

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Научный журнал
№ 1(31)
Январь – март 2017 г.

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.
Выходит 1 раз в три месяца

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций (свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в
которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на
соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко

Ответственные секретари: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, Ю. А. Демьянов, В. Г. Зубчанинов, Р. А. Каюмов,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, В. Д. Кулиев, Е. В. Ломакин,
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, А. В. Манжиров, Г. К. Михайлов,
Ю. В. Немировский, Р. И. Непершин, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко,
С. А. Редкозубов, С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев,
А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

Международный совет: В. М. Мирсалимов (Азербайджан), В. П. Тамуж
(Латвия), А. В. Чигарев (Белоруссия)

Адрес редакции и издательства: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

Тел.: (8352) 62-16-19

E-mail: predel21@mail.ru

WWW: <http://predel.chgpu.edu.ru>

© ФГБОУ ВО «Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева», 2017

А. В. Ковалев, Е. Ю. Русина, А. Ю. Яковлев

О МЕХАНИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕМЕНТОВ ТОНКОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. В работе методом малого параметра определено напряженно-деформированное состояние тонкой упругопластической пластины, содержащей включение формы близкой к многоугольной. Решение строилось в рамках плосконапряженного состояния по теории идеальной пластичности с условием пластичности Треска – Сен-Венана.

Ключевые слова: малый параметр, пластичность, упругость, плосконапряженное состояние, условие пластичности Треска – Сен-Венана.

УДК: 539.3

Вопросу построения математических моделей механического поведения материалов за пределом упругости посвящено большое количество статей и монографий [1], [2], [5], [9], [12]. При этом число работ, посвященных математическому моделированию напряженно-деформированного состояния в составных упругопластических конструкциях под действием внешних нагрузок, существенно меньше [4], [6], [7], [10], [13].

В настоящей работе предпринята попытка развить уже известные подходы математического моделирования механического поведения толстых плит, содержащих включения различных конфигураций, на конструкциях представляющих собой тонкие пластины со включениями. Основной отличительной особенностью данного подхода является то, что при построении системы уравнений используется условие перехода в пластическое состояние материала – условие пластичности Треска – Сен-Венана – для случая плоского напряженного состояния. Для решения задачи был использован метод возмущений. В этом случае решение представляется в виде (1)

© Ковалев А. В., Русина Е. Ю., Яковлев А. Ю., 2017

Ковалев Алексей Викторович

e-mail: kovalev@amm.vsu.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Русина Елена Юрьевна

e-mail: elena_rs@inbox.ru, аспирант кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Яковлев Александр Юрьевич

e-mail: yakovlev@amm.vsu.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 15.01.2017

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \sigma_\rho^{(0)} + \delta\sigma_\rho^{(1)}, \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^{(0)} + \delta\sigma_\theta^{(1)}, \quad \tau_{\rho\theta} = \tau_{\rho\theta}^{(0)} + \delta\tau_{\rho\theta}^{(1)}, \\
\sigma_z &= 0, \quad u_\rho = u_\rho^{(0)} + \delta u_\rho^{(1)}, \\
u_\theta &= u_\theta^{(0)} + \delta u_\theta^{(1)}, \quad r_s = 1 + \delta r_s^{(1)},
\end{aligned} \tag{1}$$

где верхний индекс указывает на номер приближения, δ – малый параметр, σ_ρ , σ_θ , σ_z , $\tau_{\rho\theta}$, u_ρ , u_θ – компоненты тензора напряжений и перемещений, r_s – радиус упругопластической границы в пластине.

Построенная система уравнений позволяет получить поля напряжений и деформаций в тонкой пластине с отверстием, имеющим форму близкую к многоугольной, в которую с натягом запрессовывается несколько большее по размеру полое включение, близкое к многоугольному.

Рассмотрим случай, когда на бесконечности пластина растягивается взаимно перпендикулярными усилиями P_1 и P_2 , по контуру внутреннего отверстия во включении приложено давление P_0 . Предположим, что под влиянием внешних нагрузок включение находится в упругом состоянии, а в пластине возникает пластическое деформирование материала. При этом пластическая зона полностью охватывает контур отверстия в пластине.

Внутренний и внешний контур включения имеют форму правильного многоугольника со «сглаженными» углами, при этом количество углов во внешней границе включения обозначено через m , а во внутренней – n . При $m = 2$ имеем эллиптическую форму отверстия в пластине и во внешней границе включения, при $n = 2$ – эллиптический внутренний контур включения. Задача решается в цилиндрических координатах (ρ, θ, z) , при этом ось Oz направлена перпендикулярно плоскости пластины. Начало координат выбираем в центре отверстия.

За нулевое приближение выберем осесимметричное состояние тонкой пластины радиуса α с тонким упругим включением с внешним радиусом α_1 и внутренним β . Считаем, что на бесконечности данная конструкция растягивается взаимно перпендикулярными усилиями с интенсивностями $P = (P_1 + P_2)/4k$. Внутренний контур включения нагружен усилиями интенсивностью P_0 .

Согласно методу возмущений введен малый параметр. В данном случае характеризующий отклонение контура отверстия от окружности, а также возмущение статических граничных условий $\delta d_3 = (P_1 - P_2)/4k$.

Решение задачи получено в безразмерных переменных. Величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к $2k$ – удвоенной величине предела текучести на сдвиг материала пластины. Перемещения отнесем к радиусу упругопластической границы в пластине r_{s0} . Для обозначения безразмерных величин используем прежние обозначения.

Следуя [3], для нулевого приближения имеем в упругой области пластины

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho^{e(0)} &= P - \frac{(q+1)\alpha}{2\rho^2}, \quad \sigma_\theta^{e(0)} = P + \frac{(q+1)\alpha}{2\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{e(0)} = 0, \\
u_\rho^{e(0)} &= \frac{1}{E_1} \left[(2 - (q+1)\alpha)\rho + \frac{3(q+1)\alpha}{\rho} \right], \quad u_\theta^{e(0)} = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

В пластической зоне пластины

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{p(0)} &= 1 - \frac{(q+1)\alpha}{\rho}, \quad \sigma_{\theta}^{p(0)} = 1, \quad \tau_{\rho\theta}^{p(0)} = 0, \\ u_{\rho}^{p(0)} &= \frac{1}{2E_1} (\rho + (q+1)\alpha(1 - 2\ln \rho)), \quad u_{\theta}^{p(0)} = 0,\end{aligned}\quad (3)$$

где E_1 – модуль Юнга материала пластины, $q = q/k$ – нормальное давление на границе контакта пластины и включения.

В упругом включении, в нулевом приближении, распределение поля напряжений и перемещений имеет вид [12]

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho B}^{e(0)} &= \frac{1}{\beta^2 - \alpha_1^2} \left[(q - P_0)\beta^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right) - q(\beta^2 - \alpha_1^2) \right], \\ \sigma_{\theta B}^{e(0)} &= \frac{1}{\beta^2 - \alpha_1^2} \left[(q - P_0)\beta^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right) - q(\beta^2 - \alpha_1^2) \right], \\ u_{\rho B}^{e(0)} &= \frac{(q - P_0)\alpha_1^2\beta^2}{(\beta^2 - \alpha_1^2)E_2\rho}, \quad u_{\theta B}^{e(0)} = 0,\end{aligned}\quad (4)$$

где E_2 – модуль Юнга материала включения.

Из условий совместности деформаций пластины и включения вдоль линии контакта следует

$$u_{\rho=\alpha}^{p(0)} = u_{\rho B=\alpha_1}^{e(0)} + \varepsilon, \quad (5)$$

где $\varepsilon = \frac{\alpha_1 - \alpha}{r_{s0}}$ и из условий сопряжения на упругопластической границе в пластине

$$\sigma_{\theta}^{p(0)} = \sigma_{\theta}^{e(0)}, \quad \text{при } \rho = 1 \quad (6)$$

имеем следующую систему уравнений для определения контактного давления q и радиуса упругопластической границы в пластине в нулевом приближении r_{s0} :

$$\begin{aligned}r_{s0} \left(1 + 2\ln \alpha + \frac{2\alpha_1\beta^2 E_1}{\alpha(\beta^2 - \alpha_1^2) E_2} \right) - 2r_{s0} \ln r_{s0} - \frac{(1 + P_0)\alpha_1\beta^2 E_1}{(\beta^2 - \alpha_1^2) E_2 (1 - P)} + \\ + \frac{E_1(\alpha_1 - \alpha)}{(1 - P)} - \frac{\alpha}{2(1 - P)} = 0, \\ q = \frac{2(1 - P)}{\alpha} - 1.\end{aligned}\quad (7)$$

Для решения задачи в первом приближении в плоскости, перпендикулярной оси Oz , согласно [10], [12] запишем уравнение контура, ограничивающего отверстие в пластине до деформации

$$\rho = \alpha(1 + \delta d_1 \cos m\theta - \dots), \quad (8)$$

уравнение контура, ограничивающего включение до деформации,

$$\rho = \alpha_1(1 + \delta d_1 \cos m\theta - \dots), \quad (9)$$

и уравнение контура, ограничивающего внутреннее отверстие во включении до деформации,

$$\rho = \beta(1 + \delta d_2 \cos n\theta - \dots), \quad (10)$$

где $\alpha_1 > \alpha$; α , α_1 , β – радиусы в нулевом приближении соответственно: отверстия в пластине, внешнего очертания включения, внутреннего отверстия во включении, δ – малый параметр, d_1 , d_2 , d_3 – безразмерные константы, m и n – количество «сглаженных» углов в соответствующих контурах.

Ввиду малости величины ε , примем за линию контакта пластины и включения внешнюю границу включения [10], [12], которая при разложении представляется в форме

$$\rho_{kon} = R^{(0)} + \delta R^{(1)}, \quad (11)$$

где $R^{(0)} = \alpha_1$, $R^{(1)} = \alpha_1 d_1 \cos 2\theta$.

Выпишем линеаризованные граничные условия и условия сопряжения, необходимые для построения математической модели тонкой упругопластической пластины со включением.

На бесконечности [10], [12]

$$\sigma_\rho^\infty = P - \delta d_3 \cos 2\theta, \quad \tau_{\rho\theta}^\infty = \delta d_3 \sin 2\theta, \quad (12)$$

где $P = \frac{P_1 + P_2}{4k}$, $\delta d_3 = \frac{P_1 - P_2}{4k}$, где d_3 – безразмерная постоянная.

На внутреннем контуре отверстия в пластине согласно [3]

$$\begin{aligned} \left(\sigma_\rho^{(1)} + \frac{d\sigma_\rho^{(0)}}{d\rho} \alpha d_2 \cos n\theta \right) \Big|_{\rho=\beta} &= 0, \\ \left(\tau_{\rho\theta}^{(1)} + 2 \left(\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_\rho^{(0)} \right) d_2 \sin n\theta \right) \Big|_{\rho=\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Условия сопряжения на упругопластической границе в пластине

$$\left[\sigma_{ij}^{(1)} + \frac{d\sigma_{ij}^{(0)}}{d\rho} r_s^{(1)} \right] \Big|_{\rho=1} = 0, \quad (14)$$

где $\sigma_{ij}^{(0)}$, $\sigma_{ij}^{(1)}$ – компоненты тензора напряжений для нулевого и первого приближения соответственно.

Вдоль линии контакта пластины и включения, согласно [3], [11], запишем

1) включение вложено с натягом в пластину

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{p(1)} + \frac{d\sigma_\rho^{p(0)}}{d\rho} R^{(1)} &= \sigma_{\rho B}^{e(1)} + \frac{d\sigma_{\rho B}^{e(0)}}{d\rho} R^{(1)}, \\ \tau_{\rho\theta B}^{e(1)} - \left(\sigma_{\theta B}^{e(0)} - \sigma_{\rho B}^{e(0)} \right) \dot{s}_1 &= 0, \\ \tau_{\rho\theta}^{p(1)} - \left(\sigma_\theta^{p(0)} - \sigma_\rho^{p(0)} \right) \dot{s}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$u_\rho^{p(1)} + \frac{du_\rho^{p(0)}}{d\rho} R^{(1)} = u_{\rho B}^{e(1)} + \frac{du_{\rho B}^{e(0)}}{d\rho} R^{(1)}, \quad \text{при } \rho = R^{(0)};$$

2) включение впаяно в пластину

$$\sigma_\rho^{p(1)} + \frac{d\sigma_\rho^{p(0)}}{d\rho} R^{(1)} = \sigma_{\rho B}^{e(1)} + \frac{d\sigma_{\rho B}^{e(0)}}{d\rho} R^{(1)},$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\rho\theta B}^{e(1)} - \left(\sigma_{\theta B}^{e(0)} - \sigma_{\rho B}^{e(0)} \right) \dot{s}_1 &= \tau_{\rho\theta}^{p(1)} - \left(\sigma_{\theta}^{p(0)} - \sigma_{\rho}^{p(0)} \right) \dot{s}_1, \\
u_{\rho}^{p(1)} + \frac{du_{\rho}^{p(0)}}{d\rho} R^{(1)} &= u_{\rho B}^{e(1)} + \frac{du_{\rho B}^{e(0)}}{d\rho} R^{(1)}, \\
u_{\theta}^{p(1)} + u_{\rho}^{p(0)} \dot{s}_1 &= u_{\theta B}^{e(1)} + u_{\rho B}^{e(0)} \dot{s}_1, \text{ при } \rho = \alpha_1,
\end{aligned} \tag{16}$$

где $R^{(1)} = \alpha_1 d_1 \cos m\theta$, $s_1 = R^{(1)}/R^{(0)} \Rightarrow \dot{s}_1 = -m d_1 \sin m\theta$.

Согласно [2], [3], при учете граничных условий (12) на бесконечности было получено первое приближение для напряжений и перемещений в упругой области пластины для $\infty > \rho > 1$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{e(1)} &= A_1^e \cos 2\theta + B_1^e \cos n\theta + C_1^e \cos m\theta, \\
\sigma_{\theta}^{e(1)} &= A_2^e \cos 2\theta + B_2^e \cos n\theta + C_2^e \cos m\theta, \\
\tau_{\rho\theta}^{e(1)} &= A_3^e \sin 2\theta + B_3^e \sin n\theta + C_3^e \sin m\theta, \\
u_{\rho}^{e(1)} &= A_4^e \cos 2\theta + B_4^e \cos n\theta + C_4^e \cos m\theta, \\
u_{\theta}^{e(1)} &= A_5^e \sin 2\theta + B_5^e \sin n\theta + C_5^e \sin m\theta.
\end{aligned} \tag{17}$$

Здесь буквами A_i^e , B_i^e , C_i^e ($i = 1, \dots, 5$) обозначены величины, равные

$$\begin{aligned}
A_1^e &= \left(1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} \right) d_3 + \left(-\frac{1}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^2} \right) a_{21} + \left(\frac{2}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2} \right) a_{22}, \\
B_1^e|_{h=n} &= C_1^e|_{h=m} = \frac{1}{2} \left(\left(-\frac{h}{\rho^{h+2}} + \frac{h+2}{\rho^h} \right) a_{h1} + \left(\frac{h+2}{\rho^{h+2}} - \frac{h+2}{\rho^h} \right) a_{h2} \right), \\
A_2^e &= - \left(1 + \frac{3}{\rho^4} \right) d_3 + \frac{1}{\rho^4} a_{21} - \frac{2}{\rho^4} a_{22}, \\
B_2^e|_{h=n} &= C_2^e|_{h=n} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{h}{\rho^{h+2}} - \frac{h-2}{\rho^h} \right) a_{h1} + \left(-\frac{h+2}{\rho^{h+2}} + \frac{h-2}{\rho^h} \right) a_{h2} \right), \\
A_3^e &= \left(-1 - \frac{2}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} \right) d_3 + \left(-\frac{1}{\rho^4} + \frac{1}{\rho^2} \right) a_{21} + \left(\frac{2}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2} \right) a_{22}, \\
B_3^e|_{h=n} &= C_3^e|_{h=n} = \frac{1}{2} \left(\left(-\frac{h}{\rho^{h+2}} + \frac{h}{\rho^h} \right) a_{h1} + \left(-\frac{h+2}{\rho^{h+2}} - \frac{h}{\rho^h} \right) a_{h2} \right), \\
A_4^e &= \frac{1}{E_1} \left(\left(\frac{3}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho^3} \right) + \frac{4}{\rho} \right) d_3 + \left(\frac{1}{2\rho^3} - \frac{2}{\rho} \right) a_{21} + \left(-\frac{1}{\rho^3} + \frac{2}{\rho} \right) a_{22} \right), \\
B_4^e|_{h=n} &= C_4^e|_{h=n} = \frac{1}{E_1} \left(\left(\frac{3h}{4(h+1)} \frac{1}{\rho^{h+1}} - \frac{3h+2}{4(h-1)} \frac{1}{\rho^{h-1}} \right) a_{h1} + \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{3(h+2)}{4(h+1)} \frac{1}{\rho^{h+1}} + \frac{3h+2}{4(h-1)} \frac{1}{\rho^{h-1}} \right) a_{h2} \right), \\
A_5^e &= \frac{1}{E_1} \left(\left(-\frac{3}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho^3} \right) + \frac{1}{\rho} \right) d_3 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho^3} + \frac{1}{\rho} \right) a_{21} + \left(-\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{2\rho} \right) a_{22} \right), \\
B_5^e|_{h=n} &= C_5^e|_{h=n} = \frac{1}{E_1} \left(\left(\frac{3h}{4(h+1)} \frac{1}{\rho^{h+1}} - \frac{3h-8}{4(h-1)} \frac{1}{\rho^{h-1}} \right) a_{h1} + \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{3(h+2)}{4(h+1)} \frac{1}{\rho^{h+1}} + \frac{3h-8}{4(h-1)} \frac{1}{\rho^{h-1}} \right) a_{h2} \right),
\end{aligned}$$

где a_{21} , a_{22} , a_{h1} , a_{h2} – константы, определяемые из условий сопряжения (16) на границе контакта пластины и включения соответственно.

В пластической области пластины напряжения и перемещения для первого приближения, согласно [1], [3], [12], показаны ниже

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{p(1)} &= A_1^p \cos 2\theta + B_1^p \cos n\theta + C_1^p \cos m\theta, \\ \sigma_\theta^{p(1)} &= 0, \\ \tau_{\rho\theta}^{p(1)} &= A_2^p \sin 2\theta - B_2^p \sin n\theta - C_2^p \sin m\theta, \\ u_\rho^{p(1)} &= A_3^p \cos 2\theta + B_3^p \cos n\theta + C_3^p \cos m\theta, \\ u_\theta^{p(1)} &= A_4^p \sin 2\theta + B_4^p \sin n\theta + C_4^p \sin m\theta,\end{aligned}\tag{18}$$

где буквами A_i^p , B_i^p , C_i^p ($i = 1, \dots, 4$) обозначены величины

$$\begin{aligned}A_1^p &= \frac{a_{21} - 2a_{22}}{\rho} + \frac{2a_{22}}{\rho^2}, \\ B_1^p|_{h=n} &= C_1^p|_{h=n} = \frac{a_{h1} + ha_{h2}}{\rho} - \frac{ha_{h2}}{\rho^2}, \\ A_2^p &= \frac{2a_{22}}{\rho^2}, \\ B_2^p|_{h=n} &= C_2^p|_{h=n} = \frac{ha_{h2}}{\rho^2}, \\ A_3^p &= \frac{a_{21} - 2a_{22}}{E_1} \ln \rho + \frac{a_{21} - 2a_{22}}{E_1} - \frac{2a_{22}}{\rho E_1} + 4d_3\alpha - a_{21} \left(\frac{3}{2}\alpha + 1 \right) + a_{22}(\alpha + 4), \\ B_3^p|_{h=n} &= C_3^p|_{h=n} = \frac{a_{h1} + ha_{h2}}{E_1} \ln \rho + \frac{a_{h1} + ha_{h2}}{E_1} + \frac{ha_{h2}}{\rho E_1} - a_{h1} \left(\frac{4h+1}{2(h^2-1)}\alpha + 1 \right) + \\ &\quad + a_{h2} \left(\frac{3h^2 + 4h - 2}{2(h^2-1)}\alpha - 2h \right), \\ A_4^p &= \frac{2a_{22}}{E_1} \ln \rho + \frac{5a_{22}}{2E_1} - 2 \left(4d_3\alpha - a_{21} \left(\frac{3}{2}\alpha + 1 \right) + a_{22}(\alpha + 4) \right) + \\ &\quad + \rho \left(6d_3\alpha - 2a_{21}(\alpha + 1) + a_{22} \left(\frac{1}{2}\alpha + 7 \right) \right), \\ B_4^p|_{h=n} &= C_4^p|_{h=n} = \frac{a_{h2}}{E_1} \ln \rho - \frac{a_{h2}}{E_1} + 2a_{h1} \left(\frac{4h+1}{2(h^2-1)}\alpha + 1 \right) - a_{h2} \left(\frac{3h^2 + 4h - 2}{(h^2-1)}\alpha - h \right) + \\ &\quad + \rho \left(-a_{h1} \left(\frac{3h+3}{2(h^2-1)}\alpha + 1 \right) + a_{h2} \left(\frac{3h^2 - 3h - 9}{2(h^2-1)}\alpha - 3h \right) \right).\end{aligned}$$

Для упругого включения получены напряжения и перемещения, имеющие вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho B}^{e(1)} &= A_1 \cos 2\theta + B_1 \cos n\theta + C_1 \cos m\theta, \\ \sigma_{\theta B}^{e(1)} &= A_2 \cos 2\theta + B_2 \cos n\theta + C_2 \cos m\theta, \\ \tau_{\rho\theta B}^{e(1)} &= A_3 \sin 2\theta + B_3 \sin n\theta + C_3 \sin m\theta,\end{aligned}\tag{19}$$

где b_{21} , b_{22} , b_{h1} , b_{h2} – константы, определяемые из соотношений на границе контакта пластины и включения, а величина $A = \frac{(q - P_0) \alpha_1^2}{\beta^2 - \alpha_1^2} d_2$. Здесь буквами A_i , B_i , C_i ($i = 1, \dots, 3$) обозначены величины, равные

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{N} (f_{11}(\rho) b_{21} + f_{12}(\rho) b_{22}), \\
A_2 &= \frac{1}{N} (f_{21}(\rho) b_{21} + f_{22}(\rho) b_{22}), \\
A_3 &= \frac{1}{N} (f_{31}(\rho) b_{21} + f_{32}(\rho) b_{22}), \\
B_1|_{h=n} = C_1|_{h=n} &= \frac{1}{2N} \left[f_{h11}(\rho) \frac{(b_{h1} + b_{h2} + 2A) 2N}{(h + h^3)} + \right. \\
&+ f_{h12}(\rho) \frac{(2N + \beta^{-2} (h^2 - h^3)) \frac{(b_{h1} + b_{h2} + 2A)}{(h + h^3)} + A}{\left(\frac{h}{N} - 1\right)} + f_{h13}(\rho) b_{h1} + f_{h14}(\rho) b_{h2} \left. \right], \\
B_2|_{h=n} = C_2|_{h=n} &= \frac{1}{2N} \left[f_{h21}(\rho) \frac{(b_{h1} + b_{h2} + 2A) 2N}{(h + h^3)} + \right. \\
&+ f_{h22}(\rho) \frac{(2N + \beta^{-2} (h^2 - h^3)) \frac{(b_{h1} + b_{h2} + 2A)}{(h + h^3)} + A}{\left(\frac{h}{N} - 1\right)} + f_{h23}(\rho) b_{h1} + f_{h24}(\rho) b_{h2} \left. \right], \\
B_3|_{h=n} = C_3|_{h=n} &= \frac{1}{2N} \left[f_{h31}(\rho) \frac{(b_{h1} + b_{h2} + 2A) 2N}{(h + h^3)} + \right. \\
&+ f_{h32}(\rho) \frac{(2N + \beta^{-2} (h^2 - h^3)) \frac{(b_{h1} + b_{h2} + 2A)}{(h + h^3)} + A}{\left(\frac{h}{N} - 1\right)} + f_{h33}(\rho) b_{h1} + f_{h34}(\rho) b_{h2} \left. \right], \\
f_{11}(\rho) &= 1 - 2\beta^2 + \beta^{-4} + (3 - 2\beta^2 - \beta^4) \rho^{-4} + 2(1 - 2\beta^{-2} + \beta^4) \rho^{-2}, \\
f_{12}(\rho) &= -2 + 2\beta^2 + (2\beta^4 - 2\beta^2) \rho^{-4} + (2 - 2\beta^4) \rho^{-2}, \\
f_{h11}(\rho) &= h \left((h-1) - \frac{h^2}{\beta^2} + \beta^{2h} \right) \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{h-2} + h \left((h+1) - \frac{h}{\beta^2} - \beta^{-2h} \right) \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-(h+2)} + \\
&+ (h-2) \left((h+1) - h\beta^2 - \beta^{2h} \right) \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^h + (h+2) \left((h-1) - h\beta^2 - \beta^{-2h} \right) \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-h}, \\
f_{h12}(\rho) &= h \left((h-1) - h\beta^2 + \beta^{-2h} \right) \rho^{h-2} + h \left((h-1) - h\beta^2 - \beta^{2h} \right) \rho^{-(h+2)} + \\
&+ (h-2) \left((h+1) - h\beta^{-2} - \beta^{-2h} \right) \rho^h + (h+2) \left((h-1) - h\beta^{-2} + \beta^{2h} \right) \rho^{-h}, \\
f_{h13}(\rho) &= \left(-(h-1)(h+2) + h^2\beta^{-2} + (h-2)\beta^{2h} \right) \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{h-2} + \\
&+ \left((h-2)(h+1) - h^2\beta^{-2} + (h+2)\beta^{-2h} \right) \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-(h+2)} + \\
&+ \left(-(h-2)(h+1) + (h^2-4)\beta^2 - (h-2)\beta^{2h} \right) \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^2 + \\
&+ \left((h-1)(h+2) - (h^2-4)\beta^2 - (h+2)\beta^{-2h} \right) \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-h},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{h14}(\rho) &= \left(-(h-1)(h+2) + h^2\beta^2 + (h-2)\beta^{-2h} \right) \rho^{h-2} + \\
&\quad + \left((h-2)(h+1) + (h+2)\beta^{2h} - h^2\beta^2 \right) \rho^{-(h+2)} + \\
&\quad + \left(-(h-2)(h+1) + (h^2-4)\beta^{-2} - (h-2)\beta^{-2h} \right) \rho^h + \\
&\quad + \left((h-1)(h+2) - (h^2-4)\beta^{-2} - (h+2)\beta^{2h} \right) \rho^{-h}, \\
f_{21}(\rho) &= -1 + 2\beta^2 - \beta^{-4} + (-3 + 2\beta^2 + \beta^4) \rho^{-4} + 2(-3 + 2\beta^{-2} + \beta^{-4}) \rho^2, \\
f_{22}(\rho) &= 2 - 2\beta^2 + (-2\beta^4 + 2\beta^2) \rho^{-4} + (6 - 8\beta^{-2} + 2\beta^{-4}) \rho^2, \\
f_{h21}(\rho) &= h \left(-(h-1) + h\beta^{-2} - \beta^{2h} \right) \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{h-2} + h \left(-(h+1) + \frac{h}{\beta^2} + \beta^{-2h} \right) \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-(h+2)} + \\
&\quad + (h+2) \left(-(h+1) + h\beta^2 + \beta^{2h} \right) \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^h + (h-2) \left(-(h-1) + h\beta^2 - \beta^{-2h} \right) \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-h}, \\
f_{h22}(\rho) &= h \left(-(h-1) + h\beta^2 - \beta^{-2h} \right) \rho^{h-2} + h \left(-(h-1) + h\beta^2 + \beta^{2h} \right) \rho^{-(h+2)} + \\
&\quad + (h+2) \left(-(h+1) + h\beta^{-2} + \beta^{-2h} \right) \rho^h + (h-2) \left(-(h-1) + h\beta^{-2} - \beta^{2h} \right) \rho^{-h}, \\
f_{h23}(\rho) &= \left((h-1)(h+2) - h^2\beta^{-2} - (h-2)\beta^{2h} \right) \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{h-2} + \\
&\quad + \left(-(h-2)(h+1) + h^2\beta^{-2} - (h+2)\beta^{-2h} \right) \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-(h+2)} + \\
&\quad + \left((h+2)(h+1) - (h+2)^2\beta^2 + (h+2)\beta^{2h} \right) \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^2 + \\
&\quad + \left(-(h-2)(h-1) + (h-2)^2\beta^2 + (h-1)\beta^{-2h} \right) \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-h}, \\
f_{h24}(\rho) &= \left((h-1)(h+2) - h^2\beta^2 - (h-2)\beta^{-2h} \right) \rho^{h-2} + \\
&\quad + \left(-(h-2)(h+1) - (h+2)\beta^{2h} + h^2\beta^2 \right) \rho^{-(h+2)} + \\
&\quad + \left((h+2)(h+1) - (h+2)^2\beta^{-2} + (h+2)\beta^{-2h} \right) \rho^h + \\
&\quad + \left(-(h-1)(h+2) + (h-2)^2\beta^{-2} + (h-2)\beta^{2h} \right) \rho^{-h}, \\
f_{31}(\rho) &= -1 + 2\beta^2 - \beta^{-4} + (3 - 2\beta^2 - \beta^4) \rho^{-4} + (-3 + 2\beta^{-2} + \beta^{-4}) \rho^2 + (1 - 2\beta^{-2} + \beta^4) \rho^{-2}, \\
f_{32}(\rho) &= 2 - 2\beta^2 + (2\beta^4 - 2\beta^2) \rho^{-4} + (3 - 4\beta^{-2} + \beta^{-4}) \rho^2 + (1 - \beta^4) \rho^{-2}, \\
f_{h31}(\rho) &= h \left(-(h-1) + h\beta^{-2} - \beta^{2h} \right) \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{h-2} + h \left((h+1) - \frac{h}{\beta^2} - \beta^{-2h} \right) \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-(h+2)} + \\
&\quad + h \left(-(h+1) + h\beta^2 + \beta^{2h} \right) \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^h + h \left((h-1) - h\beta^2 + \beta^{-2h} \right) \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-h}, \\
f_{h32}(\rho) &= h \left(-(h-1) + h\beta^2 - \beta^{-2h} \right) \rho^{h-2} + h \left((h+1) - h\beta^2 - \beta^{2h} \right) \rho^{-(h+2)} + \\
&\quad + h \left(-(h+1) + h\beta^{-2} + \beta^{-2h} \right) \rho^h + h \left((h-1) - h\beta^{-2} + \beta^{2h} \right) \rho^{-h},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{h33}(\rho) &= \left((h-1)(h+2) - h^2\beta^{-2} - (h-2)\beta^{2h} \right) \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{h-2} + \\
&+ \left((h-2)(h+1) - h^2\beta^{-2} + (h+2)\beta^{-2h} \right) \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-(h+2)} + \\
&+ \left(h(h+1) - h(h+2)\beta^2 + h\beta^{2h} \right) \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^h + \left(h(h-1) - h(h-2)\beta^2 - h\beta^{-2h} \right) \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-h}, \\
f_{h34}(\rho) &= \left((h-1)(h+2) - h^2\beta^2 - (h-2)\beta^{-2h} \right) \rho^{h-2} + \\
&+ \left((h-2)(h+1) + (h+2)\beta^{2h} - h^2\beta^2 \right) \rho^{-(h+2)} + \\
&+ \left(h(h+1) - h(h+2)\beta^{-2} + h\beta^{-2h} \right) \rho^h + \left(h(h-1) + h(h-2)\beta^{-2} - h\beta^{2h} \right) \rho^{-h}, \\
N &= 2(h^2 - 1) - h^2(\beta^{-2} + \beta^2) + (\beta^{-2h} + \beta^{2h}).
\end{aligned}$$

Перемещения в упругом включении ввиду громоздкости не приводятся.

Из соотношения на границе контакта (16), в случае, когда включение впамяно в пластину, находятся неизвестные константы a_{21} , a_{22} , a_{h1} , a_{h1} , b_{21} , b_{22} , b_{h1} , b_{h1} .

Вид упругопластической границы для первого приближения $r_s^{(1)}$ определяется линейризованным условием [3, 10]

$$r_s^{(1)} = - \left[\sigma_\theta^{(1)} \right] \left[\left[\frac{\partial \sigma_\theta^{(0)}}{\partial \rho} \right]^{-1} \right]_{\rho=1}. \quad (20)$$

С использованием (17) и (18) получен радиус упругопластической границы в пластине, который будет имеет вид (21)

$$r_s^{(1)} = A_r \cos 2\theta + B_r \cos n\theta + C_r \cos m\theta, \quad (21)$$

$$\text{где } A_r = - \frac{(4d_3 - a_{21} + 2a_{22})}{(q+1)\alpha}, \quad B_r|_{h=n} = C_r|_{h=n} = \frac{a_{h1} + 2a_{h2}}{(q+1)\alpha}.$$

Рассмотрим пример.

Пусть

$$\delta = 0.01, \quad \alpha = 0.2, \quad \alpha_1 = 0.201, \quad \beta = 0.15, \quad E_1 = 810, \quad E_2 = 1100, \quad k = 12/\sqrt{3},$$

$$d_1 = 1.8, \quad d_2 = 3.8, \quad P_1 = 10.1, \quad P_2 = 9.0, \quad n = 6, \quad m = 6.$$

На рисунке 1 кривая 1 отражает зависимость r_s от угла θ , т.е. представляет собой форму упругопластической границы в пластине. Контур 2 соответствует контуру отверстия в пластине. Кривая 3 отражает вид контура внутреннего отверстия во включении.

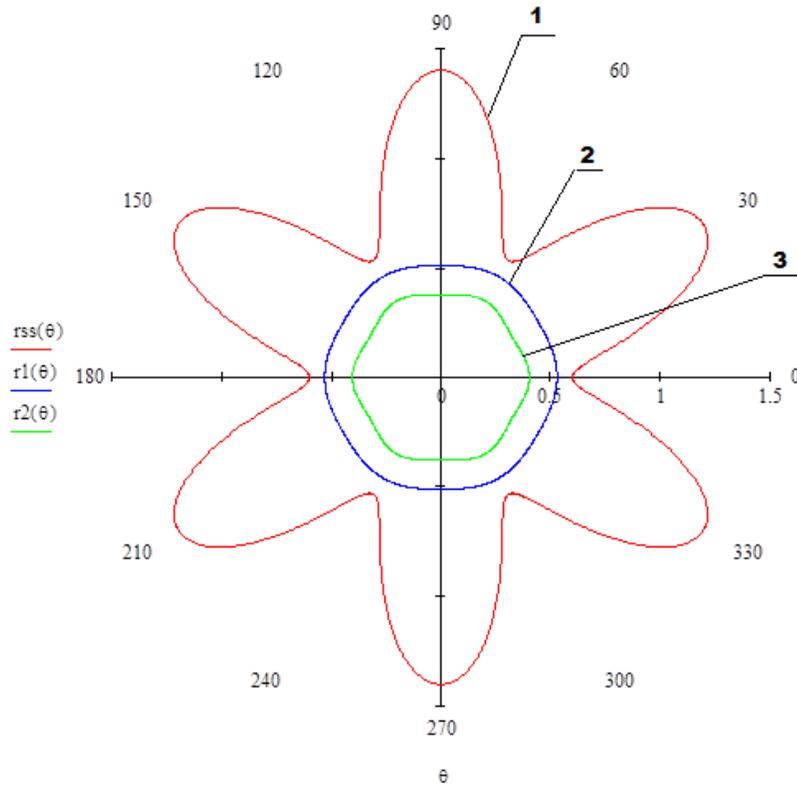


Рис. 1. Форма упругопластической границы

Условие на границе контакта для рисунка соответствует условию, когда включение впаяно в пластину (16).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Артемов М. А. О двусном растяжении толстой пластины с круговым отверстием из упрочняющегося упругопластического материала // ПМТФ. 1985. № 6. С. 158–163.
- [2] Бицено К. Б., Граммель Р. Техническая динамика / К. Б. Бицено, Р. Граммель; пер. с нем. Я. И. Перельмана и Е. П. Попова; под ред. А. И. Лурье. Л.; М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит.; тип. "Печ. двор". 1950–1952.
- [3] Горностаев К. К., Ковалев А. В. Об упругопластическом состоянии толстостенной трубы с учетом температуры для сложной модели среды // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика, 2015. № 1. С. 135–140.
- [4] Задорожний В. Г., Ковалев А. В., Спорыхин А. Н. Об аналитичности решения плоской упругопластической задачи // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2008. № 1. С. 138–146.
- [5] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.

[6] Ковалев А. В. Об учете ассоциированной сжимаемости упругопластических тел в случае плоской деформации // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1 (15). С. 65–69.

[7] Ковалев А. В., Русина Е. Ю., Яковлев А. Ю. Об исследовании механического взаимодействия элементов тонкой упругопластической конструкции // Механика предельного состояния и смежные вопросы: материалы Всероссийской научной школы-конференции, посвященной 85-летию профессора Д. Д. Ивлева. 2015. С. 107–114.

[8] Kovalev A. V., Sporykhin A. N., Yakovlev A. Yu. Biaxial expansion of the elastoplastic space with prismatic inclusions // Прикладная механика. 2000. Т. 36. № 6. С. 114–120.

[9] Ковалев А. В., Спорыхин А. Н., Яковлев А. Ю. Исследование механического взаимодействия элементов различных форм и свойств в системе спрессованных тел // Современные проблемы механики и прикладной математики сборник трудов международной школы-семинара. 2004. С. 280–281.

[10] Ковалев А. В., Хвостов И. Г. Об определении напряжений и перемещений в упругом пространстве, ослабленном сферической полостью, с учетом температуры // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния, 2014. № 2 (20). С. 29–35.

[11] Марушкой Ю. М. Двуосное растяжение упругопластического пространства с включением // Машиностроение, 1975. № 12. С. 25–30.

[12] Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

[13] Спорыхин А. Н., Ковалев А. В., Щеглова Ю. Д. Неоднородные задачи упруговязкопластичности с неизвестной границей. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2004. 219 с.

[14] Яковлев А. Ю. О влиянии формы внешнего контура включения на напряженно-деформированное состояние упругопластического пространства // Перспективы развития науки и образования сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции. 2014. С. 160–162.

