

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
Научный журнал
№ 2(48)

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.
Выходит 4 раза в год

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге “Пресса России” 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко, С. В. Тихонов

Ответственные секретари: С. В. Матвеев, Е. В. Мурашкин

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, В. Г. Зубчанинов, Л. А. Игумнов, Р. А. Каюмов, И. Э. Келлер,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, Д. С. Лисовенко, Е. В. Ломакин,
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, Н. В. Минаева, Ю. В. Немировский,
Р. И. Непершин, В. Н. Орлов, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов,
А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

Международный совет: В. М. Мирсалимов (Азербайджан), А. В. Чигарев (Бе-
лоруссия)

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, Президентский бульвар, 19А

Адрес издателя: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Тел.: (8352) 22-28-71, доб. 1182

E-mail: predel21@mail.ru

WWW: <http://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева, 2021

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

**VESTNIK
CHUVASHSKOGO GOSUDARSTVENNOGO PEDAGOGICHESKOGO
UNIVERSITETA IM. I. YA. YAKOVLEVA
SERIYA: MEKHANIKA PREDEL'NOGO SOSTOYANIYA**

**Scientific journal
№ 2(48)**

The Journal founder: I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University
Founders of the series: D. D. Ivlev, D. M. Klimov, L. A. Maksimova, A. V. Manzhirov,
B. G. Mironov, G. K. Mikhailov, Yu. N. Radaev, E. I. Shemyakin

Published since March 2007
Published four times a year

Registered in Federal Service for Supervision of Communications
Information Technology, and Mass Media "Roskomnadzor"
(Accreditation Certificate PI No. FS77-58094 d/d 20 May, 2014).

Hard copy of the Journal is available by subscription from the catalogue "Press of Russia"
(reg. No. 13109).

Editor-in-chief: B. G. Mironov

Executive Editor: Yu. N. Radayev

Associate Editor: N. M. Matchenko, S. V. Tikhonov

Executive Secretary: E. V. Murashkin, S. V. Matveev

Editorial Board: V. G. Bazhenov, A. A. Burenin, D. V. Georgievskiy,
V. V. Glagolev, V. G. Zubzhaninov, L. A. Igumnov, R. A. Kayumov, I. E. Keller,
D. M. Klimov, V. A. Kovalev, L. Yu. Kossovich, D. S. Lisovenko, E. V. Lomakin,
L. A. Maksimova, A. A. Markin, N. V. Minaeva, Yu. V. Nemorovskii, R. I. Nepershin,
V. N. Orlov, V. P. Radchenko, A. F. Revuzhenko, S. I. Senashov, A. N. Sporihin,
A. A. Treshev, A. D. Chernishov, A. I. Khromov, A. I. Shashkin

International Council: V. M. Mirsalimov (Azerbaijan), A. V. Chigarev (Belorussia)

Postal address:: ul. K. Marksa 38, 428000 Cheboksary, Russia

Phone:: +7 352 22 28 71, ex.ph. 1182

E-mail:: predel21@mail.ru

Journal website:: <http://limit21.ru>

С. А. Матвеев

О ВКЛАДЕ ПРОФЕССОРА Ю. В. НЕМИРОВСКОГО В ДОРОЖНУЮ НАУКУ

Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия, г. Омск, Россия

DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.001

Армирование элементов строительных конструкций и грунтовых оснований геосинтетическими материалами применяется уже более полувека. Геосинтетические материалы используют для армирования дорожных одежд и грунтов земляного полотна, при устройстве подпорных стенок, для предотвращения оползней и укреплении откосов, при проведении противоэрозионных мероприятий, а также для обеспечения дренажа.

Применение геосинтетики в транспортном строительстве позволяет компенсировать недостатки свойств грунтов и дорожно-строительных материалов, повысить их физические и механические свойства, а в некоторых случаях – превратить в совершенно новые типы материалов.

Теоретические основы расчёта армированных геосинтетическими материалами конструкций базируются на методах расчета плит на упругом основании и изгибаемых слоистых систем. Большой вклад в развитие данного направления научных исследований внес профессор Ю.В. Немировский.

Общим недостатком существующих подходов при расчете дорожных одежд являлось привлечение традиционных методик расчёта конструкций со сплошными, однородными, изотропными слоями для расчёта армированных и по существу конструктивно анизотропных конструкций. Армированный геосинтетическими материалами грунт по существу представляет собой новый композитный конструктивно-анизотропный материал, обладающий управляемой анизотропией, которая зависит как от свойств грунта, так и от свойств армирующей структуры. Данное направление, основанное на структурном подходе и касающееся вопросов армирования не только грунта, но и любого материала, используемого в дорожном строительстве, получило развитие в совместных работах Ю.В. Немировского и автора этих строк, выполненных под патронажем Юрия Владимировича.

© Матвеев С. А. 2021

Матвеев Сергей Александрович

e-mail: dfsibadi@mail.ru, доктор технических наук, профессор, Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия, г. Омск, Россия.

Поступила 21.03.2021

Так, в работе [1] Юрием Владимировичем была предложена расчётная модель армированного объёмной георешёткой упругого слоя в виде набора стандартных элементов – характерных ячеек, которые должны были вести себя как некий композитный анизотропный материал, свойства которого зависят как от свойств основного материала слоя, так и от свойств армирующей структуры, её геометрической формы, размеров и расположения относительно исходных осей. Исходя из законов термоупругого деформирования основного материала слоя и материала армирующих элементов были получены выражения для определения упругих постоянных и коэффициентов линейного температурного расширения эквивалентной композитной анизотропной среды. Оценка влияния армирования на упругие постоянные армированного слоя показано путем сравнения матриц упругих характеристик армированного и неармированного слоя.

На основании структурного подхода в работах [2-4] исследовано влияние геометрических параметров армирующей структуры на упругие характеристики композита “грунт-георешетка”, работающего в условиях объёмного и плоского напряженного состояния. Теоретически установлено, что при уменьшении размеров характерной ячейки георешетки эффект армирования возрастает многократно.

На основании полученных результатов была разработана изложенная в работах [5-7] теория многослойных конструктивно-анизотропных плит на упругом основании, сопротивляющемся сжатию и сдвигу. Каждый слой плиты имеет индивидуальную структуру армирования в виде объёмных георешеток, плоских геосеток и прослоек из геотканей. Построена общая система разрешающих уравнений продольно-поперечного изгиба многослойной плиты. Для частного случая цилиндрического изгиба получено аналитическое решение, которое доведено до числовых результатов и представлено на графиках, отражающих влияние армирования отдельных слоев и трения между полиармированной плитой и основанием на деформативность дорожного покрытия.

В работах [8,9] представлена расчетная модель и теория термоупругого деформирования многослойных плит, армированных плоскими георешетками.

В статье [10] представлена предложенная Ю.В. Немировским и совместно разработанная теория расчета на статическую нагрузку и температурные воздействия многослойной дорожной конструкции в виде насыпи земляного полотна со слоями, армированными произвольным набором геосинтетических материалов. Расчетная модель конструкции рассмотрена в рамках плоской задачи теории упругости с привлечением рядов Фурье. В качестве примера приведен расчет на статическую нагрузку двухслойной конструкции, верхний слой которой армирован объёмной георешеткой. Результаты расчета сравниваются с результатами натурного эксперимента. Расчету методом конечных элементов насыпи земляного полотна со слоями, армированными, объёмными георешетками, посвящены также работы [11, 12].

Доклады с участием Ю.В. Немировского были представлены и опубликованы в трудах крупных зарубежных международных конференций:

- Третья европейская конференция по применению геосинтетических материалов в строительстве: Еврогео3 (Мюнхен, 2004) [13];
- Восьмая международная конференция по применению геосинтетических материалов в строительстве (Йокогама, 2006) [14].

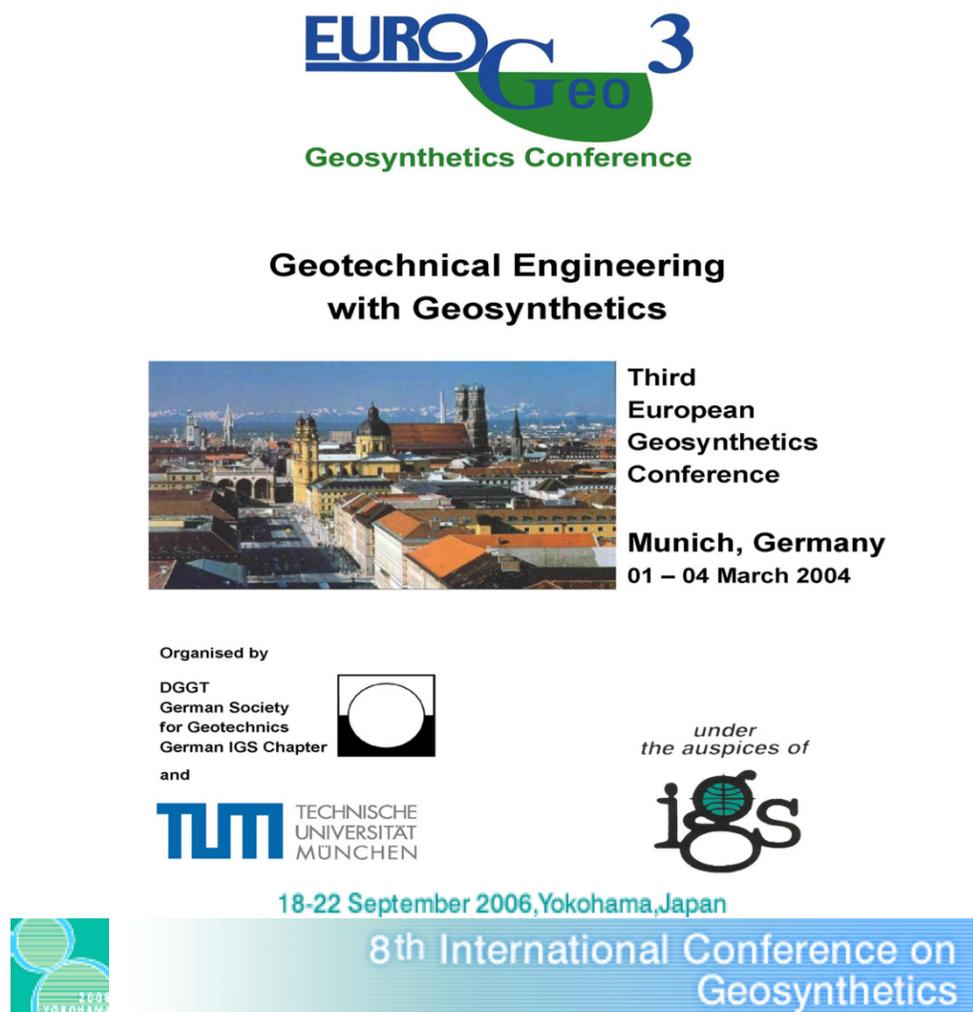


Рис. 1.

По результатам проведенных исследований, посвященных разработке теории расчета армированных дорожных конструкций, была опубликована монография [15], которая в 2006 году стала лауреатом Всероссийского конкурса учебников, учебных пособий и монографий по специальности “Автомобильные дороги и аэродромы”. В том же году автором этих строк была защищена докторская диссертация на тему “Моделирование и расчет армированных многослойных плит на упругом основании” (научный консультант – д.ф.- м. н., проф. Ю.В. Немировский).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Немировский Ю. В., Матвеев С. А. Построение расчетной модели грунта, армированного объемной георешеткой // Известия вузов. Строительство. 2002. № 9. С. 95–101.
- [2] Матвеев С. А., Немировский Ю. В. Влияние структуры армирования на физико-механические свойства армированного слоя основания дорожной конструкции // Известия вузов. Строительство. 2005, № 1. С. 72–81.

-
- [3] Матвеев С. А., Немировский Ю. В. Свойства упругого слоя основания дорожной одежды, армированного объёмной георешеткой // Наука и техника в дорожной отрасли. 2005. № 2. С. 24–28.
- [4] Матвеев С. А., Немировский Ю. В. Влияние структуры армирования основания дорожной одежды на его физико-механические свойства // Дороги и мосты. Сборник ГП Росдорнии. 2005. Вып. 13/1. С. 151–162.
- [5] Матвеев С. А., Немировский Ю. В. Теория расчета многослойных дорожных плит, армированных геосинтетическими материалами // Известия вузов. Строительство, 2004. № 6. С. 83–91.
- [6] Матвеев С. А., Немировский Ю. В. Теория расчета термоупругих слоистых дорожных плит, армированных геосинтетическими материалами // Югра: дороги в будущее'. 2004. № 1. С. 30–31.
- [7] Матвеев С. А., Немировский Ю. В. Теория расчета многослойных полиармированных плит на упругом основании / В кн.: Образование, наука и техника: XXI век / Сб. науч. Статей. Выпуск 3. Ханты-Мансийск: Югорский Гос. ун-т. 2005. С. 111–120.
- [8] Матвеев С. А., Немировский Ю. В. Расчет многослойных плит, армированных плоскими георешетками / В кн.: Проблемы оптимального проектирования сооружений. Докл. V Всеросс. Семинара, посвящ. 75-летию НГАСУ (Сибстрин) (7-8апреля 2005 г.). Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин). 2005. С. 232–239.
- [9] Матвеев С. А., Немировский Ю.В. Расчет многослойных дорожных плит, армированных плоскими георешетками / В кн.: Образование, наука и техника: XXI век. Сб. науч. Статей. Выпуск 3. Югорский Гос. ун-т. Ханты-Мансийск, ЮГУ, 2005. С. 107–111.
- [10] Матвеев С. А., Немировский Ю. В. Расчет многослойной армированной дорожной конструкции // Наука и техника в дорожной отрасли. 2005. № 3. С. 28–33.
- [11] Немировский Ю. В., Матвеев С. А., Мартынов Е. А. Расчет грунтового полупространства, армированного объёмными георешетками, методом конечных элементов // Труды НГАСУ. Т. 6. №6 (27). 2003. С. 97–103.
- [12] Немировский Ю. В., Матвеев С. А. Расчет НДС насыпи, армированной объёмными георешетками, при низких температурах // Труды II Евразийского симпозиума по проблемам прочности материалов и машин для регионов холодного климат. EURASTRENCOLD-2004. Якутск: ЯФ ГУ "Изд-во СО РАН", 2004. С. 128–133.

Г. Т. Володин, Д. С. Кочергин

УСЛОВИЯ ГАРАНТИРОВАННОГО РАЗРУШЕНИЯ И ВЗРЫВОСТОЙКОСТИ БАЛОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ВЗРЫВЕ В ВОДЕ

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

Аннотация. По данным проведенных ранее исследований авторов найдены условия гарантированного разрушения и гарантированной взрывостойкости балки, свободно лежащей на недеформируемых опорах в воде. Импульсная динамическая нагрузка создана взрывом сосредоточенного заряда конденсированного взрывчатого вещества (ВВ), расположенного в воде на фиксированном расстоянии от балки. Под разрушением понимается потеря несущей способности балки вследствие возникновения в ней пластических зон (шарниров), трещин, разделений на фрагменты. Использован обобщенный на действия динамической нагрузки критерий разрушения, основанный на достижении максимальным изгибающим моментом критических значений.

Ключевые слова: балка, импульсная нагрузка, взрыв в воде, присоединенная масса, максимальный изгибающий момент, динамический критерий разрушения.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.002

УДК: 531/534

Введение

Целью исследований колебаний балочной конструкции в плотной среде (в воде), вызванных действием взрыва, является нахождение условий её гарантированного разрушения (или гарантированной взрывостойкости). Пусть над серединой балки на некотором расстоянии a от её оси расположен заряд ВВ массы C с известными энергетическими характеристиками. Тогда условия разрушения (взрывостойкости балки) можно найти, используя два подхода:

1. При фиксированном расстоянии a найти минимальную массу C заряда, взрыв которого приводит к гарантированному разрушению балки.
2. При фиксированной массе C заряда ВВ найти максимальное расстояние a , на котором взрыв заряда гарантированно разрушит балку.

© Володин Г. Т., Кочергин Д. С., 2021

Володин Геннадий Тимофеевич

e-mail: g.volodin@yandex.ru, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Кочергин Денис Сергеевич

e-mail: sir.cod4@yandex.ru, аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Поступила 23.03.2021

Постановка задачи

Известно [1], что при взрывном (импульсном) воздействии на балочные элементы конструкций их деформирование осуществляется во время свободных колебаний уже после действия такой нагрузки. В работе [1] в рамках принятых в ней допущений получено уравнение свободных колебаний балки свободно опертой по концам на недеформируемые опоры при воздействии на неё в воде взрывной нагрузки. Это уравнение в частных производных пятого порядка при выполнении краевых и начальных условий решено методом разделения переменных, а именно: решение представлено произведением неизвестной функции времени на функцию прогибов, которая выбрана так, что удовлетворяются краевые условия закрепления балки и принцип наименьшего действия – наименьшей работы деформирования [1]. Функция времени найдена из решения обыкновенного дифференциального уравнения, полученного после подстановки выбранной функции прогибов в исходное определяющее уравнение движения.

Весьма актуальной задачей исследований поведения балки в воде при действии на нее взрывной нагрузки является нахождение условий её гарантированного разрушения или гарантированной взрывостойкости.

Рассмотрим задачу о гарантированном разрушении. Следуя работам [2], [3], условие гарантированного разрушения применим в виде

$$|M_{\max}| \geq K_{0*} \cdot \mu_3 \cdot \delta_{*n} \cdot W, \quad (1)$$

где μ_3 – коэффициент динамичности материала ($\mu_3 = \frac{\delta_{*3}}{\delta_*}$, δ_{*3} – динамический предел прочности, δ_* – статический предел прочности), K_{0*} – коэффициент однородности на гарантированное разрушение ($K_{0*} = \frac{\delta_{*\max}}{\delta_{*0}}$, δ_{*0} – нормированный браковочный минимум, $\delta_{*\max}$ – максимальное сопротивление материала), δ_{*n} – нормативное сопротивление материала при изгибе, W – момент сопротивления балки.

В работе [1] получено определяющее уравнение свободных колебаний балки, свободно опертой на недеформируемые опоры под действием взрыва заряда ВВ в воде:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} = 0, \quad (2)$$

в течение которых происходит её деформирование, при этом $w = w(x, t)$ – прогиб балки в сечении x в момент времени t ,

$$\beta_1 = \frac{EJ}{\rho}, \quad \beta_2 = \frac{\eta J}{\rho}, \quad \rho = \rho_0 + \rho_1, \quad (3)$$

E – модуль упругости материала балки, J – момент инерции площади её поперечного сечения, η – коэффициент вязкости, ρ_0 и ρ_1 – соответственно погонная (на единицу длины) плотность материала балки и присоединенной массы воды [2, 4].

Разделяя переменные, функцию прогибов $w(x, t)$ запишем в виде

$$w(x, t) = w_0(t) \cdot \cos \frac{\pi x}{l}, \quad (4)$$

где функция времени $w_0(t)$ определяет прогиб среднего сечения балки в любой момент времени t . Подстановка функции (4) в уравнение движения (5) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции $w_0(t)$

$$\ddot{w}_0(t) + \gamma_2 \dot{w}_0(t) + \gamma_1 w_0(t) = 0, \quad (5)$$

при этом точки над искомой функцией означают ее производные соответствующих порядков по времени, а константы γ_1 и γ_2 вычисляются по формулам [1]:

$$\gamma_1 = \frac{\pi^4}{l^4} \beta_1, \quad \gamma_2 = \frac{\pi^4}{l^4} \beta_2. \quad (6)$$

Дискриминант D характеристического уравнения $\lambda^2 + \gamma_2 \lambda + \gamma_1 = 0$, равный $D = \gamma_2^2 - 4\gamma_1$ определяет интервал значений коэффициента вязкости η материала балки при данной скорости деформирования, а также форму решения задачи.

Действительно, для случая $D > 0$, получим интервал

$$\eta > 2 \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E\rho}{J}} \quad (7)$$

Решение уравнения (5) должно удовлетворять начальным условиям [1]:

$$w_0(0) = 0; \quad (8)$$

$$\dot{w}_0(0) = \delta, \quad (9)$$

при этом

$$\delta = \frac{bK_1 A_0 C}{\rho a^2}, \quad (10)$$

b – ширина балки, K_1 – коэффициент формы [2], учитывающий расположение балки по отношению к фронту возмущения, A_0 – параметр, характеризующий ВВ заряда, например, для тротила, $A_0 = 400 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, a – расстояние заряда ВВ до оси балки, C – масса заряда ВВ.

