингулярному интегральному (особому) уравнению:

$$\frac{\sigma(x)}{\mu_1} = \frac{1}{4h_1} \frac{1}{ch \frac{\pi x}{2h_1}} \int_{-l}^l f(t) \frac{2th \frac{\pi}{2h_1} t}{ch \frac{\pi}{2h_1} t \left(th^2 \frac{\pi}{2h_1} t - th^2 \frac{\pi}{2h_1} x \right)} dt. \quad (2.19)$$

При этом коэффициент интенсивности напряжений K_{III} в силу (2.6) определяется так (более подробно см. [4], пункт 2.3, (2.38), а также [1]):

$$K_{III} = \sqrt{\frac{2}{h_1} th \frac{\pi l}{2h_1}} \int_0^l \frac{\sigma(t) dt}{ch \frac{\pi t}{2h_1} \sqrt{th^2 \frac{\pi}{2h_1} - th^2 \frac{\pi t}{2h_1}}}. \quad (2.20)$$

Анализ коэффициента интенсивности напряжений K_{III} проведен в [4] (см. (2.39) и (2.40)).

Теперь вернемся к формуле (2.18). Формулу (2.18) представим в виде:

$$(\sigma_{yz})_1(x, y) = -\mu_1 \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^l f(t) \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{kch\lambda h \cdot sh\lambda(h_1 - y) + sh\lambda h \cdot ch\lambda(h_1 - y)}{kch\lambda h \cdot ch\lambda h_1 + sh\lambda h \cdot sh\lambda h_1} - \right. \right. \\ \left. \left. -1 \right] \sin \lambda t \frac{\sin \lambda x}{\lambda} d\lambda \right\} dt - \mu_1 \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^l f(t) \left\{ \int_0^\infty \frac{\sin \lambda t \sin \lambda x}{\lambda} d\lambda \right\} dt \quad (2.21) \\ (0 \leq y \leq h_1, x \geq 0).$$

Из (2.21), удовлетворив условию (2.4), в силу (1.5) приходим к следующему сингулярному интегральному уравнению второго рода типа Коши:

$$\frac{\sigma(x)}{\mu_1} = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{f(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(t) K(x, t) dt, \quad (2.22)$$

$$K(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda h_1} (sh\lambda h - kch\lambda h)}{kch\lambda h \cdot ch\lambda h_1 + sh\lambda h \cdot sh\lambda h_1} \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda \quad (2.23)$$

$$(|x| < l).$$

Заметим, что

$$f(t) \in K_{1/2}[-l, l], \sigma(-x) = \sigma(x),$$

причем (см. [2], с. 336):

$$\mu_1 \frac{\partial w_1(x, 0)}{\partial x} = (\sigma_{xz})_1(x, y) = -\mu_1 f(x). \quad (2.24)$$

Из (2.6) и (2.24) в силу (1.1) имеем:

$$K_{III} = \sqrt{\pi l} \mu_1 \frac{f_0(l)}{l}. \quad (2.25)$$

Теперь сведем сингулярное интегральное уравнение (2.22) к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно неизвестной функции $\psi(x)$. Определим функцию $\psi(x)$ по формуле:

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^l \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau^2 - x^2}}, \quad (2.26)$$

где функция $f(x)$ является плотностью особого интеграла в уравнении (2.22).

Поскольку плотность особого интеграла $f(x) \in K_{1/2}[-l, l]$ (см. (1.1)), то в силу теоремы 3 в [1] $\psi(x) \in H^\beta[0, l]$, причем $\psi(-x) = \psi(x)$. Кроме того, поскольку функция $\psi(x)$ определяется формулой (2.26), то в силу леммы 5 в [1] справедливо равенство (2.16). Заменяя в (2.22) x на τ с учетом (2.16), получаем:

$$\frac{\sigma(\tau)}{\mu_1} = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{f(t)}{t - \tau} dt + \int_0^l \psi(t) K_0(\tau, t) dt \quad (2.27)$$

$$K_0(\tau, t) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda t e^{-\lambda h_1} (sh\lambda h - kch\lambda h)}{kch\lambda h \cdot ch\lambda h_1 + sh\lambda h \cdot sh\lambda h_1} J_0(\lambda t) \cos \lambda \tau d\lambda.$$

Применив к обеим частям (2.27) оператор типа Абеля (см. теорему 1 в [1]), находим:

$$\frac{1}{\mu_1} \int_0^x \frac{\sigma(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} \int_{-l}^l \frac{f(t)}{t - \tau} dt d\tau +$$

$$+ \frac{\pi}{2} \int_0^l \psi(t) K_\phi(x, t) dt, \quad (2.28)$$

$$K_\phi(x, t) = \int_0^\infty \frac{\lambda t e^{-\lambda h_1} (sh\lambda h - kch\lambda h)}{kch\lambda h \cdot ch\lambda h_1 + sh\lambda h \cdot sh\lambda h_1} J_0(\lambda t) J_0(\lambda x) d\lambda. \quad (2.29)$$

Поскольку $f(x) \in K_{1/2}[0, l[$, то в силу теоремы 1 в [1] (см. также (3.3) и (3.4) в [1]), то

$$\frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} \int_{-l}^l \frac{f(t)}{t - \tau} dt d\tau = \frac{\pi}{2} \psi(x), \quad (2.30)$$

где $\psi(x)$ определяется формулой (2.26).

Учитывая (2.30) в (2.28), приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с непрерывным ядром:

$$\frac{2}{\mu_1 \pi} \int_0^x \frac{\sigma(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau = \psi(x) + \int_0^l \psi(t) K_\phi(x, t) dt. \quad (2.31)$$

Здесь ядро уравнения Фредгольма $K_\phi(x, t)$ определяется формулой (2.29). Поскольку $\psi(l) = f_0(l)/l$ (см. лемму 2, (2.42) в [1]), то из (2.24) следует:

$$K_{III} = \sqrt{\pi l} \mu_1 \psi(l). \quad (2.32)$$

Замечание 3. Предположим, что функции $\psi(t)$ и $f(t)$ связаны между собой формулами (2.17). Далее, пусть $\psi(t) \in B[0, l]$ (см. определение 6 в [1]). Тогда:

1⁰. В силу теоремы 4 в [1] $f(t) \in K_{1/2}[0, l[$ (см. (1.1)).

2⁰. В силу леммы 5 в [1] имеет место равенство (2.16).

С помощью формулы обращения Абеля, а также формул (2.16) и (2.17) и (2.72) в [1] (при $\delta = 1/2$) из (2.31) приходим к интегральному уравнению (2.22).

§3. Анализ коэффициента интенсивности напряжений

Пусть $k=1$. Тогда из (2.23) находим:

$$K(x, t) = -\frac{t}{t^2 - x^2} + \frac{\pi}{4h_2 ch \frac{\pi x}{2h_2}} \cdot \frac{2th \frac{\pi}{2h_2} t}{\left(th^2 \frac{\pi}{2h_2} t - th^2 \frac{\pi}{2h_2} x\right) ch \frac{\pi}{2h_2} t}. \quad (3.1)$$

Учитывая (3.1) в (2.22), получаем:

$$\frac{\sigma(x)}{\mu_1} = \frac{1}{4h_2} \frac{1}{ch \frac{\pi x}{2h_2}} \int_{-l}^l f(t) \frac{2th \frac{\pi}{2h_2} t}{\left(th^2 \frac{\pi}{2h_2} t - th^2 \frac{\pi}{2h_2} x\right) ch \frac{\pi}{2h_2} t} dt.$$

Отсюда в силу (1.1), (2.24) и (1.3) в [4], см. также [1], [5], имеем:

$$K_{III} = \sqrt{\frac{2}{h_2} th \frac{\pi l}{2h_2}} \int_0^l \frac{\sigma(t) dt}{ch \frac{\pi t}{2h_2} \sqrt{th^2 \frac{\pi l}{2h_2} - th^2 \frac{\pi t}{2h_2}}},$$

что и следовало ожидать.

Пусть теперь $\sigma(x) = \sigma_0 \equiv const$. Введем обозначения:

$$x = l\xi, t = l\eta,$$

$$\frac{\psi(x)\mu_1}{\sigma_0} = \frac{\psi(l\xi)\mu_1}{\sigma_0} = \Psi(\xi), \quad lK_\phi(l\xi, l\eta) = K_\phi^*(\xi, \eta). \quad (3.2)$$

Тогда из (2.29) и (2.31) имеем:

$$1 = \Psi(\xi) - \int_0^1 \Psi(\eta) K_\phi^*(\xi, \eta) d\eta, \quad (3.3)$$

$$K_\phi^*(\xi, \eta) = \left(\frac{l}{h_1}\right)^2 \int_0^\infty \frac{u\eta e^{-u} \left[k - th \left(\frac{uh}{h_1} \right) \right]}{chu \left[k + th \left(\frac{uh}{h_1} \right) \right] th u} J_0\left(u \frac{l}{h_1} \eta\right) J_0\left(u \frac{l}{h_1} \xi\right) du \quad (3.4)$$

$$\left(0 \leq \xi \leq 1, \frac{h}{h_1} = \frac{h_2}{h_1} - 1, h_2 > h_1 \right).$$

Из (2.32) в силу (3.2) и (3.4) получаем:

$$K_{III} = \sigma_0 \sqrt{\pi l} \Psi \left(1, k, \frac{h}{h_1}, \frac{l}{h_1} \right). \quad (3.5)$$

Интегральное уравнение (3.5) с непрерывным ядром (3.4) можно численно решить (при заданных параметрах $k, \frac{h}{h_1}, \frac{l}{h_1}$) заменой его конечной системой линейных алгебраических уравнений [6] (с. 282-285):

$$\Psi(x_i) - \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} K_\phi^*(x_i, x_j) \Psi(x_j) = 1 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (3.6)$$

Здесь n – число разбиений отрезка интегрирования $[0,1]$, причем $x_1=0, x_n=1$.