A. V. Kovalev, E. Y. Rusina, A. Y. Yakovlev

ABOUT RESEARCH OF MECHANICAL INTERACTION ELEMENTS, IN THE THIN ELASTOPLASTIC DESIGNS

Abstract. In work as a method of small parametre tensely deformed condition of the thin is defined is elastoplastic plate that includes an inclusion of polygonal form. The decision was cost in frameworks plainly stresses a conditions under the theory of ideal plasticity with a condition of plasticity of Tresca-Saint-Venant.

Kovalev Alexey Viktorovich, Dr. Sci. Phys. and Math., Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Rusina Elena Yuryevna, Postgraduate student, Department of Mechanics and Computer Modelling, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Yakovlev Alexander Yuryevich, Ph.D., Assoc. Professor, Head of Department of Mechanics and Computer Modelling, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Keywords: small parametre, plasticity, elasticity, plainly stresses a conditions, condition of plasticity of Tresca-Saint-Venant.

REFERENCES

- [1] Artemov M. A. O dvuosnom rastjazhenii tolstoj plastiny s krugovym otverstiem iz uprochnjajushhegosja uprugoplasticheskogo materiala // PMTF. 1985. № 6. S. 158–163.
- [2] Biceno K. B., Grammel' R. Tehnicheskaja dinamika / K. B. Biceno, R. Grammel'; per. s nem. Ja. I. Perel'mana i E. P. Popova; pod red. A. I. Lur'e. L.; M.: Gos. izd-vo tehn.-teoret. lit.; tip. "Pech. dvor". 1950–1952.
- [3] Gornostaev K. K., Kovalev A. V. Ob uprugoplasticheskom sostojanii tolstostennoj trubny s uchetom temperatury dlja slozhnoj modeli sredy // Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Fizika. Matematika, 2015. № 1. S. 135–140.
- [4] Zadorozhnij V. G., Kovalev A. V., Sporyhin A. N. Ob analitichnosti reshenija ploskoj uprugoplasticheskoj zadachi // Izvestija Rossijskoj akademii nauk. Mehanika tverdogo tela. 2008. № 1. S. 138–146.
- [5] Ivlev D. D., Ershov L. V. Metod vozmushhenij v teorii uprugoplasticheskogo tela. M.: Nauka, 1978. 208 s.
- [6] Kovalev A. V. Ob uchete associirovannoj szhimaemosti uprugoplasticheskikh tel v sluchae ploskoj deformacii // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2013. № 1 (15). S. 65–69.
- [7] Kovalev A. V., Rusina E. Ju., Jakovlev A. Ju. Ob issledovanii mehanicheskogo vzaimodejstvija jelementov tonkoj uprugoplasticheskoj konstrukcii // Mehanika predel'nogo sostojanija i smezhnye voprosy: materialy Vserossijskoj nauchnoj shkoly-konferencii, posvjashhennoj 85-letiju professora D. D. Ivleva. 2015. S. 107–114.
- [8] Kovalev A. V., Sporykhin A. N., Yakovlev A. Yu. Biaxial expansion of the elastoplastic space with prismatic inclusions // Prikladnaja mehanika. 2000. T. 36. № 6. S. 114–120.
- [9] Kovalev A. V., Sporyhin A. N., Jakovlev A. Ju. Issledovanie mehanicheskogo vzaimodejstvija jelementov razlichnyh form i svojstv v sisteme spressovanyh tel // Sovremennye problemy mehaniki i prikladnoj matematiki sbornik trudov mezhdunarodnoj shkoly-seminara. 2004. S. 280–281.
- [10] Kovalev A. V., Hvastov I. G. Ob opredelenii naprjazhenij i peremeshhenij v uprugom prostranstve, oslabennom sfericheskoj polost'ju, s uchetom temperatury // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija, 2014. № 2 (20). S. 29–35.
- [11] Marushkej Ju. M. Dvuosnoe rastjazhenie uprugoplasticheskogo prostranstva s vkljucheniem // Mashinostroenie, 1975. № 12. S. 25–30.
- [12] Mushelishvili N. I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti. M. : Nauka, 1966. 707 s.
- [13] Sporyhin A. N., Kovalev A. V., Shheglola Ju. D. Neodnomernye zadachi uprugovjazkoplachnostj s neizvestnoj granicej. Voronezh: Izd-vo VGU, 2004. 219 s.
- [14] Jakovlev A. Ju. O vlijanii formy vneshnego kontura vkljuchenija na naprjazhenno-deformirovanoe sostojanie uprugoplasticheskogo prostranstva // Perspektivy razvitija nauki i obrazovanija sbornik nauchnyh trudov po materialam Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoi konferencii. 2014. S. 160–162.

М. А. Артемов, Е. С. Барановский

АНАЛИЗ И СОПОСТАВЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ТЕОРИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. Проводится анализ и сопоставление следующих теорий пластического течения идеального пластического тела: Сен-Венана, Леви, Мизеса и Ишлинского. Основное внимание уделено рассмотрению гипотез, лежащих в основе построения определяющих уравнений для пластического тела. Выделяются гипотезы о пропорциональности и соосности тензоров. Рассматриваются проблемы, обусловленные гипотезами, заложенными в построение определяющих уравнений.

Ключевые слова: теория Сен-Венана, теория Леви, теория Мизеса, теория Ишлинского.

УДК: 539.214

Введение. Известно [1–8], что в основе классических теорий пластичности идеально пластических тел лежат предположения достаточно общего характера, учитывающие условия, заложенные в ранее созданные теории упругого и вязкого тела. Поскольку при создании ранних теорий пластичности проводилась параллель с теорией вязких жидкостей, то уже известные к тому времени подходы, например в теории упругого тела, были использованы в более поздних теориях. Последним толчком к развитию математической теории пластичности можно считать работу Треска, показавшего, что при развитом пластическом течении практически отсутствует взаимно-однозначное соответствие напряжений и деформаций.

Термины «теория Сен-Венана — Леви», «Леви — Мизеса», «Сен-Венана — Мизеса» сложились исторически и отражают тенденцию развития математической теории пластичности. Однако представляет интерес сопоставление разных теорий пластичности для понимания их различия и предположений, заложенных в их основу. Некоторое сопоставление теорий Сен-Венана, Леви дано в [17].

© Артемов М. А., Барановский Е. С., 2017

Артемов Михаил Анатольевич,

e-mail: artemov_m_a@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Барановский Евгений Сергеевич

e-mail: esbaranovskii@gmail.com, кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 10.02.2017

Изотропное несжимаемое идеальнопластическое тело. Теория течения.

Первая теория пластического течения идеального жесткопластического несжимаемого тела была опубликована Сен-Венаном в 1871 году для плоской задачи [9] при выборе условия текучести Треска.

Определяющее уравнение

$$\frac{\dot{\epsilon}_{xx} - \dot{\epsilon}_{zz}}{\dot{\epsilon}_{xz}} = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{\sigma_{xz}} \quad (1)$$

строилось на основе предположения о совпадении площадок максимального касательного напряжения и максимальной скорости сдвига. Следует учитывать, что из соотношения (1), вообще говоря, не следует неотрицательность диссипативной функции $D = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ [10].

Условие совпадения площадок максимальных касательных напряжений и соответствующих максимальных скоростей сдвига есть условие соосности тензоров напряжений и скоростей деформаций. Как отмечается в [6], соотношение (1) для двумерного случая является следствием соотношений соосности тензоров, предложенных А. Ю. Ишлинским [11], [12].

Если подойти к соотношению (1) с позиций ассоциированного закона пластического течения, то они также будут следствием этого закона течения для всех условий пластичности, не зависящих от линейного инварианта тензора напряжений, кроме условия пластичности Треска. Однако в силу ассоциированного закона пластического течения в случае плоской деформации осевая компонента тензора напряжений (в обозначениях работы [9] это – компонента) в жесткопластическом теле остается неопределенной [12]. Несмотря на то, что в своей работе Сен-Венан рассматривает условие пластичности Треска, он полагал, что нормальное давление

$$p = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2}.$$

К условию пластичности вида выбранного Сен-Венаном

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{xz}^2} = 2K \quad (2)$$

в случае плоской деформации приводятся все условия пластичности, не зависящие от линейного инварианта тензора напряжений.

Известно, что условие (2) также выполняется в случае плоского напряженного состояния для двух режимов условия пластичности Треска [4].

Резюмируя сказанное, можно говорить, что «в чистом виде» теория Сен-Венана для плоского деформированного состояния строится на условии соосности тензоров напряжений и скоростей деформаций для любого условия пластичности, не зависящего от линейного инварианта тензора напряжений.

В определенном смысле обобщением теории Сен-Венана можно считать теорию А. Ю. Ишлинского [11], предложившего использовать только условие соосности тензоров напряжений и скоростей деформаций для режима полной пластичности.

В отличие от теорий, использующих пластический потенциал, условие соосности тензоров не налагает ограничений на собственные значения тензоров напряжений и скоростей деформаций, поэтому соотношения соосности необходимо дополнять условием неотрицательности свертки $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \cdot \boldsymbol{\sigma}$ [12].

Второй шаг в направлении развития теории течения идеального жесткопластического несжимаемого тела был сделан Леви [13], предположившим использовать определяющее соотношение в виде пропорции

$$\frac{\sigma_{xy}}{\dot{\epsilon}_{xy}} = \frac{\sigma_{yz}}{\dot{\epsilon}_{yz}} = \frac{\sigma_{zx}}{\dot{\epsilon}_{zx}} = \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{zz}}{\dot{\epsilon}_{yy} - \dot{\epsilon}_{zz}} = \frac{\sigma_{zz} - \sigma_{xx}}{\dot{\epsilon}_{zz} - \dot{\epsilon}_{xx}}, \quad (3)$$

а также условие пластичности Треска, записанное через основные инварианты девиатора напряжений. Соотношения (3) надо дополнять условием

$$D = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \geq 0.$$

Пропорции (3) являются следствием пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций

$$Dev \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \psi Dev \boldsymbol{\sigma}, \quad \psi \geq 0, \quad tr(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = 0,$$

которая была выбрана в качестве определяющего уравнения в работе Мизеса [14]. Коэффициент ψ – искомая скалярная изотропная функция. Требование $\psi \geq 0$ обеспечивает неотрицательность диссипативной функции $D = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, а из пропорций этого не следует. Теории Леви и Мизеса содержат одинаковое определяющее уравнение, но разные условия пластичности. О совпадении этих теорий можно говорить лишь в случае плоской деформации.

Формально определяющее соотношение Сен-Венана (1) следует из определяющего соотношения Леви (2), на основании чего теорию Леви иногда трактуют как обобщение теории Сен-Венана. Конечно, такая интерпретация была бы абсолютно точной, если предложение Леви о пропорциональности перенести в теорию Сен-Венана. Однако соотношения (1) являются следствием предположения о совпадении площадок максимального касательного напряжения и максимальной скорости сдвига, то есть учитывается лишь соосность тензоров, а не пропорциональность девиаторов напряжений и скоростей деформаций.

Если подойти к теории Леви с позиций пластического потенциала, который не совпадает с функцией пластичности (условие Треска в форме Леви), то в теории Леви определяющие соотношения можно представить в виде закона нормальной связи

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \psi \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}) = \frac{1}{2} tr(Dev \boldsymbol{\sigma})^2.$$

С такой точки зрения теория Леви является примером того как пластический потенциал не совпадает с функцией пластичности. В качестве условия пластичности в теории Леви рассматривается условие пластичности Треска (о правильных формах записи условия пластичности Треска и Шмидта см. [15–17]).

Первый шаг в направлении использования закона нормальной связи был сделан в работе [18]. Мизес в качестве пластического потенциала рассматривает квадратичный инвариант девиатора напряжений, принимаемый в качестве функции пластичности

$$d\boldsymbol{\epsilon} = d\lambda \frac{\partial tr((Dev \boldsymbol{\sigma})^2)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}.$$

Введение пластического потенциала Φ – изотропной скалярной функции –

$$d\boldsymbol{\epsilon}^p = d\lambda \mathbf{h}, \quad \mathbf{h} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

накладывает определенные ограничения на «свободу» скоростей пластических деформаций, поскольку из закона нормальной связи следует не только соосность тензоров, но и их пропорциональность.

Выводы. Теории Сен-Венана, Леви и Мизеса, основанные на разных предположениях, являются по сути различными.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ишлинский А. Ю. Прикладные задачи механики. Т. 1. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. М.: Наука, 1986. С. 62–83.
- [2] Freudenthal A. M., Geiringer H. The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum. Encyclopedia of physics. Vol. VI. Elasticity and plasticity. Berlin: Springer-Verlag, 1958. P. 229–433. (Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.)
- [3] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
- [4] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
- [5] Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
- [6] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 704 с.
- [7] Malvern L. E. Introduction to the mechanics of a continuous medium. New Jersey: Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1969. 713 p.
- [8] Прагер В., Ходж Ф. Г. Теория идеально пластических тел. М.: ИЛ, 1956. 398 с.
- [9] Saint-Venant B. Mémoire sur l'établissement des équation différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delá des limites ou l'élasticité pourrait les ramener á leur premier état // J. d. Math. Pures Appl. Liouville. 1871. Ser. II. V. 16. P. 308–316. (Сен-Венан Б. Об установлении уравнений внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределом упругости // Теория пластичности: сб. ст. М.: ИЛ, 1948. С. 11–19.)
- [10] Артемов М. А. К теории пластичности анизотропных материалов // Проблемы механики: сб. статей. К 90-летию дня рождения А. Ю. Ишлинского. М.: Физматлит, 2003. С. 100–104.
- [11] Ишлинский А. Ю. Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости // Уч. записки МГУ. Механика. 1946. Вып. 117. С. 90–108.
- [12] Артемов М. А., Потапов Н. С., Якубенко А. П. Следствия нормального закона пластического течения // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2009. Т. 5, № 9. С. 145–147.
- [13] Lévy M. Extrait du mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delá des limites ou l'élasticité pourrait les ramener á leur premier état // J. Math. Pures Appl. 1871. Ser. II. Vol. 16. P. 369–372. (Леви М. К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределом упругости // Теория пластичности: сб. ст. М.: ИЛ, 1948. С. 20–23.)
- [14] Mises R. Mechanik des festen Körpers im plastischen deformablen Zustand // Gottinger Nachr. Math. Phys. 1913. Heft 4. S. 582–592. (Мизес Р. Механика твердых тел в пластически-деформированном состоянии / Теория пластичности: сб. ст. М.: ИЛ, 1948. С. 57–69.)

[15] Reuss A. Vereinfachte Berechnung der plastischen Formänderungsgeschwindigkeiten bei Voraussetzung der Schubspannungsfliedbedingung // Ztschr. Angew. Math. und Mech. 1933. Band. 13. Heft 5. S. 356–360.

[16] Артемов М. А., Потапов Н. С., Якубенко А. П. О соотношениях, вытекающих из условия пластичности Треска // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2011. Т. 7, № 3. С. 7–8.

[17] Артемов М. А., Барановский Е. С. Математическое моделирование пластического состояния тел. Плоская деформация // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2 (24). С. 72–87.

[18] Mises R. Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen // Ztschr. Angew. Math. und Mech. 1928. Band 8. Heft 3. S. 161–185.

M. A. Artemov, E. S. Baranovskii

ANALYSIS AND COMPARISON OF SOME THEORIES OF PLASTICITY

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. In present paper, analysis and comparison of such theories of plastic flow as Saint-Venant's theory, Levy's theory, Mises theory and Ishlinsky's theory are considered. The main attention is paid to the consideration of hypotheses, lying in the construction of the determining equations for a plastic body. The hypotheses about the proportionality of the tensors and the coaxiality of the tensors are allocated. Problems caused by hypotheses, which underlying the construction of the determining equations are considered.

Keywords: Saint-Venant's theory, Levy's theory, Mises theory, Ishlinsky's theory.

REFERENCES

- [1] Ishlinskii A. Y. Applied problems of mechanics. M.: Nauka, 1986. P. 62–83. (in Russian).
- [2] Freudental A. M. The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum. Encyclopedia of physics. Vol. VI. Elasticity and plasticity. Berlin: Springer-Verlag, 1958. P. 229–433.
- [3] Ivlev D. D. Theory of Ideal Plasticity. M.: Nauka, 1966. 232 p. (in Russian).
- [4] Kachanov L. M. Foundations of the Theory of Plasticity. M.: Nauka, 1973. 576 p. (in Russian).
- [5] Sokolovskii V. V. Theory of plasticity. M.: Vishaya Shkola, 1969. 608 p. (in Russian).
- [6] Ishlinskii A. Y., Ivlev D. D. The Mathematical Theory of Plasticity. M.: FIZMATLIT, 2001. 704 p. (in Russian).
- [7] Malvern L. E. Introduction to the mechanics of a continuous medium. New Jersey: Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1969. 713 p.
- [8] Prager W., Hodge P. G. Theory of Perfectly Plastic Solids. John Wiley & Sons, 1951.
- [9] Saint-Venant B. Mémoire sur l'établissement des équation différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites ou l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état // J. d. Math. Pures Appl. Liouville. 1871. Ser. II. Vol. 16. P. 308–316.
- [10] Artemov M. A. To the Theory of Plasticity of Anisotropic Materials // Problems of Mechanics: to the 90th anniversary of A. Yu. Ishlinsky. M.: FIZMATLIT, 2003. P. 100–104. (in Russian).
- [11] Ishlinskii A. Y. On the equations of deformation of bodies beyond the elastic limit // Scientific notes of the Moscow State University. Mechanics. 1946. Vol. 117. P. 90–108. (in Russian).

Artemov Mikhail Anatolievich

e-mail: artemov_m_a@mail.ru, Head of the Chair, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Baranovskii Evgeny Sergeevich

e-mail: esbaranovskii@gmail.com, Associate Professor, Cand. Sci. Phys. & Math., Voronezh State University, Voronezh, Russia.

[12] Artemov M. A., Potapov N. S., Yakubenko A. P. Normal plastic flow implications // Bulletin of Voronezh State Technical University. 2009. Vol. 5. № 9. P. 145–147. (in Russian).

[13] Lévy M. Extrait du mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état // J. Math. Pures Appl. 1871. Ser. II. Vol. 16. P. 369–372.

[14] Mises R. Mechanik des festen Körpers im plastischen deformablen Zustand // Gottinger Nachr. Math. Phys. 1913. Heft 4. S. 582–592.

[15] Reuss A. Vereinfachte Berechnung der plastischen Formänderungsgeschwindigkeiten bei Voraussetzung der Schubspannungsfließbedingung // Ztschr. Angew. Math. und Mech. 1933. Band. 13. Heft 5. S. 356–360.

[16] Artemov M. A., Potapov N. S., Yakubenko A. P. About relations arising from Treska plasticity condition // Bulletin of Voronezh State Technical University. 2011. Vol. 7. № 3. P. 7–8. (in Russian).

[17] Artemov M. A., Baranovskii E. S. Mathematical Modeling of Plastic State of the Bodies in Case of Plane Strain // Bulletin of Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Serie: Mechanics. 2015. № 2 (24). P. 72–87. (in Russian).

[18] Mises R. Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen // Ztschr. Angew. Math. und Mech. 1928. Band 8. Heft 3. S. 161–185.

И. И. Переяславская, М. А. Артемов, Е. С. Барановский

К ВОПРОСУ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ПЛОСКО-НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ СЖИМАЕМОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. Предложены алгоритмы нахождения напряжений и деформаций в сжимаемом идеально упругопластическом теле для осесимметричного плосконапряженного состояния при выборе кусочно-линейного условия пластичности общего вида. Определяющее уравнение выводится из ассоциированного закона пластического течения. В пространстве внешних воздействий найден образ многоугольника пластичности. Предложен алгоритм определения границ изменения значений внешних воздействий, позволяющий установить, какой режим пластичности в процессе нагружения будет выполняться в зарождающейся пластической зоне. Для построения алгоритма определения напряженного состояния найдена граница зарождения пластической зоны. Показано, что в пластической зоне могут выполняться разные режимы пластичности. Для вычисления напряжений в пластической зоне получено уравнение для границы перехода от одного режима пластичности к другому. Определены режимы пластичности и получены формулы, позволяющие выяснить, какие режимы пластичности будут выполняться в пластической зоне. Приведены расчеты и графики распределения напряжений для конкретных условий пластичности.

Ключевые слова: сжимаемое упругопластическое тело, теория пластического течения, закон нормальной связи, пространство внешних воздействий, плоское напряженное состояние.

УДК: 539.214

Введение. Вопросы теории пластического течения при выборе кусочно-линейных условий пластичности рассматривались в ряде статей и монографий (см., например [1–18]). Общим вопросам теории пластичности с сингулярной поверхностью текучести посвящены работы [19–26].

© Переяславская И. И., Артемов М. А., Барановский Е. С., 2017

Переяславская Ирина Игоревна

e-mail: irika5319@yandex.ru, аспирант, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Артемов Михаил Анатольевич

e-mail: artemov_m_a@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Барановский Евгений Сергеевич

e-mail: esbaranovskii@gmail.com, кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 10.02.2017

В работах [27–33, 40] рассматривалось решение некоторых задач теории упругопластического тела при выборе кусочно-линейных условий пластичности. Альтернативные формы записи кусочно-линейных условий пластичности рассматривались в [1, 5, 10, 19, 34–39].

Интерес к выбору кусочно-линейных условий пластичности обусловлен получением аналитического решения некоторых задач, для которых при выборе гладких функций пластичности аналитическое решение не получено. Хорошо известно, что по сравнению с несжимаемым упругопластическим телом учет сжимаемости существенно усложняет решение даже простейших задач, в то время как при выборе кусочно-линейных условий пластичности учет пластической сжимаемости не привносит существенных сложностей при решении задач [5, 6].

Следует отметить, что кусочно-линейные условия пластичности, являясь частным случаем сингулярных условий пластичности, имеют ряд особенностей, которые вызывают критическое отношение к этим условиям [40, 41].

В настоящей работе рассматривается упругопластическое состояние осесимметричного кольцевого диска радиусов a и b , на торцевые стороны которого действуют давления p_a и p_b . Для записи необходимых соотношений используется цилиндрическая система координат (r, θ, z) , ось z которой совпадает с осью симметрии диска.

Плоское напряженное состояние. Кусочно-линейное условие пластичности для идеального пластического тела включает режимы, соответствующие сторонам и вершинам кривой пластичности в плоскости ненулевых главных нормальных напряжений [6].

Рассмотрим режим пластичности, соответствующий i -й стороне многоугольника пластичности

$$\begin{cases} f_i = \alpha_i \sigma_\theta + \beta_i \sigma_r - 2k = 0, \\ f_{i-1} = \alpha_{i-1} \sigma_\theta + \beta_{i-1} \sigma_r - 2k \leq 0, \\ f_{i+1} = \alpha_{i+1} \sigma_\theta + \beta_{i+1} \sigma_r - 2k \leq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Задача плоского напряженного состояния идеального упругопластического тела в пластической зоне статически определима

$$\begin{cases} r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0, \\ \sigma_\theta = \frac{2k - \beta_i \sigma_r}{\alpha_i}. \end{cases} \quad (2)$$

Решение системы уравнений (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(i)} &= \frac{2k}{\alpha_i + \beta_i} + C^{(i)} r^{-\frac{\alpha_i + \beta_i}{\alpha_i}}, \\ \sigma_\theta^{(i)} &= \frac{2k}{\alpha_i + \beta_i} - \frac{\beta_i}{\alpha_i} C^{(i)} r^{-\frac{\alpha_i + \beta_i}{\alpha_i}}. \end{aligned} \quad (3)$$

В случае, когда $\alpha_i + \beta_i = 0$, решением системы (2) будет

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(i)} &= C^{(i)} + \frac{2k}{\alpha_i} \ln(r), \\ \sigma_\theta^{(i)} &= C^{(i)} + \frac{2k}{\alpha_i} (1 + \ln(r)).\end{aligned}\tag{4}$$

Формулы (4) следуют из (3), если выполнить предельный переход $\delta = \alpha_i + \beta_i \rightarrow 0$. При этом нужно учитывать, что величина $C^{(i)}$ зависит от параметра δ .

В зависимости от величины внешних воздействий в пластической зоне могут выполняться несколько режимов пластичности.

Один режим пластичности. Рассмотрим случай, когда в пластической зоне $a \leq r \leq c$ (c — радиус упругопластической границы) реализуется только один режим пластичности. Поскольку на границе $r = a$ имеет место $\sigma_r = -p_a$, то

$$C^{(i)} = - \left(\frac{2k}{\alpha_i + \beta_i} + p_a \right) a^{\frac{\alpha_i + \beta_i}{\alpha_i}},\tag{5}$$

если $\alpha_i + \beta_i \neq 0$.

Учитывая (5), формулы (3) примут вид:

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(i)} &= \frac{2k}{\alpha_i + \beta_i} - \left(\frac{2k}{\alpha_i + \beta_i} + p_a \right) \left(\frac{a}{r} \right)^{\frac{\alpha_i + \beta_i}{\alpha_i}}, \\ \sigma_\theta^{(i)} &= \frac{2k}{\alpha_i + \beta_i} + \frac{\beta_i}{\alpha_i} \left(\frac{2k}{\alpha_i + \beta_i} + p_a \right) \left(\frac{a}{r} \right)^{\frac{\alpha_i + \beta_i}{\alpha_i}}.\end{aligned}\tag{6}$$

Напряжения в упругой зоне $c \leq r \leq b$ и уравнение для определения радиуса упругопластической границы находим с учетом непрерывности напряжений на упругопластической границе $r = c$:

$$\begin{aligned}\sigma_{r,\theta} &= \frac{c^2 p_c - b^2 p_b}{b^2 - c^2} \mp \frac{c^2 b^2 (p_c - p_b)}{(b^2 - c^2) r^2}, \quad p_c = -\sigma_r^{(i)}|_{r=c}, \\ \frac{2k}{\alpha_i + \beta_i} + \frac{\beta_i}{\alpha_i} \left(\frac{2k}{\alpha_i + \beta_i} + p_a \right) \left(\frac{a}{c} \right)^{\frac{\alpha_i + \beta_i}{\alpha_i}} &= \frac{(c^2 + b^2) p_c - 2b^2 p_b}{b^2 - c^2}.\end{aligned}$$

Если $\alpha_i + \beta_i = 0$,

$$C^{(i)} = \frac{ma^2}{2} - p_a - \frac{2k}{\alpha_i} \ln(a),$$

а формулы (4) для компонент напряжений запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(i)} &= -p_a + \frac{2k}{\alpha_i} \ln \left(\frac{r}{a} \right), \\ \sigma_\theta^{(i)} &= -p_a + \frac{2k}{\alpha_i} \left(1 + \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right).\end{aligned}\tag{7}$$

Два режима пластичности. Рассмотрим случай, когда в области $a \leq r \leq r_i$ выполняется режим пластичности (корректной формой записи режимов пластичности является система (1))

$$f_i = \alpha_i \sigma_\theta + \beta_i \sigma_r - 2k = 0,$$

а в области $r_i \leq r \leq c$ выполняется режим

$$f_{i+1} = \alpha_{i+1} \sigma_\theta + \beta_{i+1} \sigma_r - 2k = 0.$$

Для идеального пластического тела координаты вершин многоугольника пластичности известны. Они определяются из условия непрерывности компонент тензора напряжений на границе $r = r_i$

$$\sigma_\theta = \frac{2k(\alpha_{i+1} - \alpha_i)}{\beta_i \alpha_{i+1} - \alpha_i \beta_{i+1}}, \quad \sigma_r = \frac{2k(\beta_i - \beta_{i+1})}{\beta_i \alpha_{i+1} - \alpha_i \beta_{i+1}}. \quad (8)$$

В области $a \leq r \leq r_i$ напряженное состояние определяется по формулам (6). Переход к новому режиму пластичности происходит в точке, в которой напряжения (6) удовлетворяют уравнению

$$\alpha_{i+1} \sigma_\theta^{(i)} + \beta_{i+1} \sigma_r^{(i)} - 2k = 0.$$

Решая это уравнение, находим

$$r_i = \left(\frac{2k\alpha_i(\alpha_{i+1} + \beta_{i+1} - \alpha_i - \beta_i)}{C^{(i)}(\beta_i^2 \alpha_{i+1} + \alpha_i \beta_i(\alpha_{i+1} - \beta_{i+1}) - \alpha_i^2 \beta_{i+1})} \right)^{-\frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i}}. \quad (9)$$

Если ввести обозначение $p_i = \sigma_r^{(i)}|_{r=r_i}$, то формулы для напряжений в области $r_i \leq r \leq c$ будут вполне аналогичны формулам для области $a \leq r \leq r_i$; нужно будет заменить индекс i на индекс $i+1$, давление p_a – на давление p_i и величину радиуса внутренней границы $r = a$ – на радиус границы $r = r_i$.

Алгоритм решения задачи, когда в пластической зоне реализуется более двух режимов пластичности, аналогичен вышеизложенному алгоритму.

Поскольку для идеального пластического тела координаты вершин многоугольника пластичности (8) известны до определения напряжений, то формулу (9) можно получить из условия непрерывности любой комбинации компонент напряжений.

Алгоритмы определения напряженного и деформированного состояния кольцевого диска. В случае плоского напряженного состояния для идеального пластического тела границы допустимых значений давления p_a известны до решения задачи. Они определяются из рассмотрения многоугольника пластичности, или из (8). Учитывая значения давления на внутренней границе, можно выбрать один из возможных режимов пластичности в качестве режима, реализующегося в некоторой окрестности границы $r = a$. В этом случае имеются ограничения на допустимые значения внешнего давления (исследование проведено ниже). Если такой алгоритм не выбирать, то в алгоритм решения задачи нужно заложить все необходимые проверки, позволяющие ответить на следующие вопросы:

- При каких давлениях все кольцо будет находиться в упругом состоянии, т. е. ответить на вопрос: что есть процесс нагружения?
- Где в процессе нагружения зарождается пластическая зона?
- Каким ограничениям должны удовлетворять внешние воздействия, чтобы знать, какой из возможных режимов пластичности будет выполняться в момент зарождения пластической зоны?

- Сколько режимов будет выполняться в пластической зоне?

Эквивалентное напряжение. Для оценки величины напряженного состояния можно ввести эквивалентное напряжение – положительно определенную скалярную изотропную функцию напряжений. При рассмотрении вопроса о зарождении пластической зоны в процессе изменения внешних воздействий естественно приравнять эквивалентное напряжение функции пластичности. Увеличение значения эквивалентного напряжения будет характеризовать процесс нагружения в выбранной точке области упругого состояния диска. В пластической области таким образом определяемое эквивалентное напряжение не будет изменяться. Для определения процесса нагружения в пластической зоне можно ввести эквивалентную пластическую деформацию (эквивалент тензора пластических деформаций – скалярная положительно определенная изотропная функция).

О наибольшем значении эквивалентного напряжения для упругого состояния диска. Запишем кусочно-линейную функцию пластичности в виде, явно выделив ее зависимость от линейного инварианта тензора напряжений,

$$f_i = \alpha_i \sigma_\theta + \beta_i \sigma_r + \gamma_i \sigma_z + \delta \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}, \quad \alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 0. \quad (10)$$

Для диска, находящегося в упругом состоянии, выражения для напряжений

$$\sigma_{\theta,r} = \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} \pm \frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{(b^2 - a^2) r^2}, \quad \sigma_z = 0, \quad (11)$$

где p_a и p_b – давления на внутренней и внешней границе, подставляем в (10), так что

$$f_i = \frac{(\alpha_i + \beta_i + 2\delta)(a^2 p_a - b^2 p_b)}{b^2 - a^2} + a^2 b^2 \frac{(\alpha_i - \beta_i)(p_a - p_b)}{(b^2 - a^2) r^2}. \quad (12)$$

Производная функции f_i :

$$\frac{df_i}{dr} = -\frac{2(\alpha_i - \beta_i)a^2 b^2 \Delta p}{(b^2 - a^2)r^3}, \quad \Delta p = p_a - p_b.$$

Знакоопределенность производной указывает на то, что наибольшее и наименьшее значения функции f_i принимают на границах области.

Из (12) следует, что значения функции f_i на границах области $a \leq r \leq b$

$$f_i|_{r=a} = \left(\beta_i - \frac{(a^2 + b^2)\alpha_i + 2a^2\delta}{b^2 - a^2} \right) p_a - \frac{2b^2(\alpha_i + \delta)p_b}{b^2 - a^2},$$

$$f_i|_{r=b} = \frac{2b^2(\alpha_i + \delta)p_a}{b^2 - a^2} - \left(\beta_i + \frac{(a^2 + b^2)\alpha_i + 2a^2\delta}{b^2 - a^2} \right) p_b.$$

Разность

$$\Delta f = f_i|_{r=a} - f_i|_{r=b} = (\alpha_i - \beta_i)(p_a - p_b).$$

Анализ системы

$$\begin{cases} \Delta f = (\alpha_i - \beta_i)\Delta p, \\ \frac{df_i}{dr} = -\frac{2(\alpha_i - \beta_i)a^2 b^2 \Delta p}{(b^2 - a^2)r^3} \end{cases}$$

показывает, что наибольшее значение функция (10) принимает на внутренней границе $r = a$.

В случае, когда $\alpha_i = \beta_i$, например один из режимов пластичности для условия пластичности Шмидта (условие максимального приведенного напряжения), весь кольцевой диск переходит в предельное состояние. Алгоритм определения границ изменения давлений p_a, p_b , в пределах которых реализуется этот режим, рассмотрен ниже.

Геометрическая интерпретация эквивалентного напряжения в пространстве внешних воздействий. Задав конкретные значения коэффициентов α_i и β_i в условии пластичности

$$\begin{cases} f_i = \max_{i=1 \div n} \{ \alpha_i \sigma_\theta + \beta_i \sigma_r + \gamma_i \sigma_z - 2k \} = 0, \\ \sigma_z = 0 \end{cases} \quad (13)$$

в пространстве внешних воздействий (в рассматриваемом случае внешние воздействия – это давления, действующие на боковые стенки диска), можно получить образ кривой пластичности, поскольку для каждой точки зоны кольца, находящейся в упругом состоянии,

$$\sigma_\theta = \sigma_\theta(p_a, p_b), \quad \sigma_r = \sigma_r(p_a, p_b).$$

В качестве примера рассмотрим два предельных условия пластичности максимального приведенного напряжения:

$$f^{(1)} = \max\{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3; 2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_z; 2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta\} - 2k = 0, \quad (14)$$

$$f^{(2)} = \max\{2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z; 2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_z; 2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta\} + 2k = 0.$$

Используя формулы (11) для режимов (14), в пространстве внешних воздействий (p_a, p_b) выделяем область упругого состояния кольца (рис. 1).

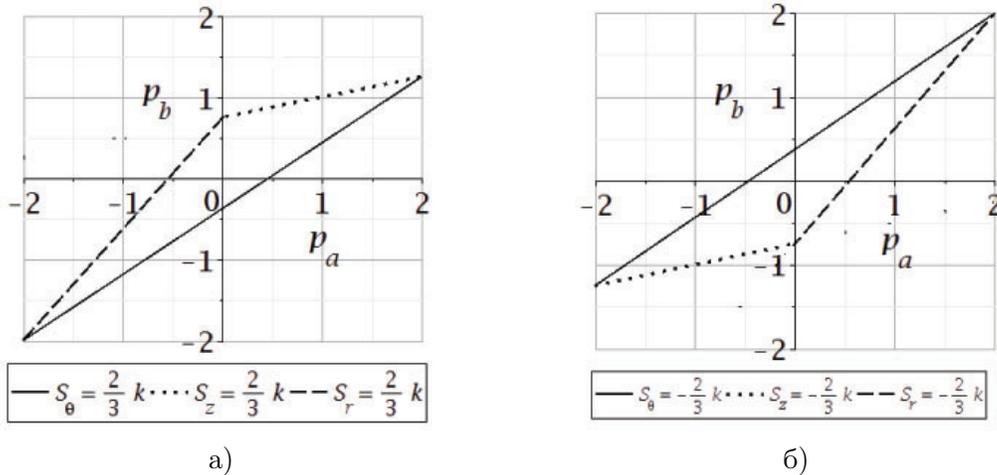


Рис. 1. а) $\max\{s_1; s_2; s_3\} = \frac{2}{3}k$, б) $\max\{s_1; s_2; s_3\} = -\frac{2}{3}k$,
 $a = 1$; $b = 2$; $k = 1$; s_i – компоненты девиатора напряжений

Для внешних воздействий p_a, p_b , которым соответствуют точки, лежащие внутри треугольников, вся область кольца будет находиться в упругом состоянии. Точкам,

принадлежащим сторонам треугольников, соответствуют значения внешних воздействий, для которых на внутренней границе кольца, находящегося в упругом состоянии, будет выполняться определенный режим пластичности.

Уравнение

$$\sigma_{eq} = const$$

определяет множество гомотетичных треугольников, которые соответствуют определенным уровням напряженного состояния, оцениваемым эквивалентным напряжением σ_{eq} .

Условие зарождения указанного режима пластичности. Выберем любой режим пластичности (1) и найдем условия, при выполнении которых в процессе нагружения на границе $r = a$ зарождается этот режим пластичности. Для этого, используя формулы (11) для напряжений в зоне упругого состояния, получим выражения для компонент тензора напряжений на границе $r = a$:

$$\sigma_r|_{r=a} = -p_a, \quad \sigma_\theta|_{r=a} = -pa + \frac{2b^2(p_a - p_b)}{b^2 - a^2}, \quad \sigma_z = 0. \quad (15)$$

Подставляя выражения (15) для компонент тензора напряжений в первое условие (1), находим зависимость между внешним и внутренним давлением

$$p_b = \frac{\alpha_i(a^2 + b^2) - \beta_i(b^2 - a^2)}{2\alpha_i b^2} p_a - \frac{b^2 - a^2}{\alpha_i b^2} k. \quad (16)$$

При выполнении равенства (16) для кольца, находящегося в упругом состоянии, на границе $r = a$ будет выполняться первое условие (1).

Для режимов f_{i+1} , f_{i-1} , указанных в системе (1), получаем аналогичные соотношения:

$$p_b = \frac{(a^2 - b^2)(\beta_j p_a + 2k)}{2\alpha_j b^2} + \frac{(a^2 + b^2)p_a}{2b^2}, \quad j = i - 1, i + 1. \quad (17)$$

Приравнивая правые части равенств (16) и (17), находим границы допустимых значений для давления p_a , при изменении в которых на границе $r = a$ будет зарождаться только именно режим пластичности (1):

$$p_{a_min} \leq p_a \leq p_{a_max}, \quad (18)$$

где

$$p_{a_min} = \min\{p_a^{(i+1)}, p_a^{(i-1)}\}, \quad p_{a_max} = \max\{p_a^{(i+1)}, p_a^{(i-1)}\},$$

$$p_a^{(j)} = \frac{2k(\alpha_i - \alpha_j)}{\beta_i \alpha_j - \alpha_i \beta_j}, \quad j = i - 1, i + 1.$$

При выполнении условия (18) давление на внешней границе должно принимать значение, определяемое по формуле (17).