Для интервала η , определяемого неравенством (7), решение уравнения (5) имеет вид

$$w_0(t) = C_1 \left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t} \right), \quad (11)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(-\gamma_2 + \sqrt{D} \right), \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} \left(\gamma_2 + \sqrt{D} \right), \quad (12)$$

$$C_1 = \frac{\delta}{\sqrt{D}}. \quad (13)$$

Максимальное значение прогиба в центре балки будет в момент t_* , для которого скорость прогиба обратится в нуль, то есть

$$\dot{w}_0(t_*) = 0 \quad (14)$$

Из соотношения (14) найдем

$$t_* = \frac{1}{\sqrt{D}} \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad (15)$$

$$w_0(t_*) = C_1 \left(e^{\lambda_1 t_*} - e^{\lambda_2 t_*} \right) \quad (16)$$

Учитывая соотношение для максимального изгибающего момента

$$M_{\max} = -EJ \frac{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{\max}}{\left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{\max}^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (17)$$

и пренебрегая по малости величиной $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{\max}^2 \ll 1$, получим для максимального прогиба в центре балки (для $x = 0$)

$$|M_{\max}| = EJ \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot w_0(t_*) = EJ \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{\delta}{\sqrt{D}} \left(e^{\lambda_1 t_*} - e^{\lambda_2 t_*}\right) \quad (18)$$

Подставив выражение для $|M_{\max}|$ из (18) в (1), получим для условия гарантированного разрушения соотношение

$$EJ \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{\delta}{\sqrt{D}} \left(e^{\lambda_1 t_*} - e^{\lambda_2 t_*}\right) \geq K_{0*} \mu_3 \delta_{*n} W \quad (19)$$

Учитывая соотношение для δ (10) найдем выражение для массы заряда ВВ

$$C \geq \frac{K_{0*} \mu_3 \delta_{*n} W \cdot \sqrt{D} \cdot \rho a^2 \left(\frac{l}{\pi}\right)^2}{EJbK_1 A_0 (1 - e^{-t_* \sqrt{D}})} \cdot e^{-\lambda_1 t_*} \quad (20)$$

Таким образом, для рассматриваемого интервала значений коэффициента вязкости гарантированное разрушение балки согласно принятому критерию (1) произойдет, если будет использован заряд фиксированного ВВ массой не менее величины, определяемой соотношением (20).

Рассмотрим случай, когда $D = 0$. Для этого случая получаем единственное значение коэффициента вязкости

$$\eta = 2 \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E\rho}{J}} \quad (21)$$

и решение

$$w_0(t) = \delta t e^{\lambda t}, \lambda = \frac{-\gamma_2}{2}, \quad (22)$$

при этом

$$t_* = \frac{2}{\gamma_2} \quad (23)$$

Следовательно,

$$w_0(t_*) = \delta t_* e^{\lambda t_*} \quad (24)$$

Аналогично (18) найдем

$$|M_{\max}| = EJ \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 w_0(t_*) = EJ \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \delta \frac{2}{\gamma_2} e^{-1} \quad (25)$$

Подставив $|M_{\max}|$ из (25) в (1), получим

$$EJ \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \delta \frac{2}{\gamma_2} \geq K_{0*} \mu_3 \delta_{*n} W \quad (26)$$

Учитывая выражение для δ (10) из (26) найдём

$$C \geq \frac{K_{0*} \mu_3 \delta_{*n} W \cdot \rho a^2 \gamma_2 e \left(\frac{l}{\pi}\right)^2}{2EJbK_1 A_0} \quad (27)$$

В третьем случае, когда $D < 0$, находим интервал для η :

$$0 < \eta < 2 \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E\rho}{J}} \quad (28)$$

и решение

$$w_0(t) = \frac{2\delta}{\sqrt{D_1}} e^{-\frac{\gamma_2}{2}t} \cdot \sin \frac{\sqrt{D_1}}{2} t, D_1 = -D \quad (29)$$

$$t_* = \frac{2}{\sqrt{D_1}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{D_1}}{\gamma_2}$$

$$w_0(t_*) = \frac{2\delta}{\sqrt{D_1}} e^{-\frac{\gamma_2}{2} t_*} \cdot \sin \frac{\sqrt{D_1}}{2} t_*$$

$$|M_{\max}| = EJ \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{2\delta}{\sqrt{D_1}} e^{-\frac{\gamma_2}{2} t_*} \cdot \sin \frac{\sqrt{D_1}}{2} t_* \quad (30)$$

Из условия (1) с учетом (30) находим

$$C \geq \frac{K_{0*} \mu_3 \delta_{*n} W \cdot \sqrt{D_1} \cdot \rho a^2 \left(\frac{l}{\pi} \right)^2}{2EJbK_1 A_0 \cdot \sin \frac{\sqrt{D_1}}{2} t_*} e^{\frac{\gamma_2}{2} t_*} \quad (31)$$

Предположим теперь, что по данным экспериментов для выбранной скорости деформации определены величины модуля упругости и коэффициента вязкости материала балки. Тогда, минимальная масса заряда ВВ определенного вида (с определенными энергетическими характеристиками), необходимая для гарантированного разрушения балки в воде может быть определена по одной из формул (20), (27), (31), в зависимости от того, в каком интервале значений окажется величина η .

Анализ взрывостойкости балочной конструкции проводится по аналогичной методике заменой знака неравенства на противоположный в соотношении (1).

В качестве примера рассмотрим металлическую балку прямоугольного поперечного сечения, из стали (Ст.3), лежащую на недеформируемых опорах в воде; длина балки $l = 2$ м, ширина сечения $b = 0,08$ м, высота сечения $h = 0,1$ м, коэффициент однородности на гарантированное разрушение $K_{0*} = 1,644$, нормированный браковочный минимум $\delta_{*0} = 2,35 \times 10^7$ Па, коэффициент динамичности $\mu_3 = 2$, модуль упругости $E = 2,1 \times 10^{11}$ Па. Заряд расположен над серединой балки на высоте $a = 1$ м, обобщенный параметр энергетической характеристики ВВ заряда (тротил) $A_0 = 400 \frac{\text{М}}{\text{с}}$. Согласно исследованиям, проведенным в работе [5], коэффициент вязкости $\eta = 1 \times 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}$, $\rho_0 = 62,4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ (сталь), $\rho_1 = 8 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ (вода), момент инерции $J = 6,667 \times 10^{-6} \text{м}^4$, $W = 1,333 \times 10^{-4} \text{м}^3$. Используя формулу (3) получаем $\beta_1 = 1,989 \times 10^4 \frac{\text{м}^4}{\text{с}^2}$, $\beta_2 = 9,47 \times 10^{-3} \frac{\text{м}^4}{\text{с}}$. Исходя из уравнений (6) получаем $\gamma_1 = 1,211 \times 10^5 \frac{1}{\text{с}^2}$, и $\gamma_2 = 0,058 \frac{1}{\text{с}}$.

Как отмечено ранее, значение дискриминанта D характеристического уравнения $\lambda^2 + \gamma_2 \lambda + \gamma_1 = 0$ определяет интервал значений коэффициента вязкости материала балки. В данном примере $D = -4,843 \times 10^5 \frac{1}{\text{с}}$ и, следовательно, корни комплексные и решение определяется формулой (29). Исходя из соотношений (29), найдём величину $t_* = 4.514 \cdot 10^{-3}$. После подстановки этих данных в соотношение (31) для массы C получаем $C \geq 2,283$ кг. Если рассматривать эту же балку, находящуюся в воздухе, то получаем заряд, массой $C \geq 2,15$ кг.

Заключение

В работе решена актуальная задача по нахождению условий гарантированного разрушения (гарантированной взрывостойкости) балочных элементов конструкций, расположенных в воде, импульсной нагрузкой, созданной взрывом сосредоточенного заряда конденсированного ВВ. Задача решена аналитически в рамках принятых

допущений. Приведен пример расчетов для стальной балки прямоугольного поперечного сечения. Полученный результат свидетельствует о том, что для гарантированного разрушения балочной конструкции, расположенной в воде, требуется масса заряда большая, чем для такой же балки, расположенной в воздухе. Это соответствует физическому смыслу явления, поскольку при взрыве заряда в воде его энергия дополнительно расходуется на приведение в движение слоев жидкости, окружающих балочную конструкцию.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Володин Г. Т., Кочергин Д. С. Деформирование упруго-вязких балок взрывной нагрузкой в воде // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 1(47). С. 56–63.
- [2] Саламахин Т.М. Разрушение взрывом элементов конструкций. Москва: ВИА, 1961. 275 с.
- [3] Володин Г. Т. Действие взрыва зарядов конденсированных ВВ в газовой и жидкой среде. Часть 2. Взрывостойкость и гарантированное разрушение элементов конструкций. Тула: «Левша», 2005. 160 с.
- [4] Кочин Н.Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, часть 1. Москва: ГИФМЛ, М, 1963. 584 с.
- [5] Ильюшин А.А. Об испытании металлов при больших скоростях. Инженерный сборник. Москва, 1941. С. 13–26.

G. T. Volodin, D. S. Kochergin

**CONDITIONS FOR GUARANTEED DESTRUCTION AND EXPLOSION
RESISTANCE OF BEAM STRUCTURAL ELEMENTS IN THE EVENT OF AN
EXPLOSION IN WATER**

Tula State University, Tula, Russia.

Abstract. According to the data of the authors' earlier studies, the conditions of guaranteed destruction and guaranteed explosion resistance of a beam freely lying on non-deformable supports in water were found. The impulse dynamic load is created by the explosion of a concentrated charge of a condensed explosive (HE) located in water at a fixed distance from the beam. Destruction is understood as the loss of the bearing capacity of the beam due to the appearance of plastic zones (hinges), cracks, and fragmentation in it. The criterion of destruction generalized to the action of dynamic load is used, based on the achievement of critical values by the maximum bending moment.

Keywords: beam, impulse load, explosion in water, added mass, maximum bending moment, dynamic criterion of failure.

REFERENCES

- [1] Volodin G. T., Kochergin D. S. Deformation of elastic-viscous beams by explosive loading in water // Bulletin of the I. Ya. Yakovlev ChSPU. Series: Limit State Mechanics. 2021. no. 56-63. p. 1(47). (in Russian).
- [2] Salamakhin T. M. Explosion destruction of structural elements. Moscow: VIA, 1961. 275 p. (in Russian).
- [3] Volodin G. T. The effect of the explosion of charges of condensed explosives in a gas and liquid medium. Part 2. Explosion resistance and guaranteed destruction of structural elements. Tula: Lefty, 2005. 160 p. (in Russian).
- [4] Kochin N. E., Kibel I. A., Rose N. V. Theoretical hydromechanics, part 1. Moscow: GIFML, 1963. 584 p. (in Russian).
- [5] Ilyushin A. A. On testing metals at high speeds. Engineering Collection. Moscow, 1941. P. 13–26. (in Russian).

Volodin Gennady Timofeevich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Tula State University, Tula, Russia.

Kochergin Denis Sergeevich, Postgraduate Student, Tula State University, Tula, Russia.

Ю. В. Немировский^{1,2}, А. А. Тырымов³

О МОДЕЛИРОВАНИИ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЙ В НЕТРОНУТЫХ СЛОИСТЫХ МАССИВАХ ГОРНЫХ ПОРОД

¹ *Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

² *Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия*

³ *Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия*

Аннотация. Предложена структурная модель анизотропной среды для расчета напряженно-деформированного состояния в нетронутых массивах горных пород, которая учитывает ряд горнотехнических и горно-геологических факторов. Результаты аналитического решения позволили объяснить известные из практики натуральных наблюдений факты (возможность превосходства горизонтальных напряжений над вертикальными, кусочно-линейный характер напряжений и т.д.), которые находились в противоречии с широко распространенными гипотезами о распределении напряжений в породных массивах.

Ключевые слова: теория упругости, плоская деформация, массив горных пород, слоистость

DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.003

УДК: 539.3+622.831

Введение. Исследование линейных процессов деформирования в слоистых средах охватывает широкий круг важных вопросов. Конструкции, имеющие слоистую структуру состоящую из слоев с различными физико-механическими свойствами, широко используются в современной технике. Определенную специфику имеют задачи геомеханики, связанные с изучением упругого равновесия слоистых сред под действием сил тяжести. Актуальными остаются две основные задачи горной науки - определение

© Немировский Ю. В., Тырымов А. А. 2021

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemiryuy@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, профессор, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Тырымов Александр Александрович

e-mail: tyrymov2010@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Волгоградского государственного университета, Волгоград, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00038.

Поступила 20.05.2021

напряженного состояния горного массива до проведения в нем горных работ и перераспределение его в результате прохождения выработок [1,2]. Без знания естественного напряженного состояния горных пород невозможно, например, дать надежные расчеты конструкций подземных сооружений, выяснить механизм и природу таких неблагоприятных явлений, как горные удары и внезапные выбросы угля и газа. Многие вопросы тектоники, геофизики и сейсмологии требуют анализа природного поля напряжений.

В исследованиях по механике горных пород широкое распространение получил подход, в котором нетронутый массив считают однородным изотропным упругим полупространством, нагруженным собственным весом, причем при изучении его напряженного состояния обычно предполагают, что горизонтальная и вертикальная компоненты напряжения связаны между собой зависимостями, соответствующими гипотезам о гидростатическом или эмпирически-негидростатическом распределении напряжений [2]. Однако накопленный к настоящему времени большой экспериментальный объем данных свидетельствует о сложном характере распределений напряжений в массивах горных пород. В большинстве случаев в нетронутых горными работами массивах пород вертикальная компонента напряжений обусловлена весом пород вышележащей толщи. В то же время многочисленными натурными измерениями доказано, что горизонтальные напряжения могут превышать в несколько раз величину веса вышележащих пород [3]. Факт существования в нетронутых массивах горизонтальных напряжений превосходящих вертикальные часто объясняют действием современных тектонических процессов. Но экспериментальные данные говорят о том, что в областях массива пород слоистого строения, удаленных от земной поверхности уже от 5-10 метров обнаруживается эффект превышения горизонтальных напряжений над вертикальными [3]. Поэтому вывод о действии тектонических сил, сделанный только на основании того, что в нетронутых массивах пород горизонтальная составляющая напряжений превосходит вертикальные представляется неубедительным. Реальный горный массив представляет весьма сложную в механическом отношении среду, и точность решения задачи о напряженном состоянии массива в значительной степени зависит от полноты учета свойств рассматриваемой среды. Важными горно-геологическими факторами, влияющими на распределение напряжений, учет которых особенно необходим при исследовании в масштабах всего месторождения полезного ископаемого, являются расстояние от дневной поверхности, слоистость горных пород, мощность пластов, их количество, изменение напряжений по мощности пластов, рельеф земной поверхности. Однако эти факторы (особенно в совокупности) оказываются вне поля зрения исследователей. Анализ физической стороны явлений, протекающих в слоистых структурах, явно недостаточен. Для устранения этого недостатка необходимы дальнейшие аналитические и численные исследования в механике горных пород. Точные аналитические решения дают возможность строго и обоснованно изучить широкий класс упрощенных, так называемых, модельных задач и при этом выявить принципиальные качественные и количественные закономерности распределения напряжений в горных массивах.

В горно-геологической практике часто встречаются горные массивы, сложенные однообразными в петрографическом отношении породами, причем, основные элементы, обуславливающие их неоднородность, обладают незначительными линейными размерами по сравнению с масштабами исследуемого геологического объекта. В то же время массив горных пород, линейные размеры которого намного превышают размеры

выделенных элементарных блоков ("порождающих бесконечно малых элементов"), а размеры элементарных блоков, в свою очередь, значительно больше средних размеров элементов, можно в среднем считать однородным в пределах всей области, занятой данным массивом. При исследовании напряженного состояния в горном массиве такой условный переход к однородному геологическому телу позволяет дать характеристику общей картины распределения напряжений в среднем в данном массиве.

Математическая модель. Примеры численных результатов. Рассмотрим наклонно-слоистый массив горных пород, состоящий из большого числа свит пластов, отделённых друг от друга слоями породы. Предполагается, что упругие свойства, удельные веса и мощности однородных изотропных пластов, входящих в свиту, произвольны, но неизменны для любой из свит. Считаем также, что расстояния между свитами различаются незначительно. Кроме того, предполагается, что на плоскопараллельных линиях контакта между соседними пластами свиты, а также между крайними пластами свиты и породой существует жесткая связь. В этом случае вопрос о распределении напряжений в нетронутом горном массиве с достаточной степенью точности может быть заменен исследованием напряженно-деформированного состояния бесконечного числа наклонных плоскопараллельных слоев.

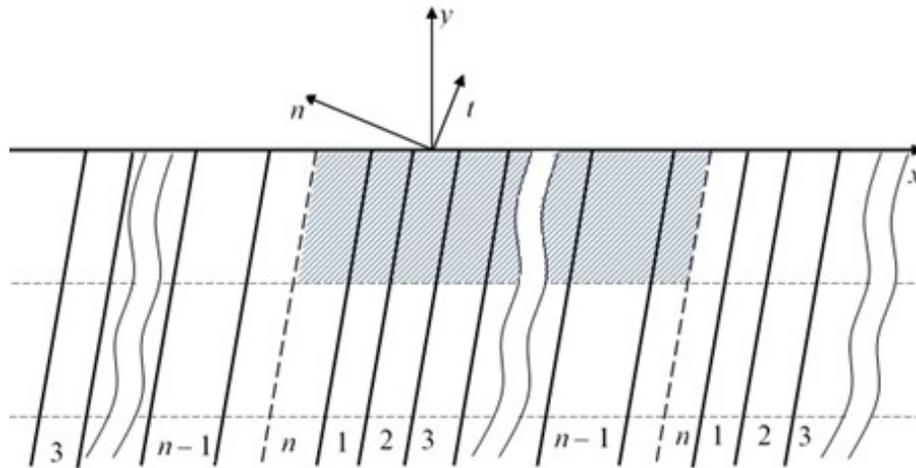


Рис. 1. Схема к расчету напряженного состояния горного массива с правильной слоистостью

Шахтное поле подобного месторождения, обладающего, как мы будем говорить, правильной слоистостью, разобьем на совокупность элементарных подобластей способом, указанным на рис. 1. Линии, осуществляющие это разбиение, проведены на рис. 1 пунктиром, а один элемент разбиения заштрихован. Система координат (t, n) получена поворотом системы координат (x, y) на угол наклона слоев к дневной поверхности. Учитывая наличие жесткого сцепления на линиях контакта частей, составляющих выделенный элемент, введем в каждой подобласти усредненные поля напряжений, деформаций, перемещений, а также усредненный удельный вес следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
\sigma_n^{(1)} &= \sigma_n^{(2)} = \dots = \sigma_n^{(n)} = \sigma_n, \\
\sigma_{tn}^{(1)} &= \sigma_{tn}^{(2)} = \dots = \sigma_{tn}^{(n)} = \sigma_{tn}, \\
U_t^{(1)} &= U_t^{(2)} = \dots = U_t^{(n)} = U_n, \\
\sigma_t &= \frac{1}{H} \sum_{k=1}^n h_k \sigma_t^{(k)}, \quad \varepsilon_n = \frac{1}{H} \sum_{k=1}^n h_k \varepsilon_n^{(k)}, \\
\varepsilon_{tn} &= \frac{1}{H} \sum_{k=1}^n h_k \varepsilon_{tn}^{(k)}, \quad \gamma = \frac{1}{H} \sum_{k=1}^n h_k \gamma_k
\end{aligned} \tag{1}$$

где σ_t, σ_n – нормальные напряжения, σ_{tn} – касательное напряжение, $\varepsilon_n, \varepsilon_{tn}$ – относительная линейная деформация в направлении оси On и деформация сдвига соответственно, U_t – компонента вектора смещения в направлении оси Ot , γ_k – удельный вес k -го слоя, h_k – мощность k -го слоя, $H = \sum_{k=1}^n h_k$, n – количество различных по свойствам периодически чередующихся слоев горного массива.

Верхний индекс в круглых скобках в формулах (1) характеризует принадлежность к соответствующему слою, причем, значение k от 1 до $n - 1$ относятся к пластам свиты, а значение k , равное n , к породе (обоим внешним слоям элемента). Предлагаемая модель горного массива обобщает результаты работы [4], где предполагалось, что шахтное поле представлено двоякочередующимися слоями. Кроме того, что особенно важно, в [4] напряжения внутри слоев порождающего блока не рассматривались. Заметим также, что формулы (1) являются обобщением и дальнейшим развитием применительно к механике горных пород структурного подхода В.В.Болотина [5], используемого в механике композиционных материалов.