Из (3.3) и (3.4) следует:

1⁰. Если $h_2 \rightarrow \infty$ и если $k=1$, то поправочная функция $\Psi \left(1, k, \infty, \frac{l}{h_1} \right) = 1$ и, следовательно,

$$K_{III} = \sigma_0 \sqrt{\pi l}. \quad (3.7)$$

2⁰. Если $h_1 \neq h_2$ и если $l \ll h_1$, то для любого $k \in]0, \infty]$ и любого $h/h_1 > 1$:

$$\Psi \left(1, k, \frac{h}{h_1}, \frac{l}{h_1} \right) \approx 1.$$

Следовательно,

$$K_{III} \approx \sigma_0 \sqrt{\pi l}.$$

3⁰. Если $k > 1$ и если $h_1 \neq h_2$ (т.е. $h > 0$), то с увеличением l/h_1 ($h_1 = const$) функция $\Psi \left(1, k, \frac{h}{h_1}, \frac{l}{h_1} \right)$ при фиксированных значениях h/h_1 и k увеличивается, что следует из системы линейных алгебраических уравнений (3.6).

В этом случае из условия $K_{III} = K_{IIIc}$, где K_{IIIc} – трещиностойкость центрального слоя с упругим свойством μ_1 , можно найти либо критические напряжения, либо критическую длину трещины $l_{кр}$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кулиев В. Д. Новые эффективные методы решения класса смешанных краевых задач // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1 (23). С. 132–162.
- [2] Кулиев В. Д. Сингулярные краевые задачи. М.: Физматлит. 2005, 720 с.
- [3] Харди Г. Г. Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951. 505 с.
- [4] Кулиев В. Д., Борисова Н. Л. Трещина продольного сдвига, находящаяся на границе раздела двух биупругих полос разной толщины. Новые явления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2 (24). С. 33–49.
- [5] Кулиев В. Д., Обращение особого интеграла с обобщенным ядром Коши и одно его применение // Сборник трудов X Международной научной школы “Гидродинамика больших скоростей” и Международной научной конференции “Гидродинамика. Механика. Энергетические установки.” (к 145-летию со дня рождения академика А. Н. Крылова). Чебоксары: ЧПИ МГОУ, 2008. С. 317–333.
- [6] Журавлева Т. Ю., Конев Ф. Б., Кулиев В. Д., Панихава Ш. И. Основы информатики. М.: Эксим, 2000. 288 с.

V. D. Kuliev, N. L. Borisova

CRACK OF LONGITUDINAL SHEAR IN TWO-LAYER COMPOSITE MATERIALS

Moscow State Engineering University (MAMI), Moscow

Abstract. It is assumed that the composite layers bi- elastic rigidly linked to each other along planes $y = \pm h_1$. The central layer $|y| \leq h_1, |x| < \infty$ comprises longitudinal shear crack $y = 0, |x| \leq l$ parallel to the plane $y = \pm h_1$ and $y = \pm h_2$ ($h_2 > h_1$). Strip surface $y = \pm h_2$ are free from external loads. By the shores of the crack attached in voltage which have equal magnitude and opposite direction.

The methods developed in [1] allow us to construct a solution to this problem. Defined stress intensity factor K_{III} and given appropriate analysis.

Keywords: the stress intensity factor, singular integral equation of the second kind of Cauchy type, Fredholm integral equation of the second kind with a continuous kernel, elastic medium, the Fourier cosine transform.

REFERENCES

[1] Kuliev V. D. New effective methods for solving a class of mixed boundary value problems // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. № 1 (23). P. 132–162. (in Russian).

[2] Kuliev V. D. Singular boundary value problems. M.: FIZMATLIT, 2005. 720 p. (in Russian).

[3] Hardy G. G. Divergent series. M.: IL, 1951. 505 p. (in Russian).

[4] Kuliev V. D., Borisova N. L. Crack longitudinal shear, located at the interface of two elastic bands of varying thickness. New developments // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. № 2 (24). P. 33–49. (in Russian).

[5] Kuliev V. D. Handling the singular integral with generalized Cauchy kernel and one its application // Proceedings of X International Scientific School “ Hydrodynamics high speeds ” and the International Scientific Conference “ Hydrodynamics. Mechanics. Power plants. ” (To the 145th anniversary of Krylov). Cheboksary: PRF MGOU, 2008. P. 317–333. (in Russian).

[6] Zhuravlev T. Y., Konev F. B., Kuliev V. D., Panihava Sh. I. The Basics Informatics. M.: Exim, 2000. 288 p. (in Russian).

Kuliev Valekh Dzhafarovich

e-mail: pmdekanat@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of the Department of the Applied Mathematics, Moscow State University of Mechanical Engineering (MAMI), Moscow.

Borisova Natalia Lvovna

e-mail: nbolo@yandex.ru, Department of the Applied Mathematics, Moscow State University of Mechanical Engineering (MAMI), Moscow.

И. Е. Костиков¹, Е. Е. Кузнецов¹, И. Н. Матченко², Н. М. Матченко¹,
И. А. Перельгин¹, Е. С. Фомичев¹

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ ЛИСТОВЫХ ПРОКАТНЫХ СТАЛЕЙ

¹ Тульский государственный университет, г. Тула

² Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,
г. Чебоксары

Аннотация. Обсуждаются границы применения условия пластичности Мизеса–Хилла для описания пластической анизотропии листовых прокатных металлов.

Ключевые слова: анизотропия, пластичность, эксперименты.

УДК: 539.3

1. Для листовых прокатных металлов характерна анизотропия пластических свойств [1]. В инженерной практике проектирования процессов обработки листовых металлов давлением для описания пластической анизотропии обычно используется

© Костиков И. Е., Кузнецов Е. Е., Матченко И. Н., Матченко Н. М., Перельгин И. А., Фомичев Е. С., 2015

Костиков Иван Евгеньевич

e-mail: eks_05@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет, г. Тула.

Кузнецов Евгений Евгеньевич

e-mail: eks_05@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет, г. Тула.

Матченко Илья Николаевич

e-mail: eks_05@mail.ru, ведущий научный сотрудник, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Матченко Николай Михайлович

e-mail: eks_05@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики пластического формоизменения, Тульский государственный университет, г. Тула.

Перельгин Игорь Александрович

e-mail: eks_05@mail.ru, инженер кафедры механики пластического формоизменения, Тульский государственный университет, г. Тула.

Фомичев Евгений Степанович

e-mail: eks_05@mail.ru, инженер кафедры механики пластического формоизменения, Тульский государственный университет, г. Тула.

Поступила 18.09.2015

условие пластичности Мизеса–Хилла [2], записанное для случая плоского напряженного состояния:

$$F\sigma_y^2 + G\sigma_x^2 + HG(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2N\sigma_{xy}^2 = 1, \quad (1.1)$$

где σ_x , σ_y , σ_{xy} — компоненты тензора напряжений, F , G , H , N — механические характеристики пластической анизотропии, подлежащие экспериментальному определению.

К условию пластичности (1.1) присоединяется ассоциированный закон пластического течения:

$$\begin{aligned} de_x &= [H(\sigma_x - \sigma_y) + G\sigma_x]d\mu, & de_y &= [F\sigma_y + H(\sigma_y - \sigma_x)]d\mu, \\ de_z &= -(G\sigma_x + F\sigma_y)d\mu, & de_{xy} &= N\sigma_{xy}d\mu, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где de_x , de_y , de_z , de_{xy} — приращения компонент тензора деформаций.

Принимается гипотеза несжимаемости пластического течения:

$$de_x + de_y + de_z = 0. \quad (1.3)$$

Для определения характеристик F , G , H , N пластической анизотропии прокатного металла используются эксперименты на растяжение образцов, вырезанных в направлении прокатки, поперек прокатки и под углом $\pi/4$ к направлению прокатки.

2. В связи с тем, что в экспериментах получают шесть характеристик пластической анизотропии (три значения пределов текучести σ_0 , $\sigma_{\pi/4}$, $\sigma_{\pi/2}$ и три показателя пластической анизотропии R_0 , $R_{\pi/4}$, $R_{\pi/2}$ [1], [2]), а условие пластичности Мизеса–Хилла (1) содержит только четыре константы, возникают два условия совместности экспериментально найденных характеристик пластической анизотропии.

В экспериментах по растяжению образцов, вырезанных в направлении прокатки и поперек прокатки, вычисляют два значения константы H :

$$H = R_0/(1 + R_0)\sigma_{s0}^2, \quad H = R_{\pi/2}/(1 + R_{\pi/2})\sigma_{s\pi/2}^2, \quad (2.2)$$

где R_0 , $R_{\pi/2}$ — показатели анизотропии вдоль и поперек прокатки.

Из соотношений (2.2) вытекает критерий совместности K_I :

$$K_I = |(H_0 - H_{\pi/2})/H_c| \cdot 100\%, \quad (2.3)$$

где $H_c = (H_0 + H_{\pi/2})/2$.

Из эксперимента на растяжение образцов, вырезанных под углом $\pi/4$ к направлению прокатки, вычисляют два значения механической характеристики N :

$$N = N_1 = 2/\sigma_{\pi/4}^2 - 0,5(F + G), \quad N = N_2 = (R_{xy} + 0,5)(F + G). \quad (2.4)$$

Из соотношений (2.4) вытекает критерий совместности K_{II} :

$$K_{II} = |(N_1 - N_2)/N_c| 100\%, \quad (2.5)$$

где $N_c = (N_1 + N_2)/2$.