Если из (16) и (17) определить границы допустимых значений для давления p_b на внешней границе кольцевой области, то применяя алгоритм, аналогичный алгоритму получения формул (17), (18), находим

$$p_{b_min} \leq p_b \leq p_{b_max}, \quad (19)$$

$$p_{b_min} = \min\{p_b^{(i+1)}, p_b^{(i-1)}\}, \quad p_{b_max} = \max\{p_b^{(i+1)}, p_b^{(i-1)}\},$$

$$p_b^{(j)} = k \frac{(a^2 + b^2)(\alpha_i - \alpha_j) - (b^2 - a^2)(\beta_i - \beta_j)}{(\beta_i \alpha_j - \alpha_i \beta_j) b^2}, \quad j = i - 1, i + 1.$$

При выполнении условия (18) давление на внешней границе должно принимать значение, определяемое по формуле

$$p_a = 2 \frac{(b^2 - a^2)k + 2\alpha_i b^2 p_b}{\beta_i (b^2 - a^2) + \alpha_i (a^2 + b^2)}. \quad (20)$$

Условие пластичности максимального приведенного напряжения, когда предел пластичности при одноосном растяжении вдвое меньше предела пластичности при одноосном сжатии. Выберем одно из двух предельных условий для двухконстантного условия пластичности максимального приведенного напряжения вида

$$\max\{2\sigma_\theta - \sigma_r, 2\sigma_r - \sigma_\theta, -\sigma_\theta - \sigma_r\} = 2k. \quad (21)$$

В таблице 1 приведены наименьшее и наибольшее допустимые значения давления p_a и формулы вычисления значения давления p_b , определяемые по (17), (18), для условия (21).

Таблица 1

Режим $\alpha_i \sigma_\theta + \beta_i \sigma_r = 2k$	$\min p_a$	$\max p_a$	p_b
$\alpha_i = 2, \beta_i = -1$	$-2k$	$2k$	$\frac{3b^2 + a^2}{4b^2} p_a - \frac{b^2 - a^2}{2b^2} k$
$\alpha_i = -1, \beta_i = 2$	$-2k$	0	$\frac{3b^2 - a^2}{2b^2} p_a + \frac{b^2 - a^2}{b^2} k$
$\alpha_i = -1, \beta_i = -1$	0	$2k$	$\frac{a^2}{b^2} p_a + \frac{b^2 - a^2}{b^2} k$

В таблице 2 приведены наименьшее и наибольшее допустимые значения давления p_b и формулы вычисления значения давления p_a , определяемые по формулам (19), (20), для условия (21).

Таблица 2

Режим $\alpha_i \sigma_\theta + \beta_i \sigma_r = 2k$	$\min p_b$	$\max p_b$	p_a
$\alpha_i = 2, \beta_i = -1$	$-2k$	$\frac{b^2 + a^2}{b^2} k$	$\frac{4b^2 p_b + 2(b^2 - a^2)k}{3b^2 + a^2}$
$\alpha_i = -1, \beta_i = 2$	$-2k$	$\frac{b^2 - a^2}{b^2} k$	$2 \frac{b^2 p_b - (b^2 - a^2)k}{3b^2 - a^2}$
$\alpha_i = -1, \beta_i = -1$	$\frac{b^2 - a^2}{b^2} k$	$\frac{b^2 + a^2}{b^2} k$	$\frac{b^2}{a^2} p_b - \frac{b^2 - a^2}{a^2} k$

Напряжения в пластической зоне. Согласно данным, приведенным в таблице 1, если давление на внутренней границе изменяется в пределах

$$-2k \leq p_a \leq 2k,$$

а давление на внешней границе определяется по формуле

$$p_b = \frac{3b^2 + a^2}{4b^2}, \quad p_a = \frac{b^2 - a^2}{2b^2}k,$$

то на границе $r = a$ будет выполняться условие

$$2\sigma_\theta - \sigma_r = 2k. \quad (22)$$

При реализации этого режима переход к другим режимам пластичности в процессе нагружения не происходит. Согласно (6) напряженное состояние в пластической зоне:

$$\sigma_r = 2k - (2k + p_a)\sqrt{\frac{a}{r}},$$

$$\sigma_\theta = 2k - \left(k + \frac{1}{2}p_a\right)\sqrt{\frac{a}{r}}.$$

В упругой зоне $c \leq r \leq b$:

$$\sigma_{r,\theta} = A \mp \frac{B}{r^2}, \quad A = \frac{2kc^2 - 3p_b b^2}{3b^2 + c^2}, \quad B = \frac{b^2 c^2 (2k + p_b)}{3b^2 + c^2}.$$

Радиус упругопластической границы определяется из уравнения (следует из условия непрерывности напряжений на упругопластической границе):

$$p_b - \frac{(2k + p_a)(3b^2 + c^2)}{4b^2}\sqrt{\frac{a}{c}} + 2k = 0. \quad (23)$$

Поскольку радиус упругопластической границы $a \leq c \leq b$, то из (23) следует, что для того чтобы часть кольца была пластической, значение давление на внешней границе должно попадать в интервал

$$\frac{(2k + p_a)(3b^2 + a^2)}{4b^2} - 2k \leq p_b \leq (2k + p_a)\sqrt{\frac{a}{b}} - 2k = 0.$$

На рисунке 2 а) изображены графики функций для трех режимов условия пластичности максимального приведенного напряжения (21). На рисунке 2 б) показано распределение напряжений для режима пластичности (22).

Рассмотрим случай, когда на границе $r = a$ реализуется режим

$$2\sigma_r - \sigma_\theta = 2k. \quad (24)$$

Согласно (6) распределение напряжений при выполнении (24) будет иметь вид:

$$\sigma_r = 2k - (2k + p_a)\frac{r}{a},$$

$$\sigma_\theta = 2k - 2(2k + p_a)\frac{r}{a}.$$

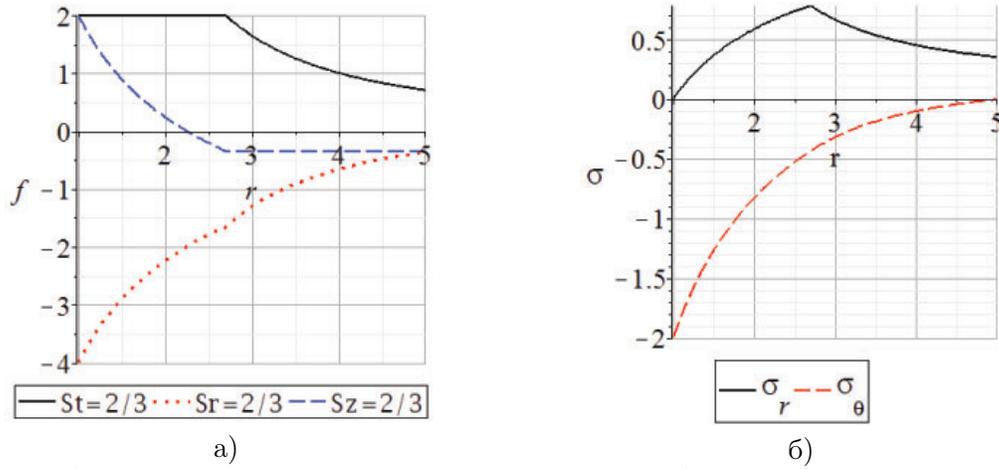


Рис. 2. а) графики функций режимов пластичности; б) распределение напряжений для параметров $a = 1$; $b = 5$; $k = 1$; $p_a = 2$; $p_b = 0$; $c = 2.7$

Проверка условия

$$\begin{cases} 2\sigma_r - \sigma_\theta = 2k, \\ 2\sigma_\theta - \sigma_r \leq 2k, \\ -\sigma_r - \sigma_\theta \leq 2k \end{cases}$$

показывает, что

$$r_1 = \frac{2ka}{2k + p_a}.$$

Если радиус упругопластической границы $r_1 < c$, то в области $r_1 \leq r \leq c$ будет выполняться режим пластичности

$$-\sigma_r - \sigma_\theta = 2k, \tag{25}$$

для которого напряжения определяются по формуле

$$\sigma_{r,\theta} = -k \pm \frac{4a^2k^3}{(2k + p_a)^2 r^2}.$$

В упругой зоне $c \leq r \leq b$:

$$\sigma_{r,\theta} = -k \pm \frac{4a^2k^3}{(2k + p_a)^2 r^2}.$$

В случае, когда $r_1 < c$, значение радиуса упругопластической границы становится условным, поскольку во всей области $r_1 \leq r \leq b$ будет выполняться условие (25), т. е. кольцо переходит в предельное состояние (рис. 3а).

Если в результате нагружения на границе $r = a$ выходим на режим (25), то вся область кольца переходит в предельное состояние. Значения давлений p_a и p_b определяются по таблице 1.

Вычисление деформаций. Для условия пластичности (13) согласно ассоциированному закону пластического течения при рассмотрении плоского напряженного состояния компоненты тензора скоростей пластических деформаций определяются по

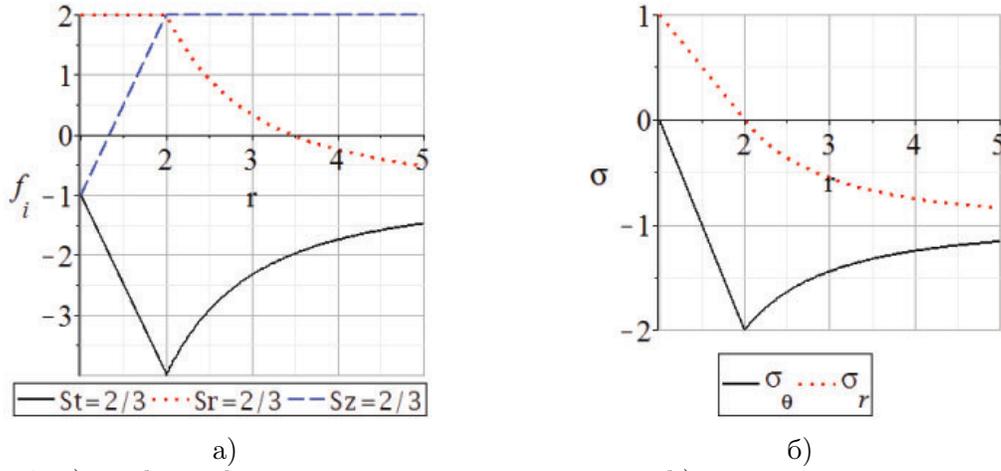


Рис. 3. а) графики функций режимов пластичности, б) распределение напряжений для параметров $a = 1$; $b = 5$; $k = 1$; $p_a = -1$; $p_b = 0.84$; $r_1 = 2$; $c = 4$

закону нормальной связи

$$\dot{\varepsilon}_i^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i} \Big|_{\sigma_z=0}, \quad \dot{\lambda} \geq 0.$$

Принимая гипотезу естественного состояния и рассматривая процесс активного нагружения, интегрируя соотношения ассоциированного течения, приходим к пропорциям

$$\frac{\varepsilon_\theta^p}{\alpha_i} = \frac{\varepsilon_r^p}{\beta_i} = \frac{\varepsilon_z^p}{\gamma_i}. \quad (26)$$

Упругие деформации в упругой зоне определяются из соотношений закона Гука. Формулы связи упругих пластических и полных деформаций

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p,$$

следствия ассоциированного закона пластического течения (26) и соотношения закона Гука позволяют получить разные выражения для компонент тензора пластических деформаций. Окружную и радиальную компоненту тензора пластических деформаций, используя соотношения ассоциированного закона пластического течения, когда $\gamma_i \neq 0$, можно выразить через осевую компоненту тензора пластических деформаций

$$E\varepsilon_\theta^p = \frac{\alpha_i}{\gamma_i} E\varepsilon_z^p, \quad E\varepsilon_r^p = \frac{\beta_i}{\gamma_i} E\varepsilon_z^p, \quad (27)$$

а учитывая, что

$$E\varepsilon_z^p = E\varepsilon_z + \nu(\sigma_\theta + \sigma_r), \quad (28)$$

получаем формулы

$$\begin{aligned} E\varepsilon_\theta^p &= E \frac{\alpha_i}{\gamma_i} \varepsilon_z + \frac{\alpha_i}{\gamma_i} \nu(\sigma_\theta + \sigma_r), \\ E\varepsilon_r^p &= E \frac{\beta_i}{\gamma_i} \varepsilon_z + \frac{\beta_i}{\gamma_i} \nu(\sigma_\theta + \sigma_r), \end{aligned} \quad (29)$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Используя уравнение равновесия, соотношения (28), (29), условие совместности деформаций, можно получить, например уравнение для окружной компоненты тензора пластических деформаций

$$r \frac{dE\varepsilon_\theta^p}{dr} + \left(1 - \frac{\beta_i}{\alpha_i}\right) E\varepsilon_\theta^p + r \frac{d(\sigma_\theta - \nu\sigma_r)}{dr} + (1 + \nu)(\sigma_\theta - \sigma_r) = 0. \quad (30)$$

Если в условии пластичности (13) коэффициент $\gamma_i = 0$, то уравнение (30) получается, если вместо соотношений (27) рассматривать соотношение

$$\alpha_i \varepsilon_r^p = \beta_i \varepsilon_\theta^p.$$

В случае, когда в пластической зоне реализуется один режим пластичности, то в качестве граничного условия рассматриваем равенство нулю пластических деформаций на упругопластической границе $r = c$:

$$\varepsilon_\theta^p|_{r=c} = 0. \quad (31)$$

Когда в пластической зоне реализуется несколько режимов, то алгоритм определения ε_θ^p будет иным. Не умаляя общности, рассмотрим случай для двух режимов. Для области $r_i \leq r \leq c$ пластической зоны, где реализуется режим

$$f_{i+1} = \alpha_{i+1}\sigma_\theta + \beta_{i+1}\sigma_r - 2k = 0,$$

решаем задачу (30), (31). Для области $a \leq r \leq r_i$, где реализуется режим

$$f_i = \alpha_i\sigma_\theta + \beta_i\sigma_r - 2k = 0,$$

решаем уравнение (30), но вместо условия (31) используем условие непрерывности компоненты ε_θ^p на границе $r = r_i$ перехода от одного режима пластичности к другому.

Остальные компоненты тензоров пластических и полных деформаций определяются по формулам (27)–(29).

Отдельно следует рассмотреть случаи, когда в условии пластичности (13) $\alpha_i = 0$ или $\beta_i = 0$.

Случай $\alpha_i = 0$. Согласно ассоциированному закону пластического течения, $\varepsilon_\theta^p = 0$, поэтому

$$E\varepsilon_\theta = \frac{Eu}{r} = E\varepsilon_\theta^e = \sigma_\theta - \nu\sigma_r, \quad \varepsilon_r = \frac{du}{dr},$$

$$\varepsilon_r^p = \varepsilon_r - \sigma_r + \nu\sigma_\theta, \quad \varepsilon_z^p = \frac{\gamma_i}{\beta_i}\varepsilon_\theta^p, \quad E\varepsilon_z = E\varepsilon_z^p - \nu(\sigma_\theta + \sigma_r),$$

где u — радиальная компонента вектора перемещений.

Случай $\beta_i = 0$. Согласно ассоциированному закону пластического течения, $\varepsilon_r^p = 0$. Поэтому

$$E\varepsilon_r = \frac{dEu}{dr} = \sigma_r - \nu\sigma_\theta, \quad (32)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_\theta^p = \varepsilon_\theta - \sigma_\theta + \nu\sigma_r, \quad \varepsilon_z^p = \frac{\gamma_i}{\alpha_i}\varepsilon_\theta^p, \quad E\varepsilon_z = E\varepsilon_z^p - \nu(\sigma_\theta + \sigma_r).$$

Граничным условием при решении уравнения (32) является условие непрерывности радиальной компоненты вектора перемещений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Теория пластичности: сб. статей. М.: ИЛ, 1948. 452 с.
- [2] Ишлинский А. Ю. Прикладные задачи механики. Т. 1. М.: Наука, 1986. 407 с.
- [3] Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматлит, 1962. 432 с.
- [4] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
- [5] Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
- [6] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
- [7] Malvern L. E. Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Prentice-Hall Inc, 1969. 713 p.
- [8] Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
- [9] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [10] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
- [11] Chakrabarty J. Theory of Plasticity. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006. 882 p.
- [12] Артемов М.А. Об одном предельном виде условия идеальной пластичности // Известия РАН. Механика твердого тела. 1996. № 2. С. 134–136.
- [13] Артемов М. А., Ивлев Д. Д. О статистических и кинематических соответствиях в теории идеальной пластичности при кусочнолинейных условиях текучести // Известия РАН. Механика твердого тела. 1995. № 3. С. 104–111.
- [14] Артемов М. А., Ивлев Д. Д. О линеаризированных уравнениях кинематически определенных задач // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1995. № 6. С. 104–107.
- [15] Артемов М. А., Ивлев Д. Д. Об общих соотношениях теории идеальной пластичности при кусочно-линейных условиях текучести // Доклады Академии наук. 1996. Т. 350. № 3. С. 332–333.
- [16] Артемов М. А., Пушкун С. Н., Рыжков А. В. Вариант теории пластического течения анизотропных материалов // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2002. № 1. С. 69–73.
- [17] Артемов М.А. К теории пластичности анизотропных материалов // Проблемы механики: сб. статей. К 90-летию дня рождения А. Ю. Ишлинского. М.: Физматлит, 2003. С. 100–104.
- [18] Артемов М. А., Барановский Е. С., Якубенко А. П. Соотношения изотропии и ассоциированный закон течения // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2014. № 4. С. 81–90.
- [19] Аннин Б. Д. О теориях идеальной пластичности с сингулярной поверхностью текучести // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 181–188.
- [20] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: СГУ, 2004. 141 с.
- [21] Артемов М. А., Якубенко А. П. О соотношениях между компонентами тензора второй валентности в случае кратного собственного значения // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2011. Т. 7, № 8. С. 116–117.
- [22] Артемов М. А., Потапов Н. С., Якубенко А. П. О соотношениях пространственного состояния пластических тел // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2011. Т. 7, № 5. С. 101–103.

- [23] Артемов М. А., Пупыкин Н. С., Якубенко А. П. Общие соотношения теории течения анизотропных пластических тел // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2010. Т. 6, № 7. С. 56–63.
- [24] Артемов М. А., Потапов Н. С. Соотношения изотропии и ассоциированный закон течения // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2011. Т. 7, № 3. С. 27–28.
- [25] Артемов М. А., Потапов Н. С. О соотношениях, вытекающих из условия полной пластичности // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2010. Т. 6, № 9. С. 136–138.
- [26] Артемов М. А., Ларин И. А., Потапов Н. С., Якубенко А. П. К анализу упруго-пластической задачи плоской деформации // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2011. Т. 7, № 6. С. 135–137.
- [27] Артемов М. А., Ивлев Д. Д. Об идеальном состоянии призматических тел переменного прямоугольного сечения // Доклады Академии наук. 1997. Т. 353, № 1. С. 47–50.
- [28] Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Остаточные напряжения у цилиндрической полости в идеальной упругопластической среде // Проблемы механики неупругих деформаций. М.: Физматлит, 2001. С. 75–95.
- [29] Артемов М. А., Бестужева Н. П., Потапов Н. С. О выполнении условия полной пластичности при плоском деформированном состоянии // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2010. Т. 6, № 7. С. 88–92.
- [30] Артемов М. А., Ларин И. А., Потапов Н. С. Распределение напряжений и деформаций в цилиндрической трубе при выборе кусочно-линейного условия пластичности // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2010. Т. 6, № 9. С. 117–119.
- [31] Артемов М. А., Потапов Н. С., Якубенко А. П. Математическое моделирование равновесного состояния круговой цилиндрической трубы // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2011. Т. 7, № 5. С. 126–128.
- [32] Артемов М. А., Якубенко А. П. К задаче Ламе // Теоретические и прикладные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам международной научно-практической конференции. Тамбов: Юком, 2014. С. 11–13.
- [33] Артемов М. А., Барановский Е. С., Потапов Н. С. Математическое моделирование упругопластического состояния цилиндрической области // Современные наукоемкие технологии. 2016. № 9. Ч. 2. С. 191–195.
- [34] Прагер В., Ходж Ф. Г. Теория идеально пластических тел. М.: ИЛ, 1956. 398 с.
- [35] Hershey A.V. The Plasticity of an Isotropic Aggregate of Anisotropic Face Centered Cubic Crystals // J. Appl. Mech. Trans. ASME. 1954. Vol. 21. P. 241–249.
- [36] Hosford W. F. A Generalize Isotropic Yield Criterion // J. Appl. Mech. 1972. Vol. 39, № 2. P. 607–609.
- [37] Karafillis A. P., Boyce M. C. A General Anisotropic Yield Criterion Using Bounds and a Transformation Weighting Tensor // J. Mech. Phys. Solid. 1993. Vol. 41. P. 1859–1886.
- [38] Артемов М. А., Барановский Е. С. Альтернативная форма записи условия пластичности // Успехи современного естествознания. 2014. № 12-3. С. 292.

[39] Артемов М. А., Барановский Е. С., Якубенко А. П. Альтернативные формы записи кусочно-линейных условий пластичности и их обобщения // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2015. № 1. С. 71–82.

[40] Gamer U. The Elastic-Plastic Shrink Fit with Supercritical Interference // Acta Mechanica. 1986. № 61. P. 1–14.

[41] Артемов М. А., Барановский Е. С. Математическое моделирование пластического состояния тел. Плоская деформация // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2 (24). С. 72–87.

I. I. Pereyaslavskaya, M. A. Artemov, E. S. Baranovskii,

**ON THE PROBLEM OF MATHEMATICAL MODELING OF THE
AXISYMMETRIC PLANE STRESS STATE OF A COMPRESSIBLE ELASTIC
PLASTIC BODY**

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. In present paper algorithms for determining stresses and deformations in a compressible elastic perfectly plastic body for an axisymmetric plane stress state, when choosing a piecewise-linear plasticity condition of general form, are offered. The constitutive equation is derived from the associative law of plastic flow. In the space of external impacts the form of a polygon of plasticity is found. The algorithm for determining boundaries of changing values of external impacts, allowing to establish which regime of plasticity in the process of loading will be performed in the nascent plastic zone, is offered. Boundary of origin of plastic zone for construction of algorithm for determining the stress state is found. It is shown, that different plasticity regimes can be performed in the plastic zone. An equation for boundary of the transition from one plasticity regime to another, which is used for evaluating stresses in plastic zone, is obtained. Regimes of plasticity are determined, and formulas for evaluating, which plasticity regimes will be satisfied in the plastic zone, are obtained. Calculations and graphs of stress distribution for concrete plasticity conditions are given.

Keywords: compressible elastic-plastic body, theory of plastic flow, normal ratio law, space of external impacts, plane stress state

REFERENCES

- [1] Theory of Plasticity. Digest of Articles. M.: IL, 1948. (in Russian).
- [2] Ishlinskii A.Y. Applied Problems of Mechanics. M.: Nauka, 1986. (in Russian).
- [3] Freudental A. M., Geiringer H. The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum. Encyclopedia of physics. Vol. VI. Elasticity and Plasticity. Berlin: Springer-Verlag, 1958.
- [4] Ivlev D. D. Theory of Ideal Plasticity. M.: Nauka, 1966. (in Russian).
- [5] Sokolovskii V. V. Theory of Plasticity. M.: Vishaya Shkola, 1969. (in Russian).
- [6] Kachanov L. M. Foundations of the Theory of Plasticity. M.: Nauka, 1973. (in Russian).
- [7] Malvern L.E. Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Prentice-Hall Inc, 1969. 713 p.
- [8] Malinin N. N. Applied Theory of Plasticity and Creep. M.: Mashinostroenie, 1975. (in Russian).
- [9] Bykovcev G.I., Ivlev D. D. Theory of Plasticity. Vladivostok: Dal'nauka, 1998. (in Russian).

Pereyaslavskaya Irina Igorevna

e-mail: irika5319@yandex.ru, Postgraduate student, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Artemov Mikhail Anatolievich

e-mail: artemov_m_a@mail.ru, Head of the Chair, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Baranovskii Evgenii Sergeevich

e-mail: esbaranovskii@gmail.com, Associate Professor, Cand. Sci. Phys. & Math., Voronezh State University, Voronezh, Russia.

- [10] Ishlinskii A.Y., Ivlev D. D. *Mathematical Theory of Plasticity*. M.: FIZMATLIT, 2001. (in Russian).
- [11] Chakrabarty J. *Theory of Plasticity*. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006. 882 p.
- [12] Artemov M. A. On One Limiting Form of Condition of the Ideal Plasticity // *Mechanics of Solids*. 1996. № 2. P. 134–137. (in Russian).
- [13] Artemov M. A., Ivlev D. D. On Statistical and Kinematic Correspondences in the Theory of Ideal Plasticity Under Piecewise Linear Flow Conditions // *Mechanics of Solids*. 1995. № 3. P. 104–110. (in Russian).
- [14] Artemov M. A., Ivlev D. D. About Linearized Equations Kinematically Determinate Problems // *Mechanics of Solids*. 1995. № 6. P. 104–107. (in Russian).
- [15] Artemov M. A., Ivlev D. D. On General Relation Theory Ideal Plasticity by Line-Sectionally Condition of Plasticity // *Doklady Akademii Nauk*. 1996. Vol. 350, № 3. P. 332–334. (in Russian).
- [16] Artemov M. A., Pupykin S. N., Ryzhkov A. V. Variant of the Theory of Plastic Flow of Anisotropic Materials // *Proceedings of Voronezh State University. Ser. Physics. Mathematics*. 2002. № 1. P. 69–73. (in Russian).
- [17] Artemov M. A. To the Theory of Plasticity of Anisotropic Materials // *Problems of Mechanics: to the 90th anniversary of A.Yu. Ishlinsky*. M.: FIZMATLIT, 2003. P. 100–104. (in Russian).
- [18] Artemov M. A., Baranovskii E. S., Yakubenko A. P. Ratio Isotropy and Associated Flow Law // *Proceedings of Voronezh State University. Ser. Physics. Mathematics*. 2014. № 4. P. 81–91. (in Russian).
- [19] Annin B. D. On Theories of Ideal Plasticity with a Singular Yield Surface // *PMTF*. 1999. Vol. 40, № 2. P. 181–188. (in Russian).
- [20] Radaev Ju. N. *The Spatial Problem of the Mathematical Theory of Plasticity*. Samara: SSU, 2004. (in Russian).
- [21] Artemov M. A., Yakubenko A. P. On the Relations between the Components of the Second-Valence Tensor in the Case of a Multiple Eigenvalue // *The Bulletin of Voronezh State Technical University*. 2011. Vol. 7, № 8. P. 116–117. (in Russian).
- [22] Artemov M. A., Potapov N. S., Yakubenko A. P. On the Relations of the Spatial State of Plastic Bodies // *The Bulletin of Voronezh State Technical University*. 2011. Vol. 7, № 5. P. 101–103. (in Russian).
- [23] Artemov M. A., Pupykin N. S., Yakubenko A. P. General Relations of the Theory of the Flow of Anisotropic Plastic Bodies // *The Bulletin of Voronezh State Technical University*. 2010. Vol. 6, № 7. P. 56–63. (in Russian).
- [24] Artemov M. A., Potapov N. S. Isotropic Relations and the Associated Flow Law // *The Bulletin of Voronezh State Technical University*. 2010. Vol. 6, № 9. P. 136–138. (in Russian).
- [25] Artemov M. A., Potapov N. S. On the Relations Arising from the Full Plasticity Condition // *The Bulletin of Voronezh State Technical University*. 2011. Vol. 7, № 3. P. 27–28. (in Russian).
- [26] Artemov M. A., Larin I. A., Potapov N. S., Yakubenko A. P. Elastoplastic Problem in Case of Plane Strain // *The Bulletin of Voronezh State Technical University*. 2011. Vol. 7, № 6. C. 135–137. (in Russian).
- [27] Artemov M. A., Ivlev D. D. On Plastic State of Prismatic Bodies with Variable Rectangular Cross Sections // *Doklady Akademii Nauk*. 1997. Vol. 353, № 1. P. 47–50. (in Russian).

- [28] Burenin A. A., Kovtanjuk L. V. Residual Stresses for a Cylindrical Cavity in an Ideal Elastoplastic Medium // Problems in the mechanics of inelastic deformations. M.: FIZMATLIT, 2001. P. 75–95. (in Russian).
- [29] Artemov M. A., Bestuzheva N. P., Potapov N. S. The Implementation of Full Plasticity Condition at Flat Strain State // Proceedings of Voronezh State Technical University. 2010. Vol. 6, № 7. P. 88–92. (in Russian).
- [30] Artemov M. A., Larin I. A., Potapov N. S. Stress and Strain Distribution in a Cylindrical Tube with Piecewise-Linear Plasticity Condition // Proceedings of Voronezh State Technical University. 2010. Vol. 6, № 9. P. 117–119. (in Russian).
- [31] Artemov M. A., Potapov N. S., Yakubenko A. P. Mathematical Modeling of the Equilibrium State of a Circular Cylindrical Tube // Proceedings of Voronezh State Technical University. 2011. Vol. 7, № 5. P. 126–128. (in Russian).
- [32] Artemov M. A., Yakubenko A. P. On Lamé's Problem // Theoretical and Applied Problems of Education and Science. Tambov: Ucom, 2014. P. 11–13. (in Russian).
- [33] Artemov M. A., Baranovskii E. S., Potapov N. S. Mathematical Modeling of Elastic-Plastic State of a Cylindrical Domain // Modern High Technologie. 2016. № 2. P. 191–195. (in Russian).
- [34] Prager W., Hodge P. G. Theory of Perfectly Plastic Solids. John Wiley & Sons, 1951.
- [35] Hershey A.V. The Plasticity of an Isotropic Aggregate of Anisotropic Face Centered Cubic Crystals // J. Appl. Mech. Trans. ASME. 1954. V. 21. P. 241–249.
- [36] Hosford W. F. A Generalize Isotropic Yield Criterion // J. Appl. Mech. 1972. V. 39, № 2. P. 607–609.
- [37] Karafillis A. P., Boyce M. C. A General Anisotropic Yield Criterion Using Bounds and a Transformation Weighting Tensor // J. Mech. Phys. Solid. 1993. Vol. 41. P. 1859–1886.
- [38] Artemov M. A., Baranovskii E. S. Alternative Forms of Plasticity Conditions // Advances in Current Natural Sciences. 2014. № 12 (3). P. 292. (in Russian).
- [39] Artemov M. A., Baranovskii E. S., Yakubenko A. P. Alternative Forms of the Piecewise-Linear Conditions of Plasticity and Their Generalizations // Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. 2015. № 1. P. 71–82. (in Russian).
- [40] Gamer U. The Elastic-Plastic Shrink Fit with Supercritical Interference // Acta Mechanica. 1986. № 61. P. 1–14.
- [41] Artemov M. A., Baranovskii E. S. Mathematical Modeling of Plastic State of the Bodies in Case of Plane Strain // Proceedings of Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Serie: Mechanics. 2015. № 2 (24). P. 72–87. (in Russian).

Ю. В. Немировский

РАЦИОНАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГИБРИДНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ БАЛОК ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

Аннотация. На основе модели идеального жесткопластического материала для многослойных гибридных балок разработан метод расчета однородных и слоистых балок при воздействии динамических нагрузок «взрывного» типа. Метод позволяет определить закономерности расположения и распределения материалов вдоль конструкции, при которых обеспечивается существенное снижение остаточных прогибов.

Ключевые слова: однородные и слоистые балки, модель идеального жестко-пластического тела, пределы текучести, предельный изгибающий момент, вес конструкции, остаточный прогиб, рациональный проект.

УДК: 539.374

Первоначальные основы разработки методов динамического расчета балок и плит из однородного жестко-пластического материала при воздействии нагрузок «взрывного» типа были изложены в работах Гвоздева А. А. [1] и Саймондса П. [2]. Развитие исследований в дальнейшем шло по пути расширения типов конструктивных элементов: различных видов перекрестных систем, как совокупностей балочных элементов [3], [4], углубленного изучения влияния новых эффектов типа сдвига, инерции вращения [5], армирования [6], запаздывания текучести [7], скорости нагружения и др.

Успешное преодоление некоторых технических трудностей при решении возникающих при этом математических систем уравнений побуждало исследователей расширять попытки поиска на основе модели идеального жестко-пластического тела решений динамических задач для все более широкого множества конструктивных элементов. Больших успехов удалось добиться для криволинейных стержней и тонкостенных элементов типа пластин и оболочек. Подобные обзоры найденных решений динамических задач теории пластичности разнообразных тонкостенных элементов содержатся в источниках [4], [8–10].

© Немировский Ю. В., 2017

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 15-01-00825, 17-41-210272).

Поступила 12.01.2017

Обнадеживающие усилия по разработкам методов решения прямых задач динамики пластических конструкций подсказывают, как и в задачах статики, необходимость поиска решений обратных задач. Однако в этом направлении результатов получено мало, и они имеют пока разрозненный набор частных и приближенных решений, основанных на использовании приближенного метода модальных решений применительно к однородным балкам и пластинам с кусочно-постоянными толщинами. Большинство решений получено в статьях Ю. Р. Лепика с соавторами, и они детально отражены в обзоре [11] и монографии [12].

Будем рассматривать слоистые балочные элементы с симметричными сечениями (рис. 1).

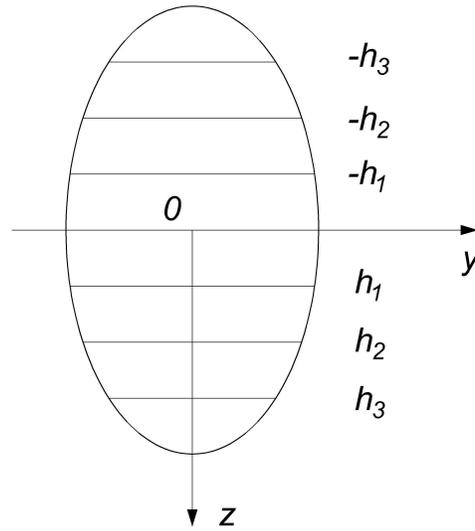


Рис. 1

Предполагаем симметрию расположения материалов относительно плоскостей $z = 0$ и $y = 0$. Считаем, что все составляющие материалы обладают достаточно высоким сопротивлением поперечным сдвигам, так что для всего пакета справедливы гипотезы Бернулли. Тогда в соответствии с моделью идеального жесткопластического состояния все материалы в сечении будут находится либо в жестком, либо в пластическом состоянии.

Безразмерный предельный изгибающий момент в сечении балки будет равен

$$M_0(x) = 4 \sum_{i=1}^n \sigma_{0i} \int_{h_{i-1}}^{h_i} b_i(x, z) z dz, \quad (1)$$

а удельная осевая масса

$$m(x) = 4 \sum_{i=1}^n \rho_i \int_{h_{i-1}}^{h_i} b_i(x, z) dz. \quad (2)$$

Здесь

$$\sigma_{0i} = \frac{\bar{\sigma}_{0i}}{\bar{\sigma}_0}, b_i = \frac{\bar{b}_i}{\bar{b}_0}, z_i = \frac{\bar{z}}{\bar{H}_0}, \rho_i = \frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}_0}, x = \frac{\bar{x}}{\bar{l}_0}, l = \frac{\bar{l}}{\bar{l}_0}.$$

Величины $\bar{\sigma}_{0i}, \bar{z}, \bar{\rho}_i, \bar{x}, \bar{l}$ – размерные величины, $\bar{\sigma}_0^0, \bar{b}_0^0, \bar{\rho}_0^0, \bar{l}_0$ – безразмеривающие параметры.

Если не учитывать влияние инерции вращения, безразмерные уравнения динамического изгиба балки можно записать в виде

$$M'' = m\ddot{w} - f(x, t), \quad (3)$$

$$M' = Qf(x, t) = q_0 f_1(x) f_2(t), \quad (4)$$

здесь $(\dots)' = \frac{\partial}{\partial x}(\dots)$, $(\dots)\dot{} = \frac{\partial}{\partial t}(\dots)$, $t = \frac{\bar{t}}{t_0}$ – безразмерное время, q_0 – безразмерная амплитуда распределенной нагрузки.

Для нагрузки «взрывного» типа

$$\int_0^t f_2(t) dt \geq t \cdot g_2(t). \quad (5)$$

В соответствии с гипотезой Бернулли для деформации имеем:

$$\varepsilon(x, z) = z\kappa(x), \kappa(x) = -w'',$$

где $w(x, t)$ – безразмерный прогиб.

Если A_* – безразмерная работа деформирования материала в момент разрушения, то для идеально-пластического материала в момент разрушения возникнет предельная деформация

$$\varepsilon_* = A_*/\sigma_0.$$

Критерием рационального использования материала в конструкции следует считать ситуацию, при которой возникшее в сечении пластическое состояние остается таковым до остановки балки в некоторый момент времени t_* и когда каждый из входящих в сечение балки материалов в один и тот же момент реализует свою предельную деформацию. Последнее означает, что в момент остановки в рациональной слоистой балке должны выполняться условия

$$\frac{h_{k+1}}{h_k} = \frac{\varepsilon_{k+1}^*}{\varepsilon_k^*} > 1, \varepsilon_k^* = \frac{A_k^*}{\sigma_{ok}}, (k = 1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

$$h_k = \frac{\varepsilon_k^*}{\varepsilon_1^*} h_1. \quad (8)$$

Выражения (7), (8) определяют порядок расстановки материалов в сечении и значения координат раздела всех слоев через координату первого слоя.

Для установления сравнительных характеристик качества проектов в динамическом режиме необходимо установить некоторое общее качество сходности проектов. Таким качеством естественно считать одинаковый вес сравниваемых проектов, то есть необходимо требовать выполнения условия

$$\int_0^l m(x) dx = lm_0,$$

где m_0 – удельная масса эталонного проекта постоянного сечения. Это требование примет вид

$$4 \int_0^l \sum_{i=1}^n \rho_i \int_{h_{i-1}}^{h_i} b_i(x, z) dz = lm_0. \quad (9)$$

При этом следует иметь в виду зависимости (8).