Из условий жесткого сцепления $U_t^{(1)} = U_t^{(2)} = \dots = U_t^{(n)} = U_t$ следует

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_t^{(1)}}{\partial t} &= \frac{\partial U_t^{(2)}}{\partial t} = \dots = \frac{\partial U_t^{(n)}}{\partial t} = \frac{\partial U_t}{\partial t} \\
&\text{или} \\
\varepsilon_t^{(1)} &= \varepsilon_t^{(2)} = \dots = \varepsilon_t^{(n)} = \varepsilon_t.
\end{aligned} \tag{2}$$

Обозначая модули Юнга и коэффициенты Пуассона k -го слоя через E_k, ν_k соответственно и пользуясь известными соотношениями между деформациями и напряжениями для плоскодеформированного состояния [6]

$$\varepsilon_t^{(k)} = \frac{1 - \nu_k^2}{E_k} \left(\sigma_t^{(k)} - \frac{\nu_k}{1 - \nu_k} \sigma_n \right) \quad (k = \overline{1, n}) \tag{3}$$

а также соотношением (2), найдем

$$\varepsilon_t \sum_{k=1}^n \frac{h_k E_k}{1 - \nu_k^2} = \sum_{k=1}^n h_k \sigma_t^{(k)} - \sigma_n \sum_{k=1}^n \frac{h_k \nu_k}{1 - \nu_k}.$$

Отсюда с учетом четвертого соотношения в (1) получим

$$\varepsilon_t = a_{11} \sigma_t + a_{12} \sigma_n. \tag{4}$$

Здесь

$$a_{11} = H \left(\sum_{k=1}^n \frac{h_k E_k}{1 - \nu_k^2} \right)^{-1}, \quad a_{12} = - \left(\sum_{k=1}^n \frac{h_k \nu_k}{1 - \nu_k} \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{h_k E_k}{1 - \nu_k^2} \right)^{-1}. \quad (5)$$

Пятое соотношение из (1) с помощью зависимостей

$$\varepsilon_n^{(k)} = \frac{1 - \nu_k^2}{E_k} \left(\sigma_n - \frac{\nu_k}{1 - \nu_k} \sigma_t^{(k)} \right),$$

выражения для $\sigma_t^{(k)}$, вытекающего из (3), а также формулы (4) может быть представлено в виде

$$\varepsilon_n = a_{21} \sigma_t + a_{22} \sigma_n, \quad (6)$$

где

$$a_{21} = a_{12}, \quad a_{22} = \frac{1}{H} \left[\sum_{k=1}^n \frac{(1 + \nu_k)(1 - 2\nu_k) h_k}{(1 - \nu_k) E_k} + \left(\sum_{k=1}^n \frac{h_k \nu_k}{1 - \nu_k} \right)^2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{h_k E_k}{1 - \nu_k^2} \right)^{-1} \right] \quad (7)$$

Наконец, из предпоследнего соотношения (1) с использованием известных формул

$$\varepsilon_{tn}^{(k)} = \frac{1}{G_k} \sigma_{tn}^{(k)} = \frac{1}{G_k} \sigma_{tn} \quad (k = \overline{1, n})$$

получим

$$\varepsilon_{tn} = \frac{1}{G} \sigma_{tn}, \quad (8)$$

где

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{H} \sum_{k=1}^n \frac{h_k}{G_k}, \quad \frac{1}{G_k} = \frac{2(1 + \nu_k)}{E_k}. \quad (9)$$

В частности, при чередовании двух слоев (пласта и породы) из формул (5), (7), (9) при $n = 2$ будем иметь следующие выражения для упругих характеристик a_{11} , a_{12} , a_{22} , G^{-1} :

$$\begin{aligned} a_{11} &= (l + 1) (1 - \nu_1^2) (1 - \nu_2^2) R^{-1}, \\ a_{12} &= - (1 + \nu_1) (1 + \nu_2) [l \nu_1 (1 - \nu_2) + \nu_2 (1 - \nu_1)] R^{-1}, \\ a_{22} &= \left\{ \left[(1 + \nu_2)^2 (1 - 2\nu_2) \frac{E_1}{E_2} + (1 + \nu_1)^2 (1 - 2\nu_1) \frac{E_2}{E_1} \right] + \right. \\ &\quad \left. + (1 + \nu_1) (1 + \nu_2) \left[(l^2 + 1) (1 - \nu_1 - \nu_2) + \nu_1 \nu_2 (l + 1)^2 \right] \right\} / [(l + 1) R], \\ G^{-1} &= (l + 1)^{-1} (l G_1^{-1} + G_2^{-1}), \end{aligned} \quad (10)$$

где для краткости записи введены обозначения

$$l = h_1/h_2, \quad R = l (1 - \nu_2^2) E_1 + (1 - \nu_1^2) E_2. \quad (11)$$

Применяя формулы, связывающие компоненты напряжений в локальной системе координат с их компонентами в основной системе [6]:

$$\begin{aligned}
\sigma_t &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \sigma_{xy} \sin 2\alpha, \\
\sigma_n &= \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - \sigma_{xy} \sin 2\alpha, \\
\sigma_{tn} &= -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{xy} \cos 2\alpha
\end{aligned} \tag{12}$$

и аналогичные формулы для компонент деформаций, вместо уравнений (4), (6), (8) получим

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= b_{11}\varepsilon_x + b_{12}\varepsilon_y + b_{13}\varepsilon_{xy}, \\
\sigma_y &= b_{21}\varepsilon_x + b_{22}\varepsilon_y + b_{23}\varepsilon_{xy}, \\
\sigma_{xy} &= b_{31}\varepsilon_x + b_{32}\varepsilon_y + b_{33}\varepsilon_{xy},
\end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \frac{1}{2\Delta} [2a_{11} \sin^4 \alpha + 2a_{22} \cos^4 \alpha + (2G\Delta - a_{12}) \sin^2 2\alpha], \\
b_{22} &= \frac{1}{2\Delta} [2a_{11} \cos^4 \alpha + 2a_{22} \sin^4 \alpha + (2G\Delta - a_{12}) \sin^2 2\alpha], \\
b_{33} &= \frac{1}{4\Delta} [(a_{11} + 2a_{12} + a_{22}) \sin^2 2\alpha + 4G\Delta \cos^2 2\alpha], \\
b_{12} = b_{21} &= \frac{1}{4\Delta} [(a_{11} + 2a_{12} + a_{22} - 4G\Delta) \sin^2 2\alpha - 4a_{12}], \\
b_{13} = b_{31} &= -\frac{\sin 2\alpha}{2\Delta} [a_{11} \sin^2 \alpha + a_{22} \cos^2 \alpha + (2G\Delta - a_{12}) \cos^2 2\alpha], \\
b_{23} = b_{32} &= -\frac{\sin 2\alpha}{2\Delta} [a_{11} \cos^2 \alpha - a_{22} \sin^2 \alpha - (2G\Delta - a_{12}) \cos^2 2\alpha],
\end{aligned}$$

Здесь $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, α - угол наклона слоев к дневной поверхности.

Соотношения (13) позволяют заменить задачу о распределении напряжений в горном массиве с правильной слоистостью исследованием напряженно-деформированного состояния однородной, но теперь уже анизотропной полуплоскости. Это состояние может быть найдено путем решения системы из уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \gamma$$

и уравнений (13) при граничных условиях $\sigma_y = \sigma_{xy} = 0$ на дневной поверхности при $y = 0$ в предположении, что компоненты перемещений не зависят от координаты X , так как в полученной анизотропной среде вследствие симметрии относительно произвольной вертикальной оси отсутствует возможность для их изменения в направлении X (если не учитывать тектонических процессов). В результате получим

$$\sigma_x = \lambda \gamma y, \sigma_y = \gamma y, \sigma_{xy} = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \{ [1 - G(a_{11} + a_{22} - 2a_{12})] \sin^2 2\alpha - 4G\alpha_{12} \} R_1^{-1}, \\ R_1 &= \sin^2 2\alpha + 2G(2a_{11} \cos^4 \alpha + a_{12} \sin^2 2\alpha + 2a_{22} \sin^4 \alpha), \\ U &= -2\Delta b_{23} R_1^{-1} \gamma y^2, \quad V = 2\Delta b_{33} R_1^{-1} \gamma y^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Заметим, что соотношение (15) является обобщением гипотезы А.Н.Динника [2]; коэффициент бокового давления зависит при этом не только от упругих свойств горных пород, но и от угла их падения, причем, формула А.Н.Динника представлена в (15) как предельный случай для изотропной полуплоскости, если принять

$$E_1 = E_2 = \dots = E_n, \quad \nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n, \quad ,$$

а также для горизонтальных слоев, у которых одинаков коэффициент Пуассона ($\alpha = 0, \nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n$).

Наряду с изучением общих закономерностей напряженного состояния в анизотропном горном массиве, полученном с помощью усреднения, наибольший интерес представляет распределение напряжений внутри выделенных макроструктурных "бесконечно малых элементарных объемов имеющих кусочно-однородное строение, т.е. выявление особенностей поведения напряжений в пластах свиты ($\sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}$), где $k = 1, 2, \dots, n-1$ и в породе ($\sigma_x^{(n)}, \sigma_y^{(n)}, \sigma_{xy}^{(n)}$). Это связано с тем, что сведения о напряженном состоянии в отдельных слоях важно знать и использовать уже на стадии проектирования горных предприятий при решении многофакторной задачи по созданию в определенном смысле оптимального проекта. Так, например, их необходимо учитывать при выборе расположения и направления проведения горизонтальных выработок, в расчетах и рекомендациях по применению тех или иных способов крепления.

Искомое распределение напряжений определим, применяя формулы преобразования компонента тензора напряжений при переходе от локальной системы координат (t, n) к основной системе (x, y) и учитывая, что в силу жесткого сцепления слоев внутри "элементарной" подобласти

$$\sigma_n^{(1)} = \sigma_n^{(2)} = \dots = \sigma_n^{(n)} = \sigma_n \quad \text{и} \quad \sigma_{tn}^{(1)} = \sigma_{tn}^{(2)} = \dots = \sigma_{tn}^{(n)} = \sigma_{tn}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)} &= \sigma_t^{(k)} \cos^2 \alpha + \sigma_n \sin^2 \alpha - \sigma_{tn} \sin 2\alpha, \\ \sigma_y^{(k)} &= \sigma_t^{(k)} \sin^2 \alpha + \sigma_n \cos^2 \alpha + \sigma_{tn} \sin 2\alpha, \\ \sigma_{xy}^{(k)} &= (\sigma_t^{(k)} - \sigma_n) \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{tn} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $k = 1, 2, \dots, n$.

Подставляя теперь выражения (14) в формулы (12), будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \gamma (\lambda \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) y, \quad \sigma_n = \gamma (\lambda \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) y, \\ \sigma_{tn} &= \gamma (1 - \lambda) y \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя затем формулы (16), а также соотношения (3), (4) и (17), получим распределение напряжений в любом k -ом слое ($k=1,2,\dots,n$):

$$\begin{aligned}
\sigma_x^{(k)} &= \left[\frac{E_k}{1-\nu_k^2} a_{11} (\lambda \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \cos^2 \alpha + \left(\frac{E_k}{1-\nu_k^2} a_{12} \cos^2 \alpha + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\nu_k \cos 2\alpha + \sin^2 \alpha}{1-\nu_k} \right) (\lambda \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - \frac{1}{2} (1-\lambda) \sin^2 2\alpha \right] \gamma y, \\
\sigma_y^{(k)} &= \left[\frac{E_k}{1-\nu_k^2} a_{11} (\lambda \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \sin^2 \alpha + \left(\frac{E_k}{1-\nu_k^2} a_{12} \sin^2 \alpha + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\cos^2 \alpha - \nu_k \cos 2\alpha}{1-\nu_k} \right) (\lambda \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \frac{1}{2} (1-\lambda) \sin^2 2\alpha \right] \gamma y, \\
\sigma_{xy}^{(k)} &= \left[\frac{E_k}{1-\nu_k^2} a_{11} (\lambda \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \frac{E_k a_{12} + (1+\nu_k)(2\nu_k-1)}{1-\nu_k^2} (\lambda \sin^2 \alpha + \right. \\
&\quad \left. + \cos^2 \alpha) + (1-\lambda) \cos 2\alpha \right] \gamma y \sin \alpha \cos \alpha.
\end{aligned} \tag{18}$$

В частности, если чередуются два слоя (пласт и порода), то из формулы (18) с учетом (10) для нормальных компонент тензора напряжений получим

$$\sigma_x^{(1)} = \gamma A R^{-1} y, \quad \sigma_y^{(1)} = \gamma B R^{-1} y, \quad \sigma_x^{(2)} = \gamma C R^{-1} y, \quad \sigma_y^{(2)} = \gamma D R^{-1} y, \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned}
A &= \lambda l (1-\nu_2^2) E_1 + c_2 E_1 \cos^2 \alpha + a_1 E_2, \\
B &= l (1-\nu_2^2) E_1 + c_2 E_1 \sin^2 \alpha + b_1 E_2, \\
C &= l (a_2 E_1 + c_1 E_2 \cos^2 \alpha) + \lambda (1-\nu_1^2) E_2, \\
D &= l (b_2 E_1 + c_1 E_2 \sin^2 \alpha) + (1-\nu_1^2) E_2.
\end{aligned}$$

Здесь для краткости записи принято

$$\begin{aligned}
a_k &= (1+\nu_k) [\lambda (1+\cos^2 \alpha - \nu_k) \sin^2 \alpha + (\nu_k - \sin^2 \alpha) \cos^2 \alpha], \\
b_k &= (1+\nu_k) [\lambda (\nu_k + \cos^2 \alpha) \sin^2 \alpha + (1 - \sin^2 \alpha - \nu_k) \cos^2 \alpha], \\
c_k &= (1+\nu_k) [\lambda (\cos^2 \alpha - \nu_k) + \sin^2 \alpha - \nu_k], \quad (k=1, 2)
\end{aligned}$$

Рассмотрим, наряду с "усредненным коэффициентом бокового давления" λ , соответствующие отношения горизонтальных напряжений к вертикальным в пластах свиты и в породе. Они определяются по формулам

$$\lambda_k = \sigma_x^{(k)} / \sigma_y^{(k)}, \quad (k=1, 2, \dots, n) \tag{20}$$

и существенно зависят от упругих свойств горных пород, составляющих слоистый массив, а также от угла падения слоев. Следует отметить, что формула Динника представлена в (20) как предельный случай для изотропной полуплоскости и для горизонтальных пластов, у которых одинаков коэффициент Пуассона. В этих случаях

$\lambda = \lambda_k = \nu(1 - \nu)^{-1}$. Если слои горизонтальные ($\alpha = 0$), то из формул (18), (20) получаем $\lambda_k = \nu_k(1 - \nu_k)^{-1}$.

Уже в этом частном случае коэффициент бокового давления в ниже лежащем слое может быть меньше соответствующего коэффициента в слое, лежащем выше.

Отметим также, что в полученных решениях напряжения в слоистых горных массивах имеют в зависимости от глубины кусочно-линейный характер, т.е. именно такой, какой неоднократно отмечался при обработке результатов натуральных замеров [3].

Для слоев вертикального залегания ($\alpha = \pi/2$) из формул (20) имеем

$$\lambda_k = \lambda \left[\frac{E_k}{1 - \nu_k^2} (a_{11} + \lambda a_{12}) + \lambda \frac{\nu_k}{1 - \nu_k} \right]^{-1} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

где $\lambda = -a_{12}/a_{22}$, причем a_{11} , a_{12} , a_{22} представлены в (5), (7). В частности, если чередуются два слоя (пласт и порода), то отсюда получим

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda R \{ \nu_1(1 + \nu_1) \lambda E_2 + E_1(1 + \nu_2) [1 + l - \nu_2(1 + l + \lambda)] \}^{-1}, \\ \lambda_2 &= \lambda R \{ l \nu_2(1 + \nu_2) \lambda E_1 + E_2(1 + \nu_1) [1 + l - \nu_1(1 + l + \lambda)] \}^{-1}, \end{aligned}$$

где λ вычисляется с помощью (15), а l и R определяются по формулам (11).

Исследования коэффициента бокового давления λ и выражений для λ_e , определяющих отношения горизонтальных напряжений к вертикальным в пластах свиты и в породе, показывают, что напряженное состояние горного массива может носить сложный характер, нередко значительно отличающийся от "геостатического". Расчеты показали, что отношение σ_x/σ'_o в однородной анизотропной среде для реальных горных пород изменяется в пределах 0,2-0,7 и не превосходит единицу. Заметим, что отличие напряженного состояния от динниковского характера усиливается с возрастанием относительной мощности слоев и с ростом различия модулей упругости слоев, т.е. с усилением анизотропии в свойствах слоистого массива. Характерным поведением усредненного коэффициента бокового давления λ от угла наклона слоев является его рост при переходе от горизонтального залегания слоев к пологим, а затем убывание для крутопадающих и вертикальных слоев. Наряду с изучением общих закономерностей напряженного состояния в анизотропном горном массиве, отметим некоторые особенности в поведении отношений горизонтальных напряжений к вертикальным, В расчетах ограничимся случаем двоякочередующихся слоев.

На рис.2 представлена зависимость отношения горизонтальных напряжений к вертикальным от угла наклона слоев, как для усредненного коэффициента бокового давления, так и для пласта и породы. В расчетах принято: $l=0,1$; $E_1/E_2 = 0,1$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$. Отношение горизонтальных напряжений к вертикальным в породе λ_2 имеет поведение, близкое к поведению λ . Соответствующее же отношение в пласте несколько убывая (при $\nu_1 = \nu_2$) с переходом от горизонтальной слоистости к пологим слоям, затем увеличивается для крутопадающих слоев, достигая в случае вертикальных слоев наибольших значений, превосходящих 1.

На рис.3 показано влияние коэффициента Пуассона пласта на отношение горизонтальных напряжений к вертикальным в пласте. В расчетах принято: $l=0,1$; $E_1/E_2 = 0,1$, $\nu_2 = 0,3$. Значения коэффициента Пуассона для пласта $\nu_1 = 0,2$ (график 1) и $\nu_1 = 0,1$ (график 2). При коэффициентах Пуассона породы, превосходящих коэффициент Пуассона пласта, отношение σ_x/σ_y в пласте (в отличие от случая $\nu_1 = \nu_2$) с

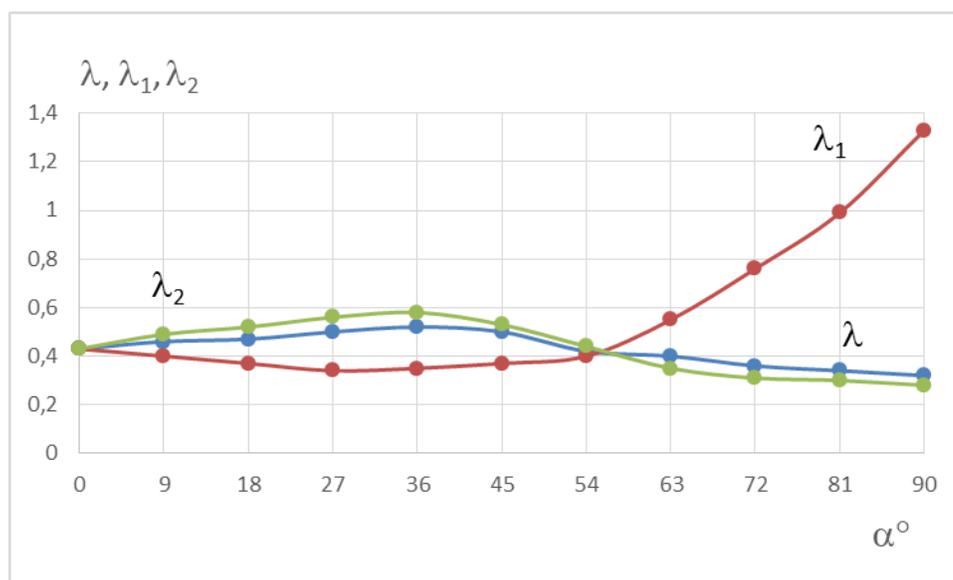


Рис. 2. Влияние угла наклона слоев на значения коэффициента бокового давления

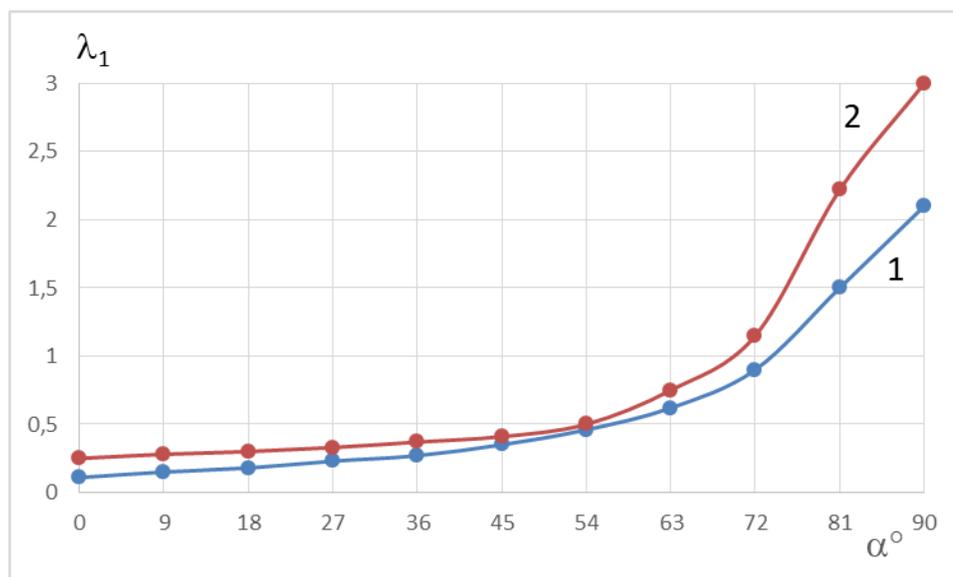


Рис. 3. Зависимость отношения горизонтальных напряжений к вертикальным в пласте при различных значениях коэффициента Пуассона

увеличением угла наклона слоев к дневной поверхности монотонно растет (рис. 3). При этом, как показывают расчеты, в крутопадающих и вертикальных пластах горизонтальные напряжения в 2-3 раза могут превосходить вертикальные.