В таблице 2.1 приведены результаты вычисления показателей совместности экспериментально определенных механических характеристик [1].

3. Ниже приводятся данные экспериментов на листовых сталях. Одноосному растяжению подвергались плоские стандартные образцы, вырезанные под углами 0,45 и 90° по отношению к прокатке по шесть штук каждого вида, в соответствии с ГОСТ 11701-84 ($h_0 < 4$ мм). Точность размеров образцов обеспечивалась их обработкой в специальных шаблонах.

Предварительно перед испытаниями на образец в зоне расчетной длины a_0 наносились квадратные ячейки со стороной 10 мм, которые при погрешности измерения размера 0,004... 0,005 мм обеспечивают точность получения величин с ошибкой, не превышающей 0,25 %.

Таблица 2.1

Материал	σ_{s0} МПа	$\sigma_{s\pi/4}$ МПа	$\sigma_{s\pi/2}$ МПа	R_0	$R_{\pi/4}$	$R_{\pi/2}$	K_I	K_{II}
Сталь								
08кп	208.3	255.8	218.0	1.31	0,70	2,12	9,13	9,68
11ЮА	643.0	608.0	690.0	1.00	0.50	1.25	3,57	67,76
12Х18Н9	362.3	336.1	360.4	0.77	1.15	0.76	0,53	7,26
10 (отожженная)	246.3	242.0	245.0	0.80	0.83	0.80	0,5	1,61
СтЗсп	280.0	270.0	280.0	0.88	1.00	0.93	3,12	3,9
Алюминиевые сплавы								
АМг6М	171.0	160.0	171.0	0.73	0.85	0.65	6,2	5,6
АМг2М	68.0	68.0	66.0	0.54	0.71	0.47	2,87	22,93
АМцАМ	72.7	65.1	78.8	0.28	0.97	0.33	3,69	15,59
Латунь Л63	215.0	210.0	225.0	0.67	0.82	0.76	1,45	1,97

Ячейки с точностью до 0,0025 ... 0,003 мм наносились алмазным индентором на измерительном микроскопе УИМ-21 с приставкой ПМТ-3. Усилие на инденторе подбиралось таким образом, чтобы глубина рисок не влияла на характер разрыва образца и в то же время риска была устойчива и хорошо просматривалась при измерении ячейки после растяжения образца.

Растяжение образцов производилось по этапам на универсальных испытательных машинах Р-5 и УМЭ-ЮТМ до разрушения с записью индикаторных диаграмм.

До испытаний и на каждом этапе испытаний размеры ячеек образцов измерялись на том же микроскопе.

На каждом этапе фиксировались усилие, изменение длины, ширины и толщины образца в области нанесенных ячеек и находились величины коэффициентов анизотропии:

$$R_\alpha = e_b/e_h, \quad F_\alpha = e_h/e_a, \quad Q_\alpha = e_b/e_a,$$

где

$$e_a = \ln(a/a_0), \quad e_b = \ln(b/b_0), \quad e_h = \ln(h/h_0),$$

а a_0 , b_0 , h_0 , a , b , h — исходные и текущие на каждом этапе растяжения в процессе деформации длина, ширина и толщина ячейки образца в пределах равномерной

деформации. Заметим, что замеры длины a , ширины b и толщины h в процессе эксперимента проводились микрометром со сферическим наконечником малого радиуса с точностью до 0,005 мм.

Также определялась величина коэффициентов анизотропии R_α , F_α , Q_α на каждом этапе деформирования по замерам ячейки:

$$F_\alpha = e_{h\alpha}/e_{a\alpha}, \quad Q_\alpha = e_{b\alpha}/e_{a\alpha}, \quad R_\alpha = e_{b\alpha}/e_{h\alpha}.$$

Деформации образцов по ширине $e_{b\alpha}$, длине $e_{a\alpha}$ и толщине $e_{h\alpha}$ определялись по формулам:

$$e_{a\alpha} = \ln(u_{a\alpha}/u_{a0\alpha}), \quad e_{b\alpha} = \ln(u_{b\alpha}/u_{b0\alpha}), \quad e_{h\alpha} = \ln(u_{h\alpha}/u_{h0\alpha}),$$

где $u_{a\alpha}$, $u_{a0\alpha}$, $u_{b\alpha}$, $u_{b0\alpha}$, $u_{h\alpha}$, $u_{h0\alpha}$ — размеры ячейки вдоль, поперек и по толщине образца до и после этапа нагружения.

Для получения наиболее достоверных результатов при максимальной равномерной деформации использовалась та часть разорванного образца, в которой ячейка была наиболее удалена от очага локальной деформации (места разрыва).

Величины пределов текучести $\sigma_{\alpha 0.2}$ определялись в соответствии с ГОСТ 1497-84 или ГОСТ 11701-84 в зависимости от исходной толщины материала.

Испытаниям были подвергнуты образцы сталей ОХ18Н10Т и 08кп с различной исходной толщиной h_0 , широко используемых в различных отраслях промышленности.

Для определения продольной, поперечной деформаций и деформации по толщине вырезались продольные образцы в соответствии с ГОСТ 1497-84 или ГОСТ 11701-84 в зависимости от исходной толщины материала в пределах одного листа под углами $\alpha = 0, \pi/4, \pi/2$ по отношению к направлению прокатки по шесть штук каждого вида.

Как отмечалось выше, растяжение образцов осуществлялось на универсальных испытательных машинах Р-5 и УМЭ-ЮТМ.

Нагружение производилось по этапам. На каждом этапе деформирования фиксировались усилие, изменение ширины и толщины образца в области нанесенных ячеек, а также изменение продольных размеров ячеек.

В таблице 3.1 приведены вычисления критериев совместности механических характеристик для прокатных листовых сталей при трех уровнях.

Таблица 3.1

	Пласт. деф.	σ_{s0} МПа	$\sigma_{s\pi/4}$ МПа	$\sigma_{s\pi/2}$ МПа	R_0	$R_{\pi/4}$	$R_{\pi/2}$	K_I	K_{II}
08кп $h_0 = 0.8$ мм	0,01	274,1	256,2	244,9	0,85	0,63	0,66	8,48	3,4
	0,1	489,9	528,7	458,4	0,88	0,75	0,7	0,32	9,48
	0,15	557,1	561,9	521,1	0,9	0,72	0,81	7,04	16,21
8Х18Н10Т $h_0 = 1.0$ мм	0,01	796,7	799,4	827,6	0,55	0,61	0,63	1,56	2,04
	0,1	873,9	878,1	884,3	0,61	0,71	0,99	5,27	4,99
	0,15	1017	1015	996,2	0,64	0,73	0,75	13,6	5,12

Здесь h_0 — толщина листа. Экспериментальные данные, приведенные в таблице 3.1, получены в лаборатории Тульского государственного университета профессором С. С. Яковлевым.

Поскольку эксперименты по определению характеристик пластической анизотропии выполнялись с точностью до 5% [1], то отклонение в критериях K_I и K_{II} за пределы точности эксперимента свидетельствует о том, что материал не подчиняется условию пластичности Мизеса и ассоциированному с ним закону пластического деформирования.

В таблицах 2.1 и 3.1 жирным шрифтом отмечены значения критериев несогласованности параметров анизотропии, выходящие за рамки точности эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Андрейченко В. А., Яковлев С. П., Яковлев С. С. Обработка давлением анизотропных материалов. Кишинев: Квант, 1997. 330 с.
- [2] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: ГИТТЛ, 1956. 407 с.

I. E. Kostikov, E. E. Kuznetsov, I. N. Mattchenko, T. M. Mattchenko, I. A. Pereligin, E. S. Fomichov

EXPERIMENTAL RESEARCH OF PLASTIC ANISOTROPY SHEET ROLLING STEELS

Tula State University, Tula

Abstract. Borders of application of a condition of plasticity Mizes-Hill/s for the description of plastic anisotropy of sheet rolling metals are discussed.

Keywords: anisotropy, plasticity, experiments.

REFERENCES

- [1] Andreichenko V. A. Yakovlev S. P., Yakovlev S. S. Forming anisotropic materials. Kishinev: Quantum, 1997. 330 p. (in Russian).
- [2] Hill R. The mathematical theory of plasticity. M.: GITTL, 1956. 407 p. (in Russian).

Kostikov Ivan Evgenyevich

e-mail: ekc_05@mail.ru, PhD, Senior lecturer of department of building, building materials and designs, Tula State University, Tula.

Kuznetsov Yevgeniy Evgenyevich

e-mail: ekc_05@mail.ru, PhD, Senior lecturer of department of building, building materials and designs, Tula State University, Tula.

Mattchenko Ilya Nikolaevich

e-mail: ekc_05@mail.ru, Senior scientific employee, I. Ykovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary.

Mattchenko Nikolay Mikhaylovich

e-mail: ekc_05@mail.ru, Dr. Sci., Professor of Mechanic plastic forming department, Tula State University, Tula.

Pereligin Igor Aleksandrovich

e-mail: ekc_05@mail.ru, Engineer of Mechanic plastic forming department, Tula State University, Tula.

Fomichev Yevgeniy Stepanovich

e-mail: ekc_05@mail.ru, Engineer of Mechanic plastic forming department, Tula State University, Tula.