При нагрузках «взрывного» типа обычные начальные условия для балок имеют вид:

$$\dot{w}(x, 0) = 0, w(x, 0) = 0. \quad (10)$$

Представим теперь уравнения (3) в форме

$$\frac{M_0''(x)}{m(x)} + q_0 \frac{f_1(x)}{m(x)} f_2(t) = \ddot{w}(x, t) \quad (11)$$

и проинтегрируем его по t с учетом начальных условий (10), получим выражения

$$\dot{w}(x, t) = \frac{M_0''(x)}{m(x)} t + q_0 \frac{f_1(x)}{m(x)} I_1(t), \quad (12)$$

$$w(x, t) = \frac{M_0''(x)}{2m(x)} t^2 + q_0 \frac{f_1(x)}{m(x)} J_1(t), \quad (13)$$

$$I_1(t) = \int_0^t f_2(t) dt; J_1(t) = \int_0^t I_1(t) dt.$$

Если в момент времени t_* балка останавливается, то $\dot{w}(x, t_*) = 0$, при этом для закона распределения предельного изгибающего момента $M_0(x)$ и остаточного прогиба $w_*(x) = W(x, t_*)$ получим уравнения

$$M_0''(x) = -q_0 f_1(x) p_*, p_* = t_*^{-1} I_1(t_*), \quad (14)$$

$$w_*(x) = \frac{q_0 f_1(x)}{2m(x)} [2J_1(t_*) - p_* t_*^2]. \quad (15)$$

Полученные выражения справедливы для некоторого участка балки $x_1 < x < x_2$, который в течение всего времени движения $0 \leq t \leq t_*$ деформируется пластически. При определенном характере распределения нагрузки и закрепления краев балки такое состояние может быть реализовано на всем пролете. В общем же случае, наряду с пластически деформируемыми, в балке могут существовать жесткие участки, для которых выполняется условие $\dot{\kappa}(x, t) = 0$ и следовательно скорость и ускорение прогиба подчиняются зависимостям

$$\dot{w}(x, t) = \dot{C}_1(t)x + \dot{C}_2(t), \ddot{w} = \ddot{C}_1(t)x + \ddot{C}_2(t), \quad (16)$$

где $C_1(t), C_2(t)$ – искомые функции. Для их нахождения надо получить соответствующие решения уравнений движения (3) с использованием зависимостей (16), необходимых граничных условий и условий сопряжения на границах пластических и жестких состояний.

Соответствующие процедуры удобнее всего продемонстрировать на конкретных ситуациях. Поэтому далее рассмотрим некоторые примеры.

1. Шарнирно-опертые балки длины $2l$, нагруженные симметрично распределенными относительно середины пролета нагрузками.

В силу симметрии будем рассматривать решение на отрезке $0 \leq x \leq l$. В этом случае должны выполняться граничные условия:

$$Q(0, t) = 0, M(l, t) = 0, \dot{w}(l, t) = 0. \quad (17)$$

Если пластическое состояние реализуется на отрезке $0 \leq x \leq x_2, (x_1 = 0)$, то на нем будем иметь выражения

$$Q(x) = M_0^1(x) = -q_0 p_* \int_0^x f_1(x) dx, \quad (18)$$

$$M_{01}(x) = M_{01}^* - q_0 p_* \int_{x_2}^x \left[\int_0^x f_1(x) dx \right] dx, M_{01}^* = M(x_2), \quad (19)$$

$$w(x, t) = \frac{q_0 f_1(x)}{m(x)} \left(-p_* t + I_1(t) \right), \quad (20)$$

$$I_1(t) = \int_0^t f_2(t) dt, p_* = t_*^{-1} I_1(t_*).$$

Если $f_1(l) = 0$, то все условия (17) выполнены на отрезке $0 \leq x \leq l$ и $x_2 = l$. Если же распределение нагрузки таково, что $f_1(l) \neq 0$, то формулы (18)–(20) будут справедливы лишь на участке $0 \leq x \leq x_2 < l$. Отрезок балки будет оставаться жестким и на нем имеем

$$\dot{w}(x, t) = \dot{C}_1(t)(x - l), \ddot{w}(x, t) = \ddot{C}_1(t)(x - l), \quad (21)$$

$$m(x) = m_*(x),$$

$$M(x, t) = \ddot{C}_1(t) \int_l^x \left[\int_{x_2}^x (x - l) m_*(x) dx \right] dx - q_0 \left\{ f_2(t) \int_l^x \left[\int_{x_2}^x f_1(x) dx \right] dx + p_*(x - l) \int_0^{x_2} f_1(x) dx \right\}. \quad (22)$$

Пользуясь условием сопряжения $M(x_2, t) = M_*(x_2)$, получим

$$M_*(x_2) = \ddot{C}_1(t) \int_l^{x_2} \left[\int_{x_2}^x (x - l) m(x) dx \right] dx - q_0 \left\{ f_2(t) \int_l^{x_2} \left[\int_{x_2}^x f_1(x) dx \right] dx + p_*(x_2 - l) \int_0^{x_2} f_1(x) dx \right\}. \quad (23)$$

Поскольку $M_*(x_2)$ не зависит от t , то из последнего равенства следуют выражения

$$\ddot{C}_1(t) = A_1 + q_0 A_2 f_2(t), \quad (24)$$

$$M_*(x_2) + q_0 p (x_2 - l) \int_0^{x_2} f_1(x) dx = q_0 \lambda_1 = const, \quad (25)$$

$$A_1 = \frac{q_0 \lambda_1}{\Psi_1(x_2)}, A_2 = \frac{\Psi_2(x_2)}{\Psi_1(x_2)},$$

$$\Psi_1(x_2) = \int_l^{x_2} \left[\int_{x_2}^x (x - l) m_*(x) dx \right] dx,$$

$$\Psi_2(x_2) = \int_l^{x_2} \left[\int_{x_2}^x f_1(x) dx \right] dx.$$

Интегрируя (24) при нулевых начальных условиях получим

$$\dot{C}_1(t) = A_1 t + A_2 q_0 I_1(t),$$

$$C_1(t) = \frac{1}{2} A_1 t^2 + A_2 q_0 J_1(t), J_1(t) = \int_0^t I_1(t) dt.$$

Тогда участок балки $x_2 \leq x \leq l$ будет устанавливаться в момент времени $t = t_*$ и распределение остаточного прогиба на нем будет выражаться формулой:

$$w(x, t) = q_0 A_2 \left[-p_* \frac{t^2}{2} + J_1(t) \right] (x - l).$$

Постоянная A_2 определяется из условия непрерывности скоростей прогиба на границе $x = x_2$:

$$A_2 = \frac{f_1(x_2)}{m_1(x_2)(x_2 - l)}.$$

Граница x_2 определяется из уравнения (25), которое примет вид

$$M_*(x_2) = q_0 p_* \left[(x_2 - l) \int_0^{x_2} f_1(x) - \Psi_2(x_2) \right].$$

Закон распределения материала вдоль балки на участке $0 \leq x \leq x_2$ определяется выражением (19).

2. Защемленная балка. При нагружении симметрично распределенной нагрузкой относительно середины пролета должны выполняться условия

$$Q(0, t) = 0 \text{ (или } M'_{01}(0, t) = 0), \quad \dot{w}(0, t) = 0 \quad (26)$$

и на границе $x = l$ в этом случае выполняются условия

$$\dot{w}(l, t) = 0, \quad M(l, t) = -M_{02}^*. \quad (27)$$

Тогда в области $0 \leq x \leq x_1$ имеем решение

$$Q(x) = M'_{01}(x) = \lambda_0 q_0 \int_0^x f_1(x) dx, \quad (28)$$

$$M_{01}(x) = M_{01}^* + \lambda_0 q_0 \int_{x_1}^x \left[\int_0^x f_1(x) dx \right] dx, \quad \lambda_0 = -t_*^{-1} I_1(t_*), \quad (29)$$

$$\dot{w}(x, t) = \frac{q_0 f_1(x)}{m_1(x)} (\lambda_0 t + I_1(t)), \quad (30)$$

$$\dot{w}(x, t) = q_0 \frac{[f'_1(x) m_1(x) - m_1(x) f_1(x)]}{m_1^2(x)} (\lambda_0 t + I_1(t)). \quad (31)$$

В силу условия (26) должно выполняться равенство

$$[f'_1(x) m_1(x) - m_1(x) f_1(x)]_{x=0} = 0. \quad (32)$$

В области $x_1 \leq x \leq l$ имеем жесткий участок ($\kappa(x, t) = 0$) с предельными значениями моментов на концах $M(x_1) = M_{02}^* = M_{01}^*$, $M(l) = -M_{03}^*$.

В результате на отрезке $x_1 \leq x \leq l$ имеем решение:

$$\dot{w}(x, t) = \dot{C}_1(t)(x - l), \quad \ddot{w}(x, t) = \ddot{C}_1(t)(x - l),$$

$$M(x, t) + M_{03}^* = \ddot{C}_1(t) \Psi_1(x) - q_0 f_2(t) \Psi_2(x) + \lambda_0 q_0 (x - l) \int_0^{x_1} f_1(x) dx.$$

Используя граничное условие $M(x_1, t) = M_{02}^*$, получим

$$\ddot{C}_1(t) = \frac{q_0 \Psi_2(x_1)}{\Psi_1(x_1)} (f_2(t) + \dot{A}_1),$$

$$\dot{C}_1(t) = \frac{q_0 \Psi_2(x_1)}{\Psi_1(x)} (I_1(t) + A_1 t),$$

$$\dot{w}(x, t) = \dot{C}_1(t)(x - l),$$

$$A_1 = \frac{M_{02}^* + M_{03}^* - \lambda_0 q_0 (x_1 - l) \int_0^{x_1} f_1(x) dx}{q_0 \Psi_2(x_1)}.$$

Из условия непрерывности скорости прогиба на границе $x = x_1$ имеем

$$\frac{q_0 \Psi_2(x_1)(x_1 - l)}{\Psi_1(x_1)} (I_1(t) + A_1 t) = \frac{f_1(x_1)}{m_1(x_1)} (I_1(t) + \lambda_0 t).$$

Это равенство будет выполняться для любого t , если $A_1 = \lambda_0$ и

$$\frac{q_0 \Psi_2(x_1)(x_1 - l)}{\Psi_1(x_1)} = \frac{f_1(x_1)}{m_1(x_1)}.$$

Последнее равенство служит для определения координаты x_1 . При этом на участке $0 \leq x \leq x_1$ распределение материала вдоль балки определяется по формуле (21), а на отрезке $x_1 \leq x \leq l$ оно считается заданным.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гвоздев А. А. К расчету конструкций на действие взрывной волны // Строительная промышленность. 1943. № 1–2. С. 18–21.
- [2] Саймонде П. Большие пластические деформации стержней под действием нагрузки взрывного типа // Механика: сб. переводов. М.: Мир, 1956. № 4. С. 90–108.
- [3] Иванов Г. В., Немировский Ю. В., Работнов Ю. Н. Динамика жестко-пластической системы перекрестных связей // Известия АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 2. С. 51–57.
- [4] Комаров К. Л., Немировский Ю. В. Динамика жестко-пластических элементов конструкций. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1984. 234 с.
- [5] Немировский Ю. В. Влияние сдвига и инерции вращения на динамический изгиб пластических балок // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР, 1974. Вып. 19–20. С. 83–100.
- [6] Немировский Ю. В. Динамический изгиб армированных пластических стержней // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР, 1979. Вып. 47. С. 37–44.
- [7] Работнов Ю. Н., Суворова Ю. В. Динамика жестко-пластической балки с запаздыванием текучести // Известия АН СССР. МТТ. 1968. № 6. С. 25–33.
- [8] Рейтман М. И., Шапиро Г. С. Динамическая теория пластичности: обзор. М.: ВИНТИ, 1968. 112 с.
- [9] Мазалов В. Н., Немировский Ю. В. Оптимальное проектирование конструкций // Библиографический указатель за 1948–1974 гг. Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР, 1975. Ч. I, П. 472 с.
- [10] Мазалов В. Н., Немировский Ю. В. Динамика тонкостенных пластических конструкций // Механика: Проблемы динамики упруго-пластических сред. 1975. Вып. 5. С. 155–247.
- [11] Лепик Ю. Р. Оптимальное проектирование неупругих конструкций при динамических воздействиях // Прикладная механика. 1981. Т. XVII. № 9. С. 3–20.
- [12] Лепик Ю. Р. Оптимальное проектирование неупругих конструкций в случае динамического нагружения. Таллин: Валгус, 1982.

Yu. V. Nemirovskii

*Institute of Theoretical and Applied Mechanics named after S. A. Christianovich of Siberian
Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

Abstract. On the basis of model of ideal rigidly plastic material the computational method of the homogeneous and stratified beams at influence of inertial reaction of "explosive" type is developed for multilayer hybrid beams. The method allows to define regularities of an arrangement and distribution of materials along a design at which essential decrease in residual deflections is provided.

Keywords: the homogeneous and stratified beams, model of an ideal rigid and plastic body, yield points, the limiting moment of deflection, structural weight, residual deflection, rational project.

REFERENCES

- [1] Gvozdev A. A. K raschetu konstrukcij na dejstvie vzryvnoj volny // Stroitel'naja promyshlennost'. 1943. № 1–2. S. 18–21. (in Russian).
- [2] Sajmonde P. Bol'shie plasticheskie deformacii sterzhnej pod dejstviem nagruzki vzryvnogo tipa // Mehanika: sb. perevodov. M.: Mir, 1956. № 4. S. 90–108. (in Russian).
- [3] Ivanov G. V., Nemirovskij Ju. V., Rabotnov Ju. N. Dinamika zhestko-plasticheskoj sistemy perekrestnyh svjazej // Izvestija AN SSSR, OTN. Mehanika i mashinostroenie. 1963. № 2. S. 51–57. (in Russian).
- [4] Komarov K. L., Nemirovskij Ju. V. Dinamika zhestko-plasticheskih jelementov konstrukcij. Novosibirsk: Nauka, Sibirskoe otdelenie, 1984. 234 s. (in Russian).
- [5] Nemirovskij Ju. V. Vlijanie sdviga i inercii vrashhenija na dinamicheskij izgib plasticheskih balok // Dinamika sploshnoj sredy. Novosibirsk: Institut gidrodinamiki SO AN SSSR, 1974. Vyp. 19–20. S. 83–100. (in Russian).
- [6] Nemirovskij Ju. V. Dinamicheskij izgib armirovannyh plasticheskih sterzhnej // Dinamika sploshnoj sredy. Novosibirsk: Institut gidrodinamiki SO AN SSSR, 1979. Vyp. 47. S. 37–44. (in Russian).
- [7] Rabotnov Ju. N., Suvorova Ju. V. Dinamika zhestko-plasticheskoj balki s zapazdyvanijem tekuchesti // Izvestija AN SSSR. MTT. 1968. № 6. S. 25–33. (in Russian).
- [8] Rejtman M. I., Shapiro G. S. Dinamicheskaja teorija plastichnosti: obzor. M.: VINITI, 1968. 112 s. (in Russian).
- [9] Mazalov V. N., Nemirovskij Ju. V. Optimal'noe proektirovanie konstrukcij // Bibliograficheskij ukazatel' za 1948-1974 gg. Novosibirsk: Institut gidrodinamiki SO AN SSSR, 1975. Ch. I, II. 472 s. (in Russian).
- [10] Mazalov V. N., Nemirovskij Ju. V. Dinamika tonkostennyh plasticheskih konstrukcij // Mehanika: Problemy dinamiki uprugoplasticheskih sred. 1975. Vyp. 5. S. 155–247. (in Russian).
- [11] Lepik Ju. R. Optimal'noe proektirovanie neuprugih konstrukcij pri dinamicheskikh vozdejstvijah // Prikladnaja mehanika. 1981. T. XVII. № 9. S. 3–20. (in Russian).

Nemirovskij Yuri Vladimirovich

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics named after S. A. Christianovich of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia.

[12] Lepik Ju. R. Optimal'noe proektirovanie neuprugih konstrukcij v sluchae dinamicheskogo nagruzheniya. Tallin: Valgus, 1982. (in Russian).

Ю. В. Немировский¹, А. С. Мозгова²

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ КОНСТРУКЦИОННОГО ЭЛЕМЕНТА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ВИДЕ МНОГОСЛОЙНОГО ЦИЛИНДРА

¹ *Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

² *Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия*

Аннотация. Исследование теплопроводности в многослойных конструкциях имеет большое значение в связи с проектированием теплозащитных покрытий для перспективных космических аппаратов. Для успешного выполнения космического полета должны быть удовлетворены многие требования. Одно весьма распространенное требование заключается в том, что температуры каждого элемента космического аппарата в течение всего времени должны поддерживаться в заданном рабочем диапазоне. В статье рассмотрен метод решения задачи теплопроводности для многослойного цилиндра при симметричных граничных условиях третьего рода.

Ключевые слова: теплопроводность, теплообмен, космический аппарат, распространение тепла, многослойные конструкции, теплоизоляция.

УДК: 539.374

1. Введение. Обеспечение теплового режима космического аппарата, т.е. поддержание температур основных элементов конструкции, приборов, агрегатов и газовой среды в гермоотсеках в заданных диапазонах, является одним из основных условий успешного выполнения программы космического полета. Космические аппараты имеют большое количество болтовых соединений, разъемов, шарниров и тому подобных элементов, распространение тепла вдоль которых осложняется наличием контактных термических сопротивлений. Успешное функционирование космического аппарата в большой степени зависит от температурного режима его элементов и поверхностей.

© Немировский Ю. В., Мозгова А. С., 2017

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Мозгова Анна Станиславовна

e-mail: mozgova-energo@yandex.ru, кандидат экономических наук, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-31-00511, 15-01-00825, 17-41-210272).

Поступила 15.01.2017

Чем сложнее задачи полета, тем большее значение приобретают защитные экраны и другие методы теплоизоляции. Для проведения тепловых расчетов большинства элементов конструкции требуется знание величины контактной проводимости соединений. Можно привести много примеров изделий современной космической техники, для которых контактный теплообмен является определяющим фактором. Сюда относится теплоизоляция таких элементов, как отражающие экраны, узлы крепления антенн, отсеки с криогенным топливом. В этих конкретных случаях использование изолирующих материалов с низкой теплопроводностью приносит прямую выгоду [1].

Используя метод описанный в [2] рассмотрим задачу теплопроводности конструкционного элемента космического аппарата в виде многослойного цилиндра.

Среди методов решения задач теплопроводности для многослойных конструкций известны методы, в которых такие конструкции рассматриваются как один слой, но с переменными (разрывными) физическими свойствами среды. При использовании этих методов в одних случаях строятся системы координатных функций, точно удовлетворяющих граничным условиям и условиям сопряжения, а в других – для описания разрывных свойств среды используется асимметричная единичная функция. Сведение многослойной конструкции к однослойной значительно упрощает как процесс получения аналитических решений, так и получаемые для них формулы [2].

2. Постановка краевой задачи. Рассмотрим задачу теплопроводности для многослойного цилиндра при симметричных граничных условиях третьего рода. Математически рассматриваемая проблема сводится к решению начально краевой задачи [2]:

$$\frac{\partial \Theta_i(x, Fo)}{\partial Fo} = \frac{a_i}{a} \left(\frac{\partial^2 \Theta_i(x, Fo)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \Theta_i(x, Fo)}{\partial x} \right); \quad (1)$$

$$(Fo > 0; x_{i-1} \leq x < x_i; i = \overline{1, m}; x_0 = 0; x_m = 1)$$

$$\Theta_i(x, 0) = 1; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Theta_{m-1}(0, Fo)}{\partial x} = 0; \quad (3)$$

$$\Theta_{m-1}(x_{m-1}, Fo) = \Theta_m(x_{m-1}, Fo); \quad (4)$$

$$\lambda_{m-1} \frac{\partial \Theta_{m-1}(x_{m-1}, Fo)}{\partial x} = \lambda_m \frac{\partial \Theta_m(x_{m-1}, Fo)}{\partial x}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Theta_m(1, Fo)}{\partial x} + Bi \Theta_m(1, Fo) = 0, \quad (6)$$

здесь $x_i = \eta/\delta_i$, ($i = \overline{1, m}$) - безразмерная радиальная координата; η - координата; δ_i - радиус цилиндра; $Fo = a\tau/\delta^2$ - число Фурье; $Bi = \alpha\delta/\lambda_i$ - число Био;

$\Theta_i = (t_i - t_{cp})/(t_{0i} - t_{cp})$ - относительная избыточная температура; a - наименьший из коэффициентов теплопроводности a_i , ($i = \overline{1, m}$); α - коэффициент теплоотдачи; λ_i , ($i = \overline{1, m}$) - коэффициент теплопроводности; t_0 - начальная температура; t_{cp} - температура среды; τ - время.

При проектировании многих несущих элементов современных космических аппаратов используются армирующие волокнистые конструкции. В этом случае все слои или часть слоев будут ортотропными с различными коэффициентами теплопроводности в

главных направлениях цилиндра, что приведет к несущественному изменению записи уравнений (1). Необходимые при этом коэффициенты теплопроводности подобных армирующих слоев могут быть определены по модели, предложенной в статье [3].

3. Решение краевой задачи. Решение задачи (1)-(6) находим среди функций вида:

$$\Theta_i(x, Fo) = f_1(Fo)\varphi_{1i}(x) + \sum_{k=2}^n f_k(Fo)\varphi_{ki}(x), \quad (7)$$

где $f_1(Fo)$, $f_k(Fo)$, ($k = \overline{2, n}$) - неизвестные функции времени; $\varphi_{1i}(x)$, $\varphi_{ki}(x)$ - координатные функции.

Неизвестные функции времени принимаем одинаковыми для всех контактирующих тел при различных для каждого тела координатных функциях.

Решение построим так, чтобы координатные функции первого приближения $\varphi_{k1}(x)$, $k = \overline{1, n}$ удовлетворяли граничным условиям и условиями сопряжения. Вначале определим координатную функцию для m -го тела. Эта функция находится методом неопределенных коэффициентов так, чтобы выполнялось граничное условие (6).

Формулу для определения координатной функции m -го тела находим в виде:

$$\varphi_m(x) = \frac{Bi + 2}{Bi} - x^2. \quad (8)$$

Координатную функцию для $(m-1)$ -го слоя находим в виде:

$$\varphi_{m-1}(x) = E_1 + E_2x^2, \quad (9)$$

где E_1 и E_2 - неизвестные коэффициенты, определяемые из условия сопряжения (4) и (5) между m -ым и $(m-1)$ -м слоем.

Из системы уравнений определим E_1 и E_2 :

$$\begin{cases} \frac{Bi + 2}{Bi} - x_{m-1}^2 = E_1 + E_2x_{m-1}^2; \\ \lambda_m(-2x_{m-1}) = \lambda_{m-1}(2E_2x_{m-1}). \end{cases}$$

$$E_2 = -\frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}}; \quad (10)$$

$$E_1 = \frac{Bi + 2}{Bi} - x_{m-1}^2 - E_2x_{m-1}^2 = \frac{Bi + 2}{Bi} + \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}} - 1\right)x_{m-1}^2. \quad (11)$$

Полученные значения (10) и (11) подставим в (9):

$$\varphi_{m-1}(x) = \frac{Bi + 2}{Bi} + \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}} - 1\right)x_{m-1}^2 - \frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}}x^2.$$

Формулу для координатной функции $(m-2)$ -го слоя, определим таким образом, чтобы выполнялись условия сопряжения между $(m-1)$ -м и $(m-2)$ -м слоем.

Координатную функцию для $(m-2)$ -го слоя находим в виде:

$$\varphi_{m-2}(x) = F_1 + F_2x^2, \quad (12)$$

где F_1 и F_2 - неизвестные коэффициенты, определяемые из условия сопряжения (4) и (5) между $(m-1)$ -м и $(m-2)$ -м слоем.

Определим F_1 и F_2 :

$$\begin{cases} \frac{Bi+2}{Bi} + \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}} - 1\right)x_{m-1}^2 - \frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}}x_{m-2}^2 = F_1 + F_2x_{m-2}^2; \\ \lambda_{m-1}\left(-2\frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}}x_{m-2}\right) = \lambda_{m-2}(2F_2x_{m-2}). \end{cases}$$

$$F_2 = -\frac{\lambda_m}{\lambda_{m-2}}; \quad (13)$$

$$F_1 = \frac{Bi+2}{Bi} + \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}} - 1\right)x_{m-1}^2 + \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m-2}} - \frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}}\right)x_{m-2}^2. \quad (14)$$

Полученные значения (13) и (14) подставим в (12):

$$\varphi_{m-2}(x) = \frac{Bi+2}{Bi} + \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}} - 1\right)x_{m-1}^2 + \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m-2}} - \frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}}\right)x_{m-2}^2 - \frac{\lambda_m}{\lambda_{m-2}}x^2.$$

Таким путем построим координатные функции для любого числа контактирующих тел.

Запишем общую формулу для координатной системы первого приближения:

$$\varphi_{1i}(x) = \frac{Bi+2}{Bi} + \sum_{k=0}^{m-i} (1 - H(i+k-m)) \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m-k-1}} - \frac{\lambda_m}{\lambda_{m-k}}\right)x_{m-k-1}^2 - \frac{\lambda_m}{\lambda_i}x^2,$$

где $H(\eta)$ - функция Хевисайда (единичная функция), определяемая выражением:

$$H(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \eta < \infty; \\ 0 & \text{при } -\infty < \eta < 0. \end{cases}$$

$$(\eta = i + k - m)$$

Для нахождения неизвестных функций времени $f_k(Fo)$ составим невязку уравнения (1) и потребуем ортогональности невязки ко всем координатным функциям $\varphi_k(x)$, т.е.:

$$\sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sum_{k=1}^n \left(-\frac{\partial f_k(Fo)}{\partial Fo} \varphi_{ki}(x) - f_k(Fo) \frac{a_i}{a} \left(\frac{\partial^2 \varphi_{ki}(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \varphi_{ki}(x)}{\partial x} \right) \right) \varphi_{ji}(x) dx = 0. \quad (15)$$

Вычисляя интегралы в (15) относительно неизвестных функций времени получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

Yu. V. Nemirovskii¹, A. S. Mozgova²

THE THERMAL CONDUCTIVITY OF A CONSTRUCTIONAL ELEMENT OF THE SPACECRAFT IN THE FORM OF THE MULTILAYERED CYLINDER

¹*Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

²*I. Ulianov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

Abstract. The use of thermal conductivity in multilayer structures is of great importance in connection with designing heat-shielding coatings for perspective spacecrafts. Many requirements should be taken into consideration for a successful space flight. The first and the most common requirement is that temperature of each element of a spacecraft during all the period of time should be maintained in the predetermined operating range. The article describes the method of solving the problem of thermal conductivity for a multilayer cylinder with symmetric boundary conditions of the third kind.

Keywords: thermal conductivity, heat exchange, spacecraft, heat spreading, multilayered cylinder, thermal insulation.

REFERENCES

- [1] Lucas John W. Heat Trasfer and Spacecraft Thermal Control / ed. N. A. Anfimova. M.: Mir, 1974. 544 p.
- [2] Kudinov V. A, Averin B. V, Stefanyuk E. V., Nazarenko S.A. The thermal conductivity and thermoelasticity for multilayer structures. Samara: Samar. state technical University, 2006. 304 p.
- [3] Nemirovskii Yu. V., Stanislavovich A. V. The Influence of shape and arrangement of reinforcing elements on the thermal properties of reinfoeced materials // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. № 4 (26). P. 3–25. (in Russian).

Nemirovsky Yuri Vladimirovich

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia.

Mozgova Anna Stanislavovna

e-mail: mozgova-energo@yandex.ru, Candidate of Economic Sciences, I. Ulianov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

Ю. В. Немировский¹, А. В. Станиславович²

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ СЛОИСТЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

¹Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия

Аннотация. В статье представлена математическая модель теплопроводности многослойной плоской стенки, слои которой имеют различную толщину и структуру. Слои могут представлять собой как изотропные материалы, так и ортотропные: армированные волокнами либо частицами композиционные материалы, сотовые структуры с различными параметрами армирования. Предложена методика решения нестационарной задачи теплопроводности для многослойной плоской стенки в трехмерной постановке. Методика решения основана на сведении нестационарной задачи к стационарной с помощью преобразования Лапласа и построения решения получившейся стационарной задачи в виде бесконечного ряда методом Бубнова – Галеркина.

Ключевые слова: теплопроводность, теплозащита, сотовые конструкции, слоистые конструкции, аналитические решения.

УДК: 536.21

Введение. Исследование различных проблем теплопередачи играет важную роль при проектировании газотурбинных двигателей и установок, авиационной и ракетной техники [1], [2]. При этом помимо эффективного увеличения термического сопротивления по толщине стенок несущих и теплоотводящих конструкций требуется обеспечение достаточной прочности и жесткости при ограничении веса. Одновременное выполнение таких требований может быть реализовано в подкрепленных конструкциях коробчатого типа или в трехслойных панелях с легкими алюминиевыми или стеклопластиковыми сотовыми наполнителями. Теплопроводность таких конструкций была

© Немировский Ю. В., Станиславович А. В., 2017

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Станиславович Алексей Вячеславович

e-mail: alexey.st@bk.ru, ведущий специалист, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 15-01-00825, 17-41-210272).

Поступила 11.08.2016

исследована в работах [3], [4]. В настоящее время существуют технологии производства многослойных сотопластовых и металлотопластовых конструкций, разделяющих жидкости или газы с различными температурами. Все составляющие конструкции подслои могут состоять из различных материалов, иметь различные структуры армирования, различную форму, плотность и взаимное расположение сот и в связи с этим могут позволять в широких пределах управлять температурным полем в направлении нормали к поверхности многослойной конструкции. Решение такой задачи нам неизвестно и должно быть основано на относительно разумных и простых гипотезах, позволяющих построить сравнительно простую расчетную модель, обеспечивающую возможность решения соответствующих задач управления тепловым полем и оптимизационных задач.

Рассматривая слоистую в направлении оси Oz конструкцию (рисунок 1), будем считать все составляющие слои ортотропными и имеющими размеченную структуру в направлении оси Oz . Структура в каждом слое является регулярно-сотовой или однородной с “тонкими слоями армирования”, позволяет использовать модель теплопроводности из [5], [6].

Математическая модель. Пусть дана трехмерная стенка, состоящая из N слоев постоянной толщины δ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) в направлении оси Oz (рисунок 1). Граница между i -м и $(i+1)$ -м слоями имеет координату, l_{zi} ($i = 1, 2, \dots, N - 1$). Тогда выполняются условия:

$$0 = l_{z0} < l_{z1} < l_{z2} < \dots < l_{z(N-1)} < l_{zN} = l_z.$$

Материал каждого слоя неоднороден и ортотропен по типу [5], [6]. На границе раздела i -го и $(i+1)$ -го слоев задаются условия идеального теплового контакта [7]:

$$T^i = T^{i+1}; \quad \lambda_i \frac{\partial T^i}{\partial \mathbf{n}} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T^{i+1}}{\partial \mathbf{n}}. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{n} – вектор единичной нормали к поверхности раздела слоев, λ_i , λ_{i+1} – коэффициенты теплопроводности i -го и $(i+1)$ -го слоев соответственно в направлении нормали \mathbf{n} .

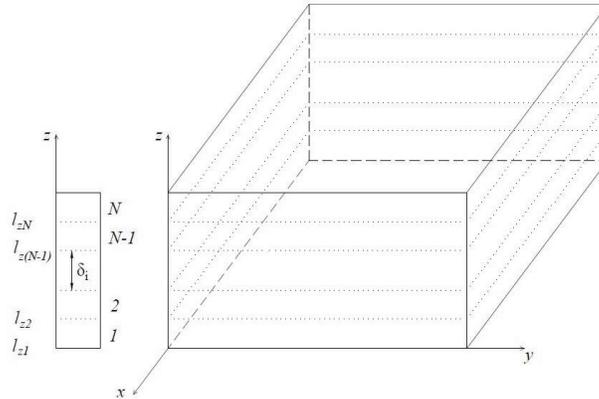


Рис. 1. Многослойная пластинка

В случае неидеального теплового контакта (контактные поверхности разделены тонкой прослойкой) обычно вводится понятие контактного сопротивления R . Равенство тепловых потоков здесь имеет место, но появляется пропорциональная им разность между двумя поверхностными температурами [8]:

$$\lambda_i \frac{\partial T^i}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_i} = \frac{1}{R} \left(T^{i+1}(x, y, z, t) \Big|_{S_{i+1}} - T^i(x, y, z, t) \Big|_{S_i} \right),$$

$$\lambda_i \frac{\partial T^i}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_i} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T^{i+1}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_{i+1}}. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{n} – вектор внешней нормали к поверхности S_i относительно i -го слоя.

Решение задачи нестационарной теплопроводности многослойных стенок, состоящих из N слоев, разнородных по геометрии и тепловым свойствам материалов при различных вариантах теплообмена с окружающей средой, совершенном или не совершенном контакте на поверхности раздела слоев сводится к решению системы уравнений [8]:

$$\rho_i C_i \frac{\partial T^i}{\partial t} - \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (\lambda_x^i(\tilde{x}) \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{x}}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} (\lambda_y^i(\tilde{y}) \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{y}}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} (\lambda_z^i(\tilde{z}) \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{z}}) \right] = \tilde{f}_i(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t), \quad (3)$$

$$t > 0, \quad 0 < \tilde{x} < l_x, \quad 0 < \tilde{y} < l_y, \quad l_{z(i-1)} < \tilde{z} < l_{zi} \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Здесь ρ_i, C_i – приведенная плотность и объемная теплоемкость i -го слоя, $\lambda_x^i, \lambda_y^i, \lambda_z^i$ – компоненты тензора теплопроводности вдоль соответствующих координатных осей, в общем случае зависящие от координат [6].

Дополним систему (2) следующими начальными и граничными условиями [8]:

$$T^i(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t) \Big|_{t=0} = \Phi_{oi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (4)$$

$$\beta_{11}^x \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=0} - \beta_{21}^x T^i \Big|_{\tilde{x}=0} = -\phi_1^x(t), \quad \beta_{12}^x \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=l_x} - \beta_{22}^x T^i \Big|_{\tilde{x}=l_x} = -\phi_2^x(t),$$

$$\beta_{11}^y \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{y}=0} - \beta_{21}^y T^i \Big|_{\tilde{y}=0} = -\phi_1^y(t), \quad \beta_{12}^y \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{y}=l_y} - \beta_{22}^y T^i \Big|_{\tilde{y}=l_y} = -\phi_2^y(t),$$

$$\beta_{11}^z \frac{\partial T^1}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=0} - \beta_{21}^z T^1 \Big|_{\tilde{z}=0} = -\phi_1^z(t), \quad \beta_{12}^z \frac{\partial T^N}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=l_z} - \beta_{22}^z T^N \Big|_{\tilde{z}=l_z} = -\phi_2^z(t). \quad (5)$$

При $\beta_{1j}^k = 0, \beta_{2j}^k = 1$ получим первую краевую задачу.

При $\beta_{1j}^k = \lambda, \beta_{2j}^k = 0$ получим вторую краевую задачу.

При $\beta_{1j}^k = -\lambda, \beta_{2j}^k = \alpha, \phi_j^k(t) = \alpha T_{\text{ср}}^j$ получим третью краевую задачу. Здесь α – коэффициент теплопередачи, $T_{\text{ср}}^j$ – температура окружающей среды при конвективном теплообмене, $j = 1, 2, k = "x", "y"$ или $"z"$.