Результаты расчетов, выполненных в широком диапазоне изменения параметров анизотропной среды, позволяют убедиться в существенном влиянии упругих постоянных слоев и угла падения на распределение напряжений в слоистом горном массиве. Предлагаемая модель слоистой среды, основанная на упругом взаимодействии слоев с различными физико-механическими свойствами под действием сил гравитации в состоянии объяснить результаты натурных измерений о превышении горизонтальных напряжений над вертикальными.

Заключение. В статье разработана методика аналитического исследования напряженного состояния в нетронутых слоистых торных массивах. Предложена модель, которая с учетом ряда горно-геологических факторов (влияния дневной поверхности, взаимодействия слоев, упругих характеристик, угла падения) позволяет определить напряженно-деформированное состояние в весомом наклонно-слоистом горном массиве, состоящем из большого числа свит пластов, отделенных друг от друга слоями породы, в предположении, что упругие свойства, удельные веса и мощности одно родных изотропных пластов, входящих в свиту, произвольны, но неизменны для каждой из свит, а также, что расстояния между свитами различаются незначительно. Проведено исследование напряженного состояния в среднем в данном массиве, а также изучено распределение напряжений в отдельных слоях массива. Получены соотношения между горизонтальными и вертикальными компонентами напряжений (как для анизотропной заменяющей среды в целом, так и для отдельных слоев), обобщающие известную гипотезу акад. А.Н. Динника. Коэффициенты бокового давления зависят при этом от упругих свойств пластов свит и вмещающих пород, мощностей слоев и угла падения. Показана возможность превосходства горизонтальных напряжений над вертикальными. Во всех указанных случаях для компонент напряжений и перемещений получены аналитические выражения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шемякин Е. И. Две задачи механики горных пород, связанные с освоением глубоких месторождений руды и газа // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 1975. №6. С. 3–9.
- [2] Курленя М.В., Серяков В.М., Еременко А.А. Техногенные геомеханические поля напряжений. Новосибирск: Наука, 2005. 264 с.
- [3] Отражение современных полей напряжений и свойств пород в состоянии скальных массивов. Сб. научн. работ (под ред. д-ра техн. наук проф. И.А. Турчанинова) Апатиты : Изд-во КФ АН СССР, 1977. 156 с.
- [4] Немировский Ю. В., Тырымов А. А. Напряженное состояние в нетронutom массиве горных пород при наличии слоистости и искривления пластов. Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 1977. №2. С.180–25.
- [5] Болотин В. В. Плоские задачи теории упругости для деталей из армированных материалов. В кн.: Расчеты на прочность. М.:Машиностроение, 1966. Вып. 12. С. 3–31.
- [6] Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 707 с.

Yu. V. Nemirovskii, A. A. Tyrymov

MODELING OF STRESS STATES IN INTACT LAYERED ROCK MASSIFS

*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch
of the RAS, Novosibirsk, Russia*

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

Volgograd State Technical University, Volgograd, Russia

Abstract. A structural model of an anisotropic medium is proposed for calculating the stress-strain state in intact rock massifs, which takes into account a number of mining and geological factors. The results of the analytical solution allowed us to explain the facts known from the practice of field observations (the possibility of the superiority of horizontal stresses over vertical ones, the piecewise linear nature of stresses, etc.), which were in contradiction with the widespread hypotheses about the distribution of stresses in rock massifs.

Keywords: elasticity theory, plane deformation, rock mass, layering.

REFERENCES

- [1] Shemyakin E. I. Two problems of rock mechanics associated with the development of deep deposits of ore and gas // *Journal of Mining Science*. 1975. No. 6. pp. 3–9. (in Russian).
- [2] Kurlenya M. V., Seryakov V. M., Eremenko A. A. Technogenic geomechanical stress fields. Novosibirsk: Nauka, 2005. 264 p. (in Russian).
- [3] Reflection of modern stress fields and rock properties in the state of rock massifs. Collection of articles (edited by Professor I.A.Turchaninov). Apatity : Publishing House of the KF of the USSR Academy of Sciences, 1977. 156 p. (in Russian).
- [4] Nemirovsky Yu., V., Tyrymov A.A. The stressed state in an undisturbed rock mass with schistosity and curvature of the beds // *Journal of Mining Science*. 1977. Vol. 13. No. 2. P. 114–120.
- [5] Bolotin V. V. Planar problems of the theory of elasticity for parts made of reinforced materials. In the book: *Calculations for strength*. M.: Mashinostroenie, 1966. I. 12. P. 3–31. (in Russian).
- [6] Muskhelishvili N. I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1966. 707 p. (in Russian).

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia, Professor, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia
Tyrymov Alexander Alexandrovich, PhD, Associate Professor, Volgograd State Technical University, Volgograd, Russia.

С. И. Сенашов, О. В. Гомонова

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОСТИ

*Сибирский государственный университет науки и технологий им. М. Ф. Решетнёва,
г. Красноярск, Россия*

Аннотация. В работе найдены законы сохранения для трехмерных стационарных уравнений упругости в случае общей анизотропии.

Ключевые слова: законы сохранения, упругость, дифференциальные уравнения, анизотропия.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.004

УДК: 539.374

Введение

Методы законов сохранения по праву относят к важнейшим классическим методам исследования дифференциальных уравнений [1] Эти методы имеют сравнительно небольшую историю. Первые работы появились около 100 лет назад и были инициированы статьями Э. Нётер. Долгое время законы сохранения дифференциальных уравнений использовались в основном при доказательстве теорем существования и единственности, а иногда для построения обобщенных решений. В последнее время законы сохранения применяются и для решений краевых задач [2–4].

Впервые законы сохранения для уравнений упругости в изотропном случае были вычислены в [5–6], где вычисления были основаны на теореме Э. Нётер. Полученные в то время законы сохранения не нашли никакого практического применения и представляли чисто академический интерес.

В настоящей работе найдена бесконечная серия новых законов сохранения для трехмерных стационарных уравнений теории упругости в случае общей анизотропии, что

© Сенашов С. И., Гомонова О. В., 2021

Сенашов Сергей Иванович

e-mail: sen@sibsau.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный университет науки и технологий им. М. Ф. Решетнёва, г. Красноярск, Россия.

Гомонова Ольга Валерьевна

e-mail: gomonova@sibsau.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Сибирский государственный университет науки и технологий им. М. Ф. Решетнёва, г. Красноярск, Россия.

Поступила 20.03.2019

означает выполнение обобщенного закона Гука, зависящего от 36 упругих постоянных. Приведённые законы сохранения позволили получить формулы, с помощью которых можно эффективно сводить краевые задачи к квадратурам. Последние можно численно найти для заданных краевых условий в перемещениях.

Законы сохранения для трехмерных стационарных уравнений упругости в случае общей анизотропии

Рассмотрим уравнения трехмерной упругости в стационарном анизотропном случае. Закон Гука имеет следующий вид [5]:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_y + A_{13}\varepsilon_z + 2A_{14}\varepsilon_{yz} + 2A_{15}\varepsilon_{xz} + 2A_{16}\varepsilon_{xy}, \\ \sigma_y &= A_{21}\varepsilon_x + A_{22}\varepsilon_y + A_{23}\varepsilon_z + 2A_{24}\varepsilon_{yz} + 2A_{25}\varepsilon_{xz} + 2A_{26}\varepsilon_{xy}, \\ \sigma_z &= A_{31}\varepsilon_x + A_{32}\varepsilon_y + A_{33}\varepsilon_z + 2A_{34}\varepsilon_{yz} + 2A_{35}\varepsilon_{xz} + 2A_{36}\varepsilon_{xy}, \\ \tau_{yz} &= A_{41}\varepsilon_x + A_{42}\varepsilon_y + A_{43}\varepsilon_z + 2A_{44}\varepsilon_{yz} + 2A_{45}\varepsilon_{xz} + 2A_{46}\varepsilon_{xy}, \\ \tau_{xz} &= A_{51}\varepsilon_x + A_{52}\varepsilon_y + A_{53}\varepsilon_z + 2A_{54}\varepsilon_{yz} + 2A_{55}\varepsilon_{xz} + 2A_{56}\varepsilon_{xy}, \\ \tau_{xy} &= A_{61}\varepsilon_x + A_{62}\varepsilon_y + A_{63}\varepsilon_z + 2A_{64}\varepsilon_{yz} + 2A_{65}\varepsilon_{xz} + 2A_{66}\varepsilon_{xy},\end{aligned}\quad (1)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}$ – компоненты тензора напряжений, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \varepsilon_{xy}$ – компоненты тензора деформаций, A_{ij} – упругие постоянные, $i = \overline{1, 6}$, $j = \overline{1, 6}$.

Компоненты тензора деформаций связаны с компонентами вектора деформаций (u, v, w) соотношениями

$$\varepsilon_x = u_x, \quad \varepsilon_y = v_y, \quad \varepsilon_z = w_z, \quad 2\varepsilon_{xy} = u_y + v_x, \quad 2\varepsilon_{xz} = u_z + w_x, \quad 2\varepsilon_{yz} = v_z + w_y. \quad (2)$$

Нижний индекс у компонент вектора деформации означает производную по соответствующей переменной.

Подставляя (1), (2) в уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0,$$

получим систему уравнений анизотропной упругости в перемещениях:

$$\begin{aligned}F_1 &= A_{11}u_{xx} + A_{12}v_{xy} + A_{13}w_{xz} + A_{14}(v_{xz} + w_{xy}) + A_{15}(u_{xz} + w_{xx}) + \\ &+ A_{16}(u_{xy} + v_{xx}) + A_{61}u_{xy} + A_{62}v_{yy} + A_{63}w_{yz} + A_{64}(v_{yz} + w_{yy}) + \\ &+ A_{65}(u_{yz} + w_{yx}) + A_{66}(u_{yy} + v_{yx}) + A_{51}u_{zx} + A_{52}v_{zy} + A_{53}w_{zz} + \\ &+ A_{54}(v_{zz} + w_{zy}) + A_{55}(u_{zz} + w_{zx}) + A_{56}(u_{zy} + v_{zx}) = 0, \\ F_2 &= A_{61}u_{xx} + A_{62}v_{xy} + A_{63}w_{xz} + A_{64}(v_{xz} + w_{xy}) + A_{65}(u_{xz} + w_{xx}) + \\ &+ A_{66}(u_{xy} + v_{xx}) + A_{21}u_{xy} + A_{22}v_{yy} + A_{23}w_{yz} + A_{24}(v_{yz} + w_{yy}) + \\ &+ A_{25}(u_{yz} + w_{yx}) + A_{26}(u_{yy} + v_{yx}) + A_{41}u_{zx} + A_{42}v_{zy} + A_{43}w_{zz} + \\ &+ A_{44}(v_{zz} + w_{zy}) + A_{45}(u_{zz} + w_{zx}) + A_{46}(u_{zy} + v_{zx}) = 0, \\ F_3 &= A_{51}u_{xx} + A_{52}v_{xy} + A_{53}w_{xz} + A_{54}(v_{xz} + w_{xy}) + A_{55}(u_{xz} + w_{xx}) + \\ &+ A_{56}(u_{xy} + v_{xx}) + A_{41}u_{xy} + A_{42}v_{yy} + A_{43}w_{yz} + A_{44}(v_{yz} + w_{yy}) + \\ &+ A_{45}(u_{yz} + w_{yx}) + A_{46}(u_{yy} + v_{yx}) + A_{31}u_{zx} + A_{32}v_{zy} + A_{33}w_{zz} + \\ &+ A_{34}(v_{zz} + w_{zy}) + A_{35}(u_{zz} + w_{zx}) + A_{36}(u_{zy} + v_{zx}) = 0.\end{aligned}\quad (3)$$

Найдем законы сохранения специального вида для системы уравнений (3).

Напомним, что законом сохранения для (3), называется выражение вида

$$C_x(x, y, z, u, v, w) + D_y(x, y, z, u, v, w) + E_z(x, y, z, u, v, w) = \omega^1 F_1 + \omega^2 F_2 + \omega^3 F_3, \quad (4)$$

где ω^i ($i = 1, 2, 3$) – некоторые функции от x, y, z , не равные тождественно нулю одновременно. Величины C, D, E называют компонентами сохраняющегося тока. Подробнее с законами сохранения и способами их вычисления можно ознакомиться в [6–9].

Компоненты сохраняющегося тока будем искать в виде:

$$\begin{aligned} C &= \alpha^1 u_x + \beta^1 u_y + \gamma^1 u_z + \delta^1 v_x + \xi^1 v_y + \eta^1 v_z + \lambda^1 w_x + \mu^1 w_y + \nu^1 w_z, \\ D &= \alpha^2 u_x + \beta^2 u_y + \gamma^2 u_z + \delta^2 v_x + \xi^2 v_y + \eta^2 v_z + \lambda^2 w_x + \mu^2 w_y + \nu^2 w_z, \\ E &= \alpha^3 u_x + \beta^3 u_y + \gamma^3 u_z + \delta^3 v_x + \xi^3 v_y + \eta^3 v_z + \lambda^3 w_x + \mu^3 w_y + \nu^3 w_z, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\alpha^i, \beta^i, \dots, \nu^i$ ($i = 1, 2, 3$) – некоторые функции, зависящие только от x, y, z .

Подставим выражения (5) в уравнение (4). В результате получим полином первой степени по переменным, соответствующим первой и второй производным компонент вектора деформаций $u_x, \dots, w_z, u_{xx}, \dots, w_{zz}$. Приравнявая в этом полиноме к нулю коэффициенты при производных и учитывая вид функций $\alpha^i, \beta^i, \dots, \nu^i$, получаем:

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= A_{11}\omega^1 + A_{61}\omega^2 + A_{51}\omega^3, & \beta^2 &= A_{66}\omega^1 + A_{26}\omega^2 + A_{46}\omega^3, \\ \gamma^3 &= A_{55}\omega^1 + A_{45}\omega^2 + A_{35}\omega^3, & \delta^1 &= A_{16}\omega^1 + A_{66}\omega^2 + A_{35}\omega^3, \\ \xi^2 &= A_{62}\omega^1 + A_{22}\omega^2 + A_{42}\omega^3, & \eta^3 &= A_{54}\omega^1 + A_{44}\omega^2 + A_{34}\omega^3, \\ \lambda^1 &= A_{15}\omega^1 + A_{65}\omega^2 + A_{55}\omega^3, & \mu^2 &= A_{64}\omega^1 + A_{24}\omega^2 + A_{44}\omega^3, \\ & & \nu^3 &= A_{53}\omega^1 + A_{43}\omega^2 + A_{33}\omega^3; \\ \alpha^2 + \beta^1 &= (A_{16} + A_{61})\omega^1 + (A_{24} + A_{21})\omega^2 + (A_{56} + A_{41})\omega^3, \\ \alpha^3 + \gamma^1 &= (A_{15} + A_{51})\omega^1 + (A_{65} + A_{41})\omega^2 + (A_{55} + A_{31})\omega^3, \\ \beta^3 + \gamma^2 &= (A_{66} + A_{56})\omega^1 + (A_{45} + A_{36})\omega^2 + (A_{25} + A_{46})\omega^3; \\ \xi^1 + \delta^2 &= (A_{66} + A_{12})\omega^1 + (A_{62} + A_{26})\omega^2 + (A_{52} + A_{46})\omega^3, \\ \varepsilon^1 + \delta^3 &= (A_{56} + A_{14})\omega^1 + (A_{64} + A_{46})\omega^2 + (A_{54} + A_{36})\omega^3, \\ \varepsilon^2 + \xi^3 &= (A_{64} + A_{52})\omega^1 + (A_{24} + A_{12})\omega^2 + (A_{44} + A_{32})\omega^3; \\ \lambda^2 + \mu^1 &= (A_{65} + A_{14})\omega^1 + (A_{64} + A_{25})\omega^2 + (A_{54} + A_{45})\omega^3, \\ \lambda^3 + \nu^1 &= (A_{13} + A_{55})\omega^1 + (A_{63} + A_{45})\omega^2 + (A_{53} + A_{35})\omega^3, \\ \mu^3 + \nu^2 &= (A_{63} + A_{54})\omega^1 + (A_{23} + A_{44})\omega^2 + (A_{43} + A_{34})\omega^3; \\ \alpha_x^1 + \alpha_y^2 + \alpha_z^3 &= 0, & \beta_x^1 + \beta_y^2 + \beta_z^3 &= 0, & \gamma_x^1 + \gamma_y^2 + \gamma_z^3 &= 0, \\ \delta_x^1 + \delta_y^2 + \delta_z^3 &= 0, & \xi_x^1 + \xi_y^2 + \xi_z^3 &= 0, & \eta_x^1 + \eta_y^2 + \eta_z^3 &= 0, \\ \lambda_x^1 + \lambda_y^2 + \lambda_z^3 &= 0, & \mu_x^1 + \mu_y^2 + \mu_z^3 &= 0, & \nu_x^1 + \nu_y^2 + \nu_z^3 &= 0. \end{aligned}$$