Е. П. Дац¹, Е. В. Мурашкин^{2,3,4}, Р. Велмуруган⁵

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕОБРАТИМЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В ПОЛОМ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ШАРЕ В УСЛОВИЯХ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

¹ Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, г. Владивосток

² Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

³ Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва

⁴ Московский государственный университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва

⁵ Индийский технологический институт в Мадрасе, Индия

Аннотация. В работе рассматривается метод расчета накопленных необратимых деформаций в процессе нестационарного теплового воздействия. Материал деформируемого полого шара полагается упругопластическим. Предполагается линейная зависимость предела текучести от температуры. Проводится численно-аналитическое исследование напряженно-деформированного состояния термоупругопластического шара с малой полостью. Выводятся аналитические зависимости поля остаточных напряжений от прикладываемого теплового воздействия. Выписываются расчетные формулы компонент тензора полных деформаций и его обратимых и необратимых составляющих.

Ключевые слова: термоупругопластичность, тепловое воздействие, остаточное напряжение, остаточная деформация, предел текучести, теплопроводность

УДК: 539.375

Важной особенностью при расчете процессов необратимого деформирования в сплошном шаре [1] является возможность, зная лишь распределение температурного поля в различные моменты времени, найти законы движения упругопластических границ, при помощи которых затем определяются параметры напряженно-деформированного состояния. Однако в большинстве одномерных задач теории температурных напряжений [2] заранее рассчитать размеры областей деформирования не

© Дац Е. П., Мурашкин Е. В., Велмуруган Р., 2015

Дац Евгений Павлович

e-mail: dats@dvo.ru, магистр, ассистент, Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, г. Владивосток.

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Велмуруган Рамачандран, профессор, Индийский технологический институт в Мадрасе, Индия

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 15-31-21111, 15-41-02453).

Поступила 18.09.2015

представляется возможным. В данной работе на примере задачи быстрого нагрева полого упругопластического шара рассматривается общий метод вычисления необратимых деформаций, позволяющий с высокой точностью рассчитывать законы движения упругопластических границ и распределение остаточных напряжений в материалах, подверженных нестационарным температурным градиентам.

Рассмотрим шар с внутренним и внешним радиусами R_0 и R_1 при начальной температуре $T = T_0$. На внешних поверхностях заданы граничные условия свободного теплового расширения:

$$\sigma_{rr}(R_0) = 0, \quad \sigma_{rr}(R_1) = 0. \quad (1)$$

Распределение температуры описывается уравнением теплопроводности [4] с граничными условиями

$$T_{,r}(R_0) = 0, \quad T(R_1) = W(t). \quad (2)$$

Используя численное решение уравнения теплопроводности с граничными условиями (2), будем считать температурное поле шара известным.

Обратимые деформации, возникающие в материале сферы в первые моменты времени, связаны с единственной ненулевой компонентой вектора перемещений соотношениями

$$e_{rr} = u_{r,r}, \quad e_{\varphi\varphi} = e_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}. \quad (3)$$

Из (3) можно получить зависимость между компонентами термоупругих деформаций:

$$e_{rr} = u_{r,r} = \left(\frac{r u_r}{r} \right)_{,r} = (r e_{\varphi\varphi})_{,r}. \quad (4)$$

Температурные напряжения обязаны удовлетворять уравнению равновесия, записанному для случая сферической симметрии:

$$\sigma_{rr,r} + \frac{2(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})}{r} = 0, \quad (5)$$

из которого следует связь между компонентами тензора напряжений:

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{2r} (r^2 \sigma_{rr})_{,r}. \quad (6)$$

Зависимости между напряжениями и компонентами обратимых деформаций [2] в случае сферической симметрии примут вид

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \alpha(T - T_0) + \frac{(\lambda + \mu)\sigma_{rr} - \lambda\sigma_{\varphi\varphi}}{\mu(3\lambda + 2\mu)}, \\ e_{\varphi\varphi} &= \alpha(T - T_0) + \frac{(\lambda + 2\mu)\sigma_{\varphi\varphi} - \lambda\sigma_{rr}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя соотношения (4)–(7), найдем дифференциальное уравнение для определения радиальной компоненты тензора напряжений σ_{rr} :

$$(r\sigma_{rr,r})_{,r} + 3\sigma_{rr,r} + \nu T_{,r} = 0, \quad (8)$$

где $\nu = \frac{4\alpha\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)}$.

Интегрируя (8), получим:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -\frac{\nu}{r^3} \int_0^r T \rho^2 d\rho + A(t) + \frac{B(t)}{r^2}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{2} (3A(t) - \sigma_{rr} - \nu T), \\ u_r &= \left(\frac{3\alpha A(t)}{\nu} - \frac{\sigma_{rr}}{4\mu} - \alpha T_0 \right) r.\end{aligned}\quad (9)$$

Неизвестные функции времени в (9) определим из граничных условий (1):

$$A = \frac{\nu}{(R_1^3 - R_0^3)} \int_{R_0}^{R_1} T \rho d\rho, \quad B = -\frac{\nu R_0^3}{(R_1^3 - R_0^3)} \int_{R_0}^{R_1} T \rho d\rho. \quad (10)$$

Дальнейшее увеличение температурного градиента в окрестности нагрева приводит к появлению необратимых деформаций. Начало процесса пластического течения связано с выполнением условия пластичности Треска [3]:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2k(T) \\ \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2k(T) \end{cases}. \quad (11)$$

Для предела текучести k выберем простейшую линейную зависимость:

$$k = k_0 \left(1 - \frac{T - T_0}{T_m - T_0} \right). \quad (12)$$

Здесь k_0 — предел текучести при температуре T_0 , T_m — температура плавления материала.

Впервые условие (11) выполнится на поверхности $r = R_1$ в некоторый момент времени $t = t_p$. Далее от поверхности нагрева отделяется продвигающаяся в сторону центра упругоупругая граница $r = a(t)$. Таким образом, при $t > t_a$ в материале шара существуют область обратимого деформирования $0 \leq r < a(t)$ и область пластического течения $a(t) \leq r < R$. Напряженно-деформированное состояние в термоупругой области определяется по ранее найденным формулам (9) с точностью до новых функций функции $A(t)$, $B(t)$, которые вновь нужно определить, поскольку напряжения (9) больше не удовлетворяют граничному условию на поверхности нагрева.

Решив систему уравнений (5), (11), найдем напряжения в области течения:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{rr} &= -4 \int_a^r \frac{k}{\rho} d\rho + C(t), \\ \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} = \tilde{\sigma}_{\theta\theta} &= \tilde{\sigma}_{rr} - 2k.\end{aligned}\quad (13)$$

Полные деформации в области пластического течения складываются из обратимых \tilde{e}_{ij} и необратимых p_{ij} составляющих [3]:

$$\tilde{e}_{rr} + p_{rr} = \tilde{u}_{r,r}, \quad \tilde{e}_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi} = \tilde{e}_{\theta\theta} + p_{\varphi\varphi} = \frac{\tilde{u}_r}{r}. \quad (14)$$

Следствием ассоциированного закона пластического течения [4] является условие пластической несжимаемости материала $dp_{rr} + dp_{\varphi\varphi} + dp_{\theta\theta} = 0$, проинтегрировав которое, получим:

$$p_{rr} + 2p_{\varphi\varphi} = 0. \quad (15)$$

Тогда для компонент деформаций (14) справедливо равенство

$$\tilde{e}_{rr} + 2\tilde{e}_{\varphi\varphi} = \tilde{u}_{r,r} + \frac{2\tilde{u}}{r}. \quad (16)$$

Подставив в (16) значения для обратимых деформаций (7), выраженные через напряжения в области течения (13), найдем уравнение для определения перемещения \tilde{u}_r :

$$\tilde{u}_{r,r} + \frac{2\tilde{u}}{r} = 3\alpha(T - T_0) + \left(\frac{3\tilde{\sigma}_{rr} - 4k}{3\lambda + 2\mu} \right), \quad (17)$$

проинтегрировав которое, получим:

$$\tilde{u}_r = \frac{r\tilde{\sigma}_{rr}}{(3\lambda + 2\mu)} + \frac{3\alpha}{r^2} \int_a^r T\rho d\rho - \alpha T_0 r + \frac{D(t)}{r^2}. \quad (18)$$

По найденному полю перемещений определим пластические деформации:

$$\begin{aligned} p_{\varphi\varphi} = p_{\theta\theta} &= \frac{4\alpha k}{\nu} + \frac{3\alpha}{r^3} \int_a^r T\rho^2 d\rho - \alpha T + \frac{D(t)}{r^3}, \\ p_{rr} = -2p_{\varphi\varphi} &= 2\alpha T - \frac{8\alpha k}{\nu} - \frac{6\alpha}{r^3} \int_a^r T\rho^2 d\rho - \frac{2D(t)}{r^3}. \end{aligned} \quad (19)$$

Неизвестные функции времени определим из граничных условий (1) и условия непрерывности напряжений и перемещений на упругопластической границе $a(t)$:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{(a^3 - R_0^3)} \left(\nu \int_{R_0}^a T\rho^2 d\rho + 4a^3 \int_a^{R_1} \frac{k}{\rho} d\rho \right), \\ B &= -\frac{R_0^3}{(a^3 - R_0^3)} \left(4a^3 \int_a^{R_1} \frac{k}{\rho} d\rho + \nu \int_{R_0}^a T\rho^2 d\rho \right), \\ D &= \frac{3\alpha a^3}{(a^3 - R_0^3)} \left(\int_{R_0}^a T\rho^2 d\rho + \frac{4R_0^3}{\nu} \int_a^{R_1} \frac{k}{\rho} d\rho \right), \\ C &= 4 \int_a^{R_1} \frac{k}{\rho} d\rho. \end{aligned} \quad (20)$$

Используя условие непрерывности напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}(a) = \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}(a)$ с учетом найденных значений функций (20), получим уравнение для нахождения положений границы $a(t)$ в различные моменты времени $t > t_p$:

$$-4k(a, t) - \frac{3\nu}{a^3} \int_{R_0}^a T(\rho, t)\rho^2 d\rho + \frac{3B(t)}{a^3} + \nu T(a, t) = 0. \quad (21)$$

Процесс выравнивания температурного градиента на поверхности нагрева приводит к замедлению роста пластических деформаций (19). В некоторый момент времени $t = t_u$ на поверхности $r = R_1$ выполнится условие

$$\dot{p}_{rr} = 0, \quad (22)$$

которое означает прекращение выполнения условия пластичности (1). Таким образом, при $t > t_u$ развивается область разгрузки $b(t) < r < R_1$, где $b(t)$ — граница разгрузки.