Условия сопряжения (предполагается идеальный тепловой контакт) (1) записываются в виде:

$$T^i \Big|_{\tilde{z}=l_{zi}} = T^{i+1} \Big|_{\tilde{z}=l_{zi}},$$

$$\lambda_z^i(l_{zi}) \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=l_{zi}} = \lambda_z^{i+1}(l_{zi}) \frac{\partial T^{i+1}}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=l_{zi}} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1). \quad (6)$$

Введем безразмерные переменные [8]:

$$x = \frac{\tilde{x}}{l_x}, \quad y = \frac{\tilde{y}}{l_y}, \quad z = \frac{\tilde{z}}{l_z}, \quad w_i = \frac{l_{zi}}{l_z}, \quad \omega_i = \frac{\delta_i}{l_z}. \quad (7)$$

Обозначим

$$a_x^i(x) = \frac{\lambda_x^i(x)}{\rho_i C_i}, \quad a_y^i(y) = \frac{\lambda_y^i(y)}{\rho_i C_i}, \quad \dots, \quad \tilde{f}_i(x, y, z, t) = \frac{1}{\rho_i C_i} f(x, y, z, t). \quad (8)$$

Тогда соотношения (2)–(6) придут к виду:

$$\frac{\partial T^i}{\partial t} - \left[\frac{\partial}{\partial x} (a_x^i(x) \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (a_y^i(y) \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (a_z^i(z) \frac{\partial T}{\partial z}) \right] = f_i(x, y, z, t), \quad (9)$$

$$t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad w_{i-1} < z < w_i \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

$$T^i(x, y, z, t) \Big|_{t=0} = \Phi_{oi}(x, y, z) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (10)$$

$$\beta_{11}^x \frac{\partial T^i}{\partial x} \Big|_{x=0} - \beta_{21}^x T^i \Big|_{x=0} = -\phi_1^x(t), \quad \beta_{12}^x \frac{\partial T^i}{\partial x} \Big|_{x=1} - \beta_{22}^x T^i \Big|_{x=1} = -\phi_2^x(t),$$

$$\beta_{11}^y \frac{\partial T^i}{\partial y} \Big|_{y=0} - \beta_{21}^y T^i \Big|_{y=0} = -\phi_1^y(t), \quad \beta_{12}^y \frac{\partial T^i}{\partial y} \Big|_{y=1} - \beta_{22}^y T^i \Big|_{y=1} = -\phi_2^y(t), \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

$$\beta_{11}^z \frac{\partial T^1}{\partial z} \Big|_{z=0} - \beta_{21}^z T^1 \Big|_{z=0} = -\phi_1^z(t), \quad \beta_{12}^z \frac{\partial T^N}{\partial z} \Big|_{z=1} - \beta_{22}^z T^N \Big|_{z=1} = -\phi_2^z(t). \quad (11)$$

$$T^i \Big|_{z=w_i} = T^{i+1} \Big|_{z=w_i},$$

$$\lambda_z^i(w_i) \frac{\partial T^i}{\partial z} \Big|_{z=w_i} = \lambda_z^{i+1}(w_i) \frac{\partial T^{i+1}}{\partial z} \Big|_{z=w_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1). \quad (12)$$

Методика решения. Положим [8]:

$$\bar{T}(x, y, z, p) = \int_0^\infty e^{-pt} T(x, y, z, t) dt. \quad (13)$$

Применив преобразование Лапласа (9) к задаче (7)–(11), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (a_x^i(x) \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (a_y^i(y) \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (a_z^i(z) \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial z}) - p \bar{T}^i(x, y, z, p) = \\ = \bar{\Phi}_{1i}(x, y, z, p), \end{aligned} \quad (14)$$

$$t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad w_{i-1} < z < w_i \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

где

$$\bar{\Phi}_{1i}(x, y, z, p) = -(\Phi_{0i}(x, y, z) + \bar{f}_i(x, y, z, p)).$$

Начальные и граничные условия (8)–(11) принимают вид:

$$\begin{aligned} \beta_{11}^x \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial x} \Big|_{x=0} - \beta_{21}^x \bar{T}^i \Big|_{x=0} &= -\bar{\phi}_1^x(z), & \beta_{12}^x \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial x} \Big|_{x=1} - \beta_{22}^x \bar{T}^i \Big|_{x=1} &= -\bar{\phi}_2^x(p), \\ \beta_{11}^y \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial y} \Big|_{y=0} - \beta_{21}^y \bar{T}^i \Big|_{y=0} &= -\bar{\phi}_1^y(p), & \beta_{12}^y \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial y} \Big|_{y=1} - \beta_{22}^y \bar{T}^i \Big|_{y=1} &= -\bar{\phi}_2^y(p), \quad (i = 1, 2, \dots, N) \\ \beta_{11}^z \frac{\partial \bar{T}^1}{\partial z} \Big|_{z=0} - \beta_{21}^z \bar{T}^1 \Big|_{z=0} &= -\bar{\phi}_1^z(p), & \beta_{12}^z \frac{\partial \bar{T}^N}{\partial z} \Big|_{z=1} - \beta_{22}^z \bar{T}^N \Big|_{z=1} &= -\bar{\phi}_2^z(p). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $\bar{f}_i(x, y, z, t) \rightarrow \bar{f}(x, y, z, p)$, $\phi_j^k(t) \rightarrow \bar{\phi}_j^k(p)$ ($k = "x", "y"$ или $"z"$).
Условия сопряжения (12) приходят к виду:

$$\begin{aligned} \bar{T}^i \Big|_{z=w_i} &= \bar{T}^{i+1} \Big|_{z=w_i}, \\ \lambda_z^i(w_i) \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial z} \Big|_{z=w_i} &= \lambda_z^{i+1}(w_i) \frac{\partial \bar{T}^{i+1}}{\partial z} \Big|_{z=w_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1). \end{aligned} \quad (16)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} L[\bar{T}^i(x, y, z, p)] &= \frac{\partial}{\partial x} \left(a_x^i(x) \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a_y^i(y) \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a_z^i(z) \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial z} \right) - \\ &- p \bar{T}^i(x, y, z, p). \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда выражение (10) можно записать в виде:

$$L[\bar{T}^i(z, y, z, p)] - \Phi_{1i}(x, y, z, p) = 0. \quad (18)$$

Решение задачи (10)–(16) будем искать с помощью метода Бубнова – Галеркина [9], [10], [11] в виде ряда:

$$\bar{T}^i(x, y, z, p) = \phi_0(x, y, z) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(p) \phi_m(x, y, z). \quad (19)$$

Здесь $\phi_m(x, y, z)$ – какая-то полная система линейнонезависимых функций, дважды непрерывно дифференцируемая в

$$S = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq 1\},$$

удовлетворяющая однородным краевым условиям, $\phi_0(x, y, z)$ – какая-то функция, удовлетворяющая неоднородным краевым условиям (15)–(16), $A_m(p)$ – произвольные коэффициенты. Тогда, в общем случае, ряд (14) не удовлетворяет дифференциальному уравнению (12)

$$\begin{aligned}
& L [\bar{T}^i (x, y, z, p)] - \Phi_{1i} (x, y, z, p) = \\
& = L \left[\phi_0 (x, y, z) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m (p) \phi_m (x, y, z) \right] - \Phi_{1i} (x, y, z, p) = \\
& = L [\phi_0 (x, y, z)] + \sum_{m=1}^{\infty} A_m (p) L [\phi_m (x, y, z)] - \Phi_{1i} (x, y, z, p) = F (x, y, z, p) \neq 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Очевидно, что невязка полученного решения существенно зависит от значений неопределенных коэффициентов $A_m (p)$. Потребуем выполнения условий ортогональности функции $F (x, y, z, p)$ полной системе линейно независимых функций $\phi_k (x, y, z)$:

$$\begin{aligned}
& \iiint_{(S_i)} F (x, y, z, p) \phi_k^i (x, y, z) dx dy dz = \\
& = \iiint_{(S_i)} \left[L [\varphi_0 (x, y, z)] + \sum_{m=1}^{\infty} A_m^i (p) L [\phi_m^i (x, y, z)] - \Phi_{1i} (x, y, z, p) \right] \times \\
& \times \phi_k^i (x, y, z) dx dy dz = \\
& = \sum_{m=1}^{\infty} B_{mk}^i A_m^i - C_k^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N; \quad k = 1, 2, 3, \dots).
\end{aligned} \tag{21}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
B_{mk}^i &= \iiint_{(S_i)} L [\phi_m^i (x, y, z)] \phi_k^i (x, y, z) dx dy dz, \\
C_k^i &= \iiint_{(S_i)} \Phi_{1i} (x, y, z, p) \phi_k^i (x, y, z) dx dy dz.
\end{aligned}$$

Таким образом получена система алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{mk}^i A_m^i = C_k^i \quad (i = 1, 2, \dots, N; \quad k = 1, 2, 3, \dots)$$

для определения коэффициентов A_m^i , так что функции $F^i (x, y, z, p)$ ортогональны системе функций $\phi_k^i (x, y, z)$ и, следовательно, функции $F^i (x, y, z, p)$ тождественно равны нулю:

$$F (x, y, z, p) = L [T^i (x, y, z, p)] - \Phi_{1i} (x, y, z, p) \equiv 0.$$

Так как система алгебраических уравнений в общем случае является полной бесконечной системой, решение которой в общем виде возможно лишь при определенных соотношениях между коэффициентами системы, то на практике обычно ограничиваются конечным числом членов ряда, получая таким образом приближенное решение.

Более простое решение получается, если системы функций $L [\phi_m^i (x, y, z)]$ и $\phi_k^i (x, y, z)$ взаимно ортогональны в области интегрирования. Тогда метод Бубнова – Галеркина приводит к системе независимых алгебраических уравнений для каждого неизвестного коэффициента A_m^i :

$$A_m^i = \frac{C_m^i}{B_{mm}^i}, \quad (22)$$

и, следовательно, можно получить точное решение задачи. Таким образом, ряд (14) задает решение задачи (2)–(5) в изображениях.

В случае когда толщина стенки мала по сравнению с ее размерами, задачу можно свести к двумерной, аппроксимировав распределение температуры вдоль оси Oz какой-либо функцией заданного вида (например, полиномом k -й степени).

Пример. Рассмотрим двухслойную пластинку (рис. 2). На плоскости $z = 0$ задан постоянный тепловой поток Q , направленный внутрь контура, остальные поверхности внешнего контура контактируют со средой нулевой температуры. Плоскость раздела слоев имеет координату $z = w_1$. Внутри первого слоя существует внутренний источник тепла

$$f_1(x, y, z, t) = \sin \pi x \sin \pi y \cos \frac{\pi z}{2w_1} \sin t.$$

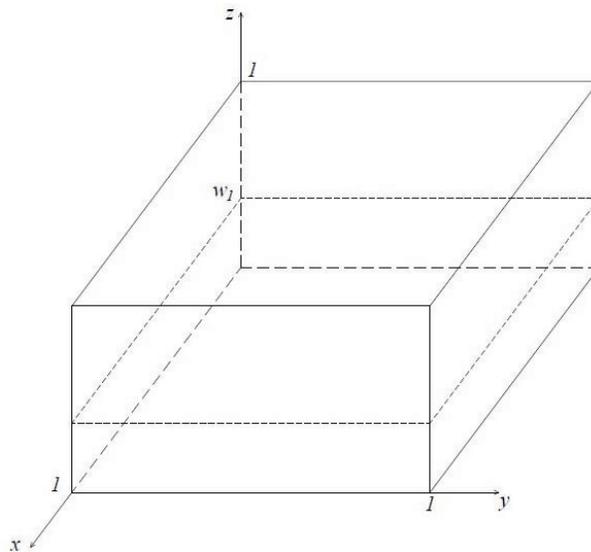


Рис. 2. Двухслойная пластинка

Коэффициент теплопроводности первого слоя вдоль оси Oz λ_z^1 изменяется от k_1 до k_2 по линейному закону

$$\lambda_z^1(z) = k_1 + \frac{k_2 - k_1}{w_1} z,$$

вдоль осей x, y коэффициенты теплопроводности первого слоя постоянны и равны соответственно λ_x^1, λ_y^1 . Второй слой изотропен, коэффициенты теплопроводности вдоль осей равны

$$\lambda_x^2 = \lambda_y^2 = \lambda_z^2 = \lambda^2.$$

Уравнение теплопроводности записывается в виде:

$$\begin{aligned} \rho_1 C_1 \frac{\partial T^1}{\partial t} - \left[\lambda_x^1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y^1 \frac{\partial^2 T^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z^1(z) \frac{\partial T^2}{\partial z} \right) \right] &= \sin(\pi x) \sin(\pi y) \cos \frac{\pi z}{2w_1} \sin t \\ 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < z < w_1, \quad t > 0, \\ \rho_2 C_2 \frac{\partial T^2}{\partial t} - \lambda^2 \left[\frac{\partial^2 T^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T^2}{\partial z^2} \right] &= 0, \\ 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad w_1 < z < 1, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Начальные и граничные условия принимают вид:

$$\begin{aligned} T^1|_{\Gamma_1} &= 0, \quad T^2|_{\Gamma_2} = 0, \\ k_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=0} &= Q \\ \Phi_{01}(x, y, z) &= (1-x)(1-y) \sin \frac{\pi z}{w_1}, \quad \Phi_{02}(x, y) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь Γ_1, Γ_2 :

$$\Gamma_1 = \{0 \leq x \leq 1; y = 0 \cup y = 1; 0 \leq z \leq w_1\} + \{x = 0 \cup x = 1; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq w_1\},$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \{0 \leq x \leq 1; y = 0 \cup y = 1; w_1 \leq z \leq 1\} + \{x = 0 \cup x = 1; 0 \leq y \leq 1; w_1 \leq z \leq 1\} + \\ &+ \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; z = 1\}. \end{aligned}$$

Условия сопряжения слоев:

$$\begin{aligned} T^1|_{z=w_1} &= T^2|_{z=w_1}, \\ k_2 \frac{\partial T^1}{\partial z} \Big|_{z=w_1} &= \lambda^2 \frac{\partial T^2}{\partial z} \Big|_{z=w_1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Применим к задаче (23)–(25) преобразование Лапласа (9):

$$\begin{aligned} \lambda_x^1 \frac{\partial^2 \bar{T}^1}{\partial x^2} + \lambda_x^1 \frac{\partial^2 \bar{T}^1}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z^1(z) \frac{\partial \bar{T}^1}{\partial z} \right) - \rho_1 C_1 p \bar{T}^1 &= \\ = -\sin(\pi x) \sin(\pi y) \cos \left(\frac{\pi z}{2w_1} \right) \frac{1}{p^2 - 1}, \\ \lambda^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{T}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}^2}{\partial z^2} \right) - \rho_2 C_2 p \bar{T}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Граничные условия (24) записываются в виде:

$$\bar{T}^1|_{\Gamma_1} = 0, \quad \bar{T}^2|_{\Gamma_2} = 0. \quad (27)$$

Условия сопряжения (25):

$$\bar{T}^1|_{z=w_1} = \bar{T}^2|_{z=w_1}, \quad k_1 \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = Q, \quad k_2 \frac{\partial \bar{T}^1}{\partial z} \Big|_{z=w_1} = \lambda^2 \frac{\partial \bar{T}^2}{\partial z} \Big|_{z=w_1}. \quad (28)$$

Представим \bar{T}^i ($i = 1, 2$) в виде

$$\bar{T}^i = \bar{F}_1^i(x, y, p) F_2^i(z).$$

Распределение температуры по толщине примем в виде полинома второй степени:

$$F_2^i(z) = z^2 + b_i z + c_i. \quad (29)$$

Значения коэффициентов b_i , c_i найдем из краевых условий (18)–(28). Подставив, получим систему 4 линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов b_i , c_i :

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{Q}{k_1}, \\ c_1 &= w_1 \left(\frac{k_2}{\lambda^2} \left(2w_1 + \frac{Q}{k_1} \right) - 2w_1 \right) - 1 - \frac{k_2}{\lambda^2} \left(2w_1 + \frac{Q}{k_1} \right) + 2w_1 - w_1 \frac{Q}{k_1}, \\ b_2 &= \frac{k_2}{\lambda^2} \left(2w_1 + \frac{Q}{k_1} \right) - 2w_1, \\ c_2 &= - \left(1 + \frac{k_2}{\lambda^2} \left(2w_1 + \frac{Q}{k_1} \right) - 2w_1 \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Тогда уравнения (26) придут к виду:

$$\begin{aligned} &F_2^1 \left[a_x^1 \frac{\partial^2 \bar{F}_1^1}{\partial x^2} + a_x^1 \frac{\partial^2 \bar{F}_1^1}{\partial x^2} \right] + F_1^1 \frac{d}{dz} \left(a_z^1(z) \frac{\partial F_2^1}{\partial z} \right) - p \bar{F}_1^1 F_2^1 = \\ &= - \sin(\pi x) \sin(\pi y) \cos\left(\frac{\pi z}{2w_1}\right) \frac{1}{p^2 - 1}, \\ &a^2 \left(F_2^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{F}_1^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{F}_1^2}{\partial y^2} \right) + \bar{F}_1^2 \frac{d^2 F_2^2}{dz^2} \right) - p \bar{F}_1^2 F_2^2 = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь

$$a^2 = \frac{\lambda^2}{\rho_2 C_2}, \quad a_i^1 = \frac{\lambda_i^1}{\rho_1 C_1} \quad (i = \text{“x”}, \text{“y”}, \text{“z”}).$$

Таким образом, мы перешли к задаче в плоскости Oxy .

В качестве линейно независимой системы функций возьмем:

$$g_n(x, y) = \sin(\pi n x) \sin(\pi n y). \quad (32)$$

Легко проверить, что системы функций (32) удовлетворяют краевым условиям (18). Решение задачи (31), (18)–(28) будем искать в виде ряда (14).

Найдем

$$\begin{aligned}
L[g] &= F_2^1 \left[-a_x^1 (\pi n)^2 \sin(\pi n x) \sin(\pi n y) - a_y^1 (\pi n)^2 \sin(\pi n x) \sin(\pi n y) \right] + \\
&+ \sin(\pi n x) \sin(\pi n y) \left[\frac{da_z^1}{dz} \frac{dF_2^1}{dz} + a_z^1 \frac{d^2 F_2^1}{dz^2} \right] - p F_2^1 \sin(\pi n x) \sin(\pi n y) = \\
&= \sin(\pi n x) \sin(\pi n y) \left[-F_2^1 (\pi n)^2 (a_x^1 + a_y^1) + \left(\frac{da_z^1}{dz} \frac{dF_2^1}{dz} + a_z^1 \frac{d^2 F_2^1}{dz^2} \right) - p F_2^1 \right] = \\
&= R_1 \sin(\pi n x) \sin(\pi n y),
\end{aligned}$$

где

$$R_1 = -F_2^1 (\pi n)^2 (a_x^1 + a_y^1) + \left(\frac{da_z^1}{dz} \frac{dF_2^1}{dz} + a_z^1 \frac{d^2 F_2^1}{dz^2} \right) - p F_2^1. \quad (33)$$

Далее найдем

$$\begin{aligned}
B_{nm}^1 &= \iint_{(S)} L[g_n(x, y)] g_m(x, y) dS_1 = \\
&= \iint_{(S)} R_1 \sin(\pi n x) \sin(\pi n y) \sin(\pi m x) \sin(\pi m y) dx dy = \\
&= R_1 \int_0^1 \sin(\pi n x) \sin(\pi m x) dx \int_0^1 \sin(\pi n y) \sin(\pi m y) dy = \\
&= \frac{1}{4} R_1 \delta_{nm}.
\end{aligned} \quad (34)$$

Здесь

$$S = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\},$$

δ_{nm} – символ Кронекера.

$$\begin{aligned}
C_m^1 &= -\frac{1}{\rho_1 C_1} \iint_{(S)} \left[(1-x)(1-y) \sin \frac{\pi z}{w_1} + \sin \pi x \sin \pi y \cos \frac{\pi z}{2w_1} \times \frac{1}{p^2-1} \right] \times \\
&\times \sin(\pi m x) \sin(\pi m y) dx dy = \\
&= -\frac{1}{\rho_1 C_1} \frac{1}{(\pi m)^2} \sin \left(\frac{\pi z}{w_1} \right) \times \begin{cases} 9 + \cos \left(\frac{\pi z}{2w_1} \right) \frac{1}{4} \frac{1}{p^2-1}, & m = 1 \\ 1, & m = 2k \\ 9, & m = 2k + 1 \end{cases} \quad (35)
\end{aligned}$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$

Отсюда найдем формулы для неизвестных коэффициентов $A_n^1(p, z)$

$$A_n^1 = - \left[\frac{1}{4} R_1 \right]^{-1} \times \frac{1}{\rho_1 C_1} \frac{1}{(\pi n)^2} \sin \left(\frac{\pi z}{w_1} \right) \times \begin{cases} 9 + \cos \left(\frac{\pi z}{2w_1} \right) \frac{1}{4} \frac{1}{p^2-1}, & n = 1 \\ 1, & n = 2k \\ 9, & n = 2k + 1 \end{cases} \quad (36)$$

Вторую из формул (31) путем деления обеих частей на $\bar{F}_1^2 F_2^2$ приведем к виду

$$\frac{a^2}{\bar{F}_1^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{F}_1^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{F}_1^2}{\partial y^2} \right) - p = -\frac{a^2}{F_2^2} \frac{d^2 F_2^2}{dz^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} L_2 [g] &= \frac{a^2}{\sin(\pi n x) \sin(\pi n y)} \left[(\pi n)^2 (-\sin(\pi n x) \sin(\pi n y) - \sin(\pi n x) \sin(\pi n y)) \right] - p = \\ &= -2a^2 (\pi n)^2 - p. \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения (19)–(36), найдем

$$\begin{aligned} B_{nm}^2 &= \iint_{(S)} L_2 [g_n(x, y)] g_n(x, y) dS = \\ &= \left[-2a^2 (\pi n)^2 - p \right] \int_0^1 \sin(\pi m x) dx \int_0^1 \sin(\pi m y) dy = \\ &= \left[-2a^2 (\pi n)^2 - p \right] \times \begin{cases} \frac{4}{(\pi m)^2}, & m = 2k - 1 \\ 0, & m = 2k. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} C_m^2 &= \iint_{(S)} \frac{a^2}{F_2^2} \frac{d^2 F_2^2}{dz^2} \sin(\pi m x) \sin(\pi m y) dx dy = \\ &= \frac{2a^2}{F_2^2} \times \begin{cases} \frac{4}{(\pi m)^2}, & m = 2k - 1 \\ 0, & m = 2k. \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку $L_2 [g_n(x, y)]$ и $g_n(x, y)$ не образуют взаимно ортогональной системы функций на прямоугольнике S , для определения коэффициентов $A_n^2(z, p)$ получим систему N линейных алгебраических уравнений, которая, как известно, имеет единственное решение:

$$\begin{cases} B_{11}A_1 + B_{12}A_2 + B_{13}A_3 + \dots + B_{1N}A_N = C_1 \\ B_{31}A_1 + B_{32}A_2 + B_{33}A_3 + \dots + B_{3N}A_N = C_3 \\ B_{51}A_1 + B_{52}A_2 + B_{53}A_3 + \dots + B_{5N}A_N = C_5 \\ \dots \\ B_{N1}A_1 + B_{N2}A_2 + B_{N3}A_3 + \dots + B_{NN}A_N = C_N. \end{cases} \quad (37)$$

Таким образом, приближенное решение задачи (31), (18)–(28) представляется в виде

$$\begin{aligned}
\bar{T}^1(x, y, z, p) &= \sum_{n=1}^N A_n^1(z, p) g_n(x, y) = \\
&= - \sum_{n=1}^N g_n(x, y) \left[\frac{1}{4} R_1 \right]^{-1} \frac{1}{\rho_1 C_1} \frac{1}{(\pi n)^2} \sin\left(\frac{\pi z}{w_1}\right) \times \begin{cases} 9 + \cos\left(\frac{\pi z}{2w_1}\right) \frac{1}{4} \frac{1}{p^2 - 1}, & n = 1 \\ 1, & n = 2k \\ 9, & n = 2k + 1 \end{cases} \\
\bar{T}^2(x, y, z, p) &= \sum_{n=1}^N A_n^2(z, p) g_n(x, y) = \\
&= \sum_{n=1}^N g_n(x, y) \frac{2a^2}{F_2^2} \left[-2a^2 (\pi n)^2 - p \right]^{-1} \times \begin{cases} 1, & m = 2k - 1 \\ 0, & m = 2k. \end{cases} \quad (38)
\end{aligned}$$

Здесь $F_2^2(z)$ задается формулами (19)–(30), $g_n(x, y)$ задается формулой (32), R_1 задается формулой (20), A_n^1 задается формулой (36), A_n^2 находится из системы (37).

Таким образом, ряды (38) представляют собой решение задачи (23)–(25) в изображениях. Для обратного перехода к оригиналам можно воспользоваться одним из справочников по преобразованию Лапласа, например [12], [13], [14].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Авдудевский В. С., Галицейский Б. М., Глебов Г. А. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. 2-е изд. М.: Машиностроение, 1992. 528 с.
- [2] Иванов В. Л., Леонтьев А. И., Манушин Э. А., Осипов М. И. Теплообменные аппараты и системы охлаждения газотурбинных и комбинированных установок: учебник для вузов. 2-е изд., стереотип. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 592 с.
- [3] Марченко В. М. Температурные поля и напряжения в конструкциях летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1965. 298 с.
- [4] Поварницын М. С. Исследование температурного поля в трехслойной пластине с сотовым наполнителем при несимметричном нагреве // Инженерно-физический журнал. 1961. № 10. Т. 4. С. 64–70.
- [5] Немировский Ю. В., Станиславович А. В. Влияние формы и расположения армирующих элементов на тепловые свойства композитов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 4 (26). С. 3–24.
- [6] Немировский Ю. В., Станиславович А. В. Теплопроводность пакета полиармированных слоев // Вестник КемГУ. 2015. № 4 (64), т. 3. С. 177–183.
- [7] Коляно Ю. М., Ломакин В. А., Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры. М.: Наука, 1984. 368 с.
- [8] Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
- [9] Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений: в 2 т. Т. 2: Температурное поле. М.: ГИФМЛ, 1959. 620 с.
- [10] Рвачев В. Л. Геометрические приложения алгебры логики. Киев: Техника, 1967. 213 с.

[11] Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. 2-е изд. М.: Наука, 1970. 512 с.

[12] Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.

[13] Егер Д., Карслоу Х. Операционные методы в прикладной математике. М.: Издательство иностранной литературы, 1948. 290 с.

[14] Диткин В. А., Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. М.: Государственное издательство технико-технической литературы, 1951. 255 с.

Yu. V. Nemirovskii¹, A. V. Stanislavovich²

THERMAL CONDUCTIVITY OF MULTILAYER ORTHOTROPIC PLATES

¹*Khrstianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia*

²*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

Abstract. The paper presents mathematical model of heat conduction of multilayer plain wall. Each layer of plain wall which is under consideration is either isotropic material or fiber composite or dispersion-strengthened composite or honeycomb composite structure. Method for solving time-dependent heat conduction equation for multilayer plain wall is proposed in the article. Proposed method is based on reduction of unsteady-state problem to steady-state heat conduction equation using Laplace transformation. Then steady-state heat conduction problem is solved using Galerkin-Bubnov method.

Keywords: heat conduction, heat protection, honeycomb structures, fiber composites, analytical solutions.

REFERENCES

[1] Avduevskij V. S., Galicejskij B. M., Glebov G. A. Osnovy teploperedachi v aviacionnoj i raketno-kosmicheskoj tehnike. 2-e izd. M.: Mashinostroenie, 1992. 528 s. (in Russian).

[2] Ivanov V. L., Leont'ev A. I., Manushin Je. A., Osipov M. I. Teploobmennye apparaty i sistemy ohlazhdenija gazoturbinnih i kombinirovannyh ustanovok: uchebnik dlja vuzov. 2-e izd., stereotip. M.: Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, 2004. 592 s. (in Russian).

[3] Marchenko V. M. Temperaturnye polja i naprjazhenija v konstrukcijah letatel'nyh apparatov. M.: Mashinostroenie, 1965. 298 s. (in Russian).

[4] Povarnicyn M. S. Issledovanie temperaturnogo polja v trehslojnoj plastine s sotovym zapolnitelem pri nesimmetrichnom nagreve // Inzhenerno-fizicheskij zhurnal. 1961. № 10. T. 4. S. 64–70. (in Russian).

[5] Nemirovskij Ju. V., Stanislavovich A. V. Vlijanie formy i raspolozhenija armirujushchih jelementov na teplovyje svojstva kompozitov // Vestnik Chuvashskogo

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Associate at Khrstianovich Institute of theoretical and applied mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia.

Stanislavovich Alexey Viacheslavovich, Leading specialist at Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia.

gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2015. № 4 (26). S. 3–24. (in Russian).

[6] Nemirovskij Ju. V., Stanislavovich A. V. Teploprovodnost' paketa poliarmirovannyh sloev // Vestnik KemGU. 2015. № 4 (64), t. 3. S. 177–183. (in Russian).

[7] Koljano Ju. M., Lomakin V. A., Podstrigach Ja. S. Termouprugost' tel neodnorodnoj struktury. M.: Nauka, 1984. 368 s. (in Russian).

[8] Kartashov Je. M. Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdyh tel. M.: Vysshaja shkola, 2001. 550 s. (in Russian).

[9] Berezin I. S., Zhidkov N. P. Metody vychislenij: v 2 t. T. 2. temperaturnoe pole. M.: GIFML, 1959. 620 s. (in Russian).

[10] Rvachev V. L. Geometricheskie prilozhenija algebry logiki. Kiev: Tehnika, 1967. 213 s. (in Russian).

[11] Mihlin S. G. Variacionnye metody v matematicheskoj fizike. 2-e izd. M.: Nauka, 1970. 512 s. (in Russian).

[12] Dech G. Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniju preobrazovanija Laplasy i Z-preobrazovanija. M.: Nauka, 1971. 288 s. (in Russian).

[13] Eger D., Karslou H. Operacionnye metody v prikladnoj matematike. M.: Izdatel'stvo inostranoj literatury, 1948. 290 s. (in Russian).

[14] Ditkin V. A., Kuznecov P. I. Spravochnik po operacionnomu ischisleniju. M.: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tehniko-tehnicheskoy literatury, 1951. 255 s. (in Russian).

Т. Ю. Леонтьева

ТОЧНЫЕ КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОДВИЖНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,
г. Чебоксары, Россия*

Аннотация. Нелинейные дифференциальные уравнения характеризуются наличием подвижных особых точек, для определения координат которых необходим определенный математический аппарат. И эта задача является составной для метода приближенного решения нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками. В последнее время эти задачи рассматривались для ряда классов нелинейных дифференциальных уравнений. Результаты данной работы расширяют этот класс нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, подвижная особая точка, приближенное решение, возмущение подвижной особой точки, точные критерии существования решения.

УДК: 517.925.7

Введение. Подвижные особые точки нелинейных дифференциальных уравнений невозможно определить классическими методами решения, используемыми для линейных дифференциальных уравнений. Этот факт ставит задачу разработки новых методов приближенного решения таких уравнений. На данный момент в работах [1]–[7] предлагается приближенный метод решения нелинейных дифференциальных уравнений, в которых одной из задач является нахождение подвижной особой точки с заданной точностью. Решение этой задачи связано с точными критериями существования подвижных особых точек, которые представляют собой необходимые и достаточные условия и классифицируются на точечные и интервальные критерии. Наибольший интерес в практическом приложении представляют интервальные критерии существования подвижных особых точек, а точечные позволяют лишь констатировать факт их существования.

© Леонтьева Т. Ю., 2017

Леонтьева Татьяна Юрьевна

e-mail: betty2784@mail.ru, аспирант кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 11.12.2016

В данной работе представлены как точные, так и интервальные критерии для рассматриваемого класса нелинейных дифференциальных уравнений.

Результаты. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение:

$$y''(x) = a_0(x)y^5(x) + a_1(x)y^4(x) + a_2(x)y^3(x) + a_3(x)y^2(x) + a_4(x)y(x) + a_5(x), \quad (1)$$

где $a_i, i = 0, 1, \dots, 5$ — аналитические функции в рассматриваемой области. С помощью замены переменной

$$y(x) = \frac{v(x)}{\sqrt[4]{a_0(x)}} - \frac{a_1(x)}{5a_0(x)}$$

при условии:

$$\frac{a_1(x)}{5a_0(x)} = \frac{a_2(x)}{2a_1(x)} = \frac{a_3(x)}{a_2(x)} = \frac{2 \left(a_4(x) + \frac{a_0''(x)}{4a_0(x)} - \frac{5}{16} \left(\frac{a_0''(x)}{a_0(x)} \right)^2 \right)}{a_3(x)}$$

уравнение (1) приводится к нормальному виду:

$$v''(x) = v^5(x) + r(x),$$

где

$$r(x) = -\frac{a_1^5(x) \sqrt[4]{a_0(x)}}{5^5 a_0^4(x)} - \frac{3a_0''(x) \sqrt[4]{a_0(x)}}{20a_0^2(x)} + a_5(x) \sqrt[4]{a_0(x)} + \frac{a_1''(x) \sqrt[4]{a_0(x)}}{5a_0(x)} - \frac{2a_0'(x) a_1'(x) \sqrt[4]{a_0(x)}}{5a_0^2(x)} + \frac{2(a_0'(x))^2 a_1(x) \sqrt[4]{a_0(x)}}{5a_0^3(x)} - \frac{(a_0''(x))^2 a_1(x) \sqrt[4]{a_0(x)}}{16a_0^3(x)} + \frac{a_0'(x)}{2a_0(x)} u'(x)$$

в каждой области, в которой $a_0(x) \neq 0$ [8].

Рассмотрим задачу Коши:

$$y''(x) = y^5(x) + r(x), \quad (2)$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1. \quad (3)$$

С помощью замены

$$y(x) = \frac{1}{u^2(x)} \quad (4)$$

получим задачу Коши

$$2u''(x) u^7(x) = 6(u'(x))^2 u^6(x) - 1 - r(x) \cdot u^{10}(x), \quad (5)$$

$$u(x_0) = u_0, \quad u'(x_0) = u_1. \quad (6)$$

Для оптимизации алгоритма нахождения решения исследуемого уравнения, как и для классов уравнений, рассмотренных в работах [1]–[7], используется связь локальных экстремумов исходного и интервального уравнений.

Теорема 1. Пусть $y(x)$ – решение задачи (2)–(3) и $u(x)$ – решение задачи Коши (4), (7) непрерывны на отрезке $[a; b]$.

Для того чтобы решение задачи (2)–(3) $y(x)$ имело в точке $c \in (a, b)$ локальный максимум (минимум), $y(c) = \text{const} > 0$ ($y(c) = \text{const} < 0$), необходимо и достаточно, чтобы решение задачи (4), (7), $u(x)$ в этой точке имело локальный минимум (максимум).

В основе доказательства лежит классический подход, основанный на необходимых и достаточных условиях существования локального экстремума.

Для определения положения в ходе решения нелинейного дифференциального уравнения может быть использовано необходимое условие попадания в окрестность подвижной особой точки.

Теорема 2 (необходимое условие существования подвижной особой точки). Пусть функция $y(x)$ является решением задачи Коши (2)–(3) и определена на промежутке $[x_0; x^*)$, где x^* – подвижная особая точка данной функции, причем $x^* > x_0$. Тогда существует такая окрестность $[a; x^*)$ точки x^* , в которой $y(x) > 0$, $y'(x) > 0$, $y''(x) > 0$, ($y(x) < 0$, $y'(x) < 0$, $y''(x) < 0$).

Доказательство. Решение функции $y(x)$ в окрестности подвижной особой точки (слева) в соответствии с [10] представимо в виде:

$$y(x) = (x^* - x)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x^* - x)^{n/2}, \quad (7)$$

где $C_0 = \sqrt[4]{3/4}$, $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_8 = 0$.

На основании теоремы существования [10] имеется точка $x_1 \in [x_0; x^*)$, что правильная часть ряда (8) сходится в области $[x_1; x^*)$. Ряд (8) разобьем на главную и правильную части:

$$y(x) = \sqrt[4]{\frac{3}{4}} \frac{1}{\sqrt{(x^* - x)}} + C_5 (x^* - x)^2 + \\ + C_6 (x^* - x)^{5/2} + C_7 (x^* - x)^3 + C_9 (x^* - x)^4 + \dots \quad (8)$$

Дифференцируя (9) по x , получаем:

$$y'(x) = \sqrt[4]{\frac{3}{4}} \frac{1}{2\sqrt{(x^* - x)^3}} - 2C_5 (x^* - x) - \\ - \frac{5}{2} C_6 (x^* - x)^{3/2} - 3C_7 (x^* - x)^2 - 4C_9 (x^* - x)^3 - \dots \quad (9)$$

Введем обозначение

$$y'(x) = g_1(x) + h_1(x),$$

где

$$g_1(x) = \sqrt[4]{\frac{3}{4}} \frac{1}{2\sqrt{(x^* - x)^3}},$$

$$h_1(x) = -2C_5(x^* - x) - \frac{5}{2}C_6(x^* - x)^{3/2} - 3C_7(x^* - x)^2 - 4C_9(x^* - x)^3 - \dots$$

Так как $g_1(x) \rightarrow +\infty$ и $h_1(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x^* - 0$, то существует такая точка x^* , удовлетворяющая условию $x_2 \geq x_1$, $\forall x \in [x_2; x^*]$, что будет верно неравенство:

$$g_1(x) > h_1(x),$$

следовательно, $y'(x) > 0$.

Дифференцируя дважды (9) по x , получаем:

$$y''(x) = \sqrt[4]{\left(\frac{3}{4}\right)^5} \sqrt{(x^* - x)^5} + 2C_5 + \frac{15}{4}C_6(x^* - x)^{1/2} + \dots + 6C_7(x^* - x) + 12C_9(x^* - x)^2 + \dots \quad (10)$$

Представим вторую производную в виде:

$$y''(x) = g_2(x) + h_2(x),$$

где

$$g_2(x) = \sqrt[4]{\left(\frac{3}{4}\right)^5} \frac{1}{\sqrt{(x^* - x)^5}},$$

$$h_2(x) = 2C_5 + \frac{15}{4}C_6(x^* - x)^{1/2} + 6C_7(x^* - x) + 12C_9(x^* - x)^2 + \dots$$

Так как $g_2(x) \rightarrow +\infty$ и $h_2(x) \rightarrow 2C_5$ при $x \rightarrow x^* - 0$, то существует такая точка x^* , что $x_3 \geq x_1$ $\forall x \in [x_3; x^*]$ будет верно неравенство:

$$g_2(x) > h_2(x).$$

Таким образом, $y''(x) > 0$. Что и доказывает теорему.

Аналогичным образом доказывается и второй случай теоремы.

Теорема 3 (точечный критерий существования подвижной особой точки).

Пусть $y(x)$ решение задачи (2)–(3). Для того чтобы x^* являлась подвижной особой точкой решения $y(x)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $u(x)$ решения задачи Коши (6)–(7) являлась аналитической и удовлетворяла следующим условиям:

$$x(0) = 0, x'(0) = 0, x''(0) = -\sqrt{3}. \quad (11)$$

Доказательство I (необходимость). По условию теоремы с учетом замены переменной (4) выражение $u(x)$ будет иметь вид:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n (x^* - x)^{n+1}. \quad (12)$$

x^* является нулем функции $u(x)$, что следует из замены переменной (4).

Учитывая, что $u(x^*) = 0$, на основании обращения рядов [11] следует, что

$$(x^* - x)^{1/2} = B_1 u + B_2 u^2 + B_3 u^3 + B_4 u^4 + \dots, \quad (13)$$

где

$$B_1 = C_0 = \sqrt[4]{3/4}, \quad (14)$$

а все последующие коэффициенты определяются по рекуррентному соотношению.

Соотношение (15) представляет собой аналитическое выражение голоморфной функции $u(x)$ в некоторой окрестности $(0; x^*)$.

$$x^* - x = B_1^2 u^2 + \tilde{B}_2 u^3 + \tilde{B}_3 u^4 + \tilde{B}_4 u^5 + \dots \quad (15)$$

Дифференцируем (15) по u , получаем

$$-x' = 2B_1^2 u + 3\tilde{B}_2 u^2 + 4\tilde{B}_3 u^3 + 5\tilde{B}_4 u^4 + \dots$$

$$-x'' = 2B_1^2 + 6\tilde{B}_2 u + 12\tilde{B}_3 u^2 + 20\tilde{B}_4 u^3 + \dots$$

При $u = 0$ находим $x'(0) = 0$, $x''(0) = -2B_1^2 = -\sqrt{3}$. Что и требовалось доказать.

Доказательство II (достаточность). Докажем, что $y(x)$ имеет особую точку алгебраического типа.