Из полученных выше соотношений получаем, исключая $\alpha^i, \delta^i, \lambda^i$ (где $i = 1, 2, 3$), а также $\beta^3, \gamma^3, \xi^2, \xi^3, \eta^3, \mu^2, \mu^3, \nu^3$, следующие уравнения:

$$A_{11}\omega_x^1 + A_{61}\omega_x^2 + A_{51}\omega_x^3 + (A_{16} + A_{61})\omega_y^1 + (A_{66} + A_{21})\omega_y^2 + (A_{56} + A_{41})\omega_y^3 + (A_{15} + A_{51})\omega_z^1 + (A_{65} + A_{54})\omega_z^2 + (A_{53} + A_{41})\omega_z^3 = \beta_y^1 + \gamma_z^1 = f^1; \quad (6)$$

$$A_{16}\omega_x^1 + A_{66}\omega_x^2 + A_{56}\omega_x^3 + (A_{66} + A_{12})\omega_y^1 + (A_{62} + A_{26})\omega_y^2 + (A_{52} + A_{46})\omega_y^3 + (A_{56} + A_{14})\omega_z^1 + (A_{64} + A_{46})\omega_z^2 + (A_{54} + A_{36})\omega_z^3 = \xi_y^1 + \varepsilon_z^1 = f^4; \quad (7)$$

$$A_{15}\omega_x^1 + A_{65}\omega_x^2 + A_{55}\omega_x^3 + (A_{65} + A_{14})\omega_y^1 + (A_{64} + A_{25})\omega_y^2 + (A_{54} + A_{45})\omega_y^3 + (A_{55} + A_{13})\omega_z^1 + (A_{63} + A_{45})\omega_z^2 + (A_{53} + A_{35})\omega_z^3 = \mu_y^1 + \nu_z^1 = f^7; \quad (8)$$

$$A_{66}\omega_y^1 + A_{26}\omega_y^2 + A_{46}\omega_y^3 + (A_{66} + A_{56})\omega_z^1 + (A_{36} + A_{45})\omega_z^2 + (A_{25} + A_{46})\omega_z^3 = -\beta_x^1 + \gamma_z^2 = f^2; \quad (9)$$

$$A_{62}\omega_y^1 + A_{22}\omega_y^2 + A_{42}\omega_y^3 + (A_{64} + A_{32})\omega_z^1 + (A_{24} + A_{12})\omega_z^2 + (A_{32} + A_{44})\omega_z^3 = -\xi_x^1 + \varepsilon_z^2 = f^5; \quad (10)$$

$$A_{64}\omega_y^1 + A_{24}\omega_y^2 + A_{44}\omega_y^3 + (A_{63} + A_{54})\omega_z^1 + (A_{23} + A_{44})\omega_z^2 + (A_{43} + A_{34})\omega_z^3 = -\mu_x^1 + \nu_z^2 = f^8; \quad (11)$$

$$A_{55}\omega_z^1 + A_{45}\omega_z^2 + A_{35}\omega_z^3 = -\gamma_x^1 - \gamma_y^2 = f^3; \quad (12)$$

$$A_{54}\omega_z^1 + A_{44}\omega_z^2 + A_{34}\omega_z^3 = -\varepsilon_x^1 - \varepsilon_y^2 = f^6; \quad (13)$$

$$A_{64}\omega_z^1 + A_{24}\omega_z^2 + A_{44}\omega_z^3 = -\nu_x^1 - \nu_y^2 = f^9. \quad (14)$$

Дифференцируя выражения (6) по x , (9) по y , (12) по z и складывая результаты, получаем:

$$\begin{aligned} & A_{11}\omega_{xx}^1 + A_{21}\omega_{xy}^2 + A_{41}\omega_{xy}^3 + A_{41}(\omega_{xz}^2 + \omega_{xy}^3) + A_{51}(\omega_{xz}^1 + \omega_{xx}^3) + \\ & + A_{61}(\omega_{xy}^1 + \omega_{xx}^2) + A_{16}\omega_{xy}^1 + A_{26}\omega_{yy}^2 + A_{36}\omega_{yz}^3 + A_{46}(\omega_{yz}^2 + \omega_{yy}^3) + \\ & + A_{56}(\omega_{yz}^1 + \omega_{yx}^3) + A_{66}(\omega_{yy}^1 + \omega_{yx}^2) + A_{15}\omega_{zx}^1 + A_{25}\omega_{zy}^2 + A_{35}\omega_{zz}^3 + \\ & + A_{45}(\omega_{zz}^2 + \omega_{zy}^3) + A_{55}(\omega_{zz}^1 + \omega_{zx}^3) + A_{65}(\omega_{zy}^1 + \omega_{zx}^2) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Аналогично, из (7), (8) и (10), а также из (11), (13) и (14) получаем, соответственно

$$\begin{aligned} & A_{16}\omega_{xx}^1 + A_{26}\omega_{xy}^2 + A_{36}\omega_{xy}^3 + A_{46}(\omega_{xz}^2 + \omega_{xy}^3) + A_{56}(\omega_{xz}^1 + \omega_{xx}^3) + \\ & + A_{66}(\omega_{xy}^1 + \omega_{xx}^2) + A_{12}\omega_{xy}^1 + A_{22}\omega_{yy}^2 + A_{32}\omega_{yz}^3 + A_{42}(\omega_{yz}^2 + \omega_{yy}^3) + \\ & + A_{52}(\omega_{yz}^1 + \omega_{yx}^3) + A_{62}(\omega_{yy}^1 + \omega_{yx}^2) + A_{14}\omega_{zx}^1 + A_{24}\omega_{zy}^2 + A_{34}\omega_{zz}^3 + \\ & + A_{44}(\omega_{zz}^2 + \omega_{zy}^3) + A_{54}(\omega_{zz}^1 + \omega_{zx}^3) + A_{64}(\omega_{zy}^1 + \omega_{zx}^2) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

и

$$\begin{aligned} & A_{15}\omega_{xx}^1 + A_{25}\omega_{xy}^2 + A_{35}\omega_{xy}^3 + A_{45}(\omega_{xz}^2 + \omega_{xy}^3) + A_{55}(\omega_{xz}^1 + \omega_{xx}^3) + \\ & + A_{65}(\omega_{xy}^1 + \omega_{xx}^2) + A_{14}\omega_{xy}^1 + A_{24}\omega_{yy}^2 + A_{34}\omega_{yz}^3 + A_{44}(\omega_{yz}^2 + \omega_{yy}^3) + \\ & + A_{54}(\omega_{yz}^1 + \omega_{yx}^3) + A_{64}(\omega_{yy}^1 + \omega_{yx}^2) + A_{13}\omega_{zx}^1 + A_{23}\omega_{zy}^2 + A_{33}\omega_{zz}^3 + \\ & + A_{43}(\omega_{zz}^2 + \omega_{zy}^3) + A_{53}(\omega_{zz}^1 + \omega_{zx}^3) + A_{63}(\omega_{zy}^1 + \omega_{zx}^2) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Функции ω^i ($i = 1, 2, 3$) есть произвольное решение системы уравнений (15)–(17). При этом, если матрица коэффициентов упругости A_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) симметрична, то ω^i – произвольное решение исходной системы уравнений (3).

Из формул (6)–(14) следует

$$\begin{aligned} \text{rot}(\gamma^2, -\gamma^1, \beta^1) &= (f^1, f^2, f^3), & \text{rot}(\varepsilon^2, -\varepsilon^1, \xi^1) &= (f^4, f^5, f^6), \\ \text{rot}(\nu^2, -\nu^1, \mu^1) &= (f^7, f^8, f^9). \end{aligned} \quad (18)$$

Для решения системы уравнений (18) относительно девяти неизвестных воспользуемся следующей формулой [10]:

$$\text{rot}(\bar{\omega}^i) = \bar{\Omega}^i,$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^1 &= (\gamma^2, -\gamma^1, \beta^1), & \bar{\omega}^2 &= (\varepsilon^2, -\varepsilon^1, \xi^1), & \bar{\omega}^3 &= (\nu^2, -\nu^1, \mu^1), \\ \bar{\Omega}^1 &= (f^1, f^2, f^3), & \bar{\Omega}^2 &= (f^4, f^5, f^6), & \bar{\Omega}^3 &= (f^7, f^8, f^9). \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\bar{\omega}^i = \frac{\Gamma(\bar{\Omega}^i)}{4\pi} \int_{L_i} \frac{d\bar{r} \times \bar{r}}{r^3}, \quad (19)$$

где L_i – аналог вихревой линии, а $\Gamma(\bar{\Omega}^i)$ – конечная циркуляция вихревой трубки вокруг вихревой линии. Эта циркуляция без труда может быть вычислена в точке пересечения вихревой линии с граничной поверхностью S , описанной ниже.

Постановка первой краевой задачи. Пусть имеется гладкая поверхность S , на которой заданы компоненты u, v, w вектора деформации:

$$u|_S = u_0(x, y, z), \quad v|_S = v_0(x, y, z), \quad w|_S = w_0(x, y, z), \quad (20)$$

где u_0, v_0, w_0 – заданные гладкие функции.

Используя (19) и (20), можно найти все компоненты сохраняющегося тока.

Задача о построении законов сохранения вида (5) для уравнений анизотропной упругости (3) полностью решена.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 256 с.
- [2] Senashov S. I., Gomonova O. V. Construction of Elastoplastic Boundary in Problem of Tension of a Plate Weakened by Holes // *Int J Nonlin Mech.* – 108 (2019). P. 7-10.
- [3] Сенашов С. И., Гомонова О. В., Яхно А. Н. Математические вопросы двумерных уравнений идеальной пластичности. – Красноярск : Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т, 2012. – 139 с.
- [4] Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2001. – 192 с.
- [5] Olver P. Conservation Laws in Elasticity. I General Results // *Arch. Rational Mech. Anal.* – 85 (1984). – P. 111–129.
- [6] Olver P. Conservation Laws in Elasticity. II Linear Homogeneous Isotropic Elastostatics // *Arch. Rational Mech. Anal.* – 85 (1984). – P. 131–160.
- [7] Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – М. : Наука, 1977. – 416 с.
- [8] Senashov S. I., Vinogradov A. N. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity // *Proc. Edinburg Math. Soc.* – 1988. – P. 415–439.
- [9] Виноградов А. А., Красильщик И. С., Лычагин В. В. Симметрии и законы сохранения. – М. : Фактор, 1996. – 461 с.
- [10] Лойцянский П. Г. Механика жидкости и газа. – М. : Наука, 1973. – 847 с.

S. I. Senashov, O. V. Gomonova

CONSERVATION LAWS FOR 3-DIMENSIONAL EQUATIONS OF ANISOTROPIC ELASTICITY

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia

Abstract. Conservation Laws for 3-dimensional Stationary Equations in the Case of General Anisotropy are obtained in the work.

Keywords: conservation laws, elasticity, differential equations, anisotropy.

REFERENCES

- [1] Polyanin A. D., Zaitsev V. F., Zhurov A. I. Solving Methods for Nonlinear Equations of Mathematical Physics and Mechanics. – M.: Phismathlit, 2005. – 256 c. (in Russian)
- [2] Senashov S. I., Gomonova O. V. Construction of Elastoplastic Boundary in Problem of Tension of a Plate Weakened by Holes // *Int J Nonlin Mech.* – 108 (2019). P. 7-10.
- [3] Senashov S. I., Gomonova O. V., Yakhno A. N. Mathematical Questions of 2-dimensional Linear Equations of Ideal Plasticity. – Krasnoyarsk : Sib. State Aerospace Univ., 2012. – 139 p. (in Russian)
- [4] Kiryakov P. P., Senashov S. I., Yakhno A. N. Application of Symmetries and Conservation Laws to Solve Differential Equations. – Novosibirsk: Branch of RAS, 2001. – 192 c. (in Russian)
- [5] Olver P. Conservation Laws in Elasticity. I General Results // *Arch. Rational Mech. Anal.* – 85 (1984). – P. 111–129.
- [6] Olver P. Conservation Laws in Elasticity. II Linear Homogeneous Isotropic Elastostatics // *Arch. Rational Mech. Anal.* – 85 (1984). – P. 131–160.
- [7] Lekhnitskii S. G. The Theory of Elasticity of an Anisotropic Body. – M. : Nauka, 1977. – 416 p. (in Russian)
- [8] Senashov S. I., Vinogradov A. N. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity // *Proc. Edinburg Math. Soc.* – 1988. – P. 415–439.
- [9] Vinogradov A. A., Krasilshchik I. S., Lychagin V. V. Symmetries and Conservation Laws. – M. : Factor, 1996. – 461 p. (in Russian)
- [10] Loytsanskii P. G. Mechanics of Fluids. – M. : Nauka, 1973. – 847 p. (in Russian)

Senashov Sergey Ivanovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia.

Gomonova Olga Valeryevna, PhD. Sci. Phys. & Math., Associated Professor, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia.

А. В. Ткачева

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ КРИТЕРИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ ПРИВЕДЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ТЕМПЕРАТУРНЫХ ЗАДАЧАХ ПЛОСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. Работа посвящена решению задачи температурного деформирования тонкой пластины конечной ширины, выполненной из упруго-пластичного материала. В качестве условий наступления пластического течения используется условие максимальных приведенных напряжений, с зависимостью предела текучести от температуры. Именно использование зависимости предела текучести от температуры делает невозможным получение решения с условием пластического течения Треска – Сен-Венана. Показывается, что в зависимости от скорости нагрева распределение остаточных напряжений может быть разным.

Ключевые слова: упругость, пластичность, плосконапряженное состояние, температурные напряжения, кусочно-линейные условия пластического течения.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.005

УДК: 539.374

Введение

Использование кусочно-линейных пластических потенциалов для аналитического решения широкого круга упругопластических задач теории температурных напряжений, особенно неустановившихся, широко распространилось с середины прошлого столетия [1, 2]. Это связано как с ростом производственной потребности в качественных математических моделях, так и с развитием вычислительных возможностей. Эти задачи помогают решить проблемы в сварке, горячей посадке, штамповке, пусть даже эти технологии придуманы задолго до появления теории пластического течения. Изменение температуры в упругопластическом материале приводит к появлению температурных напряжений, способным деформировать материалы изделий, не прибегая к контактным воздействиям [3]. Высокие напряжения порождают пластическое течение [4], благодаря которому происходит рост необратимых деформаций, в которые впоследствии формируются поле остаточных напряжений. Пластическое течение

© Ткачева А. В., 2021

Ткачева Анастасия Валерьевна

e-mail: nansi.valer@yandex.ru, старший научный сотрудник, кандидат физ.-мат. наук, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00147.

Поступила 11.01.2021

описывается разными классическими условиями пластичности кусочно-линейными (Треска–Сен-Венана, Ишлинского–Ивлева) и нелинейными (Мизесса). В некоторых случаях в основном для одномерных задач удается получить аналитическое решения благодаря использованию кусочно-линейных пластических потенциалов [4]. Это возможно потому, что уравнения, записываемые в перемещениях, удается проинтегрировать и получить аналитические зависимости для перемещений, деформаций и напряжений. Когда же происходит отход от одномерности задачи, использование кусочно-линейных условий течения только усложняет расчеты, на помощь приходит нелинейное условие Мизесса. Решения в этом случае находятся численно, с использованием итерационных методов [5]. В условиях зависимости предела текучести от температуры в плосконапряженном состоянии в ряде задач о нестационарных температурных напряжениях невозможно получить решения с использованием условия пластического течения Треска – Сен-Венана, только использование условия Ишлинского–Ивлева позволяет аналитически разрешить подобные задачи. Однако в этом случае отмечаем невозможность существования пластического течения на ребре призмы Ишлинского–Ивлева. Но возможность получить решение за счет скачкообразного перехода с грани на грань, минуя ребро. Здесь рассмотрим именно такой случай.

Постановка задачи. В декартовой системе координат (x, y, z) рассмотрим бесконечной длины стальную пластину шириной L . Систему координат свяжем с краем пластины так, чтобы координаты изменились в пределах $0 \leq x \leq L; -\infty < y < \infty$. Закрепим края пластины по линиям $x = 0$ и $x = L$. Источник тепла подведем к краю $x = 0$. Благодаря тепловому потоку $q(t)$ пластина будет нагреваться

$$T_{,x} = q(t), \quad (1)$$

где T – температура, t – время. На другом краю $x = L$ пластины считаем отток тепла из-за небольшой толщины пренебрежительно малым

$$T_{,x} |_{x=L} = 0 \quad (2)$$

Уравнение теплопроводности запишем в виде

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2\chi (T_0 - T) \quad (3)$$

ρ – плотность, c – удельная теплоемкость, λ – коэффициент теплопроводности, χ – коэффициент теплоотдачи, T_0 – комнатная температура. Аналитическое решение температурной задачи [6] имеет вид

$$\begin{aligned} T(x, t) = & T_0 \int_0^L G(x, \xi, t) d\xi - 2\chi T_0 \int_0^t \int_0^L G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau - \\ & - \lambda (\rho A)^{-1} \int_0^t q(\tau) G(x, 0, t - \tau) d\tau \\ G(x, \xi, t) = & e^{2\chi t} \left[\frac{1}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi \xi}{l}\right) \exp\left(-\frac{\lambda(\rho A)^{-1} n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

Итак, распространение тепла в пластине считаем известным, поэтому перейдем к механической части задачи.

Из-за малости теплового расширения деформации считаем малыми и складываемыми из обратимых e_{ij}^e , и необратимых e_{ij}^p .

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (5)$$

u_i – компоненты вектора перемещений $i = 1, 2, 3$. Некоторое время после начала нагрева деформации в плоскости будут только обратимые ($e_{ij}^e \neq 0$ $e_{ij}^p = 0$). Деформации e_{ij}^e ,

напряжения σ_{ij} и температуру T связывает зависимость закона Дюамеля–Неймана.

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk}^e - 3\alpha K (T - T_0)) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e \quad (6)$$

где α – коэффициент линейного расширения, λ , μ , $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ – упругие модули, δ_{ij} – компоненты единичного тензора, составленного из символов Кронекера.

Необратимые деформации начинают расти, когда напряженное состояние достигнет поверхности нагружения (условия пластического течения).

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{de_{ij}^p}{dt} = \zeta \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \zeta > 0 \quad (7)$$

где $f(\sigma_{ij}) = 0$ – поверхность нагружения в пространстве напряжений.

В качестве поверхности нагружения принимаем условие максимальных приведенных напряжений (условие Ишлинского–Ивлева).

$$f(\sigma_{ij}) = \max |\sigma_i - \sigma| - \frac{4}{3}k; \quad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{jj}; \quad (8)$$

k – предел текучести, зависящий от температуры

$$k(T) = k_0 \left(\frac{T_p - T}{T_p - T_0} \right)^2 \quad (9)$$

T_p – температура плавления, k_0 – предел текучести при комнатной температуре, σ_i – главные значения тензора напряжений.

Замыкает описную систему уравнение равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (10)$$

Для конкретного случая $\sigma_z = 0$ и $e_y = 0$ уравнения (6) примет вид

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (4\mu(\lambda + \mu) u_{x,x} - 6K\mu\alpha(T - T_0)) (\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_y &= (2\mu\lambda u_{x,x} - 6K\mu\alpha(T - T_0)) (\lambda + 2\mu)^{-1} \end{aligned} \quad (11)$$

Из единственного нетривиального уравнения равновесия $\sigma_{x,x} = 0$ следует, что $\sigma_x = C_1(t)$.

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{3}{2}\alpha K (\lambda + \mu)^{-1} \int_0^x (T(\rho) - T_0) d\rho + 0.25C_1(t) x (\lambda + 2\mu) (\lambda + \mu)^{-1} + C_2(t) \\ \sigma_y &= \left(\frac{\lambda}{2}C_1(t) - 3\alpha K\mu(T - T_0) \right) (\lambda + \mu)^{-1} \end{aligned} \quad (12)$$

$C_1(t)$, $C_2(t)$ – коэффициенты интегрирования, находятся из граничных условий

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=L} = 0. \quad (13)$$

$$C_1(t) = -6K\alpha\mu \int_0^L (T(\rho) - T_0) d\rho (\lambda + 2\mu)^{-1} L^{-1}, \quad C_2(t) = 0$$

Называя $C_1(t)$ и $C_2(t)$ постоянными интегрирования, подразумеваем только, что они не зависят от пространственной координаты, но являются функциями времени.