Для определения напряженно-деформированного состояния в области $b(t) < r < R$ воспользуемся соотношением (4) на случай присутствия в материале необратимых деформаций:

$$e_{rr} + p'_{rr} = (r(e_{\varphi\varphi} + p'_{\varphi\varphi}))_{,r} = \left(r \left(e_{\varphi\varphi} - \frac{1}{2} p'_{rr} \right) \right)_{,r}. \quad (23)$$

Здесь $p'_{rr}(r)$ — радиальная компонента пластической деформации, сформированной в результате процесса пластического течения. Подставив в (23) значения для упругих деформаций (7), найдем дифференциальное уравнение для определения радиальной компоненты тензора напряжений в области разгрузки:

$$(r\sigma_{rr,r})_{,r} + 3\sigma_{rr,r} + \nu T_{,r} = \frac{\nu}{2\alpha} \left(\frac{3p'_{rr}}{r} + p'_{rr,r} \right). \quad (24)$$

Интегрируя (24), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\frac{\nu}{r^3} \int_b^r T \rho^2 d\rho + \frac{\nu}{2\alpha} \int_b^r \frac{p'_{rr}}{\rho} d\rho + E(t) + \frac{F(t)}{r^3}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{2\alpha} \left(3 \int_b^r \frac{p'_{rr}}{\rho} d\rho + p'_{rr} \right) + 3E(t) - \sigma_{rr} - \nu T \right), \\ u_r &= \left(\frac{3}{2} \int_b^r \frac{p'_{rr}}{\rho} d\rho + \frac{3\alpha E(t)}{\nu} - \frac{\sigma_{rr}}{4\mu} - \alpha T_0 \right) r. \end{aligned} \quad (25)$$

Из граничных условий (1) и условий непрерывности напряжений и перемещений на упругопластических границах $a(t)$, $b(t)$ найдем неизвестные функции времени:

$$\begin{aligned} D &= J \left(\frac{2\alpha}{R_0^3} \int_{R_0}^a T \rho^2 d\rho + \frac{2\alpha}{R_1^3} \int_b^{R_1} T \rho^2 d\rho - \frac{2\alpha(R_1^3 - b^3)}{R_1^3 b^3} \int_a^b T \rho^2 d\rho + \frac{2\alpha}{\nu} \int_a^b \frac{k}{\rho} d\rho - \int_b^{R_1} \frac{p'_{rr}}{\rho} d\rho \right), \\ B &= -\frac{\nu D}{3\alpha} + \nu \int_{R_0}^a T \rho^2 d\rho, \quad F = -\frac{\nu D}{3\alpha} - \nu \int_a^b T \rho^2 d\rho, \\ A &= \frac{\nu D}{3\alpha R_0^3} - \frac{\nu}{R_0^3} \int_{R_0}^a T \rho^2 d\rho, \quad C = \frac{\nu(a^3 - R_0^3) D}{3\alpha a^3 R_0^3} - \frac{\nu}{R_0^3} \int_{R_0}^a T \rho^2 d\rho, \\ E &= \frac{\nu D}{3\alpha R_1^3} + \frac{\nu}{R_1^3} \int_a^{R_1} T \rho^2 d\rho - \frac{\nu}{2\alpha} \int_b^{R_1} \frac{p'_{rr}}{\rho} d\rho, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\text{где } J(a, b) = \frac{3a^3 b^3 R_1^3 R_0^3}{2(a^3 b^3 R_1^3 - R_0^3(a^3 b^3 + R_1^3(b^3 - a^3)))}.$$

Вводя обозначение

$$L(a, b, t) = \frac{2\alpha}{R_0^3} \int_{R_0}^a T \rho^2 d\rho + \frac{2\alpha}{R_1^3} \int_b^{R_1} T \rho^2 d\rho - \frac{2\alpha (R_1^3 - b^3)}{R_1^3 b^3} \int_a^b T \rho^2 d\rho + \frac{2\alpha}{\nu} \int_a^b \frac{k}{\rho} d\rho,$$

перепишем уравнение (21) для определения упругопластической границы $a(t)$:

$$4k(a, t) + \frac{\nu}{a^3 \alpha} \left(J(a, b) L(a, b, t) - J(a, b) \int_b^{R_1} \frac{p'_{rr}}{\rho} d\rho \right) - \nu T(a, t) = 0. \quad (27)$$

Условие разгрузки (22) с учетом (26) примет вид

$$2\alpha \dot{T}(b, t) - \frac{8\alpha \dot{k}(b, t)}{\nu} - \frac{6\alpha}{b^3} \int_a^b \dot{T} \rho^2 d\rho - \frac{2}{b^3} J(a, b) \dot{L}(a, b, t) = 0. \quad (28)$$

Добавляя к уравнениям (27), (28) условие непрерывности пластических деформаций на границе $b(t)$:

$$p'_{rr}(b) = 2\alpha T(b, t) - \frac{8\alpha k(b, t)}{\nu} - \frac{6\alpha}{b^3} \int_a^b T \rho^2 d\rho - \frac{2}{b^3} \left(J(a, b) L(a, b, t) - J(a, b) \int_b^{R_1} \frac{p'_{rr}}{\rho} d\rho \right), \quad (29)$$

получим систему (27)–(29) для определения неизвестных функций $a(t)$, $b(t)$, $p'_{rr}(r)$. Так как уравнение (29) содержит интеграл от неизвестной функции $\frac{p'_{rr}(r)}{r}$, необходимо найти его аппроксимацию, чтобы воспользоваться численным решением системы (27)–(29). Будем полагать, что функция необратимой деформации $p'_{rr}(r)$ — гладкая во внутренних точках области разгрузки. Тогда за малый промежуток времени $\Delta t = t_1 - t_u$ область разгрузки вырастает на малую величину $\Delta b = b_1 - R_1$. Подынтегральное выражение $\frac{p'_{rr}(r)}{r}$ на отрезке Δb стремится к прямой линии, проходящей через 2 точки с координатами $\left(b_1, \frac{p'_{rr}(b_1)}{b_1}\right)$ и $\left(R_1, \frac{p'_{rr}(R_1, t_u)}{R_1}\right)$. Интеграл $\int_{b_1}^{R_1} \frac{p'_{rr}}{\rho} d\rho$ в таком случае примет вид

$$\int_{b_1}^{R_1} \frac{p'_{rr}}{\rho} d\rho = I(b_1) = \frac{1}{2} (b_1 - R_1) \left(\frac{p'_{rr}(b_1)}{b_1} + \frac{p'_{rr}(R_1, t_u)}{R_1} \right).$$

Подставляя полученное выражение в уравнения (27)–(29) и применяя метод последовательных приближений, найдем значения $p'_{rr}(b_1)$, $b(\Delta t + t_u) = b_1$, $a(\Delta t + t_u) = a_1$. На i -ом временном шаге $i\Delta t + t_u$ интеграл запишется в виде

$$\int_{b_i}^{R_1} \frac{p'_{rr}}{\rho} d\rho = I(b_i) = \frac{1}{2} (b_i - b_{i-1}) \left(\frac{p'_{rr}(b_i)}{b_i} + \frac{p'_{rr}(b_{i-1})}{b_{i-1}} \right) + I(b_{i-1}). \quad (30)$$

Последовательно рассчитывая значения a_i , b_i , $p'_{rr}(b_i)$ на каждом временном шаге, найдем законы движения упругопластических границ и распределение необратимой деформации в области разгрузки. В процессе расчета в некоторый момент времени выполнится условие $a(t_k) = b(t_k)$, которое означает завершение процесса формирования необратимых деформаций.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Дац Е. П., Мокрин С. Н., Мурашкин Е. В. Расчет накопленной остаточной деформации в процессе “нагрева-охлаждения” упругопластического шара // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 4 (14). С. 123–132.
- [2] Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Изд-во “МИР”, 1964.
- [3] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [4] Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.

*E. P. Dats*¹, *E. V. Murashkin*^{2,3,4}, *R. Velmurugan*⁵

ON COMPUTING IRREVERSIBLE STRAINS OF THE HOLLOW BALL UNDER UNSTEADY THERMAL ACTION

¹*Vladivostok State University of Economics and Service, Vladivostok*

²*Institute For Problems in Mechanics of RAS, Moscow*

³*National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow*

⁴*Bauman Moscow State Technical University, Moscow*

⁵*Indian Institute of Technology Madras Department of Aerospace Engineering Chennai, Tamilnadu, India*

Abstract. The present study is devoted to the computation technique of the residual strain under unsteady action. The deformable hollow ball is the elastoplastic body. The linear equation for yield stress from temperature is suggested. The numerical-analytical study of the strain stress state of the thermoelastoplastic ball with small cavity is carried out. The stress field analytical relations depended from the thermal action are obtained. The computational formulae for the total strain tensor components and its reversible and irreversible compounds are derived.