По условию теоремы 3 имеем:

$$x(u) = B_0 + B_1 u + B_2 u^2 + B_3 u^3 + B_4 u^4 + \dots \quad (16)$$

Обозначим B_0 через x^* и, по аналогии с (15), определяем

$$x' = B_1 + 2B_2 u + 3B_3 u^2 + 4B_4 u^3 + \dots$$

$$x'' = 2B_2 + 6B_3 u + 12B_4 u^2 + \dots$$

По условию теоремы из (12), (18) и последнего соотношения находим:

$$B_1 = 0, \quad B_2 = -\sqrt{3}/2.$$

Тогда (18) принимает вид:

$$x(u) = x^* - \sqrt{3}/2 u^2 + \tilde{B}_3 u^3 + \tilde{B}_4 u^4 + \dots,$$

или

$$x^* - x = \sqrt{3}/2 u^2 - \tilde{B}_3 u^3 - \tilde{B}_4 u^4 - \dots$$

На основании обращения рядов [12] следует, что

$$u(x) = D_1 (x^* - x)^{1/2} + D_2 (x^* - x) + D_3 (x^* - x)^{3/2} + \dots,$$

где $D_1 = (2/\sqrt{3})^{1/2} = \sqrt[4]{4/3}$.

Из последнего соотношения получим:

$$y(x) = 1/u(x) = 1/D_1 (x^* - x)^{-1/2} + \tilde{D}_2 (x^* - x)^0 + \tilde{D}_3 (x^* - x)^{1/2} + \dots$$

Данное разложение представимо в следующем виде:

$$y(x) = C_0(x^* - x)^{-1/2} + C_1(x^* - x)^0 + C_2(x^* - x)^{1/2} + C_3(x^* - x) + \dots,$$

т. е.

$$y(x) = (x - x^*)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x^* - x)^{n/2},$$

где $C_0 = \sqrt[4]{3/4}$.

Таким образом, учитывая теорему существования [8], имеем: x^* – является подвижной особой точкой решения задачи (2)–(3). Что и доказывает теорему.

Следующая теорема, представляющая собой интервальный критерий существования подвижных особых точек, дает возможность построения алгоритма для нахождения координат подвижных особых точек с заданной точностью.

Теорема 4 (интервальный критерий существования подвижной особой точки). Пусть $y(x)$ – решение задачи (2)–(3), x^* будет являться подвижной особой точкой решения $y(x)$ тогда и только тогда, когда существует отрезок $[x_1; x_2]$, $x^* \in [x_1; x_2]$, на котором функция $u(x)$ решение задачи Коши (4), (7) является непрерывной, аналитической и выполняется условие: $u(x_1) \cdot u(x_2) < 0$.

Доказательство I (необходимость). Так как x^* является подвижной особой точкой решения $y(x)$, которая имеет структуру (8) с соответствующими значениями параметров этого выражения.

Далее рассмотрим замену

$$u(x) = \frac{1}{y^2(x)}. \quad (17)$$

Последнее выражение позволяет утверждать, что x^* переходит в класс регулярных точек для $u(x)$. Далее

$$1/u(x) = y^2(x) = (x^* - x)^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x^* - x)^{n/2} \right)^2, \quad (18)$$

из которого выразим $u(x)$

$$u(x) = (x^* - x) / \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x^* - x)^{n/2} \right)^2. \quad (19)$$

Исходя из структуры выражения (19), следует существование отрезка $[x_1; x_2]$, для которого будет выполняться условие $u(x_1) \cdot u(x_2) < 0$.

Доказательство II (достаточность). По условию теоремы функция $u(x)$ – решение задачи Коши (4), (7) является непрерывной, аналитической и выполняется условие: $u(x_1) \cdot u(x_2) < 0$ на отрезке $u(x) \in [x_1; x_2]$. Следовательно, функцию $u(x)$ на указанном интервале можно представить в виде:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n (x^* - x)^{n+1}, \quad (20)$$

где значение коэффициента $D_0 = 2\sqrt{3}/3 \neq 0$ определяется из выражения (19) с учетом $C_0 = \sqrt[4]{3/4}$, значение которого было получено ранее [8].

Далее из выражений (19) и (20) получим

$$y(x) = \sqrt{1/u(x)} = 1 / \left((x^* - x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} D_n (x^* - x)^{n-1} \right)^{1/2} = \\ = \frac{1}{(x^* - x) \left(\sum_{n=0}^{\infty} D_n (x^* - x)^{n-1} \right)^{1/2}}.$$

Из полученного выражения можно сделать вывод о существовании подвижной особой точки функции $y(x)$ на некотором интервале $x_3^* : x_3^* \in [x_1; x_2]$.

На основе данной теории составлена программа для определения координат подвижной особой точки и исследования влияния на них возмущений начальных условий и получено авторское право [13]. Результаты представлены в следующих таблицах:

Таблица 1. При $x_0 = 0$ и $y_0 = 1$

y_1	0,1	0,3	0,5	1	1,5
x^*	1,125	0,992	0,8965	0,7397	0,64

Таблица 2. При $x_0 = 0,5$ и $y_0 = 1$

y_1	0	0,5	1	1,5	2
x^*	1,71	1,396	1,24	1,15	1,07

Таблица 3. При $x_0 = 0,5$ и $y_0 = 0,5$

y_1	0	0,3	0,5	1	2
x^*	3,87	2,998	2,18	1,686	1,31

Резюме. В статье представлены формулировка и доказательство теорем, отражающих необходимые и достаточные условия существования подвижных особых точек, которые являются ключевым моментом в алгоритме программы нахождения подвижных особых точек. Также приведены результаты работы вышеуказанной программы в зависимости от изменения начальных условий.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Орлов В. Н. О приближенном решении первого уравнения Пенлеве // Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева. 2008. № 2. С. 42–46.
- [2] Орлов В. Н. Исследование приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2009. № 4 (35). С. 102–108.
- [3] Орлов В. Н. Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати // Вестник МАИ. 2008. Т. 15, № 5. С. 128–135.

[4] Орлов В. Н. Точные границы для приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2 (8). С. 399–405.

[5] Орлов В. Н. Критерии существования подвижных особых точек решений дифференциальных уравнений Риккати // Вестник Самарского ГУ. Естественно научная серия. 2006. № 6/1 (46). С. 64–69.

[6] Орлов В. Н. Критерии существования подвижных особых точек решений второго уравнения Пенлеве // Известия Тульского ГУ. Серия: Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. Вып. 1. Тула: Изд-во Тул. ГУ, 2006. С. 26–29.

[7] Редкозубов С. А., Орлов В. Н. Точные критерии существования подвижной особой точки дифференциального уравнения Абеля // Известия института инженерной физики. 2009. № 4 (16). С. 12–14.

[8] Орлов В. Н., Леонтьева Т. Ю. Построение приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения в области аналитичности // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий: международная научно-практическая конференция. Чебоксары. 2013. С. 47–52.

[9] Орлов В. Н., Леонтьева Т. Ю. Влияние возмущения начальных данных на приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в области аналитичности // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 3 (19). С. 103–109.

[10] Орлов В. Н., Леонтьева Т. Ю. Построение приближенного решения одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в окрестности подвижной особой точки // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки, 2015. № 2 (59). С. 26–37.

[11] Леонтьева Т. Ю. Влияние возмущения подвижной особой точки на приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в комплексной области // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2 (24). С. 109–118.

[12] Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. 2 изд. М.; Л.: Гос. изд.-во технико-теоретической литературы. 1950. 436 с.

[13] Программа ONDEL1.4,2.4,2.5-SF / С. А. Иванов, В. Н. Орлов, М. П. Гузь, Т. Ю. Леонтьева // ФИПС: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016617252. 29.06.2016.

T. Yu. Leonteva

**THE EXACT CRITERIA FOR THE EXISTENCE OF MOVABLE SINGULAR
POINTS OF SOLUTIONS OF A CLASS OF NONLINEAR ORDINARY
DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia

Abstract. The nonlinearity of the differential equation is manifested in the appearance of movable singular points, to find which requires a certain mathematical apparatus. And this task is part of a method for the approximate solution of nonlinear differential equations with movable singularities. Recently these tasks were considered for several classes of nonlinear differential equations. The results of this work extend the class of nonlinear differential equations with movable singularities.

Keywords: nonlinear differential equation of the second order, a movable singular point, approximate solution, perturbation of the movable singular point, the exact criteria for the existence of the solution.

REFERENCES

- [1] Orlov V. N. O priblizhennom reshenii pervogo uravnenija Penleve // Vestnik KGTU im. A. N. Tupoleva. 2008. № 2. S. 42–46. (in Russian).
- [2] Orlov V. N. Issledovanie priblizhennogo reshenija differencial'nogo uravnenija Abelja v okrestnosti podvizhnoj osoboj točki // Vestnik MGTU im. N. Je. Baumana. Serija: Estestvennye nauki. 2009. № 4 (35). S. 102–108. (in Russian).
- [3] Orlov V. N. Ob odnom metode priblizhennogo reshenija matrichnyh differencial'nyh uravnenij Rikkati // Vestnik MAI. 2008. T. 15, № 5. S. 128–135. (in Russian).
- [4] Orlov V. N. Tochnye granicy dlja priblizhennogo reshenija differencial'nogo uravnenija Abelja v okrestnosti priblizhennogo znachenija podvizhnoj osoboj točki v kompleksnoj oblasti // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2010. № 2 (8). S. 399–405. (in Russian).
- [5] Orlov V. N. Kriterii sushhestvovanija podvizhnyh osobyh toček reshenij differencial'nyh uravnenij Rikkati // Vestnik Samarskogo GU. Estestvenno nauchnaja serija. 2006. № 6/1 (46). S. 64–69. (in Russian).
- [6] Orlov V. N. Kriterii sushhestvovanija podvizhnyh osobyh toček reshenij vtorigo uravnenija Penleve // Izvestija Tul'skogo GU. Serija Differencial'nye uravnenija i prikladnye zadachi. Vyp. 1. Tula: Izd-vo Tul. GU, 2006. S. 26–29. (in Russian).
- [7] Redkozubov S. A., Orlov V. N. Tochnye kriterii sushhestvovanija podvizhnoj osoboj točki differencial'nogo uravnenija Abelja // Izvestija instituta inženernoj fiziki. 2009. № 4 (16). S. 12–14. (in Russian).
- [8] Orlov V. N., Leont'eva T. Ju. Postroenie priblizhennogo reshenija nelinejnogo differencial'nogo uravnenija v oblasti analitichnosti // Fundamental'nye i prikladnye problemy mehaniki deformiruemogo tverdogo tela, matematicheskogo modelirovanija i informacionnyh tehnologij: mezhdunarodnaja nauchno-praktičeskaja konferencija. Cheboksary. 2013. S. 47–52. (in Russian).

Leont'eva, Tat'jana Jur'evna, Postgraduate Student, Department of Mathematical analysis, Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

[9] Orlov V. N., Leont'eva T. Ju. Vlijanie vozmushhenija nachal'nyh dannyh na priblizhennoe reshenie odnogo nelinejnogo differencial'nogo uravnenija vtorogo porjadka v oblasti analitichnosti // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2013. № 3 (19). S. 103–109. (in Russian).

[10] Orlov V. N., Leont'eva T. Ju. Postroenie priblizhennogo reshenija odnogo nelinejnogo differencial'nogo uravnenija vtorogo porjadka v okrestnosti podvizhnoj osoboj točki // Vestnik MGTU im. N. Je. Baumana. Serija: Estestvennye nauki, 2015. № 2 (59). S. 26–37. (in Russian).

[11] Leont'eva T. Ju. Vlijanie vozmushhenija podvizhnoj osoboj točki na priblizhennoe reshenie odnogo nelinejnogo differencial'nogo uravnenija vtorogo porjadka v kompleksnoj oblasti // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2015. № 2 (24). S. 109–118. (in Russian).

[12] Golubev V. V. Lekcii po analiticheskoj teorii differencial'nyh uravnenij. 2 izd. M. ; L.: Gos. izd.-vo tehniko-teoreticheskoj literatury. 1950. 436 s. (in Russian).

[13] Programma ONDEL1.4,2.4,2.5-SF / C. A. Ivanov, V. N. Orlov, M. P. Guz', T. Ju. Leont'eva // FIPS: Svidetel'stvo o gosudarstvennoj registracii programmy dlja JeVM № 2016617252. 29.06.2016. (in Russian).

Ю. В. Немировский

ДИНАМИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И КРУГЛЫХ СЛОИСТЫХ ПЛИТ ИЗ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

Аннотация. Для оценки эффективности плоских преград при воздействии нагрузок обычно исследуется зависимость параметров их остаточной повреждаемости от амплитуды или импульса ударной волны. Применительно к однородным изотропным плитам такие решения строятся на основе модели идеального жестко-пластического тела, показывают достаточную эффективность результатов и вполне удовлетворительные совпадения с экспериментами. Решение многих задач и обзор полученных результатов для однородных балок и пластин можно найти в [1], [2]. Во многих областях современной техники существующие жесткие требования к надежности эксплуатации конструкции не могут быть обеспечены при использовании однородных материалов и возникают серьезные надежды на использование композитных конструкций. Ясно, что на этом пути могут быть созданы эффективные конструкции защитных преград. Прежде всего здесь следует исследовать возможности слоистых преград. В настоящее время существует большое количество технологий, позволяющих создать слоистый пакет из практически любых материалов с существенно различными свойствами. К ним можно отнести, в частности, технологии склеивания диффузионной сварки под давлением и сварку взрывом, плазменное или холодное газодинамическое напыление, магнитно-ультразвуковую наплавку, вакуумно-химическое осаждение, электронно-дуговую металлизацию и другие. Для конструкций, предназначенных к восприятию взрывных нагрузок, наиболее приемлемой, по-видимому, следует считать технологию сварки взрывом как наиболее дешевую и обеспечивающую прочное соединение практически любых металлов на больших площадях [3]–[5]. При этом возникает проблема анализа поведения и оценки эффективности таких конструкций с точки зрения их повреждаемости при воздействии нагрузок взрывного типа.

Ключевые слова: однородные и слоистые балки, модель идеального жестко-пластического тела, пределы текучести, предельный изгибающий момент, вес конструкции, остаточный прогиб, рациональный проект.

УДК: 539.375

© Немировский Ю. В., 2017
Немировский Юрий Владимирович
e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 15-01-00825, 17-41-210272).

Поступила 11.02.2017

Рассмотрим слоистую плиту из набора любых металлических материалов, расположенных симметрично относительно отсчетной (срединной) плоскости. Будем предполагать, что каждый из слоев является идеальным жестким пластическим изотопным или ортотропным материалом, подчиняющимся условию пластичности Мизеса – Хилла:

$$f_k(\sigma_{1k}, \sigma_{2k}, \sigma_{12k}) = a_{11k}\sigma_{1k}^2 + a_{12k}\sigma_{1k}\sigma_{2k} + a_{22k}\sigma_{2k}^2 + a_{13k}\sigma_{12k}^2 - \sigma_{0k}^2 = 0, \quad (1)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

и закону пластического течения:

$$\dot{\varepsilon}_{ik} = \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \sigma_{ik}}, \quad (i = 1, 2), \quad \dot{\varepsilon}_{12} = \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \sigma_{12k}}, \quad \lambda_k > 0. \quad (2)$$

Здесь $\sigma_{ik}, \sigma_{12k}$ – безразмерные напряжения (отнесённые к характерному по пределу текучести), $\dot{\varepsilon}_{ik}, \dot{\varepsilon}_{12k}$ – компоненты тензора скоростей деформаций; $a_{11k}, \dots, a_{13k}, \sigma_{0k}$ – постоянные. Точка обозначает частную производную по времени. Если слоистый пакет собран из металлов, то для него правомерно использовать гипотезы Кирхгофа – Лява, в соответствии с которыми

$$\dot{\varepsilon}_i = -z\dot{\kappa}_i, \quad \dot{\varepsilon}_{12} = -z\dot{\kappa}_{12}, \quad (i = 1, 2), \quad \kappa_i = \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}, \quad \kappa_{12} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (3)$$

где w, z – безразмерная прогиб и координата по нормали к пластине, x_i – безразмерные координаты в плоскости пластины, κ_i, κ_{12} – компоненты тензора кривизны и кручения плиты при деформации.

Выражения (3) с учетом (1) и (2) можно записать в виде

$$-z\dot{\kappa}_1 = \lambda_k (2a_{11k}\sigma_{1k} + a_{12k}\sigma_{2k}), \quad -z\dot{\kappa}_2 = \lambda_k (2a_{22k}\sigma_{2k} + a_{12k}\sigma_{1k}), \quad -z\dot{\kappa}_{12} = 2\lambda_k a_{13k}\sigma_{12k}.$$

Откуда получим

$$\sigma_{1k} = -\frac{z}{\lambda_k} (2b_{11k}\dot{\kappa}_1 - b_{12k}\dot{\kappa}_2), \quad \sigma_{2k} = -\frac{z}{\lambda_k} (2b_{22k}\dot{\kappa}_2 - b_{12k}\dot{\kappa}_1), \quad \sigma_{12k} = -\frac{z}{\lambda_k} b_{13k}\dot{\kappa}_{12} \quad (4)$$

$$b_{11k} = \frac{a_{22k}}{4a_{11k}a_{22k} - a_{12k}^2}, \quad b_{22k} = \frac{a_{11k}}{4a_{11k}a_{22k} - a_{12k}^2}, \quad b_{12k} = \frac{a_{12k}}{4a_{11k}a_{22k} - a_{12k}^2}, \quad b_{13k} = \frac{1}{a_{13k}}.$$

Подставляем выражения (4) в (1), получим

$$\lambda_k = \frac{|z| \Psi_k^{1/2}}{\sigma_{0k}}, \quad \Psi_k = b_{11k}\dot{\kappa}_1^2 + b_{22k}\dot{\kappa}_2^2 - b_{12k}\dot{\kappa}_1\dot{\kappa}_2 + b_{13k}\dot{\kappa}_{12}^2. \quad (5)$$

В соответствии с принципом виртуальных мощностей для рассматриваемой плиты имеем уравнение

$$\iiint_v (\sigma_1 \dot{\varepsilon}_1 + \sigma_2 \dot{\varepsilon}_2 + 2\sigma_{12} \dot{\varepsilon}_{12}) dv = \iint_s P \dot{w} ds - \iiint_v \rho \dot{w} dv,$$

которое с учетом выражений (3)–(6) примет вид:

$$4 \iint_s \left[\sum_{k=1}^n \sigma_{0k} \Psi_k^{1/2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) \right] ds = \iint_s \left[P - 2\ddot{w} \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k - h_{k-1}) \right] \dot{w} ds + \int_L \frac{(Q_n \dot{w} + M_n \frac{\partial \dot{w}}{\partial n}) dl}{L}. \quad (6)$$

Здесь P , h_k , ρ_k – безразмерные давления, координаты раздела слоев ($h_0 = 0$) и плотности материалов слоев. M_n , Q_n – внешние изгибающий момент и перерезывающая сила на контуре.

Для защемленной эллиптической плиты скорость прогиба можно представить в виде:

$$\dot{w} = \dot{A}(t) \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} \right)^2, \quad (7)$$

где a_1 , a_2 – безразмерные полуоси эллипса. Подставляя (8) в (7), в случае равномерно распределенного давления получим уравнение для функции $A(t)$.

$$\ddot{A} = P(t) d_1 - d_2 \quad (8)$$

$$d_1 = \frac{\iint_s \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} \right)^2 ds}{2 \iint_s \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k - h_{k-1}) ds}, \quad d_2 = \frac{2 \iint_s \sum_{k=1}^n \sigma_{0k} \bar{\Psi}_k^{1/2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) ds}{2 \iint_s \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k - h_{k-1}) ds} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_k &= b_{11k} \bar{\kappa}_1^2 + b_{22k} \bar{\kappa}_2 - b_{12k} \bar{\kappa}_1 \bar{\kappa}_2 + b_{12k} \bar{\kappa}_{12}^2, \\ \bar{\kappa}_1 &= \frac{4}{a_1^2} \left(\frac{3x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - 1 \right), \quad \bar{\kappa}_2 = \frac{4}{a_2^2} \left(\frac{3x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_1^2}{a_1^2} - 1 \right) \\ \bar{\kappa}_{12} &= \frac{8x_1 x_2}{a_1^2 a_2^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Решение уравнения (9) при нулевых начальных условиях $A(0) = \dot{A}(0) = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} A(t) &= d_1 J(t) - \frac{1}{2} d_2 t^2, \quad J(t) = \int_0^t \left(\int_0^\tau P(\tau) d\tau \right) dt, \\ \dot{A}(t) &= d_1 I(t) - d_2 t, \quad I(t) = \int_0^t P(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

Время остановки t^* определяется из условия $\dot{A}(t^*) = 0$ или $d_1 I(t^*) - d_2 t^* = 0$, и амплитуда остаточного прогиба будет равна

$$A_* = A(t_*) = d_1 J(t^*) - \frac{1}{2} d_2 t^{*2}. \quad (12)$$

Решение для круглых защитных пластин ($a_1 = a_2 = a$) в случае осесимметрического нагружения и защемления будет иметь тот же вид (14), если вместо выражений (10), (11) использовать выражения

$$d_1 = \frac{\int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 r dr}{2 \int_0^a \left[\sum_{k=1}^n \rho_k (h_k - h_{k-1}) \right] r dr}, \quad d_2 = \frac{2 \int_0^a \sum_k \bar{\Psi}_k^{1/2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) r dr}{\int_0^a \left[\sum_k \rho_k (h_k - h_{k-1}) \right] r dr} \quad (13)$$

$$\bar{\Psi}_k^{1/2} = b_{11k} \bar{\kappa}_1^2 + b_{22k} \bar{\kappa}_2^2 - b_{12k} \bar{\kappa}_1 \bar{\kappa}_2, \quad \bar{\kappa}_1 = \frac{4}{a^2} \left(1 - 3 \frac{r^2}{a^2}\right), \quad \bar{\kappa}_2 = \frac{4}{a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right). \quad (14)$$

Для шарнирно-опертых пластин получим аналогичное решение, если вместо (16) использовать выражение

$$\bar{\kappa}_1 = \frac{4}{11a^2} \left(9 \frac{r^2}{a^2} - 7\right), \quad \bar{\kappa}_2 = \frac{4}{11a^2} \left(3 \frac{r^2}{a^2} - 7\right). \quad (15)$$

Решение (14) можно использовать также в случае создания конструкции с профилированными слоями. Это позволяет поставить и решить задачу о создании оптимальных проектов для эллиптических и круглых слоистых при воздействии нагрузок взрывного типа. Для этого необходимо распределить материалы в конструкции таким образом, чтобы при сохранении общей массы конструкции

$$2 \iint_s \left[\sum_{k=1}^n \rho_k (h_k - h_{k-1}) \right] ds = M_0 = const \quad (16)$$

было достигнуто минимальное значение амплитуды остаточного прогиба A^* или максимальное значение предельной нагрузки $P^* = \frac{d_2}{d_1}$. Соответствующая задача является классической задачей вариационного исчисления, и решение ее здесь обсуждать не будем. Для прямоугольного импульса с амплитудой P_0 и временем действия t_0 время остановки и амплитуда остаточного прогиба определяются выражениями

$$t_* = \frac{P_0 t_0}{P^*}, \quad A_* = \frac{P_0 t_0^2 d_1}{2} \left(\frac{P_0}{P^*} - 1 \right), \quad (P_0 \geq P^*). \quad (17)$$

Если толщины слоев ($\delta_k = h_k - h_{k-1}$) постоянны, то предельная нагрузка P^* определяется равенством

$$P^* = \frac{1}{C} \left\{ \frac{\sigma_{01} \alpha_1}{4\rho_1^2} \left(M_0 - 2 \sum_{j=2}^n \rho_j \delta_j \right)^2 + \left[\frac{1}{\rho_1} M_0 - 2 \sum_{j=2}^n \rho_j \delta_j + 2 \sum_{s=2}^{j-1} \sigma_s \right] \sum_{j=2}^n \sigma_{0j} \alpha_j \delta_j^2 \right\},$$

$$C = \frac{1}{2s} \iint_s \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} \right) ds, \quad \alpha_k = \frac{2}{s} \iint_s \bar{\Psi}_k^{1/2} ds, \quad (k = 1, \dots, n),$$

где S – площадь пластины.

Для трехслойной пластины из двух материалов

$$P^* = \frac{\sigma_{01} \alpha_1}{4\rho_1^2} (M_0 - 2\rho_2 \delta_2)^2 + \frac{\sigma_{02} \alpha_2}{\rho_1} (M_0 - 2\rho_2 \delta_2) \delta_2 + \sigma_{02} \alpha_2 \delta_2^2, \quad \delta_1 = \frac{M_0}{2\rho_1} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \delta_2. \quad (18)$$

Максимальное значение P^{**} предельной нагрузки будет достигнуто, если в (18) толщина нагружаемого слоя будет равна

$$\delta_2^* = \frac{M_0 (\sigma_{02} \alpha_2 \rho_1 - \sigma_{01} \alpha_1 \rho_2)}{[\sigma_{02} \alpha_2 \rho_1 (\rho_1 - 2\rho_2) + \sigma_{01} \alpha_1 \rho_2^2]}, \quad (19)$$

причем материалы должны быть составлены так, чтобы числитель и знаменатель в (19) были отрицательными. В этом случае, как следует из (17), амплитуда остаточного прогиба будет минимальной.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мазалов В. Н., Немировский Ю. В. Динамика тонкостенных пластических конструкций // Проблемы динамики упруго-пластических сред. Серия: Механика. Новое в зарубежной науке. 1975. Вып. 5. С. 155–247.
- [2] Комаров К. Л., Немировский Ю. В. Динамика жестко-пластических элементов конструкций. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1984. 234 с.
- [3] Дерibas А. А. Физика упрочнения и сварки взрывом. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1972. 188 с.
- [4] Яковлев И. В., Сиротенко Л. Д., Ханов А. М. Сварка взрывом армированных композиционных материалов. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1991. 119 с.
- [5] Fleck J., Laber A., Leonard R. Explosive welding of composite materials // J. Compos. Mater. 1969. Vol. 3, № 4. P. 669–701.

Yu. V. Nemirovskii

DYNAMIC BEND OF ELLIPTIC AND ROUND COMPOSITE BOARDS FROM RIGID PLASTIC MATERIAL

S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia

Abstract. For an assessment of effectiveness of flat barriers at influence of loadings usually dependence of parameters of their residual damageability on amplitude is investigated or shockwave impulse. In relation to the homogeneous isotropic plates such decisions are under construction on the basis of model of ideal rigid and plastic bodies, show sufficient effectiveness of results and quite satisfactory coincidence to experiments. Solution of many tasks and review the received results for the homogeneous beams and plates it is possible to find in [1], [2]. In many fields of the modern technique the existing strict conditions to cannot be provided to maintainability of a design at use of the homogeneous materials there are also serious hopes on use of composite designs. It is clear, that on this way can be efficient designs of protective barriers are created. First of all here it is necessary to investigate possibilities of stratified barriers. Now there is a large amount of the technologies allowing to create a stratified package from almost any materials with significantly various properties. To them it is possible to refer, in particular, technologies of pasting of diffusion welding under pressure and welding by explosion, plasma or cold gasdynamic dusting, magnetic and ultrasonic naplavka, vacuum and chemical deposition, electronic and arc metallization and others. For the designs intended to to perception of explosive loadings, the most acceptable, apparently, follows to consider a weld procedure explosion as the cheapest and providing strong connection practically any metals on larger squares [3]–[5]. At it there is a problem of the analysis of behavior and an assessment of effectiveness of such designs from the point of view of their damageability at influence of loadings explosive type.

Keywords: the homogeneous and stratified beams, model of an ideal rigid and plastic body, yield points, the limiting moment of deflection, structural weight, residual deflection, rational project.

REFERENCES

- [1] Mazalov V. N., Nemirovskij Ju. V. Dinamika tonkostennyh plasticheskikh konstrukcij // Problemy dinamiki uprugoplasticheskikh sred. Serija: Mehanika. Novoe v zarubezhnoj nauke. 1975. Vyp. 5. S. 155–247. (in Russian).
- [2] Komarov K. L., Nemirovskij Ju. V. Dinamika zhestko-plasticheskikh jelementov konstrukcij. Novosibirsk: Nauka, Sibirskoe otdelenie, 1984. 234 s. (in Russian).
- [3] Deribas A. A. Fizika uprochnenija i svarki vzryvom. Novosibirsk: Nauka, Sibirskoe otdelenie, 1972. 188 s. (in Russian).
- [4] Jakovlev I. V., Sirotenko L. D., Hanov A. M. Svarka vzryvom armirovannyh kompozicionnyh materialov. Novosibirsk: Nauka, Sibirskoe otdelenie, 1991. 119 s. (in Russian).
- [5] Fleck J., Laber A., Leonard R. Explosive welding of composite materials // J. Compos. Mater. 1969. Vol. 3, № 4. P. 669–701.

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Associate at Khristianovich Institute of theoretical and applied mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia.

В. Н. Орлов^{1,2}, А. Ю. Иваницкий³, Н. В. Кудряшова³

**ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА
НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО
ПОРЯДКА С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ ТРЕТЬЕЙ
СТЕПЕНИ В ОКРЕСТНОСТИ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ**

¹ Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,
г. Чебоксары, Россия

² Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, г. Ялта, Россия

³ Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Основной задачей в теории дифференциальных уравнений является теорема существования и единственности решения. Особенность нелинейных дифференциальных уравнений связана с наличием подвижных особых точек, которые относят такие уравнения к классу в общем случае не разрешимых в квадратурах. Следует отметить, что для нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками отсутствует аналог классических теорем существования – теоремы Коши, теоремы Пикара. В частности, доказательство теоремы Коши основано на методе мажорант, который применяется к правой части рассматриваемого уравнения. Такой подход в доказательстве ограничивает возможность использования этой теоремы для построения аналитического приближенного решения. В данной работе дается доказательство теоремы существования и единственности решения рассматриваемого класса нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки, применяемое к искомому решению. Такой подход позволяет воспользоваться теоремой существования для построения аналитического приближенного решения.

© Орлов В. Н., Иваницкий А. Ю., Кудряшова Н. В., 2017

Орлов Виктор Николаевич

e-mail: orlowvn@rambler.ru, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математики, теории и методики обучения математике ГПА (филиал) “КФУ им. В. И. Вернадского” (г. Ялта); профессор кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Иваницкий Александр Юрьевич

e-mail: phiz-matolek@mail.ru, кандидат физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Кудряшова Наталья Валерьевна

e-mail: natakudry94@mail.ru, магистр 1 курса факультета прикладной математики, физики и информационных технологий, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 12.01.2017

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, задача Коши, метод мажорант, окрестность подвижной особой точки, аналитическое приближенное решение.

УДК: 517.95:515.172.22

Результаты исследования и их обсуждение. В данной работе представлено развитие идеи метода мажорант не к правой части дифференциального уравнения [8], [9], а к решению самого дифференциального уравнения, предложенного в работах [1]–[7].

Такой подход в доказательстве теоремы существования позволяет решить все задачи, связанные с аналитическим приближенным методом решения нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки.

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$y''' = a_1(x)y^3 + a_2(x)y^2 + a_3(x)y + a_4(x), \quad (1)$$

которое с помощью замены переменной

$$y = u(x)w(x) + v(x) \quad (2)$$

приводится к нормальной форме

$$y''' = y^3 + r(x) \quad (3)$$

при условиях

$$\begin{cases} u(x) = C; \\ v(x) = -\frac{C^2 a_2(x)}{3}; \\ a_1(x) = \frac{1}{C^2}; \\ a_3(x) = \frac{C^2}{3} a_2^2(x); \\ r(x) = -\frac{C^4 a_2(x)}{27} - \frac{C^2}{3} a_2'''(x) + a_4(x). \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрим задачу Коши

$$y''' = y^3 + r(x) \quad (5)$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ y''(x_0) = y_2. \end{cases} \quad (6)$$

Теорема 1. Пусть x^* – подвижная особая точка решения задачи Коши (5)–(6),

$$r(x) \in C^\infty$$

в области

$$|x - x^*| < \rho_1, \quad (7)$$

где $0 < \rho_1 = \text{const}$; $\exists M_1 : \frac{|r^n(x^*)|}{n!} \leq M_1$, где $n=0,1,2,\dots$, $M_1 = \text{const}$, тогда существует единственное решение задачи Коши (5)–(6), представимое в виде

$$y(x) = (x - x^*)^{-3/2} \sum_0^{\infty} C_n (x - x^*)^n \quad (8)$$

в области $|x - x^*| < \rho_2$, где $\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt[5]{M+1}} \right\}$, $M = \sup_n \left\{ \frac{|r^n(x^*)|}{n!} \right\}$, $n=0,1,2,\dots$

Доказательство. Учитывая структуру решения уравнения (5) в окрестности подвижной особой точки в общем случае

$$y(x) = (x - x^*)^\rho \sum_0^{\infty} C_n (x - x^*)^n, \quad C_0 \neq 0$$

и представляя функцию $r(x)$ в виде ряда

$$r(x) = \sum_0^{\infty} A_n (x - x^*)^n,$$

из уравнения (5) получаем

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} C_n (x - x^*)^{n+\rho-3} (n+\rho)(n+\rho-1)(n+\rho-2) = \\ = (x - x^*)^{3\rho} \sum_0^{\infty} C_n^{**} (x - x^*)^n + \sum_0^{\infty} A_n (x - x^*)^n, \end{aligned}$$

где $C_n^{**} = \sum_0^n C_i C_{n-i}^*$, $C_n^* = \sum_0^n C_i C_{n-i}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Из последнего соотношения следует необходимость выполнения следующих условий:

$$\begin{aligned} n + \rho - 3 = n + 3\rho, \\ (2n - 3)(2n - 5)(2n - 7)C_n = 8(C_n^{**} + A_{n-5}). \end{aligned}$$

Первое условие позволяет определить $\rho = -\frac{3}{2}$, а также характер подвижной особой точки, а второе представляет рекуррентное соотношение, позволяющее однозначно определить все коэффициенты C_n :

$$\begin{aligned} C_0 = -\frac{105}{8}, C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = 0, C_4 = 0, C_5 = \frac{8A_0}{315} \\ C_6 = \frac{8A_1}{525}, C_7 = \frac{8A_2}{903}, C_8 = \frac{8A_3}{1497}, C_9 = \frac{8A_4}{2355}, \dots \end{aligned}$$

В силу однозначности определения коэффициентов C_n следует единственность полученного формального решения.

Методом математической индукции докажем справедливость следующих оценок:

$$\begin{aligned} |C_{5n}| &\leq \frac{8}{(10n-3)(10n-5)(10n-7)+210} (M+1)^n = V_{5n}, \\ |C_{5n+1}| &\leq \frac{8}{(10n-1)(10n-3)(10n-5)+210} (M+1)^n = V_{5n+1}, \end{aligned}$$

$$|C_{5n+2}| \leq \frac{8}{(10n+1)(10n-1)(10n-3)+210}(M+1)^n = V_{5n+2},$$

$$|C_{5n+3}| \leq \frac{8}{(10n+3)(10n+1)(10n-1)+210}(M+1)^n = V_{5n+3},$$

$$|C_{5n+4}| \leq \frac{8}{(10n+5)(10n+3)(10n+1)+210}(M+1)^n = V_{5n+4},$$

где

$$M = \sup_n \left\{ \frac{|r^n(x^*)|}{n!} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ограничимся случаем оценки коэффициентов

$$C_{5n} \quad |C_{5n+5}| \leq \frac{8}{(10n+7)(10n+5)(10n+3)+210}(M+1)^{n+1}. \quad (9)$$

Из рекуррентного соотношения, полученного выше, следует

$$(10n+7)(10n+5)(10n+3)C_{5n+5} = C_{5n+5}^{**} + A_{5n}. \quad (10)$$

Или

$$(10n+7)(10n+5)(10n+3)C_{5n+5} = \sum_1^{5n+5} C_i \sum_1^{5n+5-i} C_i C_{5n+5-i-j} + A_{5n}. \quad (11)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |C_{5n+5}| &\leq \frac{8}{(10n+7)(10n+5)(10n+3)+210} \left(\sum_1^n \frac{(M+1)^i}{(5i-3)(5i-5)(5i-7)+210} \right) \times \\ &\times \sum_1^{n-i} \frac{64(M+1)^j}{((5(n-i-j)-3)(5(n-i-j)-5)(5(n-i-j)-7)+210)} \times \\ &\times \frac{(M+1)^{n-i-j}}{(5(n-i-j)+7)(5(n-i-j)+5)(5(n-i-j)+3)+210} + M \leq \\ &\leq \frac{8}{(10n+7)(10n+5)(10n+3)+210} (M+1)^n \cdot \sum_1^n \frac{8}{(5i-3)(5i-5)(5i-7)+210} \times \\ &\times \sum_1^{n-i} \frac{8}{(5(n-i-j)-3)(5(n-i-j)-5)(5(n-i-j)-7)+210} \times \\ &\times \frac{8}{(5(n-i-j)+7)(5(n-i-j)+5)(5(n-i-j)+3)+210} + M) \leq \\ &\leq \frac{8(M+1)^{n+1}}{(10n+7)(10n+5)(10n+3)+210}. \quad (12) \end{aligned}$$

Аналогичным образом подтверждаются остальные оценки.

Рассмотрим ряд

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} V_n(x-x^*)^n &= \sum_{k=1}^{\infty} V_{5k}(x-x^*)^{5k} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{5k+1}(x-x^*)^{5k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{5k+2}(x-x^*)^{5k+2} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} V_{5k+3}(x-x^*)^{5k+3} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{5k+4}(x-x^*)^{5k+4}, \end{aligned}$$

который является мажорирующим для ряда (5) в силу указанных и доказанных выше гипотез.

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} V_n(x-x^*)^n &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(10k-3)(10k-5)(10k-7)+210} (M+1)^k (x-x^*)^{5k} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(10k-1)(10k-3)(10k-5)+210} (M+1)^k (x-x^*)^{5k+1} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(10k+1)(10k-1)(10k-3)+210} (M+1)^k (x-x^*)^{5k+2} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(10k+3)(10k+1)(10k-1)+210} (M+1)^k (x-x^*)^{5k+3} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(10k+5)(10k+3)(10k+1)+210} (M+1)^k (x-x^*)^{5k+4}. \end{aligned}$$

Для первого ряда, находящегося в правой части последнего равенства, на основании признака Даламбера

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(M+1)^{n+1} (x-x^*)^{5n+5} ((10n-1)(10n-3)(10n-5)+210)}{((10n-3)(10n-5)(10n-7)+210)(M+1)^n (x-x^*)^{5n}} \right| = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |(M+1)(x-x^*)^5| \leq 1, \end{aligned}$$

устанавливаем область сходимости

$$|x-x^*| \leq \frac{1}{\sqrt[5]{M+1}}. \quad (13)$$

Аналогично получаем область (13) и для остальных рядов.