Активное пластическое течение при нагреве. С ростом температуры на линии нагрева $x = 0$ напряжения достигает поверхности нагружения и начинает выполняться условие пластического течения Ишлинского–Ивлева в форме: $\sigma_x - 2\sigma_y = 4k$. Зарождается упруго-пластическая граница $x = m_1(t)$, разделяющая область деформирования на две части. В области пластического течения $0 < x \leq m_1(t)$ начинают

свой рост необратимые деформации e_x^p , e_y^p и e_z^p , поэтому закон Дюамеля–Неймана (11) переписуется в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (4\mu(\lambda + \mu)(u_{x,x} - e_x^p) - 6K\mu\alpha(T - T_0))(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_y &= (-4\mu(\lambda + \mu)e_y^p + 2\mu\lambda(u_{x,x} - e_x^p) - 6K\mu\alpha(T - T_0))(\lambda + 2\mu)^{-1} \end{aligned} \quad (14)$$

Из ассоциированного закона пластического течения следует, что $e_y^p = -2e_x^p$.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_3(t), \quad \sigma_y = 0.5C_3(t) - 2k \\ u_x &= (3\lambda + 5\mu)(12K\mu)^{-1}xC_3(t) + C_4(t) + \\ &+ 1.5\alpha \int_0^x (T(\rho) - T_0) d\rho - (3K)^{-1} \int_0^x k(\rho) d\rho, \\ e_x^p &= (12K)^{-1}C_3(t) + 0.5\alpha(T - T_0) - k(\lambda + \mu)(3K\mu). \end{aligned} \quad (15)$$

В области упругого деформирования $m_1(t) < x \leq L$ напряжения и перемещения находятся согласно соотношениям (12), в области пластического течения $0 < x \leq m_1(t)$ следуя соотношениям (15), где $C_1(t)$, $C_2(t)$, $C_3(t)$, $C_4(t)$ – коэффициенты интегрирования, которые находятся из граничных условий, моделирующих непрерывность напряжения σ_x и перемещения u_x на упругопластической границе $x = m(t)$ и ранее записанных граничных условий (13). Через некоторый временной промежуток

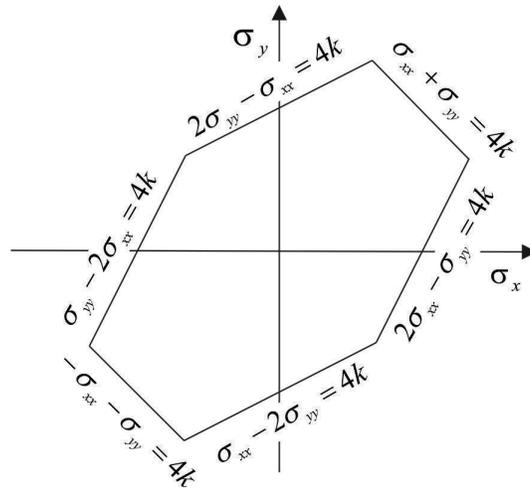


Рис. 1. Сечение призмы Ивлева с координатной плоскостью в плоскости $\sigma_z = 0$

на линии нагрева в области пластического течения начинает выполняться новое условие пластического течения $-\sigma_x - \sigma_y = 4k$, здесь образуется пластическая граница $x = m_2(t)$, разделяющая область пластического течения.

Постановка задачи становится некорректной при выполнении одновременно двух условий пластического течения. Это связано с тем, что из уравнения равновесия следует $\sigma_x = const$, а при выполнении двух условий (условия ребра призмы Ивлева) σ_x не является константой, а является функцией координаты x ($\sigma_x = -\frac{4}{3}k(x)$). Поэтому в новой области пластического течения $0 < x \leq m_2(t)$ материал деформируется по новому условию $-\sigma_x - \sigma_y = 4k$. Иными словами, осуществляется переход с грани на грань поверхности нагружения минуя ребро рис. 1.

В рамках условия пластического течения Треска–Сен-Венана решить поставленную задачу не представляется возможным. Поскольку при высокой скорости нагрева неизбежно выполнении условия $\sigma_x = -2k(x)$, которое приводит к невыполнению уравнения равновесия $\sigma_x = const$.

Для новой области пластического течения, используя соотношения (14) с учетом следствия из ассоциированного закона пластического течения $e_y^p = e_x^p$ и уравнения равновесия, находим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_5(t), \quad \sigma_y = -C_5(t) - 4k, \\ u_x &= \mu^{-1} x C_5(t) + C_6(t) + 2\mu^{-1} \int_0^x k(\rho) d\rho, \\ e_x^p &= (2\mu)^{-1} x C_5(t) + C_6(t) + 4(\lambda + \mu)(3K\mu) \int_0^x k(\rho) d\rho. \end{aligned} \quad (16)$$

$C_5(t)$, $C_6(t)$ – коэффициенты интегрирования совместно с коэффициентами $C_1(t)$, $C_2(t)$, $C_3(t)$, $C_4(t)$ находятся из граничных условий, требующих непрерывности напряжения σ_x и перемещения u_x на границах $x = m_1(t)$ и $x = m_2(t)$, а также выполнения и граничных условий (13).

Разгрузка при остывании. После отвода источника нагрева с линии $x = 0$ необратимые деформации перестают расти, поэтому здесь образуется разгружающая упругопластическая граница $x = n_1(t)$. В области разгрузки $0 < x \leq n_1(t)$ материал деформируется упруго с учетом уже имеющихся необратимых деформаций $P_x(x) = e_x^p(x)$, $P_y(x) = e_y^p(x)$. Используя соотношения (14) в которых пластические деформации $e_x^p(x)$ и $e_y^p(x)$ заменены на необратимые и имеющиеся со временем деформации $P_x(x)$, $P_y(x)$ и уравнение равновесия $\sigma_{x,x} = 0$ находим

$$\begin{aligned} u_x &= 0.25C_7(t) x (\lambda + 2\mu) \mu^{-1} (\lambda + \mu)^{-1} + C_8(t) \\ &+ \int_0^x P_x(\rho) d\rho + 0.5\lambda (\lambda + \mu)^{-1} \int_0^x P_y(\rho) d\rho \\ \sigma_x &= C_7(t) \quad \sigma_y = 0.5(\lambda + \mu)^{-1} \lambda C_7(t) + P_y \mu (\mu (\lambda + \mu)^{-1} - 3) \end{aligned} \quad (17)$$

$C_7(t)$, $C_8(t)$ – коэффициенты интегрирования.

При дальнейшем выравнивании температуры в материале пластины в ней прекращается пластическое течение. При этом сначала упругопластическая граница разгрузки достигнет $x = m_2(t)$, а после и линии $x = m_1(t)$. В области разгрузки $0 \leq x \leq n_1$ напряжения и перемещения находятся из соотношений (17), а в области обратимого деформирования из (12).

Повторное пластическое течение. Из-за высокого уровня накопившихся необратимых деформаций в процессе остывания происходит повторное пластическое течение. Сначала на линии $x = 0$ выполняется условие пластического течения $2\sigma_y - \sigma_x = 4k$ образуется упругопластическая граница $x = m_3(t)$, продвигающаяся вглубь материала, после здесь же осуществляется условие $\sigma_x + \sigma_y = 4k$, что приводит к образованию новой области пластического течения с границей $x = m_3(t)$. В этих областях напряжения, перемещения и необратимые деформации определяются из соотношений (15) и (16) с заменой знака перед пределом текучести $k(x)$ и с учетом накопленных ранее необратимых деформаций $P_x(x)$ и $P_y(x)$.

Остаточные напряжения. С понижением температуры предел текучести повышается, что ведет к затуханию повторного пластического течения. Как и ранее разгружающая упругопластическая граница повторного пластического течения начинает

свое продвижения от линии нагрева вглубь пластины. Остаточные напряжения и перемещения находятся из соотношений

$$\begin{aligned}
 u_x &= 0.25C_1x(\lambda + 2\mu)\mu^{-1}(\lambda + \mu)^{-1} + C_2 + \\
 &+ \int_0^x P_x(\rho) d\rho + 0.5\lambda(\lambda + \mu)^{-1} \int_0^x P_y(\rho) d\rho, \\
 \sigma_x &= C_1, \quad \sigma_y = 0.5(\lambda + \mu)^{-1} \lambda C_1 + P_y\mu(\mu(\lambda + \mu)^{-1} - 3)
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Результат численных расчетов. Рассмотрим стальную пластину шириной 0.1 м., имеющую физико-механическими свойствами: $T_p = 1400^\circ C$, $T_0 = 20^\circ C$, $k = 230$ МПа, $\alpha = 11.1 \cdot 10^{-6}$, $\rho = 7814$ кг/м³, $c = 500$ Дж/(кг · К), коэффициент теплопроводности 67.7 Вт/(м · К), $\chi = 7.6$ Вт/(м · К), $K = 760$ МПа, $\mu = 351.17$ МПа, $\lambda = 526.76$ МПа.

Если скорость нагрева высока и максимальная температура тоже, то деформирование материала пластины проходит по описанной выше схеме. На рис. 2. показано распределение напряжений в момент прекращения нагрева они сжимающие, на рис. 3. остаточные напряжения растягивающие.

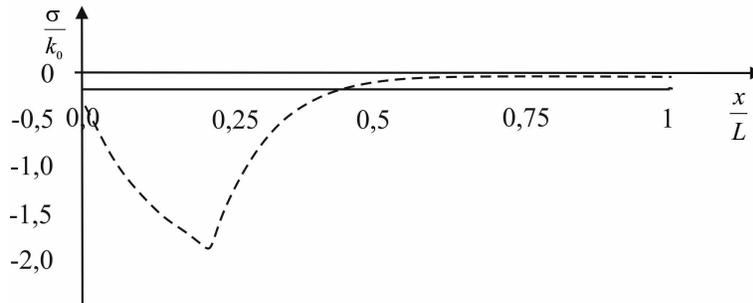


Рис. 2. Распределение напряжений в материале пластине в момент прекращения нагрева. Сплошной линией изображено σ_x , пунктирной $-\sigma_y$

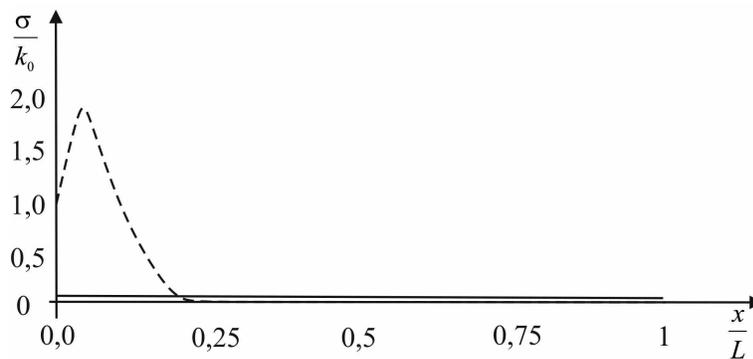


Рис. 3. Распределение остаточных напряжений. Сплошной линией изображено σ_x , пунктирной $-\sigma_y$

Если скорость нагрева небольшая и температура мала, то схема деформирования будет иной. На линии нагрева $x = 0$ выполнится лишь одно условие пластического

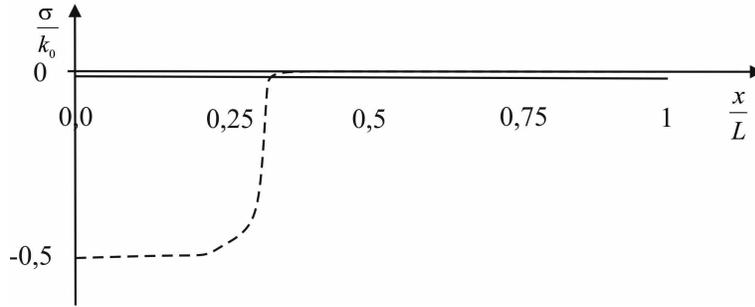


Рис. 4. Распределение остаточных напряжений. Сплошной линией изображено σ_x , пунктирной $-\sigma_y$

течения $-\sigma_x - \sigma_y = 4k$. Область необратимого деформирования распространится вглубь материала. При выравнивании температуры с линии $x = 0$ начнется разгрузка. Из-за того что необратимые деформации малы повторного пластического течения не будет, как не будет и смены знака в напряжениях. Распределение остаточных напряжений приведено на рисунке 4. Как видно они сжимающие.

Вывод. Знак остаточных напряжений зависит напрямую от уровня распределения необратимых деформаций, которые образовались в результате пластического течения, порожденного высокой температурой. Если необратимые деформации «большие», то смена знака неизбежна.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. Bland D. Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradients. // J. of the Mechanics and Physics of Solids. 1956. № 4. с. 209–229.
- [2] W. Mack. Thermal assembly of an elastic–plastic hub and a solid shaft // Arch. Appl. Mech. 1993. № 63. С. 42–50.
- [3] Боли Б. Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. Москва: Мир, 1964. 517 с.
- [4] А.Ю. Ишлинский Д.Д. Ивлев. Математическая теория пластичности. Москва: Физматлит, 2001. 704 с.
- [5] Greto G. Kulasegaram S. An efficient and stabilised SPH method for large strain metal plastic deformations // Computational Particle Mechanics. 2020. № 7. с. 523–539.
- [6] Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. Москва: Физматлит, 2001. 576 с.

A. V. Tkacheva

**ON THE USE OF THE CRITERION OF MAXIMUM REDUCED STRESSES IN
TEMPERATURE PROBLEMS OF PLANE DEFORMATION**

Institute of Machine science and Metallurgy, Komsomolsk - on - Amur, Russia

Abstract. Rabat is devoted to solving the problem of temperature deformation of a thin plate of finite width made of an elastic plastic material. As conditions for the onset of plastic flow, the condition of maximum reduced stresses is used, with the dependence of the yield strength on temperature. It is the use of the dependence of the yield strength on temperature that makes it impossible to obtain a solution with the condition of the plastic flow of Treska - Saint-Venant. It is shown that, depending on the heating rate, the distribution of residual stresses can be different.

Keywords: elasticity, plasticity, plane-stress state, temperature stresses, piecewise-molten plastic flow conditions.

REFERENCES

- [1] Bland D. R. Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradients. // J. of the Mechanics and Physics of Solids. 1956. no. 4. p. 209–229. (in Russian).
- [2] Mack W. Thermal assembly of an elastic–plastic hub and a solid shaft // Arch. Appl. Mech. 1993. no. 63. P. 42–50. (in Russian).
- [3] B. Pain J. W. The theory of thermal stress. Moscow: Mir, 1964. 517 p.
- [4] A.Yu. Ishlinsky D. I. Mathematical theory of plasticity. Eighth edition. Moscow: Fizmatlit, 2001. 704 p. (in Russian).
- [5] G. Greto S. K. An efficient and stabilised SPH method for large strain metal plastic deformations // Computational Particle Mechanics. 2020. no. 7. p. 523–539. (in Russian).
- [6] Polyanin A. D. Handbook of linear equations of mathematical physics. Eighth edition. Moscow: Fizmatlit, 2001. 576 p. (in Russian).

М. В. Петров, Б. В. Михайлов, Е. Г. Гоник

УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ КРУЧЕНИИ, ЗАПОЛНЕННЫХ СЫПУЧИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Экспериментами изучено влияние сыпучего заполнителя на устойчивость при кручении тонкостенных цилиндрических оболочек. Для исследования образцы изготавливались из алюминиевого сплава 3004 глубокой вытяжкой в матрице. Образцы закреплялись консольно к жесткой стенке, на свободный конец прикладывался крутящий момент. Испытывались пустые и заполненные железным порошком образцы. Нагружение образцов выполнялось ступенчато, порциями по 10Н вначале и при приближении к моменту потери устойчивости по 1Н, 0,5Н. На каждой ступени нагружения фиксировались крутящий момент и угол поворота свободного конца образца. Построены графики зависимости угла поворота от крутящего момента. Устойчивость образцов терялась в упругости. Вначале нагружения, на заполненных сыпучим заполнителем образцах, не происходит поворот сечений из-за препятствия сил трения заполнителя. Железный порошок увеличивает значение критического крутящего момента на 20-30%.

Ключевые слова: устойчивость, образец, критическая нагрузка, эксперимент, деформация, кручение.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.006

УДК: 539.3

Введение. Тонкостенные цилиндрические оболочки используются в конструкциях летательных аппаратов, транспортных средствах, машиностроения, строительных конструкциях, морских кораблей.

© Петров М. В., Михайлов Б. В., Гоник Е. Г., 2021

Петров Михаил Васильевич

e-mail: rimmametрова20@gmail.com, доктор технических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Михайлов Борис Васильевич

e-mail: boris.mihaylov.63@mail.ru, кандидат технических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Гоник Екатерина Григорьевна

e-mail: katya.gonik@mail.ru, старший преподаватель, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 05.03.2021

Автоцистерны состоят из автомобиля и цилиндрической цистерны для перевозки различных сыпучих материалов (цемента, песка, муки и химической продукции). Автомобильные перевозки составляют 80% объёма перевозимых грузов в стране.

Конструкция летательного аппарата состоит главным образом из оболочек, корпус летательного аппарата в целом можно рассматривать как подкреплённую оболочку. Расчёты оболочек на устойчивость имеют существенное значение при проектировании подводных и надводных кораблей, тепловозов, трубопроводов, резервуаров, куполов и покрытий в инженерных сооружениях и т.д. В конструкциях оболочки могут быть пустыми и заполненными различными жидкостями, газами, сыпучими материалами [1,2,3].

Оболочечные конструкции естественно должны быть прочными, жесткими и устойчивыми. Для выполнения этих требований выполнены различные теоретические и экспериментальные исследования. [4,5,6 и др.].

При эксплуатации оболочки испытывают различные виды нагружения и изгибаются, закручиваются, одновременно изгибаются и закручиваются и т.д. Могут терять прочность, устойчивость. Устойчивость пустых оболочек при сжатии, изгибе, кручении, сложном нагружении рассмотрено во многих работах [7,8,9,10].

В последнее время представляет большой интерес проблема устойчивости тонкостенных оболочек, заполненных сыпучими материалами в связи с перевозками сыпучих материалов в автоцистернах [11-18].

В работах [19-21] исследуется устойчивость тонкостенных оболочек, заполненных сыпучими материалами при изгибе. Показано, что критические нагрузки возрастают на 30-35%. Устойчивость тонкостенных оболочек, заполненных сыпучим материалом при кручении не исследовано, поэтому эта проблема актуальна.

Целью данной работы является экспериментальное исследование устойчивости тонкостенных оболочек, заполненных сыпучим материалом при кручении.

Экспериментальная установка, порядок испытаний, образцы.

Для выполнения экспериментальных исследований была изготовлена специальная установка рис.1. Установка состояла из жесткой металлической стенки 1, к которой закреплялись консольно образец 2. Крутящий момент создавался нагружающим устройством 3. Нагружающее устройство 3 состояло из рычагов 4, двух динамометров 5 и гирей 6. Рычаги 4 соединялись тросами 7 с динамометрами 5. Троса 7 огибались через блоки 8 и соединялись с подвесками 9 на которые укладывались гири 6. На свободный конец, где прикладывался крутящий момент, жестко прикреплялся стержень 10, на конце которого устанавливался индикатор часового типа 11. При повороте стержня 10 индикатор часового типа 11 измерял перемещение конца стержня 10, после чего подсчитывался угол поворота сечения.

Эксперименты проводились следующим образом. Тщательно подбирались образцы без наличия геометрических дефектов. Образец плотно вставлялся на оправку стенки 1 и обжимался хомутом чтобы получить жесткое закрепление конца образца. Испытывались пустые и заполненные сыпучим материалом образцы. Если испытания проводятся с наполнителем, то предварительно образцы заполнялись необходимым количеством сыпучего материала. На свободный конец образца устанавливалось нагружающее устройство. Устанавливался индикатор ИЧ-10 и проверялась работа экспериментальной установки. Нагружение образца крутящим моментом производилось укладыванием на обе подвески гирей. Вначале давались небольшие нагрузки и



Рис. 1. Экспериментальная установка.

перед потерей устойчивости образца нагрузки снижались, чтобы зафиксировать критический момент. В экспериментах фиксировались крутящий момент и угол поворота сечения, где прикладывался крутящий момент.

Тонкостенные цилиндрические образцы изготавливались из алюминиевого сплава 3004 в состоянии Н19, радиусом $R=31,5\text{мм}$, толщиной стенки $h=0,1\text{мм}$, длиной $L=140\text{мм}$. Чтобы получились стабильные геометрические размеры без дефектов, образцы изготавливались глубокой вытяжкой в матрице. Фотографии образцов представлены на рис.2. На рис.2.а слева показан образец до испытаний. На рис.2.б показан испытанный образец с наполнителем, на рис.2.в показан испытанный пустой образец.

Результаты испытаний.