Keywords: thermoelastoplasticity, thermal action, residual stress, residual strain, yield stress, heat conduction

REFERENCES

- [1] Dats E. P., Mokrin S. N., Murashkin E. V. Calculation of accumulated residual deformation during "heating-cooling" the ball elastoplastic // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2012. № 4 (14). P. 123–132. (in Russian).
- [2] Pain B., Weiner J. The theory of thermal stress. M.: Mir, 1964. 517 p. (in Russian).
- [3] Bykovtsev G. I. Ivlev D. D. The theory of plasticity. Vladivostok: Dal'nauka, 1998. 528 p. (in Russian).
- [4] Carslaw G., Jaeger D. Thermal conductivity of solids. M.: Nauka, 1964. 487 p. (in Russian).

Dats Evgeniy Pavlovich

e-mail: dats@dvo.ru, MD, Assistant, Vladivostok State University of Economics and Service, Vladivostok.

Murashkin Evgenii Valerievich

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, PhD, Senior Researcher, Institute For Problems in Mechanics of RAS, Moscow.

Velmurugan Ramachandran, Professor, Indian Institute of Technology Madras Department of Aerospace Engineering Chennai, Tamilnadu, India.

К. К. Горностаев, А. В. Ковалев

О СИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ УПРОЧНЯЮЩЕЙСЯ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ТРУБЫ С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРЫ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж

Аннотация. В работе приводится решение задачи об определении напряженно-деформированного состояния упрочняющейся упруговязкопластической трубы с учетом температурных эффектов. Предел текучести материала трубы предполагается зависящим от температуры. Модуль упругости E , коэффициенты линейного температурного расширения, упрочнения, вязкости считаются независимыми от температуры. Коэффициент Пуассона ν материала трубы выбирается равным $\frac{1}{2}$.

Ключевые слова: упругопластическая задача, температурные напряжения, деформации, перемещения, вязкость, упрочнение.

УДК: 539.3

Введение. Постановка задачи. Проблеме определения напряженного и деформированного состояния в призматических упругих и упругопластических конструкциях посвящены работы многих авторов, например [1]–[5], в том числе, с учетом температурных эффектов [6]–[8].

Целью настоящей работы является определение напряженного и деформированного состояния в упрочняющейся упруговязкопластической трубе с внутренним радиусом a и внешним радиусом b , находящейся под действием внутреннего давления P , внешнего давления q , осевой силы R (ось трубы принимается за ось z) и стационарного поля температуры $T(r)$, не изменяющегося в осевом и окружном направлениях. Свойства материала трубы в пластической области опишем с помощью модифицированного условия пластичности Треска-Сен-Венана.

Следуя [9], [10], в рассмотрение введем активные напряжения

$$\sigma_{ij}^a = \sigma_{ij} - c e_{ij}^p - \eta \dot{e}_{ij}^p,$$

© Горностаев К. К., Ковалев А. В., 2015

Ковалев Алексей Викторович

e-mail: kovalev@amm.vsu.ru, kav-mail@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

Горностаев Константин Константинович

e-mail: gornostaevkonstantink@gmail.com, ahtatov.tmp@gmail.com, аспирант кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

Поступила 18.09.2015

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, e_{ij}^p — компоненты тензора пластических деформаций, \dot{e}_{ij}^p — компоненты тензора скоростей пластических деформаций, c — коэффициент упрочнения, η — коэффициент вязкости. Индексы i, j пробегает значения 1, 2, 3. И условие пластичности (функция нагружения по терминологии [9], [10]) будет описываться уравнением $f(\sigma_{ij}^a) = 0$. Подобный подход, при описании поведения упрочняющегося упругопластического тела был применен Ишлинским, Ивлевым и Быковцевым [9]–[11]. Артемовым [12], [13] при этом был решен ряд упругопластических задач. В случае упруговязкопластического тела Спорыхин [1], [2] и его ученики [3] воспользовались таким подходом при решении многих упругопластических задач, при этом модифицировалось условие пластичности Мизеса.

Воспользуемся цилиндрическими координатами (r, θ, z) . Если предположить, что труба достаточно длинная, то можно считать, что напряжения и деформации не зависят от z . Т. к. поперечные сечения остаются плоскими, то осевую деформацию e_z считаем постоянной, причем ее значения в упругой и пластической областях $e_z = e_1$.

При описании симметричной деформации призматического тела из упрочняющегося упруговязкопластического материала воспользуемся следующей системой уравнений.

Уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r},$$

где σ_r, σ_θ — компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат.

Соотношения Коши

$$e_r = \frac{du}{dr}, e_\theta = \frac{u}{r},$$

где e_r, e_θ — компоненты тензора полных деформаций, u — компонента вектора перемещений в цилиндрической системе координат.

Предположим, как и в случае идеальной пластичности

$$\sigma_\theta^a > \sigma_z^a > \sigma_r^a,$$

при этом функция нагружения примет вид

$$\sigma_\theta - \sigma_r - c(e_\theta^p - e_r^p) - \eta(\dot{e}_\theta^p - \dot{e}_r^p) = \sigma_s,$$

где $\sigma_s = \sigma_s[T(r)] = \sigma_s(r)$ — предел текучести, σ_z — осевая компонента тензора напряжений, e_θ^p, e_r^p — компоненты тензора пластических деформаций, $\dot{e}_\theta^p, \dot{e}_r^p$ — компоненты тензора скоростей пластических деформаций в цилиндрических координатах.

Ассоциированный закон пластического течения

$$de_\theta^p = -de_r^p, \quad de_z^p = 0.$$

Полные деформации в пластической зоне состоят из упругой и пластической составляющих

$$e_r = e_r^p + e_r^e, e_\theta = e_\theta^p + e_\theta^e, e_z = e_z^e + e_z^p.$$

Упругие деформации связаны с напряженными законом Гука в форме

$$e_r^e = \frac{1}{E} \left(\sigma_r - \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_z) \right) + \alpha T,$$

$$e_\theta^e = \frac{1}{E} \left(\sigma_\theta - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) \right) + \alpha T,$$

$$e_z^e = \frac{1}{E} \left(\sigma_z - \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\theta) \right) + \alpha T,$$

где E – модуль упругости Юнга, α – коэффициент линейного температурного расширения

Сумма полных деформаций имеет вид:

$$e_r + e_\theta + e_z = 3\alpha T.$$

Построение решения. Осевая деформация зависит от результирующей осевой силы

$$R = 2\pi \int_a^b r \sigma_z dr.$$

Подставляя в (9) значение σ_z из (7), выражая σ_θ через σ_r при помощи (1), после интегрирования получим:

$$R = \pi a^2 P - \pi b^2 q + \pi E e_z (b^2 - a^2) - 2\pi E \alpha \int_a^b r T dr.$$

При выводе этого соотношения учтено, что

$$\sigma_r(a) = -P, \quad \sigma_r(b) = -q.$$

Таким образом $e_z = e_1$ определяется из соотношения (10). При этом для открытой трубы $R = 0$, для трубы с закрытыми торцами $R = \pi a^2 \rho$ ($q = 0$).

Используя соотношения (6), (7) получим

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{2E}{3} (e_\theta - e_r) - \frac{2E}{3} (e_\theta^p - e_r^p).$$

Подставляя (12) в функцию нагружения (4) получим уравнение для определения разности пластических деформаций. Разрешая полученное дифференциальное уравнение по времени (t), при однородном начальном условии выводим:

$$e_\theta^p - e_r^p = (1 - e^{-At}) \left(\frac{2E}{2E + 3c} (e_\theta - e_r) - \frac{3}{2E + 3c} \sigma_s(r) \right),$$

где $A = \frac{2E+3c}{3\eta}$.

Для определения перемещений, решая уравнение (8) с учетом (2), имеем:

$$u = -\frac{1}{2} e_1 r + \frac{c_1}{r} + \frac{3\alpha}{r} \int r T dr,$$

c_1 – обозначена постоянная интегрирования.

При этом полные деформации определяются по соотношениям Коши (2).

Подставляя в уравнение равновесия (1) выражение (12) с учетом (13), (14), (2), (11) для напряжений находим:

$$\begin{aligned} \sigma_r = -P + \frac{2E}{3} \left[1 - \frac{2E}{2E + 3c} (1 - e^{-At}) \right] & \left[\frac{c_1}{a^2} - \frac{c_1}{r^2} + \frac{3\alpha}{a^2} \int_0^a r T dr - \right. \\ & \left. - \frac{3\alpha}{r^2} \int_0^r r T dr \right] + \frac{2E}{2E + 3c} (1 - e^{-At}) \int_a^r \frac{\sigma_s(r)}{r} dr, \\ \sigma_\theta = -P + \frac{2E}{3} \left[1 - \frac{2E}{2E + 3c} (1 - e^{-At}) \right] & \left[\frac{c_1}{a^2} + \frac{c_1}{r^2} + \frac{3\alpha}{a^2} \int_0^a r T dr + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{3\alpha}{r^2} \int_0^r rTdr - 3\alpha T \Big] + \frac{2E}{2E+3c} (1 - e^{-At}) \left[\int_a^r \frac{\sigma_s(r)}{r} dr + \sigma_s(r) \right].$$

Для определения σ_r и σ_θ в упругой области воспользуемся известными формулами (см. например [6])

$$\sigma_r = \frac{-2\alpha E}{r^2} \int_0^r Trdr + \frac{c_2}{2} + \frac{c_3}{r^2},$$

$$\sigma_\theta = -2\alpha ET + \frac{2\alpha E}{r^2} \int_0^r Trdr + \frac{c_2}{2} + \frac{c_3}{r^2},$$

при этом

$$\sigma_\theta - \sigma_r = -2\alpha ET + \frac{4\alpha E}{r^2} \int_0^r Trdr - \frac{2c_3}{r^2},$$

где c_2, c_3 – постоянные интегрирования.