Следовательно, ряд (5) сходится в области (13).

Положим $\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt[5]{M+1}} \right\}$, получаем сходимость правильной части ряда (5) в области $|x-x^*| < \rho_2$, что и завершает доказательство теоремы.

Доказанная теорема 1 позволяет построить аналитическое приближенное решение

$$y_N(x) = (x-x^*)^{-3/2} \sum_0^N C_n (x-x^*)^n. \quad (14)$$

Теорема 2. Пусть выполняются пункты 2 и 3 теоремы 1 и x^* является подвижной особой точкой решения задачи (5)–(6), тогда для аналитического приближенного решения (13) в окрестности подвижной особой точки x^* задачи (5)–(6) в области

$$|x - x^*| < \rho_2$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta y_N(x) = |y(x) - y_N(x)| \leq \Delta, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \leq & \frac{8(M+1)^{\frac{N+1}{5}} \cdot |x - x^*|^{N+1}}{1 - (M+1)|x - x^*|^5} \\ & \left(\frac{1}{(2N-1)(2N-3)(2N-5) + 210} + \frac{|x - x^*|}{(2N+1)(2N-1)(2N-3) + 210} + \right. \\ & + \frac{|x - x^*|^2}{(2N+3)(2N+1)(2N-1) + 210} + \frac{|x - x^*|^3}{(2N+5)(2N+3)(2N+1) + 210} + \\ & \left. + \frac{|x - x^*|^4}{(2N+7)(2N+5)(2N+3) + 210} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

в случае $N+1 = 5n$,

$$\begin{aligned} \Delta \leq & \frac{8(M+1)^{\frac{N}{5}} \cdot |x - x^*|^{N+1}}{1 - (M+1)|x - x^*|^5} \left(\frac{1}{(2N-1)(2N-3)(2N-5) + 210} + \right. \\ & + \frac{|x - x^*|}{(2N+1)(2N-1)(2N-3) + 210} + \\ & + \frac{|x - x^*|^2}{(2N+3)(2N+1)(2N-1) + 210} + \frac{|x - x^*|^3}{(2N+5)(2N+3)(2N+1) + 210} \\ & \left. + \frac{|x - x^*|^4}{(2N+7)(2N+5)(2N+3) + 210} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

в случае $N+1 = 5n+1$,

$$\begin{aligned} \Delta \leq & \frac{8(M+1)^{\frac{N-1}{5}} \cdot |x - x^*|^{N+1}}{1 - (M+1)|x - x^*|^5} \left(\frac{1}{(2N-1)(2N-3)(2N-5) + 210} + \right. \\ & + \frac{|x - x^*|}{(2N+1)(2N-1)(2N-3) + 210} + \\ & + \frac{|x - x^*|^2}{(2N+3)(2N+1)(2N-1) + 210} + \frac{|x - x^*|^3}{(2N+5)(2N+3)(2N+1) + 210} + \\ & \left. + \frac{|x - x^*|^4}{(2N+7)(2N+5)(2N+3) + 210} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

в случае $N+1 = 5n+2$,

$$\begin{aligned} \Delta \leq & \frac{8(M+1)^{\frac{N-2}{5}} \cdot |x-x^*|^{N+1}}{1-(M+1)|x-x^*|^5} \left(\frac{1}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)+210} + \right. \\ & \frac{|x-x^*|}{(2N+1)(2N-1)(2N-3)+210} + \\ & \left. + \frac{|x-x^*|^2}{(2N+3)(2N+1)(2N-1)+210} + \frac{|x-x^*|^3}{(2N+5)(2N+3)(2N+1)+210} + \right) \\ & + \frac{|x-x^*|^4}{(2N+7)(2N+5)(2N+3)+210} \end{aligned} \quad (19)$$

в случае $N+1=5n+3$,

$$\begin{aligned} \Delta \leq & \frac{8(M+1)^{\frac{N-3}{5}} \cdot |x-x^*|^{N+1}}{1-(M+1)|x-x^*|^5} \left(\frac{1}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)+210} + \right. \\ & \frac{|x-x^*|}{(2N+1)(2N-1)(2N-3)+210} + \\ & \left. + \frac{|x-x^*|^2}{(2N+3)(2N+1)(2N-1)+210} + \frac{|x-x^*|^3}{(2N+5)(2N+3)(2N+1)+210} + \right. \\ & \left. + \frac{|x-x^*|^4}{(2N+7)(2N+5)(2N+3)+210} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

в случае $N+1=5n+4$, при этом $\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt[5]{M+1}} \right\}$, $0 < \rho_1 = \text{const}$, $M = \max \left\{ |y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup_n \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!} \right\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Доказательство. Докажем теорему для случая $N+1=5n$. Имеем

$$\begin{aligned} |y(x) - y_N(x)| &= \left| \sum_0^\infty C_n(x-x_0)^n - \sum_0^N C_n(x-x_0)^n \right| = \left| \sum_{n=N+1}^\infty C_n(x-x^*)^n \right| = \\ &= |C_{N+1}(x-x^*)^{N+1} + C_{N+2}(x-x^*)^{N+2} + \dots + C_{N+k}(x-x^*)^{N+k} + \dots| = \\ &= |C_{5n}(x-x^*)^{5n} + C_{5n+1}(x-x^*)^{5n+1} + C_{5n+2}(x-x^*)^{5n+2} + \dots \\ &\quad + C_{5n+k-1}(x-x^*)^{5n+k-1} + \dots| \leq \\ &\leq |C_{5n}| \cdot |x-x^*|^{5n} + |C_{5n+1}| \cdot |x-x^*|^{5n+1} + |C_{5n+2}| \cdot |x-x^*|^{5n+2} + \dots \\ &\quad + |C_{5n+k-1}| \cdot |x-x^*|^{5n+k-1} + \dots \leq \\ &\leq \frac{8(M+1)^n \cdot |x-x^*|^{5n}}{(10n-3)(10n-5)(10n-7)+210} + \frac{8(M+1)^n \cdot |x-x^*|^{5n+1}}{(10n-1)(10n-3)(10n-5)+210} + \\ &\quad + \frac{8(M+1)^n \cdot |x-x^*|^{5n+2}}{(10n+1)(10n-1)(10n-3)+210} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{8(M+1)^n \cdot |x-x^*|^{5n+3}}{(10n+3)(10n+1)(10n-1)+210} + \frac{8(M+1)^n \cdot |x-x^*|^{5n+4}}{(10n+5)(10n+3)(10n+1)+210} + \\
& + \frac{8(M+1)^{n+1} \cdot |x-x^*|^{5n+5}}{(10n+7)(10n+5)(10n+3)+210} + \frac{8(M+1)^{n+1} \cdot |x-x^*|^{5n+6}}{(10n+9)(10n+7)(10n+5)+210} + \\
& \quad + \frac{8(M+1)^{n+1} \cdot |x-x^*|^{5n+7}}{(10n+11)(10n+9)(10n+7)+210} + \\
& + \frac{8(M+1)^{n+1} \cdot |x-x^*|^{5n+8}}{(10n+13)(10n+11)(10n+9)+210} + \frac{8(M+1)^{n+1} \cdot |x-x^*|^{5n+9}}{(10n+15)(10n+13)(10n+11)+210} + \\
& + \frac{8(M+1)^{n+2} \cdot |x-x^*|^{5n+10}}{(10n+17)(10n+15)(10n+13)+210} + \frac{8(M+1)^{n+2} \cdot |x-x^*|^{5n+11}}{(10n+19)(10n+17)(10n+15)+210} + \\
& \quad + \frac{8(M+1)^{n+2} \cdot |x-x^*|^{5n+12}}{(10n+21)(10n+19)(10n+17)+210} + \\
& + \frac{8(M+1)^{n+2} \cdot |x-x^*|^{5n+13}}{(10n+23)(10n+21)(10n+19)+210} + \frac{8(M+1)^{n+2} \cdot |x-x^*|^{5n+14}}{(10n+25)(10n+23)(10n+21)+210} + \dots \leq \\
& \leq \frac{8(M+1)^n \cdot |x-x^*|^{5n}}{(10n-3)(10n-5)(10n-7)+210} \\
& \left(1 + (M+1)|x-x^*|^5 + (M+1)^2|x-x^*|^{10} + (M+1)^3|x-x^*|^{15} + \dots \right) + \\
& \quad + \frac{8(M+1)^n \cdot |x-x^*|^{5n+1}}{(10n-1)(10n-3)(10n-5)+210} \\
& \left(1 + (M+1)|x-x^*|^5 + (M+1)^2|x-x^*|^{10} + (M+1)^3|x-x^*|^{15} + \dots \right) + \\
& \quad + \frac{8(M+1)^n \cdot |x-x^*|^{5n+2}}{(10n+1)(10n-1)(10n-3)+210} \\
& \left(1 + (M+1)|x-x^*|^5 + (M+1)^2|x-x^*|^{10} + (M+1)^3|x-x^*|^{15} + \dots \right) + \\
& \quad + \frac{8(M+1)^n \cdot |x-x^*|^{5n+3}}{(10n+3)(10n+1)(10n-1)+210} \\
& \left(1 + (M+1)|x-x^*|^5 + (M+1)^2|x-x^*|^{10} + (M+1)^3|x-x^*|^{15} + \dots \right) + \\
& \quad + \frac{8(M+1)^n \cdot |x-x^*|^{5n+4}}{(10n+5)(10n+3)(10n+1)+210} \\
& \left(1 + (M+1)|x-x^*|^5 + (M+1)^2|x-x^*|^{10} + (M+1)^3|x-x^*|^{15} + \dots \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8(M+1)^n \cdot |x-x^*|^{5n}}{1-(M+1)|x-x^*|^5} \\
&\left(\frac{1}{(10n-3)(10n-5)(10n-7)+210} + \frac{|x-x^*|}{(10n-1)(10n-3)(10n-5)+210} + \right. \\
&+ \frac{|x-x^*|^2}{(10n+1)(10n-1)(10n-3)+210} + \frac{|x-x^*|^3}{(10n+3)(10n+1)(10n-1)+210} + \\
&\left. + \frac{|x-x^*|^4}{(10n+5)(10n+3)(10n+1)+210} \right) = \\
&= \frac{8(M+1)^{\frac{N+1}{5}} \cdot |x-x^*|^{N+1}}{1-(M+1)|x-x^*|^5} \left(\frac{1}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)+210} + \right. \\
&+ \frac{|x-x^*|}{(2N+1)(2N-1)(2N-3)+210} + \\
&+ \frac{|x-x^*|^2}{(2N+3)(2N+1)(2N-1)+210} + \frac{|x-x^*|^3}{(2N+5)(2N+3)(2N+1)+210} + \\
&\left. + \frac{|x-x^*|^4}{(2N+7)(2N+5)(2N+3)+210} \right).
\end{aligned}$$

В итоге получаем оценку погрешности (15).

Для остальных вариантов $N+1 = 5n+1$, $N+1 = 5n+2$, $N+1 = 5n+3$, $N+1 = 5n+4$, получаем оценки погрешности (16)–(20) соответственно, при этом $\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt[5]{M+1}} \right\}$, $0 < \rho_1 = \text{const}$, $M = \max \left\{ |y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup_n \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!} \right\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Вывод. Доказанная теорема 1 позволяет получить оценки для коэффициентов разложения решения в ряд, а теорема 2 позволяет в дальнейшем построить аналитическое приближенное решение в окрестности подвижной особой точки и получить априорную оценку погрешности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Орлов В. Н., Лукашевич Н. А. Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 10. С. 1829–1832.

[2] Орлов В. Н., Лукашевич Н. А., Самодуров А. А. Построение приближенного решения в окрестности подвижной особой точки для второго уравнения Пенлеве // Вестник БГУ. Серия 1: Физика, математика, информатика. Минск, 2002. С. 79–85.

[3] Орлов В. Н. Критерии существования подвижных особых точек решений второго уравнения Пенлеве // Известия Тул. ГУ. Серия: Дифф. уравнения и прикладные задачи. Вып. 1. Тула: Изд-во Тул. ГУ, 2006. С. 26–29.

[4] Орлов В. Н. О приближенном решении первого уравнения Пенлеве // Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева. 2008. № 2. С. 42–46.

[5] Орлов В. Н. Исследование приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2009. № 4(35). С. 23–32.

[6] Редкозубов С. А., Орлов В. Н. Точные критерии существования подвижной особой точки дифференциального уравнения Абеля // Известия Института инженерной физики. 2009. № 4(14). С. 12–14.

[7] Орлов В. Н. Точные границы для приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(8). С. 399–405.

[8] Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1950. 436 с.

[9] Матвеев Н. М. Обыкновенные дифференциальные уравнения. СПб.: Специальная литература, 1996. 372 с.

V. N. Orlov^{1,2}, A. Yu. Ivanitsky³, N. V. Kudryashova³

THE EXISTENCE THEOREM FOR SOLVING A NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION OF THE THIRD ORDER WITH POLYNOMIAL RIGHT-HAND SIDE OF THE THIRD DEGREE IN THE VICINITY OF THE MOVABLE SINGULAR POINT

¹*Humanitarian and Pedagogical Academy (branch) of V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Yalta, Russia*

²*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia*

³*Chuvash State University I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia*

Abstract. The main task of the theory of differential equations is the existence and uniqueness of solutions. The peculiarity of nonlinear differential equations related to the presence of moving singular points, which relate to the class of such equations in the general case is not solvable in quadratures. It should be noted that the non-linear differential equations with moving singular points is not an analogue of the classical theorems of existence - Cauchy's theorem, Picard theorem. In particular, the proof of Cauchy's theorem is based on the method of majorant which is applied to the right side of the equation. This approach limits the ability to use the proof of this theorem to construct an analytical approximate solutions. In this paper we prove the existence and uniqueness of the solution of this class of nonlinear differential equations in the neighborhood of a singular point of the mobile used to the desired solution. This approach allows you to take advantage of the existence theorem for the construction of analytical approximate solutions.

Keywords: non-linear differential equation, Cauchy problem, majorants method, a mobile neighborhood of a singular point, the approximate analytic solution.

Orlov Viktor Nikolaevich, Dr. Sci. Phys. & Math., Theory and Methods of Teaching Mathematics, Humanitarian and Pedagogical Academy (branch) of V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Yalta, Russia; Professor at the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry of I. Y. Yakovlev Cheboksary State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

Ivanitskii Alexander Y., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Chuvash State University I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia.

Kudryashov Natalia V., Master 1st year, Chuvash State University I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia.

REFERENCES

- [1] Orlov V. N., Lukashevich N. A. Issledovanie priblizhennogo reshenija vtorogo uravnenija Penleve // *Differenc. uravnenija*. 1989. T. 25, № 10. S. 1829–1832. (in Russian).
- [2] Orlov V. N., Lukashevich N. A., Samodurov A. A. Postroenie priblizhennogo reshenija v okrestnosti podvizhnoj osoboj točki dlja vtorogo uravnenija Penleve // *Vestnik BGU. Ser. 1 Fizika, matematika, informatika*. Minsk, 2002. S. 79–85. (in Russian).
- [3] Orlov V. N. Kriterii sushhestvovaniya podvizhnyh osobyh toček reshenij vtorogo uravnenija Penleve // *Izvestija Tul. GU. Ser. Diff. uravnenija i prikladnye zadachi*. Vyp. 1. Tula: Izd-vo Tul. GU, 2006. S. 26–29. (in Russian).
- [4] Orlov V. N. O priblizhennom reshenii pervogo uravnenija Penleve // *Vestnik KGTU im. A. N. Tupoleva*. 2008. № 2. S. 42–46. (in Russian).
- [5] Orlov V. N. Issledovanie priblizhennogo reshenija differencial'nogo uravnenija Abelja v okrestnosti podvizhnoj osoboj točki // *Vestnik MGTU im. N. Je. Baumana. Ser. Estestvennye nauki*. 2009. № 4(35). S. 23–32. (in Russian).
- [6] Redkozubov S. A., Orlov V. N. Tochnye kriterii sushhestvovaniya podvizhnoj osoboj točki differencial'nogo uravnenija Abelja // *Izvestija instituta inzhenernoj fiziki*. 2009. № 4(14). S. 12–14. (in Russian).
- [7] Orlov V. N. Tochnye granicy dlja priblizhennogo reshenija differencial'nogo uravnenija Abelja v okrestnosti priblizhennogo znachenija podvizhnoj osoboj točki v kompleksnoj oblasti // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogičeskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija*. 2010. № 2(8). S. 399–405. (in Russian).
- [8] Golubev V. V. *Lekcii po analitičeskoj teorii differencial'nyh uravnenij*. M.: Gostehizdat, 1950. 436 s. (in Russian).
- [9] Matveev N. M. *Obyknovennye differencial'nye uravnenija*. Sankt-Peterburg: Special'naja literatura, 1996. 372 s. (in Russian).

А. К. Курбанмагомедов

ТРЕЩИНА НОРМАЛЬНОГО РАЗРЫВА В УПРУГОМ СЛОЕ

Московский политехнический университет, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе, опираясь на представление смещения и напряжения Папковича – Нейбера через 3 гармонические функции получены дуальные интегральные уравнения, решение которых сведено к отысканию одной геллеровой функции. Для нахождения этой функции получено сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши 1-го рода. Решение этого интегрального уравнения, предложенным методом В. Д. Кулиева, сведено к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода с непрерывным ядром. Определен основной параметр механики линейного разрушения коэффициента интенсивности напряжений и проведен численный анализ. Когда трещина нормального разрыва находится в бесконечной упругой среде показано, что оба компонента вектора смещения отличны от нуля. Этот результат говорит о том, что трещина представляет собой сплюснутый эллипс.

Ключевые слова: формула Папковича-Нейбера, гармонические функции, упругая среда, коэффициент интенсивности напряжений.

УДК: 593.3

§1. Постановка краевой задачи

Предполагается, что в однородной изотропной упругой полосе $|x| < \infty$, $-h \leq y \leq h$, имеется трещина нормального разрыва $y = 0$, $|x| \leq \ell$, где 2ℓ – длина трещины (рис. 1). На берегах трещины приложено некоторое нормальное напряжение $\sigma_y(x, 0)$ (касательное напряжение $\tau_{xy}(x, 0) = 0$). Поверхности полосы $y = \pm h$ ($|x| < \infty$) свободны от внешних нагрузок. На бесконечности ($|y| < h$, $x \rightarrow \pm\infty$) напряжения и смещения равны нулю.

Таким образом, приходим к следующей смешанной краевой задаче. Граничные условия

$$|x| < \infty, \quad \sigma_y(x, \pm h) = 0, \quad \tau_{xy}(x, \pm h) = 0; \quad (1.1)$$

$$|x| < \infty, \quad \tau_{xy}(x, \pm 0) = 0; \quad (1.2)$$

$$|x| < \ell, \quad \sigma_y(x, \pm 0) = -\sigma(x); \quad (1.3)$$

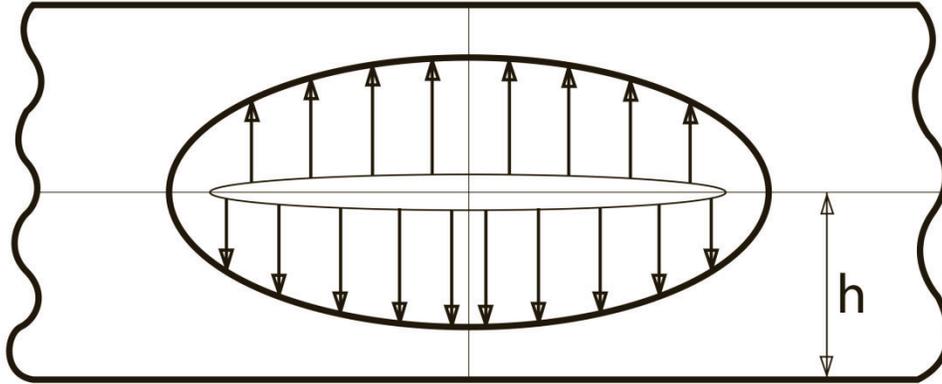


Рис. 1. К постановке краевой задачи

$$|x| > \ell, \quad |x| > l, \quad v(x, 0) = 0. \quad (1.4)$$

Условия на конце трещины [2]:

$$\lim_{x \rightarrow l-0} \left[\sqrt{2\pi(l-x)} \frac{\partial v(x, +0)}{\partial x} \right] = -\frac{(1-\nu)}{\mu} K_I, \quad (1.5)$$

или

$$\lim_{x \rightarrow l-0} \left[\sqrt{2\pi([x-l])} \sigma_y(x, +0) \right] = K_I \quad (1.6)$$

Условия на бесконечности:

$$|y| < h, \quad |x| \rightarrow \infty \quad \{\sigma_y, \sigma_x, \tau_{xy}\} \rightarrow 0, \quad (1.7)$$

$$(u, v) \rightarrow 0. \quad (1.8)$$

Поскольку одна из трех гармонических функций является произвольно, то положим $\Phi_1(x, y) \equiv 0$. Кроме того, предположим, что гармонические функции $\Phi_0(x, y)$ и $\Phi_2(x, y)$ также стремятся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$ и $|y| < h$. Здесь K_I – коэффициент интенсивности напряжений для трещин нормального разрыва, подлежащий определению, $\sigma(x) \in C[-\ell, \ell]$ – заданная четная функция, причем в дальнейшем будем считать, что $\sigma(x) \in H^\beta[-\ell, \ell]$, $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$, где $\sigma(x) \in H^\beta[-\ell, \ell]$ – гильдеровый класс функций с показателем β .

§2. Решение краевой задачи (1.1)–(1.8)

Рассматриваемая задача, очевидно, симметрична относительно плоскостей $x=0$ и $y=0$. Поэтому построим решение краевой задачи (1.1)–(1.8) в области $x \geq 0$, $0 \leq y \leq h$.

Гармонические функции $\Phi_0(x, y)$ и $\Phi_2(x, y)$ представим в виде

$$\Phi_0(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [A_0(\lambda) ch\lambda y + B_0(\lambda) sh\lambda y] \cos\lambda x d\lambda, \quad (2.1)$$

$$\Phi_2(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [A_2(\lambda) ch\lambda y + B_2(\lambda) sh\lambda y] \cos\lambda x d\lambda. \quad (2.2)$$

Здесь $A_j(\lambda)$ и $B_j(\lambda)$ ($j = 0, 2$) – неизвестные функции. Учитывая (2.1), (2.2) в уравнении зависимости компонент тензора напряжений в силу условий (1.1) и (1.2) имеем

$$B_2(\lambda) = \lambda A_0(\lambda) \frac{\text{sh}^2 \lambda h}{(1 - 2\nu) \text{sh}^2 \lambda h + \lambda^2 h^2}, \quad (2.3)$$

$$A_2(\lambda) = -\lambda A_0(\lambda) \frac{\text{sh} \lambda h \text{ch} \lambda h + \lambda h}{(1 - 2\nu) \text{sh}^2 \lambda h + \lambda^2 h^2}, \quad (2.4)$$

$$\lambda B_0(\lambda) = -\lambda A_0(\lambda) \frac{(1 - 2\nu) [\text{sh} \lambda h \text{ch} \lambda h + \lambda h]}{(1 - 2\nu) \text{sh}^2 \lambda h + \lambda^2 h^2}. \quad (2.5)$$

С помощью (2.15)–(3.3.19) и (3.3.3) получим

$$2\mu v(x, 0) = -2(1 - \nu) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \lambda A_0(\lambda) \frac{\text{sh} \lambda h \text{ch} \lambda h + \lambda h}{(1 - 2\nu) \text{sh}^2 \lambda h + \lambda^2 h^2} \cdot \cos \lambda x d\lambda. \quad (2.6)$$

Искомую функцию $\lambda A_0(\lambda)$ представим в виде

$$\lambda A_0(\lambda) = -\frac{(1 - 2\nu) \text{sh}^2 \lambda h + \lambda^2 h^2}{\text{sh} \lambda h \text{ch} \lambda h + \lambda^2 h^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\ell f(t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt. \quad (2.7)$$

Здесь $f(t)$ – новая неизвестная функция.

Если функции $f(x)$ и $\psi(x)$ связаны между собой формулами

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^l \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt, \quad f(t) = \frac{f_0(t)}{\sqrt{l^2 - t^2}};$$

$$f(x) = -\frac{d}{dx} \int_x^l \frac{t \cdot \psi(t)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt,$$

то в силу метода, предложенного в работе В.Д. Кулиева [1], сингулярные интегральные уравнения первого рода с ядром Коши сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода с непрерывным ядром и наоборот. Поэтому предположим, что $f(x) \in K_{1/2}[-l, l]$, т. е.

$$f(x) = \frac{f_0(x)}{\sqrt{l^2 - x^2}}, \quad f_0(-x) = -f_0(x), \quad f_0(x) \in H^\beta[0, l], \quad 1/2 < \beta \leq 1. \quad (2.8)$$

Действительно, из (2.6) и (2.7) найдем

$$\frac{\mu}{(1 - \nu)} v(x, 0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\ell f(t) \int_0^\infty \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda dt. \quad (2.9)$$

Здесь внутренний интеграл есть множитель (интеграл) Дирихле [2]:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda = \begin{cases} \pi/2, & \text{если } t > x, \\ \pi/4, & \text{если } t = x, \\ 0, & \text{если } t < x. \end{cases} \quad (2.10)$$

Из (2.10) и (2.9) следует, что условие (1.4) удовлетворяется автоматически.

Пусть теперь $0 < x < l$. Тогда из (2.9) в силу (2.10) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{(1-\nu)} v(x, 0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^{x-\varepsilon} f(t) \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda dt + \right. \\ &\left. + \frac{2}{\pi} \int_{x+\varepsilon}^{\ell} \int_0^{x-\varepsilon} f(t) \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda dt \right\} = \int_x^{\ell} f(t) dt, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial x} = -\frac{1-\nu}{\mu} f(x). \quad (2.11)$$

Учтя (2.11) и (1.5), в силу (2.9) получим

$$K_I = \sqrt{\pi \ell} \frac{f_0(\ell)}{\ell}. \quad (2.12)$$

Таким образом, решение рассматриваемой краевой задачи сводится к нахождению одной функции $f(x) \in K_{1/2}[0, l]$. При этом все условия краевой задачи выполнены, за исключением условия (2.3).

С помощью (2.3)–(2.5), (2.7), (2.1), (2.2) имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, +0) &= -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^{\ell} f(t) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 x h - \lambda^2 h^2}{\operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \lambda h} \cdot \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \sin \lambda x d\lambda dt = \\ &= -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \left\{ \int_0^{\ell} f(t) \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda t \sin \lambda x}{\lambda} d\lambda dt + \right. \\ &\left. + \int_0^{\ell} f(t) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda h - \lambda^2 h^2 - \operatorname{sh} x h \operatorname{ch} \lambda h - \lambda h}{\operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \lambda h} \cdot \frac{\sin \lambda t \sin \lambda x}{\lambda} d\lambda dt \right\}, \end{aligned}$$

откуда, заметив, что (см. [1], с. 59–62)

$$\frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^{\ell} f(t) \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda t \sin \lambda x}{\lambda} d\lambda dt = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^{\ell} \frac{f(t)}{t-x},$$

в силу (1.3) приходим к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши первого рода

$$\sigma(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{f(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) K(x, t) dt, \quad (2.13)$$

$$K(x, t) = - \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda h} \operatorname{sh} \lambda h + \lambda^2 h^2 + \lambda h}{\operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \lambda h} \sin \lambda t \cos \lambda x d\lambda. \quad (2.14)$$

Сингулярное интегральное уравнение (2.13) с ядром (2.14) с помощью метода, разработанного в [1], сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с непрерывным ядром

$$\frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sigma(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau = \Psi(x) - \int_0^{\ell} \Psi(t) K_{\Phi}(x, t) dt, \quad (2.15)$$

$$K_{\Phi}(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda t [e^{-\lambda h} \operatorname{sh} \lambda h + \lambda^2 h^2 + \lambda h]}{\operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \lambda h} J_0(\lambda t) J_0(\lambda x) d\lambda, \quad (2.16)$$

$$\Psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^{\ell} \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau^2 - x^2}}, \quad (2.17)$$

$$\Psi(-x) = \Psi(x), \quad f(\tau) \in K_{1/2}[-\ell, \ell], \quad (0 \leq x \leq \ell).$$

Здесь $J_0(u)$ – функция Бесселя нулевого порядка. Из (2.17) следует

$$\Psi(\ell) = \frac{f_0(\ell)}{\ell}. \quad (2.18)$$

Из (2.18) и (2.12) теперь получим

$$K_I = \sqrt{\pi \ell} \Psi(\ell). \quad (2.19)$$

Пусть $x = \ell \xi$, $t = \ell \eta$, $\lambda h = u$,

$$\frac{\Psi(\ell \xi)}{\sigma_0} = \Psi(\xi), \quad \frac{\Psi(\ell \eta)}{\sigma_0} = \Psi(\eta).$$

$$\sigma(\ell, v) = \sigma_0 \gamma_0(v), \quad \sigma_0 = \text{const} > 0,$$

причем $\gamma_0(v) \in C[0, 1]$, и $\gamma_0(v) \in H^{\beta}[0, 1]$. Тогда из (2.15) и (2.16) имеем

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\xi} \frac{\gamma_0(v)}{\sqrt{\xi^2 - v^2}} dv = \Psi(\xi) - \int_0^1 \Psi(t) K_0(\xi, t) dt, \quad (2.20)$$

$$K_0(\xi, t) = 2 \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 \int_0^{\infty} \frac{\eta e^{-2\eta} [1 - e^{-2\eta} + 2\eta(\eta + 1)]}{1 - e^{-4\eta} + 2\eta e^{-2\eta}} \times J_0\left(\frac{\ell}{h} \eta t\right) J_0\left(\frac{\ell}{h} \eta \xi\right) d\eta,$$

$$(0 \leq \xi \leq 1). \quad (2.21)$$

При этом коэффициент интенсивности напряжений K_I определяется формулой

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi \ell} \Psi \left(1, \frac{\ell}{h} \right). \quad (2.22)$$

Здесь $\Psi \left(1, \frac{\ell}{h} \right) = \Psi(\xi, \ell/h) |_{\xi=1}$.

Пусть $\gamma_0(v) = 1$. Тогда из (2.20), (2.21) и (2.22) имеем

$$\Psi(\xi) - \int_0^1 \Psi(t) K_0(\xi, t) dt = 1, \quad (2.23)$$

$$K_0(\xi, t) = 2 \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 \int_0^\infty \frac{ie^{-2i} [1 - e^{-2i} + 2i(i+1)]}{1 - e^{-4i} + 2ie^{-2i}} \times J_0 \left(\frac{\ell}{h} it \right) J_0 \left(\frac{\ell}{h} i\xi \right) di$$

$$(0 \leq \xi \leq 1). \quad (2.24)$$

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi \ell} \Psi \left(1, \frac{\ell}{h} \right). \quad (2.25)$$

Численный анализ интегрального уравнения Фредгольма второго рода (2.23) с непрерывным ядром (2.24) показывает (см. рис. 2): если $\frac{\ell}{h} \ll 1$, то $\psi(1; \frac{\ell}{h}) \approx 1$; с увеличением $\frac{\ell}{h}$ поправочная функция $\psi(1; \frac{\ell}{h})$ также увеличивается. Отсюда следует, что существует устойчивый рост трещины при циклическом нагружении до некоторых значений $\frac{\ell}{h}$, где $\frac{\ell}{h}$ определяется как минимальный корень уравнения $K_{I \max}(\sigma_{\max}, \frac{\ell}{h}) = K_{*f}$. При этом число циклов до разрушения определяется по формулам [3]

и

если известны кинетическая диаграмма усталостного разрушения для конкретного материала, в том числе, если известна трещиностойкость материала при циклическом нагружении.

§3. Анализ решений и коэффициента интенсивности напряжений K_I

Известно, что [2]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{l^2 - \tau^2}}{\tau - x} d\tau = \begin{cases} -x - \sqrt{x^2 - l^2}, & x < -\ell, \\ -x, & |x| < \ell, \\ -x + \sqrt{x^2 - l^2}, & x > \ell. \end{cases} \quad (3.1)$$

Доказательство (3.1) приведено в [2]. Кроме того, известно обращение особого интеграла с ядром Коши [1], [2]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{f(t)}{t - x} dt = \sigma(x), \quad |x| < l \quad (3.2)$$

Поскольку $f(t) \in K_{1/2}[-\ell, \ell]$ (см. (2.8)), то:

1. Непрерывная на отрезке $[-\ell, \ell]$ функция $\sigma(x)$ принадлежит классу функций Гельдера с показателем β ($1/2 < \beta \leq 1$) (см. [1]).

2. Формула обращения особого интеграла (3.2) в силу [1], [2] имеет вид

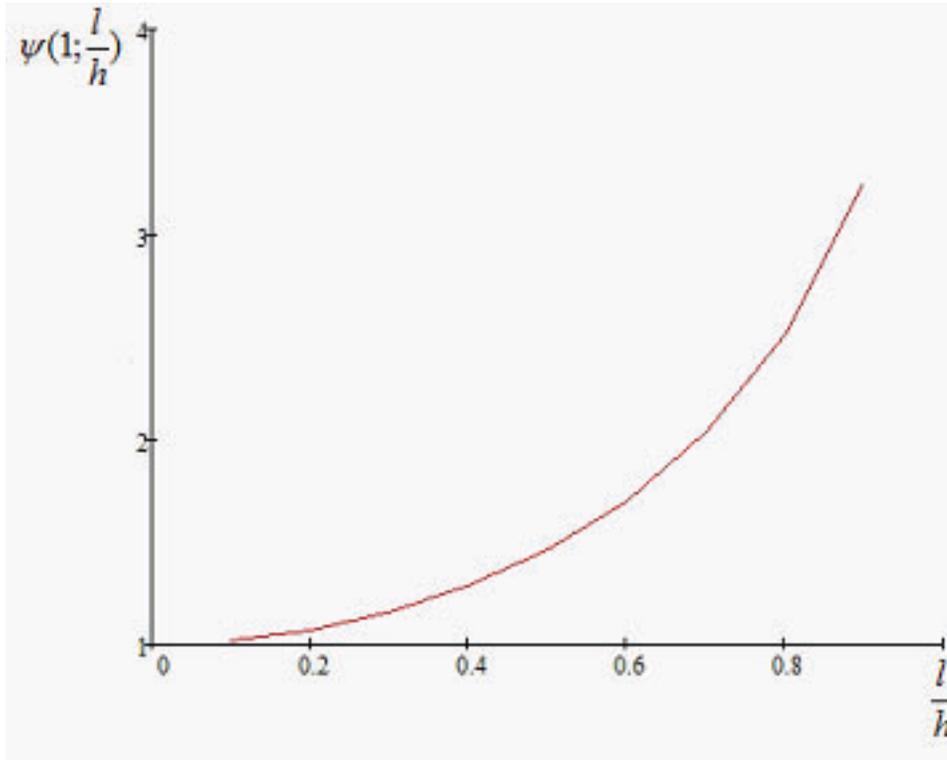


Рис. 2. Зависимость безразмерного коэффициента интенсивности напряжений (поправочной функции) от безразмерной длины трещины

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{\ell^2 - x^2}} \int_{-\ell}^{\ell} \sigma(\tau) \frac{\sqrt{\ell^2 - \tau^2}}{\tau - x} d\tau, \quad |x| < \ell. \quad (3.3)$$

В рассматриваемой задаче предположим, что

$$1^\circ \quad \sigma(x) = \sigma_0 \equiv \text{const} > 0 \quad (\gamma_0(v) \equiv 1); \quad 2^\circ \quad h \rightarrow +\infty.$$

Тогда из (2.13), (2.14), (3.3) и (2.15), (2.16) следует

$$f(x) = -\frac{\sigma_0}{\pi\sqrt{\ell^2 - x^2}} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \tau^2}}{\tau - x} d\tau, \quad |x| < \ell, \quad (3.4)$$

$$\Psi(x) = \sigma_0. \quad (3.5)$$

Из (3.4) с учетом (3.1) найдем

$$f(x) = \frac{\sigma_0 x}{\sqrt{\ell^2 - x^2}} (0 < x < \ell). \quad (3.6)$$

Из (3.5) в силу [1] получим

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -\frac{d}{dx} \int_x^\ell \frac{\tau \psi(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau = -\sigma_0 \frac{d}{dx} \int_x^\ell \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau = \\
 &= -\sigma_0 \frac{d}{dx} \sqrt{\ell^2 - x^2} = \frac{\sigma_0 x}{\sqrt{\ell^2 - x^2}} \quad (0 < x < \ell).
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Из (3.6) и (3.7) видно, что значение функции $f(x)$, полученное двумя способами, совпадает.

Из (2.12) с учетом (3.6), (2.8) или из (2.13) с учетом (3.5) имеем

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi \ell}. \tag{3.8}$$

С помощью (2.1)–(2.5), (2.7) и (3.6) получим

$$\frac{2\mu \cdot u(x, +0)}{(1 - 2\nu) \sigma_0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^\ell \frac{\sqrt{\ell^2 - t^2}}{t - x} dt. \tag{3.9}$$

Отсюда в силу (3.1) имеем

$$u(x, +0) = \begin{cases} -\frac{1 - 2\nu}{2\mu} \sigma_0 x, & |x| < \ell, \\ \frac{1 - 2\nu}{2\mu} \sigma_0 \left[\sqrt{x^2 - \ell^2} - x \right], & x > \ell, \\ \frac{1 - 2\nu}{2\mu} \sigma_0 \left[-\sqrt{x^2 - \ell^2} - x \right], & x < -\ell, \end{cases} \tag{3.10}$$

В силу формул (3.6), (2.9) и (2.10) получим

$$v(x, +0) = \begin{cases} 0, & |x| > \ell, \\ \frac{1 - \nu}{\mu} \sigma_0 \sqrt{\ell^2 - x^2}, & |x| < \ell. \end{cases} \tag{3.11}$$

Нетрудно показать, что

$$\sigma_y(x, +0) = \sigma_x(x, +0) = \begin{cases} -\sigma_0, & |x| < \ell, \\ \sigma_0 \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 - \ell^2}} - 1 \right], & x > \ell, \\ \sigma_0 \left[-\frac{x}{\sqrt{x^2 - \ell^2}} - 1 \right], & x < -\ell. \end{cases} \tag{3.12}$$

Из (3.9) и (3.10) следует, что если на берегах трещины действует постоянные нормальные напряжения и толщина слоя бесконечна, то на берегах трещины оба компонента вектора смещения отличны от нуля. Этот же результат другим методом получен в [2].