Вначале испытывались пустые образцы. На рис.3 показаны графики 1,2,3 зависимости угла поворота образца от крутящего момента. Испытывалось 9 образцов. Графики линейные, значит устойчивость терялась в упругости. Получено среднестатистическое критическое значение крутящего момента $M_{cr} = 547,5\text{Н} \cdot \text{см}$. На рис.2 для пустого образца видно, что образовались вмятины под углом $12-14^\circ$ к оси образца по всей наружной поверхности. Число волн равно шести. Критическое касательное напряжение, рассчитанное по формуле [3]:

$$\tau = \frac{M_{cr}}{4\pi R h} = \frac{547,5 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 3,14 \cdot 31,5^2 \cdot 10^{-6} \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}} = 8,8\text{МПа} \quad (1)$$

Чтобы убедиться в правильности выполненных экспериментов, рассчитывались по теоретически полученным формулам [3] некоторые результаты:

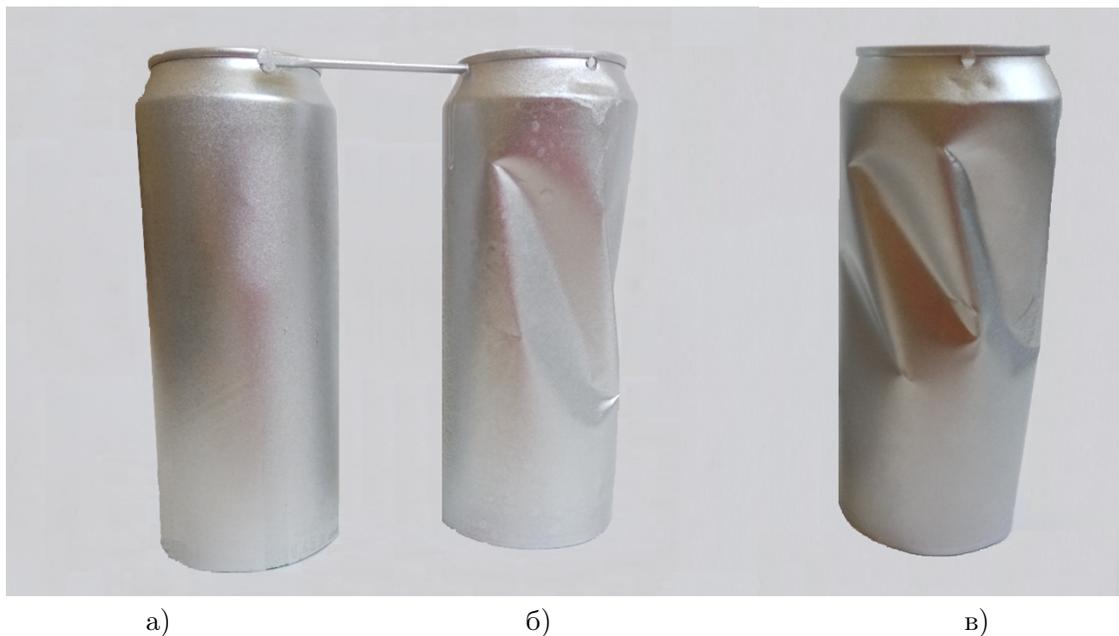


Рис. 2. образцы а) до испытания, б) после испытания нагруженного образца, в) после испытания пустого образца

Верхнее критическое касательное напряжение:

$$\tau_B = 0,78 \cdot E \cdot \frac{h}{p} \sqrt[4]{\frac{Rh}{L^2}} = 0,78 \cdot 0,7 \cdot 10^5 \cdot \frac{0,1}{31,5} \sqrt[4]{\frac{31,5 \cdot 0,1}{140}} = 19,5 \text{ МПа} \quad (2)$$

Нижнее критическое касательное напряжение:

$$\tau_H = 0,8 \cdot \tau_B = 0,8 \cdot 19,5 = 15,6 \text{ МПа} \quad (3)$$

Число образовавшихся волн:

$$n = 4,2 \cdot \sqrt[8]{1 - \mu^2} \cdot \sqrt{\frac{R}{L}} \cdot \sqrt[4]{\frac{R}{h}} = 4,2 \sqrt[8]{1 - 0,3^2} \cdot \sqrt{\frac{31,5}{140}} \cdot \sqrt[4]{\frac{31,5}{0,1}} = 8 \quad (4)$$

В экспериментах $n=6$.

Угол наклона вмятин к оси образца:

$$\gamma = 1,73 \sqrt[4]{\frac{Rh}{L^2}} = 1,73 \sqrt[4]{\frac{31,5 \cdot 0,1}{140^2}} = 12,6^\circ \quad (5)$$

В экспериментах $\gamma = 12-14^\circ$.

Сравнивая результаты расчетов по [3] с результатами опытов, видим, что критические напряжения отличаются на 56,4%, углы наклона вмятин к оси образца почти совпадают, число волн отличаются на 25%. Отличие результатов связано с тем, что расчетные формулы [3] получены для оболочек идеальных геометрических размеров, а испытанные образцы были не идеальные. Заключаем, что эксперименты выполнены с удовлетворительной точностью.

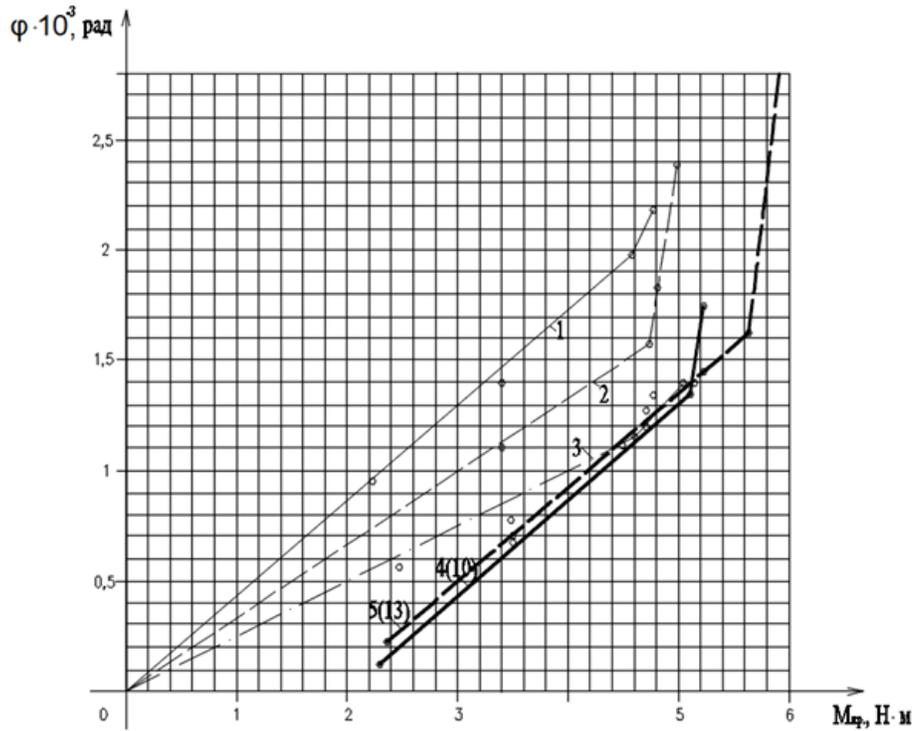


Рис. 3. Зависимость угла поворота от крутящего момента

Далее эксперименты выполнялись на образцах, заполненных железным порошком на 90% и 100% объёма. На рис.3 остальные графики выполнены для заполненных образцов. На графиках написаны номер образцы и процент заполнения. Заполненные образцы теряют устойчивость в упругости. Вмятины на образцах образовывались в местах отсутствия заполнителя рис.2.б. Критический крутящий момент повышался на 20-30% по сравнению с крутящими моментами для пустых образцов. Вначале поперечные сечения не поворачивались до достижения крутящего момента до 150-300Н·см. Это связано с тем, что сила трения между внутренней поверхностью образца и сыпучим материалом создают крутящий момент, противодействующий внешнему моменту. Образцы, заполненные железным порошком на 100%, устойчивость не теряли, на рис. 3 график 5(13).

Выводы:

- (1) Образцы теряют устойчивость в упругости как пустые, так и заполненные сыпучим материалом.
- (2) Вначале нагружения крутящим моментом у образцов, заполненных сыпучим материалом, происходит задержка поворота сечений.
- (3) У образцов, заполненных сыпучим материалом, увеличивается значение критического крутящего момента.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Власов В. В. Устойчивость цилиндрических оболочек с наполнителем при осевом сжатии и внешнем давлении // Прикладная механика. 1973. Т. 9. № 1. С. 117–121.
- [2] Зарипов Р. М., Иванов В. А. Приближенный расчет изгиба оболочки с наполнителем. Сб.: Механика деформируемых сред. Куйбышев. 1977. № 2. С. 94–99.
- [3] Иванов В. А. Исследования по теории оболочек с наполнителем. Диссертация д-ра физико-математических наук. 1983. Казань.
- [4] Баженов В. Г., Кибец А. И., Петров М. В., Шошин Д. В., Федорова Т. Г. Теоретическое и экспериментальное исследование потери устойчивости и закритического поведения тонкостенной цилиндрической оболочки при изгибе // Проблемы прочности и пластичности. 2009. Вып. 71. С. 77–83.
- [5] Бойко Д. В., Железнов Л. П., Кабанов В. В. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек при поперечном изгибе // Механика твердого тела. 2012. №2. С. 59–67.
- [6] Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Физматгиз, 1967. 984 с.
- [7] Ильгамов М. А. Экспериментальное исследование устойчивости консольно-закрепленной цилиндрической оболочки под действием поперечной силы и внутреннего давления // Исследования по теории пластин и оболочек. 1964. № 2. С. 186–191.
- [8] Кабанов В. В., Железнов Л. П. Нелинейное деформирование и устойчивость круговой цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью // Пространственные конструкции в Красноярском крае. Красноярск, 1989. С. 89–98.
- [9] Бойко Д. В., Железнов Л. П., Кабанов В. В. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости подкрепленных овальных цилиндрических оболочек при комбинированном нагружении изгибающим моментом и краевой поперечной силой // Механика твердого тела. 2012. № 3. С. 47–53.
- [10] Ильющин А. А., Огибалов П. М. Упругопластические деформации полых цилиндров. М.: Из-во Моск. ун-та, 1960. 227 с.
- [11] Моссаковский В. И., Маневич Л. И., Мильцын А. М. Моделирование несущей способности цилиндрических оболочек. Киев : Наукова Думка, 1977. 141 с.
- [12] Петров М. В., Гоник Е. Г., Федорова Т. Г. Устойчивость при изгибе тонкостенных оболочек, заполненных различными сыпучими материалами // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. №4 (34). С. 52–58.
- [13] Гоник Е. Г., Петров М. В. Расчет предельного состояния тонкостенных цилиндрических оболочек при изгибе, заполненных сыпучим наполнителем // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 2 (40). С. 117–127.
- [14] Cerik B. C., Shin H. K., Cho S. R. A comparative study on damage assessment of tubular members subjected to mass impact // Marine Structures. 2016. V.46. P. 1–29.
- [15] Chong J., Gao F. Y., Li X. H. Dynamic buckling behaviors of steel cylindrical shell subjected to conventional explosion impact loading // Advanced Materials Research. 2013. V. 800. P.196–200.
- [16] Houliara S., Karamanos S. A. Stability of long transversely-isotropic elastic cylindrical shells under bending // International Journal of Solids and Structures. 2010. Т. 47. № 1. С. 10–24.
- [17] Dou Y., Liu Y. Computational investigation of lateral impact behavior of pressurized pipelines and influence of internal pressure // Thin-Walled Structures. 2015. V. 95. P. 40–47.
- [18] Arbocz J., Babcock C. D. Experimental investigation of the effect of general imperfections on the buckling of cylindrical shells. NASA CR-1163. 1968.
- [19] Петров М. В., Федорова Т. Г., Гоник Е. Г., Пфаненштиль Н. Г. Способ приближенного расчета на устойчивость при поперечном изгибе тонкостенных цилиндрических оболочек средней длины, заполненных сыпучим материалом // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 4 (38). С.120–128.
- [20] Гоник Е. Г., Кибец А. И., Петров М. В., Федорова Т. Г., Фролова И. А. Влияние аппроксимации диаграммы деформирования на критические нагрузки при поперечном изгибе цилиндрической оболочки // Проблемы прочности и пластичности. 2017. Т. 79. №2. С. 169–181
- [21] Федорова Т. Г., Петров М. В., Гоник Е. Г., Пфаненштиль Н. Г. Экспериментальное изучение влияния геометрических параметров на устойчивость тонкостенных цилиндрических оболочек, заполненных сыпучим материалом, при изгибе поперечной силой // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. №3 (37). С. 62–73.

M. V. Petrov, B. V. Mikhailov, E. G. Gonik

TORSIONAL STABILITY OF THIN-WALLED CYLINDRICAL SHELLS FILLED WITH FREE-FLOWING AGGREGATE

Chuvash state University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia

Abstract. Experiments have studied the effect of free-flowing aggregate on torsional stability of thin-walled cylindrical shells. For research samples were made of aluminum alloy 3004 deep hood in the matrix. The samples were fixed cantilever to a rigid wall, on torque was applied to the free end. Tested empty and samples filled with iron powder. The loading of the samples was carried out stepwise, in portions of 10N at the beginning and when approaching the moment of loss stability of 1H, 0.5H. At each loading stage, torque and angle of rotation of the free end of the sample. Graphs built the dependence of the angle of rotation on the torque. Stability of samples lost in elasticity. At the beginning of loading, on filled with bulk filler in samples, no rotation of sections occurs due to obstacle forces friction of the aggregate. Iron powder increases the critical value of torque by 20-30 %.

Keywords: stability, sample, critical load, experiment, deformation, torsion.

REFERENCES

- [1] Vlasov V. V. Stability of cylindrical shells with filler under axial compression and external pressure // Applied Mechanics. 1973. V. 9. No. 1. P. 117–121.
- [2] Zaripov P. M., Ivanov V. A. Approximate calculation of the bending of a shell with a filler. Sat: Mechanics of deformable media. Kuibyshev. 1977. No. 2. P. 94–99.
- [3] Ivanov V. A. Research on the theory of filled shells. Dissertation of Doctor of Physical and Mathematical Sciences. 1983. Kazan.
- [4] Bazhenov V. G., Kibets A. I., Petrov M. V., Shoshin D. V., Fedorova T. G. Theoretical and experimental study of the loss of stability and supercritical behavior of a thin-walled cylindrical shell during bending // Problems of Strength and Plasticity. 2009. Issue. 71. P. 77–83.
- [5] Boyko D. V., Zhelezov L. P., Kabanov V. V. Investigation of nonlinear deformation and stability of non-circular cylindrical shells under transverse bending // Rigid Body Mechanics. 2012. No. 2. P. 59–67.
- [6] Volmir A. S. Stability of deformable systems. Moscow: Fizmatgiz, 1967. 984 p.
- [7] Ilgamov M. A. Experimental study of the stability of a cantilevered cylindrical shell under the action of a transverse force and internal pressure // Research on the theory of plates and shells. 1964. No. 2. P. 186–191.
- [8] Kabanov V. V., Zhelezov L. P. Nonlinear deformation and stability of a circular cylindrical shell filled with liquid // Spatial structures in the Krasnoyarsk Territory. Krasnoyarsk, 1989. P. 89–98.
- [9] Boyko D. V., Zhelezov L. P., Kabanov V. V. Investigation of nonlinear deformation and stability of reinforced oval cylindrical shells under combined loading by a bending moment and an edge transverse force // Rigid Body Mechanics. 2012.No. 3.P. 47-53.
- [10] Ilyushin A. A., Ogibalov P. M. Elastoplastic Deformations of Hollow Cylinders. M.: Iz-vo Mosk. University, 1960. 227 p.

Mikhail Vasilyevich Petrov, Doctor of Engineering, Professor, Chuvash state University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia.

Boris Vasilyevich Mikhailov, Candidate of technical Sciences, Associate Professor, Chuvash state University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia

Ekaterina Grigoryevna Gonik, Senior Lecturer, Chuvash state University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia.

-
- [11] Mossakovsky V. I., Manevich L. I., Miltsyn A. M. Modeling the bearing capacity of cylindrical shells. Kiev: Naukova Dumka, 1977. 141 p.
- [12] Petrov M. V., Gonik E. G., Fedorova T. G. Flexural stability of thin-walled shells filled with various bulk materials // Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2017. No. 4 (34). P. 52-58.
- [13] Gonik E. G., Petrov M. V. Calculation of the limiting state of thin-walled cylindrical shells during bending, filled with a free-flowing filler // Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2019. No. 2 (40). P. 117-127.
- [14] Cerik B. C., Shin H. K., Cho S. R. A study on damage assessment of tubular members subjected to mass impact // Marine Structures. 2016. V.46. P. 1-29.
- [15] Chong J., Gao F. Y., Li X. H. Dynamic buckling behaviors of steel cylindrical shell subjected to conventional explosion impact loading // Advanced Materials Research. 2013. V. 800. P. 196-200.
- [16] Houliara S., Karamanos S. A. Stability of long transversely-isotropic elastic cylindrical shells under bending // International Journal of Solids and Structures. 2010. V. 47.No. 1. S. 10-24.
- [17] Dou Y., Liu Y. Computational investigation of lateral impact behavior of pressurized pipelines and influence of internal pressure // Thin - Walled Structures. 2015. V. 95. P. 40-47.
- [18] Arbocz J., Babcock C. D. Experimental investigation of the effect of general imperfections on the buckling of cylindrical shells. NASA CR-1163. 1968.
- [19] Petrov M. V., Fedorova T. G., Gonik E. G., Pfanenstil N. G. A method of approximate calculation of stability in transverse bending of thin-walled cylindrical shells of medium length, filled with bulk material // Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2018. No. 4 (38). Pp. 120-128.
- [20] Gonik E. G., Kibets A. I., Petrov M. V., Fedorova T. G., Frolova I. A. Influence of approximation of the deformation diagram on critical loads during transverse bending of a cylindrical shell // Problems of strength and plasticity. 2017. V. 79. No. 2. P. 169-181
- [21] Fedorova T. G., Petrov M. V., Gonik E. G., Pfanenstil N. G. Experimental study of the influence of geometric parameters on the stability of thin-walled cylindrical shells filled with bulk material under bending by a transverse force // Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2018. No. 3 (37). P. 62-73.

А. Д. Чернышов¹, В. В. Горяйнов², С. Ф. Кузнецов¹, О. Ю. Никифорова¹

ТРЕХМЕРНЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

¹Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия,

²Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. При помощи метода быстрых разложений решается задача диффузии в параллелепипеде с граничными условиями 1-го рода и внутренним источником вещества, зависящим от координат точек параллелепипеда. Получено в общем виде решение, содержащее свободные параметры, с помощью которых можно получить множество новых точных решений с различными свойствами. Показан пример построения точного решения для случая внутреннего источника переменного только по оси OZ . Приведен анализ особенностей диффузионных потоков в параллелепипеде с указанным внутренним источником. Получено, что концентрация вещества в центре параллелепипеда равна сумме среднеарифметического значения концентраций вещества в его вершинах и амплитуды внутреннего источника умноженного на величину c^2/π^2 .

Ключевые слова: аналитическое решение, точное решение, диффузионные потоки, переменный внутренний источник, параллелепипед, быстрые разложения.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.007

УДК: 519.632

Введение. Для решения пространственных задач диффузии применяются различные численные и аналитические методы. В [1] на примере решения уравнения диффузии рассмотрен метод клеточных автоматов, как метод решения дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа. В [2] рассмотрены

© Чернышов А. Д., Горяйнов В. В., Кузнецов С. Ф., Никифорова О. Ю., 2021

Чернышов Александр Данилович

e-mail: chernyshovad@mail.ru, д-р физ.-мат. наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Горяйнов Виталий Валерьевич

e-mail: gorvit77@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Россия

Кузнецов Сергей Федорович

e-mail: sfs134@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия

Никифорова Ольга Юрьевна

e-mail: niki22@mail.ru, старший преподаватель, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия

Поступила 10.03.2021

вопросы повышения эффективности параллельного многосеточного алгоритма решения разностных эллиптических трехмерных уравнений, который представляет собой параллельную реализацию классического многосеточного метода Р.П. Федоренко для краевых задач первого, второго и третьего рода, включая вырожденную задачу Неймана. Алгоритм эффективен для решения анизотропных задач, типичных в приложениях при моделировании процессов диффузии, теплопроводности, динамики жидкости. В работе [3] развивается метод наименьших квадратов с Т-элементами для решения линейных краевых задач с уравнениями Лапласа и Пуассона. Авторы используют разрывные базисные функции высокого порядка аппроксимации из специальных функциональных пространств. В [4] методом преобразования Фурье решается краевая задача Дирихле для уравнения Пуассона в области, ограниченной двумя параллельными гиперплоскостями в R^n . Решение представлено в виде суммы интегралов, ядра которых найдены в конечном виде. В [5] решение задачи об изгибе упругодиффузионной консольно-закрепленной балки Бернулли-Эйлера с учетом конечной скорости распространения диффузионных потоков ищется с помощью функций Грина, для нахождения которых используется преобразование Лапласа и разложение в тригонометрические ряды Фурье. Также среди численных методов для решения уравнения Пуассона следует отметить метод коллокаций [6], метод квадратурных элементов [7], модифицированный кубический В-сплайн дифференциально-квадратурный метод [8] и метод, основанный на использовании вейвлетов Хаара [9].