При подстановке (11) в (16) получим:

$$c_2 = -2q + \frac{4\alpha E}{b^2} \int_0^b rTdr - \frac{2c_3}{b^2}.$$

Перемещение u в упругой зоне определим с помощью второй формулы (2), используя (7) и (17). Таким образом

$$u = \frac{3}{4E} \left[\frac{4\alpha E}{r^2} \int_0^r rTdr - 2\alpha ET - \frac{2c_3}{r^2} \right] r - \frac{e_1 - \alpha T}{2} r + \alpha Tr.$$

Для определения постоянных интегрирования и радиуса упругопластической границы используем уравнение непрерывности компонент вектора перемещений

$$[u] = 0$$

и компонент тензора напряжений

$$[\sigma_r] = [\sigma_\theta] = 0$$

на упругопластической границе r_s , а также соотношение (18).

Квадратные скобки здесь обозначают разность соответствующих выражений в упругой и пластической областях.

Учитывая (18), (20) и (21) получим следующую систему уравнений

$$2Ec_1 = -3c_3, c_2 = -2q + \frac{4\alpha E}{b^2} \int_0^b rTdr - \frac{2c_3}{b^2},$$

$$-2\alpha ET + \frac{4\alpha E}{r_s^2} \int_0^{r_s} rTdr - \frac{2c_3}{r_s^2} = \frac{2E}{3} \left[1 - \frac{2E}{2E+3c} (1 - e^{-At}) \right] \times$$

$$\times \left(\frac{6\alpha}{r_s^2} \int_0^{r_s} rTdr + \frac{2c_1}{r_s^2} - 3\alpha T \right) + \frac{2E}{2E+3c} (1 - e^{-At}) \sigma_s(r_s),$$

$$-2\alpha ET + c_2 = -2p + \frac{2E}{3} \left[1 - \frac{2E}{2E+3c} (1 - e^{-At}) \right] \times$$

$$\times \left(\frac{6\alpha}{a^2} \int_0^a rTdr + \frac{2c_1}{a^2} - 3\alpha T \right) + \frac{2E}{2E+3c} \times$$

$$\times (1 - e^{-At}) \left[2 \int_a^{r_s} \frac{\sigma_s(r)}{r} dr + \sigma_s(r_s) \right].$$

Разрешая систему уравнений (22) приходим к следующим выражениям для констант интегрирования

$$c_1 = -\frac{3r_s^2}{4E} \times \left[\left[\frac{2E+3c}{3(1-e^{-At})} - \frac{2E}{3} \right] \left(\frac{6\alpha}{r_s^2} \int_0^{r_s} rTdr - 3\alpha T \right) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\sigma_s(r_s) - \left[\frac{2E+3c}{2E(1-e^{-At})} \right] \left(2\alpha ET - \frac{4\alpha E}{r_s^2} \int_0^{r_s} rT dr \right) \Big], \\
c_2 &= 2\alpha ET - 2p + \frac{2E}{3} \left[1 - \frac{2E}{2E+3c} (1-e^{-At}) \right] \times \\
& \quad \times \left(\frac{6\alpha}{a^2} \int_0^a rT dr - \frac{3r_s^2}{2a^2 E} \left[\frac{2E+3c}{3(1-e^{-At})} - \frac{2E}{3} \right] \times \right. \\
& \quad \times \left(\frac{6\alpha}{r_s^2} \int_0^{r_s} rT dr - 3\alpha T \right) - \sigma_s(r_s) - \left[\frac{2E+3c}{2E(1-e^{-At})} \right] \times \\
& \quad \times \left(2\alpha ET - \frac{4\alpha E}{r_s^2} \int_0^{r_s} rT dr \right) \Big] - 3\alpha T + \\
& \quad + \frac{2E}{2E+3c} (1-e^{-At}) \left[2 \int_a^{r_s} \frac{\sigma_s(r)}{r} dr + \sigma_s(r_s) \right], \\
c_3 &= \frac{r_s^2}{2} \times \left[\left[\frac{2E+3c}{3(1-e^{-At})} - \frac{2E}{3} \right] \left(\frac{6\alpha}{r_s^2} \int_0^{r_s} rT dr - 3\alpha T \right) - \right. \\
& \quad \left. - \sigma_s(r_s) - \left[\frac{2E+3c}{2E(1-e^{-At})} \right] \left(2\alpha ET - \frac{4\alpha E}{r_s^2} \int_0^{r_s} rT dr \right) \right].
\end{aligned}$$

Уравнение для радиуса упругопластической границы (r_s), при условии учета упрочнения и вязкости, имеет вид

$$\begin{aligned}
& b^2 [2\alpha ET - 2p + 2q - \frac{4\alpha E}{b^2} \int_0^b rT dr + \frac{2E}{3} \times \\
& \quad \times \left[1 - \frac{2E}{2E+3c} (1-e^{-At}) \right] \left(\frac{6\alpha}{a^2} \int_0^a rT dr - \frac{3r_s^2}{2a^2 E} \times \right. \\
& \quad \times \left[\left[\frac{2E+3c}{3(1-e^{-At})} - \frac{2E}{3} \right] \left(\frac{6\alpha}{r_s^2} \int_0^{r_s} rT dr - 3\alpha T \right) - \sigma_s(r_s) - \right. \\
& \quad \left. \left. - \left[\frac{2E+3c}{2E(1-e^{-At})} \right] \left(2\alpha ET - \frac{4\alpha E}{r_s^2} \int_0^{r_s} rT dr \right) \right] - 3\alpha T + \right. \\
& \quad \left. + \frac{2E}{2E+3c} (1-e^{-At}) \left[2 \int_a^{r_s} \frac{\sigma_s(r)}{r} dr + \sigma_s(r_s) \right] \right] = \\
& = r_s^2 \left[\left[\frac{2E+3c}{3(1-e^{-At})} - \frac{2E}{3} \right] \left(\frac{6\alpha}{r_s^2} \int_0^{r_s} rT dr - 3\alpha T \right) + \sigma_s(r_s) + \right. \\
& \quad \left. + \left[\frac{2E+3c}{2E(1-e^{-At})} \right] \left(2\alpha ET - \frac{4\alpha E}{r_s^2} \int_0^{r_s} rT dr \right) \right].
\end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда температура трубы вдоль радиуса изменяется по логарифмическому закону, а предел текучести является линейной функцией температуры [6]

$$\sigma_s(r) = L + M \ln r, \quad T(r) = P - Q \ln r,$$

где P, Q, L, M – известные постоянные.

Примем для стали [6, 14]: $E = 2.5 * 10^5 \frac{\text{МН}}{\text{М}^2}$; $\alpha = 1.1 * 10^{-5} / ^\circ\text{C}$; $a = 1$ м; $b = 2$ м; $T = 100 - 115 \ln r$ $^\circ\text{C}$; $\sigma_s = (6300 + 805 \ln r) * 10^{-1} \frac{\text{МН}}{\text{М}^2}$;

$$c = 3.4 * 10^3 \frac{\text{МН}}{\text{М}^2}, \quad \eta = 5 * 10^5 \frac{\text{МН}}{\text{М}^2} * \text{с}.$$

Численное решение уравнения для радиуса упругопластической границы при приведенных значениях параметров среды, конструкции и отсутствии вязкости ($t \rightarrow \infty$) приводит к следующему результату $r_s = 1.29$ м, заметим, что в случае $c = 0$, численное решение этого же уравнения дает $r_s = 1.30$ м, при этом в обоих случаях $p = 401 \frac{\text{МН}}{\text{М}^2}$; $q = 0$.

На рисунке 1 представлена зависимость радиуса упругопластической границы r_s от времени t , полученная в результате решения уравнения (23) при учете упрочнения и вязкости материала.

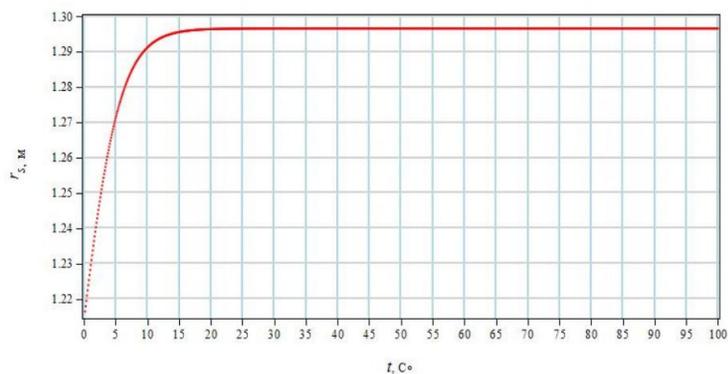


Рис. 1

Очевидно, что радиус упруго-пластической границы r_s при учете упрочнения и вязкости, растет с увеличением времени от внутренней границы трубы и стремится к значению соответствующему упрочняющемуся упругопластическому материалу ($t \rightarrow \infty$).

Полагая, что $c = 0$ и $t \rightarrow \infty$, в выражениях для перемещений, напряжений и констант интегрирования приходим к решению, полученному [6]–[8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Спорыхин А. Н. К устойчивости равновесия упруговязкопластической среды. Прикладная механика и техническая физика. 1970. № 5. С. 86–92.
2. Спорыхин А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1997. 360 с.
3. Спорыхин А. Н., Ковалев А. В., Щеглова Ю. Д. Неодномерные задачи упруговязкопластичности с неизвестной границей. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 2004. 219 с.
4. Ковалев А. В. Об учете ассоциированной сжимаемости упругопластических тел в случае плоской деформации // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1 (15). С. 65–69.
5. Задорожный В. Г., Ковалев А. В., Спорыхин А. Н. Об аналитичности решения плоской упругопластической задачи // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2008. № 1. С. 138–146.
6. Даниловская В. И. Упругопластическая симметричная деформация толсто-стенной трубы с учетом неравномерности распределения температуры вдоль радиуса. Прикладная механика. 1965. Т. I, № 6. С. 8–13.
7. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. Перевод с немецкого. М.: Физматлит, 1963. 253 с.
8. BLAND D. R. Elastoplastic thick-walled tubes of workhardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradient // J. mech. Phys. 1956. Vol. 4. Issue 4. P. 209–229.
9. Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 231 с.
10. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001, 2003. 704 с.