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору В.Д. Кулиеву за внимание и обсуждение данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кулиев В. Д. Новые эффективные методы решения класса смешанных краевых задач. // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1 (23). С. 132–162.
- [2] Кулиев В. Д. Сингулярные краевые задачи. М.: Физматлит, 2005.
- [3] Кулиев В. Д., Курбанмагомедов А. К. К теории роста трещин при циклическом нагружении. Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 4 (18). С. 52–67.

A. K. Kurbanmagomedov

CRACK OF THE NORMAL GAP IN THE ELASTIC LAYER

Moscow Polytechnical University, Moscow, Russia

Abstract. In the work, based on the view offset voltage Papkovich –Neiber 3 harmonic functions by which derived the dual integral equations whose solution is reduced to finding a single holder functions. To find this function, the singular integral equation with Cauchy kernel 1 of the first kind. The solution to this integral equation, In the proposed method V.D. Kuliev, reduced to the Fredholm integral equation of 2nd kind with continuous kernel. The main parameter of the linear mechanics of fracture stress intensity factor and numerical analysis. When the crack of the normal rupture is located in an infinite elastic medium it is shown that both components of the displacement vector different from zero. This result suggests that the crack represents an oblate ellipse.

Keywords: formula Papkovich-Neiber, harmonic functions, elastic medium, the stress intensity factor.

REFERENCES

- [1] Kuliev V. D. Novye jeffektivnye metody reshenija klassa smeshannyh kraevykh zadach. // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2015. № 1 (23). S. 132–162. (in Russian).
- [2] Kuliev V. D. Singuljarnye kraevye zadachi. M.: Fizmatlit, 2005. (in Russian).
- [3] Kuliev V. D., Kurbanmagomedov A. K. K teorii rosta treshhin pri ciklicheskom nagruzenii. Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2013. № 4 (18). S. 52–67. (in Russian).

М. В. Петров, Е. Г. Гоник, Т. Г. Федорова

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОНСОЛЬНО ЗАКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Выполнены эксперименты по исследованию потери устойчивости пустых и заполненных сыпучим веществом консольно закрепленных цилиндрических оболочек при чистом изгибе. Для опыта образцы выбирались по подобию с большегабаритными автоцистернами для перевозки сыпучих материалов. Один конец жестко закреплялся на испытательном стенде, а на другой свободный конец образца прикладывался изгибающий момент. Его увеличивали до момента, когда происходила потеря устойчивости образца, которая сопровождалась хлопком. По полученным результатам экспериментальных исследований можно заключить, что потеря устойчивости образца происходит в упругой стадии. Образуются ромбовидные вмятины на середине образца в сжатой зоне выпуклостью внутрь. Критическая нагрузка не зависит от степени заполнения образцов. Значение критической нагрузки для пустых образцов совпадает с результатами работ [6].

Ключевые слова: индикатор, критическая сила, образец, оболочка, тензорезистор, устойчивость.

УДК: 539.374.3

Введение. Тонкостенные цилиндрические конструкции типа оболочек нашли широкое применение в технике и строительстве. В оболочках хранят и перевозят жидкие, сыпучие и газообразные вещества. Для транспортировки сыпучих материалов используют цистерны, имеющие вид замкнутой цилиндрической оболочки. Обеспечение устойчивости цистерн при изгибе является одной из основных задач при их

© Петров М. В., Гоник Е. Г., Федорова Т. Г., 2017

Петров Михаил Васильевич, доктор технических наук, профессор кафедры строительных конструкций строительного факультета, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Гоник Екатерина Григорьевна

e-mail: katu.gonik@mail.ru, старший преподаватель кафедры строительных конструкций строительного факультета, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Федорова Татьяна Георгиевна, кандидат технических наук, доцент кафедры строительных конструкций строительного факультета, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №16-38-60051 мол_а_дк).

Поступила 15.12.2016

эксплуатации. Актуальность экспериментальных и теоретических исследований этим и обусловлена. Исследования в данном направлении приведены в работах [1]–[12].

Цель работы – экспериментально исследовать поведение цилиндрических тонкостенных образцов при чистом изгибе, определить критическую нагрузку для пустых и заполненных сыпучим материалом образцов.

Опытные исследования. Для проведения опытов была собрана экспериментальная установка, показанная на рис. 1.



Рис. 1. Экспериментальная установка

В экспериментальную установку входили: модельный образец–1, тензорезисторы–2, индикаторы часового типа–3, измеритель деформаций–4, динамометры–5, подвески с грузами–6, штативы–7. Применяемые измерительные приборы: индикаторы часового типа ИЧ–10, измеритель деформаций ИДЦ–1 с тензорезисторами 2ФКП5–200, стрелочные динамометры МЕГЕОН 04100 и электронный штангенциркуль. Предварительно у образца замерялись наружные диаметры в трех сечениях электронным штангенциркулем с погрешностью измерения 0,01 мм. В процессе нагружения перемещения исследуемого образца замерялись индикаторами часового типа ИЧ–10. Один индикатор замерял вертикальное перемещение на середине длины образца сверху, другой индикатор замерял перемещение на свободном конце снизу. Значения деформаций показывал прибор – измеритель деформаций ИДЦ–1, к которому были подключены тензорезисторы, приклеенные на середине образца вдоль образующей сверху и снизу.

В лабораторных испытаниях исследовались образцы, выполненные из алюминиевого сплава 3004 — в состоянии Н19, схожего по физическим характеристикам со сплавом, применяемым ЗАО “Сеспель” [10] для производства автоцистерн. К испытаниям образцы тщательно подбирались. Были выбраны гладкие бесшовные образцы с размерами, необходимыми для лабораторных экспериментов, без видимых дефектов. Испытания были проведены на цилиндрических образцах, подобранных по геометрическому и физическому подобию с цистернами, со следующими параметрами подобия [9], [11]:

$$\alpha_1 = \frac{R}{R^*} = 0,026; \quad \alpha_3 = \frac{h}{h^*} = 0,020,$$
$$\frac{L}{R} = 3,359; \quad \frac{L^*}{R^*} = 3,357,$$

где $R = 32,75\text{мм}$, $h = 0,1\text{мм}$, $L = 110\text{мм}$ – радиус, толщина стенки и длина испытываемых образцов, $R^* = 1275\text{мм}$, $h^* = 5\text{мм}$, $L^* = 4280\text{мм}$ – радиус, толщина стенки и длина цистерн для транспортировки сыпучих грузов.

Испытания проводились на металлическом стенде. Один торец образца был жестко заземлен, а на другой торец, укрепленный плоским днищем, прикладывалась пара сил (рис. 1). Испытание образцов проводили поэтапно. Вначале испытывали пустые образцы, а затем – загруженные сыпучим веществом на 30%, 60% и 90% по объему. Сыпучим веществом являлся железный порошок ПЖ-5, насыпной плотностью $\rho = 2,66\text{г/см}^3$.

Пару сил увеличивали до тех пор, пока образец не потеряет устойчивость. При увеличении момента на каждом этапе замерялись показания динамометров, индикаторов, тензорезисторов и диаметры оболочки в трех сечениях. Потеря устойчивости сопровождалась хлопком и образованием вмятин. Деформированная форма образца была зафиксирована с помощью фотоаппарата Casio EX-F1. На фотографии (рис. 2) видно, что на образце образовались ромбовидные вмятины выпуклостью внутрь.

Согласно показаниям прибора ИДЦ-1, к которому были подключены по мостовой схеме тензорезисторы, до потери устойчивости образец находился в упругой стадии работы. Подобные результаты были получены в работе [6], при испытании оболочек на чистый изгиб.

По окончании проведения опытов были оценены результаты и проведена статистическая обработка по [12]. Для пустых образцов для статистической обработки были приняты $n=10$ образцов, экспериментальные результаты которых мало отличались. Они сведены в таблицу 1.

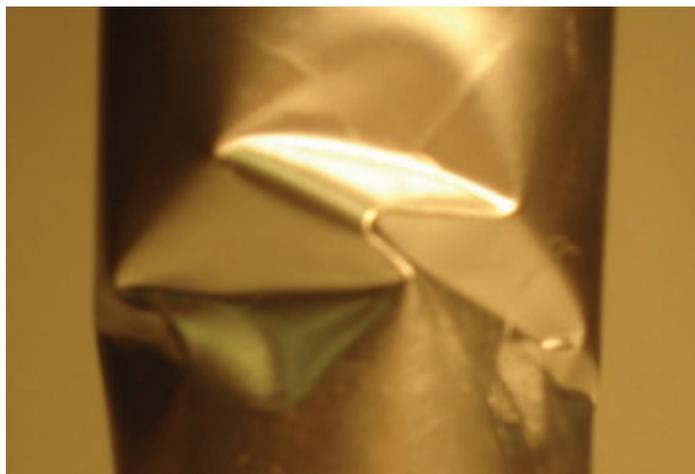


Рис. 2. Вид образца в зоне потери устойчивости

Таблица 1

№	M_{cr} , Н·м	y_1 , мм	y_2 , мм	Δy_1 , мм	Δy_2 , мм	$(\Delta y_1)^2$, мм ²	$(\Delta y_2)^2$, мм ²
1	2	3	4	5	6	7	8
1	15,2	0,06	0,14	0,004	0,004	0,000016	0,000016
2	15,6	0,06	0,14	0,004	0,004	0,000016	0,000016
3	14,5	0,05	0,13	0,006	0,006	0,000036	0,000036
4	14,8	0,05	0,13	0,006	0,006	0,000036	0,000036
5	14,5	0,05	0,13	0,006	0,006	0,000036	0,000036
6	15,6	0,06	0,14	0,004	0,004	0,000016	0,000016
7	15,2	0,06	0,14	0,004	0,004	0,000016	0,000016
8	15,6	0,06	0,14	0,004	0,004	0,000016	0,000016
9	15,2	0,06	0,14	0,004	0,004	0,000016	0,000016
10	14,8	0,05	0,13	0,006	0,006	0,000036	0,000036
Σ				0,048	0,048	0,00024	0,00024

где $M_{cr} = F_{cr} \cdot a$,

F_{cr} – критическая сила, замеренная динамометром,
 a – плечо, расстояние от оси динамометра до оси образца (см. рис. 3),

y_1 – вертикальное перемещение на середине длины образца,
 y_2 – вертикальное перемещение на свободном конце образца.

Среднеарифметическая величина прогибов образцов составила: в середине $y_1(t) = 0,056$ мм, на свободном конце $y_2(t) = 0,136$ мм. Погрешности значений перемещений представлены в таблице 1, в 5 и 6 столбцах.

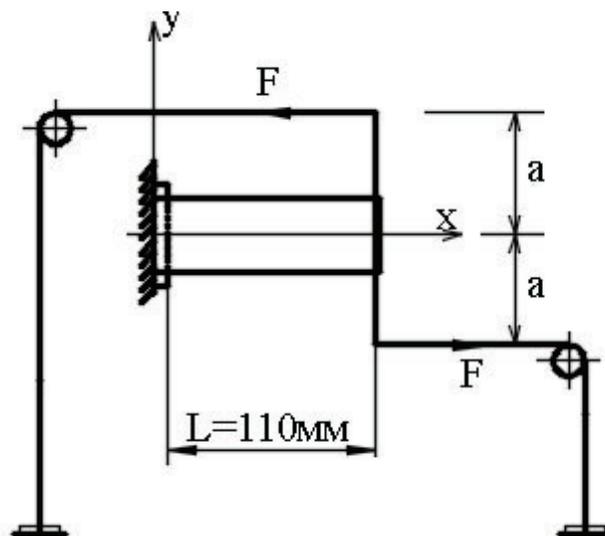


Рис. 3. Схема нагружения

Среднеквадратичная погрешность серии измерений определялась по формуле 1 [12]. В середине образца и на свободном конце она имеет одинаковое значение.

$$S_w = \sqrt{\frac{\sum [\Delta y_i^2(t)]}{n(n-1)}} = 0,0016 \text{ мм} \quad (1)$$

Коэффициент Стьюдента определялся по таблице IV приложения 2 [12]. Приняли значение надежности $P = 0,95$ и $k = n - 1 = 9$. При данных значениях коэффициент Стьюдента $t(n) = 2,262$. Граница доверительного интервала (погрешность результата измерений) вычислялась:

$$\Delta W(t) = t(n)S_w = 0,0036 \text{ мм} \quad (2)$$

Относительная погрешность результата измерений в середине образца

$$\frac{\Delta W(t)}{W_1(t)} \cdot 100\% = 6,5\% \quad (3)$$

и на свободном конце образца

$$\frac{\Delta W(t)}{W_2(t)} \cdot 100\% = 2,6\%.$$

Зависимости величины прогибов от изгибающего момента представлены на графике (рис. 4).

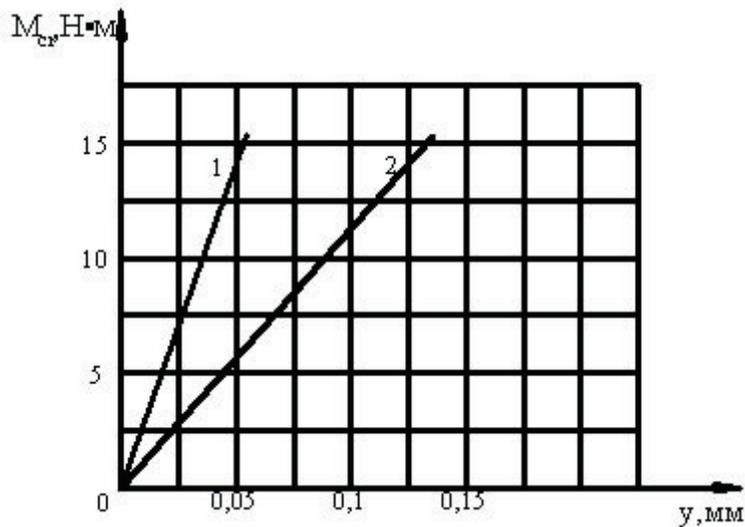


Рис. 4. График зависимости прогибов от изгибающего момента (1—на середине длины, 2—на свободном конце)

Было определено нижнее критическое напряжение в меридиональном направлении по формуле Гука. Оно составило $\sigma_{cr} = 42$ МПа.

По формуле 17.72 [8] нижнее критическое напряжение будет:

$$\sigma_{cr}^H = \frac{0,18 \cdot E \cdot \delta}{R} = 38,6 \text{ МПа}, \quad (4)$$

где $E=70$ ГПа модуль упругости, $\delta=0,1$ мм толщина стенки оболочки, $R=32,75$ мм радиус срединной поверхности образца. Разница составляет 8,1%.

Среднеарифметические значения M_{cr} для пустых и заполненных образцов приведены в таблице 2.

Таблица 2

Заполнение образцов	пустые	на 30%	на 60%	на 90%
Значения $M_{cr}, \text{Н}\cdot\text{м}$	15,1	15,15	15,17	15,2

Из таблицы 2 видно, что M_{cr} мало зависит от процента заполнения образцов.

Выводы.

1. Потеря устойчивости консольно закрепленного образца при чистом изгибе происходит в области сжатия на середине длины образца. Образуются мелкие вмятины, расположенные по полуокружности, направленные к центру кривизны. Явление потери устойчивости носит ярко выраженный местный характер.

2. До потери устойчивости образец ведет себя упруго. После снятия нагрузки первоначальная форма образца не восстанавливается. На образце остаются вмятины.

3. Критический изгибающий момент для пустых образцов мало отличается от критического изгибающего момента для заполненных сыпучим материалом ПЖ-5 образцов. Заполнитель не влияет на величину критической нагрузки и на форму потери устойчивости образцов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
- [2] Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 360 с.
- [3] Петров М. В., Федорова Т. Г. Экспериментальное исследование потери устойчивости тонкостенных оболочек, заполненных сыпучим материалом при изгибе // Вестник Нижегородского ун-та им. Н. И. Лобачевского. Механика. Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4 (5). С. 2420–2422.
- [4] Баженов В. Г., Гоник Е. Г., Кибец А. И., Кибец Ю. И., Павленкова Е. В., Петров М. В., Федорова Т. Г. Конечно-элементное решение задачи устойчивости и закритического поведения автоцистерн для транспортировки сыпучих грузов // Проблемы прочности и пластичности. 2013. Вып. 75 (1). С. 56–62.
- [5] Гоник Е. Г., Кибец А. И., Иванов В. А., Петров М. В., Федорова Т. Г. Экспериментальное исследование потери устойчивости подъемной цистерны для перевозки сыпучих материалов при аварийном падении // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. Чебоксары, 2014. С. 129–131.
- [6] Петров М. В., Федорова Т. Г., Гоник Е. Г. Экспериментальное исследование потери устойчивости тонкостенных оболочек при чистом изгибе // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2 (24). С. 119–125.
- [7] Bazhenov V. G., Gonik E. G., Kibets A. I., Petrov M. V., Fedorova T. G. Stability and supercritical behavior of large-size tankers for transportation of loose goods // Journal of machinery manufacture and reliability. 2015. Vol. 44, № 5. P. 422–427.
- [8] Вольмир А. С., Григорьев Ю. П., Станкевич А. И. Сопротивление материалов. М.: Москва, 2007. 591 с.
- [9] Моссаковский В. И., Маневич Л. И., Мильцын А. М. Моделирование несущей способности цилиндрических оболочек. Киев: Наукова думка, 1977. 141 с.
- [10] <http://www.sespel.com>.
- [11] Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. 8-е изд., перераб. М.: Наука, 1977. 440 с.
- [12] Румшиский Л. З. Математическая обработка результатов эксперимента. М.: Наука, 1971.

M. V. Petrov, T. G. Fedorova, E. G. Gonic

STABILITY RESEARCH KONSOLNO THE FIXED CYLINDRICAL THIN SHELLS AT A CLEAR BEND

I. N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia

Abstract. Experiments on a research of loss of stability empty are executed and the fixed cylindrical envelopes filled with loose substance konsolno at a clear bend. For experience exemplars were chosen on similarity with bolshegabaritny tanker trucks for transportation of loose materials. One the end rigidly was fixed on the test stand, and on another, the free the end of an exemplar, was put a moment of deflection. It was increased till the moment, when there was a loss of stability of an exemplar which was followed cotton. By the received results of the pilot studies it is possible to conclude that loss of stability of an exemplar happens in a resilient stage. Rhomboidal dents on the middle of an exemplar in an oblate zone are formed by camber inside. Ultimate load does not depend on degree of fullness of exemplars. Value of ultimate load, for empty exemplars, coincides with results works [6].

Keywords: indicator, critical force, exemplar, envelope, resistance strain gage, stability.

REFERENCES

- [1] Vol'mir A. S. Ustojchivost' deformiruemyh sistem. M.: Nauka, 1967. 984 s. (in Russian).
- [2] Grigoljuk Je. I., Kabanov V. V. Ustojchivost' obolochek. M.: Nauka, 1978. 360 s. (in Russian).
- [3] Petrov M. V., Fedorova T. G. Jeksperimental'noe issledovanie poteri ustojchivosti tonkostennyh obolochek, zapolnennyh sypuchim materialom pri izgibe//Vestnik Nizhegorodskogo un-ta im. N. I. Lobachevskogo. Mehanika. N. Novgorod: Izd-vo NNGU im. N. I. Lobachevskogo. 2011. № 4 (5). S. 2420–2422. (in Russian).
- [4] Bazhenov V. G., Gonic E. G., Kibec A. I., Kibec Ju. I., Pavlenkova E. V., Petrov M. V., Fedorova T. G. Konechno-jelementnoe reshenie zadachi ustojchivosti i zakriticheskogo povedenija avtocistern dlja transportirovki sypuchih gruzov // Problemy prochnosti i plastichnosti. 2013. Vyp. 75 (1). S. 56–62. (in Russian).
- [5] Gonic E. G., Kibec A. I., Ivanov V. A., Petrov M. V., Fedorova T. G. Jeksperimental'noe issledovanie poteri ustojchivosti podemnoj cisterny dlja perevozki sypuchih materialov pri avarijnom padenii // Materialy VIII Vserossijskoj konferencii po mehanike deformiruemogo tverdogo tela. Cheboksary. 2014. S. 129–131. (in Russian).
- [6] Petrov M. V., Fedorova T. G., Gonic E. G. Jeksperimental'noe issledovanie poteri ustojchivosti tonkostennyh obolochek pri chistom izgibe//Vestnik ChGPU im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2015. № 2 (24). S. 119–125. (in Russian).

Petrov Mikhail Vasilyevich, Doctor of Technical Sciences, Professor, I. N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

Fedorova Tatyana Georgievna, Candidate of Technical Sciences, I. N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

Gonic Ekaterina Grigoryevna, Senior Lecturer, I. N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

[7] Bazhenov V. G., Gonik E. G., Kibets A. I., Petrov M. V., Fedorova T. G. Stability and supercritical behavior of large-size tankers for transportation of loose goods // Journal of machinery manufacture and reliability. 2015. Vol. 44, № 5. P. 422–427.

[8] Vol'mir A. S., Grigor'ev Ju. P., Stankevich A. I. Soprotivlenie materialov. M., 2007. 591 s. (in Russian).

[9] Mossakovskij V. I., Manevich L. I., Mil'cyn A. M. Modelirovanie nesushhej sposobnosti cilindricheskikh obolochek. Kiev: Naukova dumka, 1977. 141 s. (in Russian).

[10] <http://www.sespe.com>.

[11] Sedov L. I. Metody podobija i razmernosti v mehanike. 8-e izd., pererab. M.: Nauka, 1977. 440 s. (in Russian).

[12] Rumshiskij L. Z. Matematicheskaja obrabotka rezul'tatov jeksperimenta. M.: Nauka, 1971. (in Russian).

Б. Г. Миронов, Ю. Б. Миронов

О КРУЧЕНИИ КУСОЧНО-ИЗОТРОПНОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва,
Россия

Аннотация. В работе рассмотрено кручение кусочно-изотропного идеально-пластического призматического стержня с сечением в виде прямоугольника. Определено напряженное состояние стержня, найдены линии разрыва напряжений, построено поле характеристик.

Ключевые слова: кручение, напряжение, пластичность, предел текучести.

УДК: 539.735

Кручение изотропных цилиндрических и призматических идеальнопластических стержней рассмотрено в работах [1], [2].

Кручение анизотропных и неоднородных идеальнопластических стержней исследовано в [1]–[5].

Рассмотрим призматический идеальнопластический стержень, ориентированный в прямоугольной системе координат xuz .

Ось z направлена параллельно образующим стержня. Сечение стержня плоскостью $z = const$ есть прямоугольник $ABCD$ со сторонами, равными $2a$ и $2b$.

Предположим, что стержень состоит из двух изотропных частей, разделенных ломаной LMN , где $L(0; -b)$, $M(-c; 0)$, $N(0, b)$, α – угол между MN и осью x , $tg \alpha = b/c$ (рис. 1).

© Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б., 2017

Миронов Борис Гурьевич

e-mail: mironov.boris.21@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва, Россия.

Миронов Юрий Борисович

e-mail: mistiam@gmail.com, кандидат технических наук, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-41-210272).

Поступила 15.02.2017

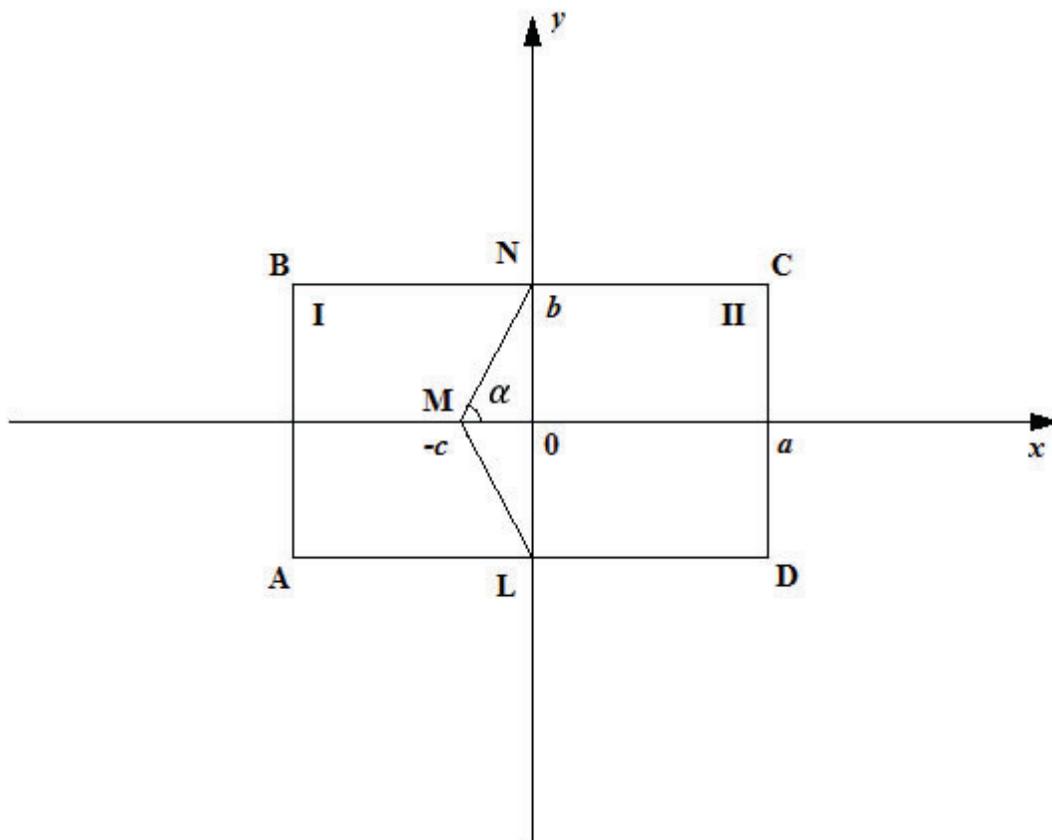


Рис. 1

Стержень закручивается вокруг оси z равными и противоположными парами сил. Боковая поверхность стержня считается свободной от нагрузок.

Напряженное состояние стержня определяется соотношениями:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \tag{1}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y),$$

условиями пластичности

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k_1^2 \tag{2}$$

в первой области,

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k_2^2 \tag{3}$$

во второй области, уравнением равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

где $k_1 < k_2$.

Согласно [2] характеристики соотношения (4) есть прямые, ортогональные вектору касательного напряжения

$$\bar{\tau} = \tau_{xz}\bar{i} + \tau_{yz}\bar{j}, \quad (5)$$

где \bar{i}, \bar{j} – орты осей x и y соответственно, которое направлено по касательной к контуру поперечного сечения стержня и не меняется вдоль характеристики.

На линии неоднородности LMN неизбежен скачок касательных напряжений. Поэтому при переходе через ломаную LMN вектор касательного напряжения τ , а соответственно, и характеристики соотношения (4) меняют свое направление. А это приводит к дополнительным линиям разрыва напряжений ME , LE и EN , выходящим из точек L и N области II (рис. 2).

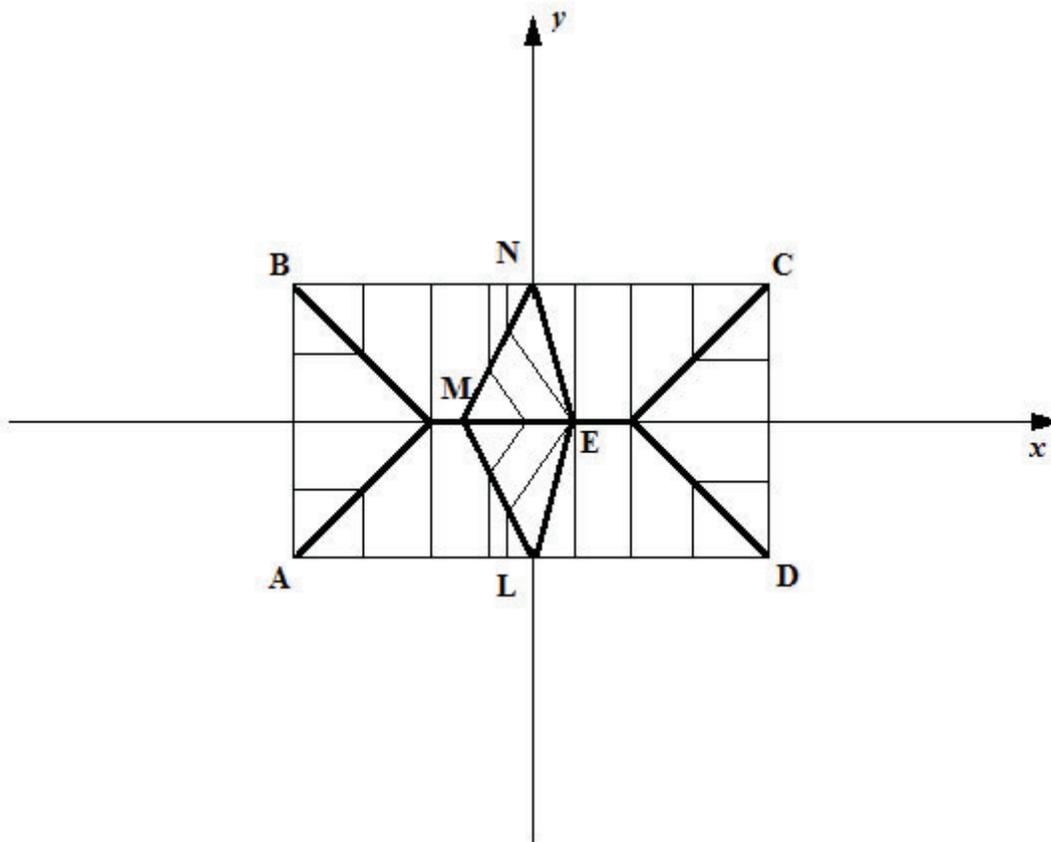


Рис. 2

Уравнения линий разрыва напряжений LE и EN имеют вид

$$LE : y = -b + \frac{\sin(\alpha - \beta)}{1 - \cos(\alpha - \beta)}x, \quad (6)$$

$$EN : y = b - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{1 - \cos(\alpha - \beta)} x, \quad (7)$$

$$\text{где } \sin \beta = \frac{k_1}{k_2} \sin \alpha, \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \alpha}}{k_2}.$$

Характеристики соотношения (4) в треугольнике MNE задаются уравнением

$$y = (c + x_0) \operatorname{tg} \alpha - (x - x_0) \operatorname{ctg}(\alpha - \beta), \quad (8)$$

а в треугольнике MLE определяются уравнением

$$y = -(c + x_0) \operatorname{tg} \alpha + (x - x_0) \operatorname{ctg}(\alpha - \beta), \quad (9)$$

где $x_0 \in (-c; 0)$.

В случае когда $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$, напряженное состояние стержня определить невозможно, без дополнительных условий на ломанной LMN .

Рассмотрим призматический стержень с прямоугольным сечением в случае, когда сечение содержит включение в виде ромба (рис. 3).

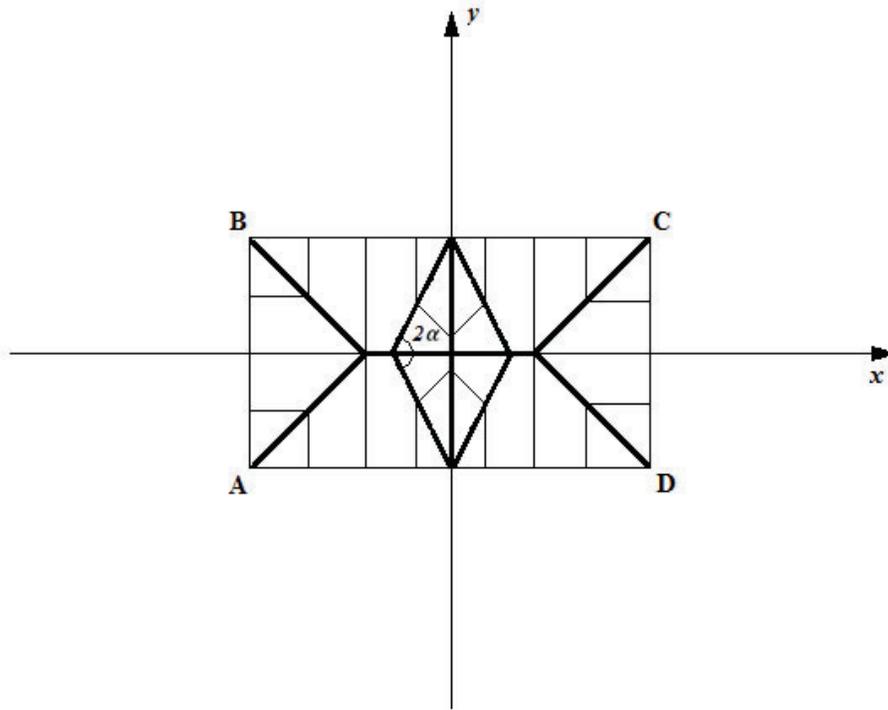


Рис. 3

Пусть условие пластичности в области, ограниченной ромбом, имеет вид (3), а вне ее – (2). В этом случае в области, ограниченной ромбом, появятся две дополнительные линии разрыва напряжений, которые совпадают с диагоналями ромба.

Характеристики соотношения (4) определяются уравнениями (8), (9) и

$$y = (c - x_0) \operatorname{tg} \alpha + (x - x_0) \operatorname{ctg} (\alpha - \beta) \quad (10)$$

$$y = -(c - x_0) \operatorname{tg} \alpha - (x - x_0) \operatorname{ctg} (\alpha - \beta), \quad (11)$$

где $x_0 \in (0; c)$.

На рисунках 2 и 3 жирными линиями нарисованы линии разрыва напряжений, а тонкими линиями – характеристики.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.

[2] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.

[3] Деревянных Е. А., Миронов Б. Г. Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 4. С. 108–112.

[4] Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. О кручении цилиндрических анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2011. № 9. С. 150–155.

[5] Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. М.: Мир, 1964. 156 с.

B. G. Mironov, Yu. B. Mironov

ABOUT TORSION OF A PATCH AND ISOTROPIC RECTANGULAR PRISMATIC CORE

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Abstract. In work torsion of patch and isotropic is considered ideal and plastic prismatic core with section in a look rectangle. A stressed state of a core is defined, lines are found rupture of tension, the field of characteristics is built.

Keywords: torsion, tension, plasticity, limit flowabilities.

REFERENCES

[1] Bykovcev G. I., Ivlev D. D. Teorija plastichnosti. Vlydivostok: Dal'nauka, 1998. 528 p. (in Russian).

[2] Ivlev D. D. Teorija ideal'noj plastichnosti. M.: Nauka, 1966. (in Russian).

[3] Derevjannyh E. A., Mironov B. G. Ob obshhijh sootnoshenijah teorii kruchenija anizotropnyh sterzhnej // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo

Mironov Boris Guryevich

e-mail: mironov.boris.21@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia.

Mironov Yury Borisovich

e-mail: mistiam@gmail.com, Candidate of Technical Sciences, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia.

universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2012. № 4. P. 108–112. (in Russian).

[4] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. O kruchenii cilindricheskih anizotropnyh sterzhnej // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2011. № 9. P. 150–155. (in Russian).

[5] Ol'shak V., Ryhlevskij Ja., Urbanovskij V. Teorija plastichnosti neodnorodnyh tel. M.: Mir, 1964. 156 p. (in Russian).

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный университет леса, г. Мытищи-5 Московской области, Россия.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Кулиев Валех Джафарович (pmdekanat@gmail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва, Россия.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Манжиров Александр Владимирович (manzh@inbox.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матченко Николай Михайлович (eks_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Миронов Борис Гурьевич (rektorat@chdpu.edu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва, Россия.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Редкозубов Сергей Алексеевич (marusbka434@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва, Россия.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

Спориных Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига, Латвия.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес predel21@mail.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `predel.sty`. Стиль `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Ковалев А. В., Русина Е. Ю., Яковлев А. Ю.</i> О механическом взаимодействии элементов тонкой упругопластической конструкции	3
<i>Артемов М. А., Барановский Е. С.</i> Анализ и сопоставление некоторых теорий пластичности.....	15
<i>Переяславская И. И., Артемов М. А., Барановский Е. С.</i> К вопросу математического моделирования осесимметричного плоско-напряженного состояния сжимаемого упругопластического тела.....	22
<i>Немировский Ю. В.</i> Рациональное проектирование гибридных пластических балок при динамическом нагружении	40
<i>Немировский Ю. В., Мозгова А. С.</i> Теплопроводность конструкционного элемента космического аппарата в виде многослойного цилиндра	49
<i>Немировский Ю. В., Станиславович А. В.</i> Теплопроводность слоистых ортотропных пластин	55
<i>Леонтьева Т. Ю.</i> Точные критерии существования подвижных особых точек решения одного класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка	69
<i>Немировский Ю. В.</i> Динамический изгиб эллиптических и круглых слоистых плит из жестко-пластического материала.....	79
<i>Орлов В. Н., Иваницкий А. Ю., Кудряшова Н. В.</i> Теорема существования решения одного класса нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка с полиномиальной правой частью третьей степени в окрестности подвижной особой точки.....	85
<i>Курбанмагомедов А. К.</i> Трещина нормального разрыва в упругом слое	96
<i>Петров М. В., Гоник Е. Г., Федорова Т. Г.</i> Исследование устойчивости консольно закрепленных цилиндрических тонкостенных оболочек при чистом изгибе	105
<i>Мионов Б. Г., Мионов Ю. Б.</i> О кручении кусочно-изотропного прямоугольного призматического стержня.....	114
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	120
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	123
СОДЕРЖАНИЕ	125

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2017. № 1 (31)**

Отв. за выпуск: А. В. Балашникова

Технические редакторы: А. В. Балашникова, Е. В. Мурашкин, С. В. Тихонов

Компьютерная верстка: А. В. Балашникова

Макет: А. В. Балашникова

Подписано в печать 24.03.2017. Выход в свет 31.03.2017.
Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e. Усл. печ. л. 16,5.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

ФГБОУ ВО «Чувашский государственный педагогический университет
им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском отделе ФГБОУ ВО «Чувашский
государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38