11. Ишлинский А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. Мат.журн. 1954. Т. 6, № 3. С. 314–325.
12. Артемов М. А. О двухосном растяжении толстой пластины с круговым отверстием из упрочняющегося упругопластического материала // Журнал прикладной механики и технической физики. 1985. № 6. С. 158–163.
13. Артемов М. А., Ларин И. А., Потапов Н. С., Якубенко А. П. К анализу упругопластической задачи плоской деформации // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2011. Т. 7, № 6. С. 135–137.
14. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. С. 72–82.

K. K. Gornostaev, A. V. Kovalev

ABOUT SYMMETRIC DEFORMATION HARDENING ELASTOVISCOPLASTIC PIPE TAKING INTO ACCOUNT TEMPERATURE

Voronezh State University, Voronezh

Abstract. The paper provides a solution to the problem of determining the stress-strain state elastoviscoplastic hardening pipe considering temperature effects. Tensile strength of pipe material assumed to depend on temperature. Modulus of elasticity E , the coefficients of linear expansion, hardening viscosity are considered independent of temperature. Poisson's ratio of the pipe material is selected equal to $1/2$.

Keywords: elastic-plastic problem, stress, strain, displacement, viscosity, hardening.

REFERENCES

1. Sporykhin A. N. The stability of the equilibrium elastic viscous plastic medium. Applied Mechanics and Technical Physics. 1970. № 5. P. 86–92. (in Russian).
2. Sporykhin A. N. Method of perturbations in problems of stability of complex environments. Voronezh: Publishing house of Voronezh State University, 1997. 360 p. (in Russian).
3. Sporykhin A. N., Kovalev A. V., Shcheglova Yu. D. One-dimensional elastic viscoplasticity problem with an unknown boundary. Voronezh: Publishing house of Voronezh State University, 2004. 219 p. (in Russian).
4. Kovalev A. V. On account of the compressibility of the associated elastic-plastic bodies in the case of plane strain // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2013. № 1 (15). P. 65–69. (in Russian).
5. Zadorozhnyy V. G., Kovalev A. V., Sporykhin A. N. On analytic solution of the plane elastic-plastic problem // Russian Academy of Sciences. Mechanics of rigid body. 2008. № 1. P. 138–146. (in Russian).
6. Danilovskaya B. И. Elastoplastic deformation symmetrical thick-walled pipe, taking into account the uneven temperature distribution along the radius. Applied mechanics. 1965. Vol. I, № 6. P. 8–13. (in Russian).
7. Parkus Г. Transient thermal stresses. Translated from the German. M.: FIZMATLIT, 1963. 253 p. (in Russian).
8. Bland D. R. Elastoplastic thick-walled tubes of workhardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradient // J. mech. Phys. 1956. Vol. 4. Issue 4. P. 209–229.

Kovalev Aleksey Viktorovich

e-mail: kovalev@amm.vsu.ru, kav-mail@mail.ru, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of theoretical and applied mechanics, Voronezh State University, Voronezh.

Gornostaev Konstantin Konstantinovich

e-mail: gornostaevkonstantink@gmail.com, ahtatov.tmp@gmail.com, Postgraduate of the Department of theoretical and applied mechanics, Voronezh State University, Voronezh.

9. Ivlev D. D., Bykovtsev G. I. The theory of hardening plastic body. M.: Nauka, 1971. 231 p. (in Russian).
10. Ishlinskii A. Yu., Ivlev D. D. The mathematical theory of plasticity. M.: FIZMATLIT, 2003. 704 p. (in Russian).
11. Ishlinskii A. Yu. The general theory of plasticity with linear hardening // Ukrain. Mat.zhurn. 1954. Vol. 6. № 3. P. 314–325. (in Russian).
12. Artemov M. A. About biaxial stretching a thick plate with a circular hole of a hardening elastic-plastic material // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1985. № 6. P. 158–163. (in Russian).
13. Artemov M. A., Larin I. A., Potapov N. S., Yakubenko A. P. Analysis of elastic-plastic plane strain problem // Bulletin of the Voronezh State Technical University. 2011. Vol. 7, № 6. P. 135–137. (in Russian).
14. Malinin N. N. Applied theory of plasticity and creep. M.: Mechanical engineering, 1975. P. 72–82. (in Russian).

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Амензаде Рафаель Юсиф-оглы (mexanika.bsu.az@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет, г. Баку.

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный университет леса, г. Мытищи-5 Московской области.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь.

Каюмов Рашид Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов.

Кулиев Валех Джафарович (pmdekanat@gmail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Манжиров Александр Владимирович (manzh@inbox.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Матченко Николай Михайлович (eks_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Миронов Борис Гурьевич (rektorat@chdpu.edu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку.

Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва.

Победря Борис Ефимович (rob@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара.

Редкозубов Сергей Алексеевич (marycbka434@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес predel21@mail.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `predel.sty`. Стиль `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Миронов Б. Г., Радаев Ю. Н.</i> Профессор А. В. Манжиров. К избранию членом Национальной академии наук Республики Армения	5
<i>Манжиров А. В., Паршин Д. А.</i> Влияние гравитации на аддитивно изготавливаемую конструкцию из стареющего вязкоупругого материала	22
<i>Радаев Ю. Н., Ковалев В. А.</i> Связанные вариационные задачи механики с подвижной границей	29
<i>Артемяева А. А., Баженов В. Г., Жегалов Д. В., Иванов В. А., Кубец А. И., Кузмичева Т. В.</i> Численное моделирование предельных состояний упругопластических цилиндрических оболочек при комбинированных нагружениях растяжением, внутренним давлением, кручением	37
<i>Баженов В. Г., Баранова М. С., Осетров Д. Л., Осетров С. Л.</i> Метод экспериментально-теоретического исследования деформационных и прочностных характеристик упруговязкопластических материалов методом прямого удара ...	44
<i>Хайрнасоев К. З.</i> Влияние смешанной структуры композиционного материала на прочностные характеристики лопастей двигателей	51
<i>Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.</i> Экстрадеформации микроструктурного континуума с одним свободным директором	61
<i>Руднев И. В., Жаданов В. И.</i> Выдергивание стальных пластин, вклеенных в древесину. Аналитический расчет и эксперимент	66
<i>Минаева Н. В., Хвостов М. Г.</i> Об исследовании продольно-поперечного изгиба упругой неоднородной пластины на основе решения вариационной задачи	78
<i>Вервейко Н. Д., Фролова О. А.</i> Предельное осесимметричное напряженное состояние сжимаемого сыпучего материала с цилиндрической полостью	83
<i>Фролова О. А.</i> Влияние характерного размера микроструктуры сыпучего материала на одномерное предельное напряженное состояние полупространства	93
<i>Радаев Ю. Н., Ковалев В. А.</i> Незатухающие тепловые волны в цилиндрическом волноводе	100
<i>Семькина Т. Д., Листров Е. А.</i> Определение первоначальной формы отверстия в трансверсально-изотропном листе, переходящей в заданную при двухосном растяжении	108
<i>Петров Н. И.</i> О полиномиальных решениях линеаризованных уравнений теории малых упругопластических деформаций в полярных координатах	113

<i>Вервейко Н. Д., Егоров М. В.</i> Лучевой метод расчета динамического напряженного состояния оболочки вращения	120
<i>Любимова О. Н., Морковин А. В., Солоненко Э. П.</i> Термические напряжения в стеклометаллокомпозитном стержне с учетом свойств зоны соединения ...	131
<i>Тихонов С. В., Рыбакова Т. И.</i> Упругопластическое состояние анизотропной плоскости, ослабленной отверстием, подкрепленной включением, ограниченной эксцентрической окружностью, при двусосном растяжении	138
<i>Немировский Ю. В.</i> Эффективность работы гибридных систем перекрестных связей в динамическом режиме	147
<i>Кулиев В. Д., Борисова Н. Л.</i> Трещина продольного сдвига в двухслойных композитных материалах.....	152
<i>Костиков И. Е., Кузнецов Е. Е., Матченко И. Н., Матченко Н. М., Перельгин И. А., Фомичев Е. С.</i> Экспериментальное исследование пластической анизотропии листовых прокатных сталей.....	162
<i>Дац Е. П., Мурашкин Е. В., Велмуруган Р.</i> Вычисление необратимых деформаций в полном упругопластическом шаре в условиях нестационарного температурного воздействия.....	168
<i>Горностаев К. К., Ковалев А. В.</i> О симметричной деформации упрочняющейся упруговязкопластической трубы с учетом температуры	176
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	185
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	188
СОДЕРЖАНИЕ	190

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2015. № 3 (25)**

Отв. за выпуск: А. В. Балашникова

Технические редакторы: А. В. Балашникова, Е. В. Мурашкин, С. В. Тихонов

Компьютерная верстка: А. В. Балашникова

Макет: А. В. Балашникова

Подписано в печать 25.09.2015. Выход в свет 30.09.2015
Формат 70х100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e. Усл. печ. л. 24,00.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет
им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в отделе полиграфии ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38