В данной работе будут использованы быстрые разложения [10], с помощью которых можно получать не только новые приближенные аналитические решения задач [11–13], но и новые точные [14]. Применение быстрых разложений [10] позволит получить в общем виде решение краевой задачи о диффузии в параллелепипеде с переменным внутренним источником, точно удовлетворяющее дифференциальному уравнению и граничным условиям. Решение задачи содержит много свободных коэффициентов, которыми можно аппроксимировать широкий круг инженерных задач. В статье будет показано построение точного решения для случая внутреннего источника переменного по оси OZ .

Постановка задачи. Рассмотрим задачу диффузии в параллелепипеде $\Omega = \{(x, y, z) \in R, 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$. Для неизвестной концентрации $C(x, y, z)$ запишем уравнение диффузии в форме Пуассона, как дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных по переменным x, y, z с заданным внутренним источником вещества $F(x, y, z)$:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + F(x, y, z) = 0. \quad (1)$$

Граничные условия на каждой грани параллелепипеда имеют вид

$$\begin{aligned} C|_{x=0} &= f_1(y, z), & C|_{y=0} &= f_2(x, z), & C|_{z=0} &= f_3(x, y), \\ C|_{x=a} &= f_4(y, z), & C|_{y=b} &= f_5(x, z), & C|_{z=c} &= f_6(x, y). \end{aligned} \quad (2)$$

Функции $f_1 \div f_6$ в (2) должны удовлетворять условиям совместности, так как концентрация $C(x, y, z)$, например, при подходе к ребру $(x = 0, z = 0)$ по двум смежным граням должна принимать одинаковые значения. Выполняя подобные условия на всех ребрах параллелепипеда, будем иметь 12 функциональных равенств

$$\begin{aligned}
f_1(0, z) &= f_2(0, z), & f_1(b, z) &= f_5(0, z), & f_2(a, z) &= f_4(0, z), \\
f_4(b, z) &= f_5(a, z), & f_2(x, 0) &= f_3(x, 0) & f_2(x, c) &= f_6(x, 0), \\
f_5(x, 0) &= f_3(x, b), & f_5(x, c) &= f_6(x, b), & f_1(y, 0) &= f_3(0, y), \\
f_1(y, c) &= f_6(0, y), & f_4(y, 0) &= f_3(a, y), & f_4(y, c) &= f_6(a, y).
\end{aligned} \tag{3}$$

Из условий независимости концентрации $C(x, y, z)$ от направления подхода к вершинам параллелепипеда получим следующие равенства

$$\begin{aligned}
f_1(0, 0) &= f_2(0, 0) = f_3(0, 0), & f_1(b, 0) &= f_3(0, b) = f_5(0, 0), \\
f_1(0, c) &= f_2(0, c) = f_6(0, 0), & f_2(a, 0) &= f_3(a, 0) = f_4(0, 0), \\
f_2(a, c) &= f_4(0, c) = f_6(a, 0), & f_1(b, c) &= f_5(0, c) = f_6(0, b), \\
f_3(a, b) &= f_4(b, 0) = f_5(a, 0), & f_4(b, c) &= f_5(a, c) = f_6(a, b).
\end{aligned} \tag{4}$$

Равенства (3) и (4) позволяют записать условия выполнения дифференциального уравнения (1) в вершинах параллелепипеда:

$$\begin{aligned}
C_{xx}(0, 0, 0) + C_{yy}(0, 0, 0) + C_{zz}(0, 0, 0) + F(0, 0, 0) &= 0, \\
C_{xx}(a, 0, 0) + C_{yy}(a, 0, 0) + C_{zz}(a, 0, 0) + F(a, 0, 0) &= 0, \\
C_{xx}(0, b, 0) + C_{yy}(0, b, 0) + C_{zz}(0, b, 0) + F(0, b, 0) &= 0, \\
C_{xx}(0, 0, c) + C_{yy}(0, 0, c) + C_{zz}(0, 0, c) + F(0, 0, c) &= 0, \\
C_{xx}(a, b, 0) + C_{yy}(a, b, 0) + C_{zz}(a, b, 0) + F(a, b, 0) &= 0, \\
C_{xx}(a, 0, c) + C_{yy}(a, 0, c) + C_{zz}(a, 0, c) + F(a, 0, c) &= 0, \\
C_{xx}(0, b, c) + C_{yy}(0, b, c) + C_{zz}(0, b, c) + F(0, b, c) &= 0, \\
C_{xx}(a, b, c) + C_{yy}(a, b, c) + C_{zz}(a, b, c) + F(a, b, c) &= 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Если же условия (3) и (4) не выполнять, то концентрация $C(x, y, z)$ будет терпеть разрыв на ребрах и в вершинах параллелепипеда, что физически противоречиво. Если же не выполнять равенства (5), то будет нарушаться закон сохранения массы в вершинах параллелепипеда.

При построении решения задачи о распределении концентрации вещества $C(x, y, z)$ можно использовать часть полиномов и тригонометрических функций, которые возникают в теории быстрых разложений. Этих функций будет достаточно, чтобы точно удовлетворить и дифференциальному уравнению (1), граничным условиям (2) и условиям согласований (3)-(5). Предполагаемое точное решение запишем следующим конечным выражением

$$\begin{aligned}
C(x, y, z) &= \sum_{i=1}^2 A_i(y, z) P_i(x) + A_3(y, z) \sin \frac{\pi x}{a} + A_4(y, z) \sin \frac{2\pi x}{a}, & 0 \leq x \leq a, \\
A_i(y, z) &= \sum_{j=1}^2 A_{i,j}(z) P_j(y) + A_{i,3}(z) \sin \frac{\pi y}{b} + A_{i,4}(z) \sin \frac{2\pi y}{b}, \\
& i = 1 \div 4, & 0 \leq y \leq b, \\
A_{i,j}(z) &= \sum_{k=1}^2 A_{i,j,k} P_k(z) + A_{i,j,3} \sin \frac{\pi z}{c} + A_{i,j,4} \sin \frac{2\pi z}{c}, & j = 1 \div 4, & 0 \leq z \leq c, \\
P_1(x) &= 1 - \frac{x}{a}, & P_2(x) &= \frac{x}{a}, & P_1(y) &= 1 - \frac{y}{b}, & P_2(y) &= \frac{y}{b}, \\
P_1(z) &= 1 - \frac{z}{c}, & P_2(z) &= \frac{z}{c}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Для удобства дальнейших преобразований введем обозначения:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi x}{a} = P_3(x), \quad \sin \frac{2\pi x}{a} = P_4(x), \quad \sin \frac{\pi y}{b} = P_3(y), \\ \sin \frac{2\pi y}{b} = P_4(y), \quad \sin \frac{\pi z}{c} = P_3(z), \quad \sin \frac{2\pi z}{c} = P_4(z). \end{aligned}$$

Тогда зависимость $C(x, y, z)$ из (6) можно представить более кратко

$$C(x, y, z) = \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=1}^4 \left(\sum_{k=1}^4 A_{i,j,k} P_k(z) \right) P_j(y) \right) P_i(x), \quad (7)$$

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq c.$$

Таким образом, искомая функция $C(x, y, z)$ представлена в виде конечной тройной суммы, содержащей 64 неизвестных коэффициента

$$A_{i,j,k}, \quad i = 1 \div 4, \quad j = 1 \div 4, \quad k = 1 \div 4. \quad (8)$$

Для получения точного решения внутренней источник вещества $F(x, y, z)$ представим конечной суммой по аналогии с зависимостью (7):

$$F(x, y, z) = \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=1}^4 \left(\sum_{k=1}^4 F_{i,j,k} P_k(z) \right) P_j(y) \right) P_i(x), \quad (9)$$

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq c.$$

Все коэффициенты $F_{i,j,k}$ в (9) для источника считаем известными.

В граничных условиях (2) функции $f_1(y, z)$, $f_2(x, z)$, $f_3(x, y)$, $f_4(y, z)$, $f_5(x, z)$, $f_6(x, y)$ зададим следующим образом

$$\begin{aligned} f_1(y, z) &= \sum_{j=1}^4 \left(\sum_{k=1}^4 f_{1,j,k} P_k(z) \right) P_j(y) \\ f_2(x, z) &= \sum_{j=1}^4 \left(\sum_{k=1}^4 f_{2,j,k} P_k(z) \right) P_j(x), \\ f_3(x, y) &= \sum_{j=1}^4 \left(\sum_{k=1}^4 f_{3,j,k} P_k(y) \right) P_j(x) \\ f_4(y, z) &= \sum_{j=1}^4 \left(\sum_{k=1}^4 f_{4,j,k} P_k(z) \right) P_j(y), \\ f_5(x, z) &= \sum_{j=1}^4 \left(\sum_{k=1}^4 f_{5,j,k} P_k(z) \right) P_j(x) \\ f_6(x, y) &= \sum_{j=1}^4 \left(\sum_{k=1}^4 f_{6,j,k} P_k(y) \right) P_j(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $f_{i,j,k}$ считаем известными постоянными.

Приходим к следующей задаче: требуется найти гладкое точное решение уравнения (1) с заданным внутренним источником (9), удовлетворяющее граничным условиям (2) и условиям согласований (3)-(5).

Коэффициенты $A_{i,j,k}$ из (8), которые определяют решение задачи, считаем пока неизвестными. Их надо найти при помощи точного выполнения граничных условий (2), условий согласований (3)-(5) и дифференциального уравнения (1).

Решение задачи. Предполагаемую зависимость (7) подставим в условия согласований (3), (4) и (5):

$$\begin{aligned} f_{1,1,1} &= f_{2,1,1} = f_{3,1,1}, & f_{1,1,2} &= f_{2,1,2} = f_{6,1,1}, \\ f_{1,2,1} &= f_{5,1,1} = f_{3,1,2}, & f_{1,2,2} &= f_{5,1,2} = f_{6,1,2}, \\ f_{2,2,1} &= f_{4,1,1} = f_{3,2,1}, & f_{2,2,2} &= f_{4,1,2} = f_{6,2,1}, \\ f_{4,2,1} &= f_{5,2,1} = f_{3,2,2}, & f_{4,2,2} &= f_{5,2,2} = f_{6,2,2}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} f_{1,1,3} &= f_{2,1,3}, & f_{1,1,4} &= f_{2,1,4}, & f_{1,2,3} &= f_{5,1,3}, & f_{1,2,4} &= f_{5,1,4}, \\ f_{1,3,1} &= f_{3,1,3}, & f_{1,3,2} &= f_{6,1,3}, & f_{1,4,1} &= f_{3,1,4}, & f_{1,4,2} &= f_{6,1,4}, \\ f_{2,2,3} &= f_{4,1,3}, & f_{2,2,4} &= f_{4,1,4}, & f_{4,2,3} &= f_{5,2,3}, & f_{4,2,4} &= f_{5,2,4}, \\ f_{4,3,1} &= f_{3,2,3}, & f_{4,3,2} &= f_{6,2,3}, & f_{4,4,1} &= f_{3,2,4}, & f_{4,4,2} &= f_{6,2,4}, \\ f_{2,3,1} &= f_{3,3,1}, & f_{2,3,2} &= f_{6,3,1}, & f_{5,3,1} &= f_{3,3,2}, & f_{5,3,2} &= f_{6,3,2}, \\ f_{2,4,1} &= f_{3,4,1}, & f_{2,4,2} &= f_{6,4,1}, & f_{5,4,1} &= f_{3,4,2}, & f_{5,4,2} &= f_{6,4,2}. \end{aligned} \quad (12)$$

$$F_{1,1,1} = F_{1,1,2} = F_{1,2,1} = F_{1,2,2} = F_{2,1,1} = F_{2,1,2} = F_{2,2,1} = F_{2,2,2} = 0. \quad (13)$$

После подстановки предполагаемого решения задачи в форме (7) в граничные условия (2) и дифференциальное уравнение (1), получим функциональную систему, которую сведем к системе линейных алгебраических уравнений путем приравнивания коэффициентов слева и справа перед линейно независимыми функциями

$$P_1(x) \div P_4(x), \quad P_1(y) \div P_4(y), \quad P_1(z) \div P_4(z).$$

Полученная система будет состоять из 160 линейных алгебраических уравнений, которую обозначим через S . Система S будет переопределенной. Для нахождения неизвестных $A_{i,j,k}$ из (8) необходимо выполнить 64 независимых алгебраических уравнений из S . Остальные 96 уравнений являются линейно зависимыми, 48 из которых автоматически удовлетворяют условиям согласований (3)-(5), оставшиеся 48 уравнений используем для составления связи между коэффициентами $f_{i,j,k}$ и $F_{i,j,k}$, $i = 1 \div 4$, $j = 1 \div 4$, $k = 1 \div 4$.

В результате имеем следующие значения коэффициентов $A_{i,j,k}$, определяющие точное решение:

$$\begin{aligned} A_{1,j,k} &= f_{1,j,k}, & j &= 1 \div 4, & k &= 1 \div 4; \\ A_{2,1,k} &= f_{2,2,k}, & k &= 1 \div 4; \\ A_{2,j,k} &= f_{4,j,k}, & j &= 2, 3, 4, & k &= 1 \div 4; \\ A_{3,1,k} &= f_{2,3,k}, & A_{3,2,k} &= f_{5,3,k}, & k &= 1 \div 4; \\ A_{3,3,1} &= f_{3,3,3}, & A_{3,3,2} &= f_{6,3,3}, & A_{3,3,3} &= F_{3,3,3} / \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2} \right), \\ A_{3,3,4} &= F_{3,3,4} / \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{4\pi^2}{c^2} \right), \\ A_{3,4,1} &= f_{3,3,4}, & A_{3,4,2} &= f_{6,3,4}, \\ A_{3,4,3} &= F_{3,4,3} / \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2} \right), \\ A_{3,4,4} &= F_{3,4,4} / \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{b^2} + \frac{4\pi^2}{c^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{4,1,k} &= f_{2,4,k}, \quad A_{4,2,k} = f_{5,4,k}, \quad k = 1 \div 4; \\
A_{4,3,1} &= f_{3,4,3}, \quad A_{4,3,2} = f_{6,4,3}, \\
A_{4,3,3} &= F_{4,3,3} / \left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2} \right), \\
A_{4,3,4} &= F_{4,3,4} / \left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{4\pi^2}{c^2} \right), \\
A_{4,4,1} &= f_{3,4,4}, \quad A_{4,4,2} = f_{6,4,4}, \\
A_{4,4,3} &= F_{4,4,3} / \left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2} \right), \\
A_{4,4,4} &= F_{4,4,4} / \left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{b^2} + \frac{4\pi^2}{c^2} \right).
\end{aligned} \tag{14}$$

Подставив коэффициенты (14) в выражение (7), будем иметь аналитическое решение задачи. Данное решение имеет место, когда выполнены алгебраические соотношения (11)-(13) и дополнительные равенства:

$$\begin{aligned}
f_{1,j,3} &= \frac{c^2}{\pi^2} F_{1,j,3}, \quad j = 1, 2; \quad f_{1,j,4} = \frac{c^2}{4\pi^2} F_{1,j,4}, \quad j = 1, 2; \\
f_{1,3,k} &= \frac{b^2}{\pi^2} F_{1,3,k}, \quad k = 1, 2; \quad f_{1,3,3} = F_{1,3,3} / \left(\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2} \right), \\
f_{1,3,4} &= F_{1,3,4} / \left(\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{4\pi^2}{c^2} \right), \quad f_{1,4,k} = \frac{b^2}{4\pi^2} F_{1,4,k}, \quad k = 1, 2; \\
f_{1,4,3} &= F_{1,4,3} / \left(\frac{4\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2} \right), \quad f_{1,4,4} = F_{1,4,4} / \left(\frac{4\pi^2}{b^2} + \frac{4\pi^2}{c^2} \right), \\
f_{2,2,3} &= \frac{c^2}{\pi^2} F_{2,1,3}, \quad f_{2,2,4} = \frac{c^2}{4\pi^2} F_{2,1,4}, \quad f_{4,2,3} = \frac{c^2}{\pi^2} F_{2,2,3}, \quad f_{4,2,4} = \frac{c^2}{4\pi^2} F_{2,2,4}, \\
f_{4,3,k} &= \frac{b^2}{\pi^2} F_{2,3,k}, \quad k = 1, 2; \quad f_{4,3,3} = F_{2,3,3} / \left(\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2} \right), \\
f_{4,3,4} &= F_{2,3,4} / \left(\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{4\pi^2}{c^2} \right), \quad f_{4,4,k} = \frac{b^2}{4\pi^2} F_{2,4,k}, \quad k = 1, 2; \\
f_{4,4,3} &= F_{2,4,3} / \left(\frac{4\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2} \right), \quad f_{4,4,4} = F_{2,4,4} / \left(\frac{4\pi^2}{b^2} + \frac{4\pi^2}{c^2} \right), \\
f_{2,3,k} &= \frac{a^2}{\pi^2} F_{3,1,k}, \quad k = 1, 2; \quad f_{2,3,3} = F_{3,1,3} / \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{c^2} \right), \\
f_{2,3,4} &= F_{3,1,4} / \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{c^2} \right), \quad f_{5,3,k} = \frac{a^2}{\pi^2} F_{3,2,k}, \quad k = 1, 2; \\
f_{5,3,3} &= F_{3,2,3} / \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{c^2} \right), \quad f_{5,3,4} = F_{3,2,4} / \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{c^2} \right), \\
f_{3,3,3} &= F_{3,3,1} / \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right), \quad f_{6,3,3} = F_{3,3,2} / \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right), \\
f_{3,3,4} &= F_{3,4,1} / \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{b^2} \right), \quad f_{6,3,4} = F_{3,4,2} / \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{b^2} \right), \\
f_{2,4,k} &= \frac{a^2}{4\pi^2} F_{4,1,k}, \quad k = 1, 2; \quad f_{2,4,3} = F_{4,1,3} / \left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{c^2} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{2,4,4} &= F_{4,1,4} / \left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{c^2} \right), f_{5,4,k} = \frac{a^2}{4\pi^2} F_{4,2,k}, \quad k = 1, 2; \\
f_{5,4,3} &= F_{4,2,3} / \left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{c^2} \right), f_{5,4,4} = F_{4,2,4} / \left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{c^2} \right), \\
f_{3,4,3} &= F_{4,3,1} / \left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right), f_{6,4,3} = F_{4,3,2} / \left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right), \\
f_{3,4,4} &= F_{4,4,1} / \left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{b^2} \right), f_{6,4,4} = F_{4,4,2} / \left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{b^2} \right).
\end{aligned} \tag{15}$$

Пример построения точного решения и его анализ. Зададим внутренний источник, действующий в параллелепипеде, следующим образом. Примем в (9) $F_3(y, z) = F_4(y, z) = 0$, тогда источник будет иметь вид

$$F(x, y, z) = F_1(y, z)P_1(x) + F_2(y, z)P_2(x). \tag{16}$$

В функциях $F_1(y, z)$ и $F_2(y, z)$ из (16) положим $F_{1,3}(z) = F_{1,4}(z) = F_{2,3}(z) = F_{2,4}(z) = 0$. В результате получим

$$F_1(y, z) = F_{1,1}(z)P_1(y) + F_{1,2}(z)P_2(y)$$

$$F_2(y, z) = F_{2,1}(z)P_1(y) + F_{2,2}(z)P_2(y).$$

В представлении функций $F_{1,1}(z)$, $F_{1,2}(z)$, $F_{2,1}(z)$, $F_{2,2}(z)$ зададим $F_{1,1,4} = F_{1,2,4} = F_{2,1,4} = F_{2,2,4} = 0$ и, учитывая равенства (13), указанные функции примут вид

$$\begin{aligned}
F_{1,1}(z) &= F_{1,1,3} \sin \pi \frac{z}{c}, \quad F_{1,2}(z) = F_{1,2,3} \sin \pi \frac{z}{c}, \\
F_{2,1}(z) &= F_{2,1,3} \sin \pi \frac{z}{c}, \quad F_{2,2}(z) = F_{2,2,3} \sin \pi \frac{z}{c}.
\end{aligned}$$

Используя обозначения в (6), окончательно запишем

$$\begin{aligned}
F(x, y, z) &= \left[F_{1,1,3} \left(1 - \frac{y}{b} \right) \sin \pi \frac{z}{c} + F_{1,2,3} \frac{y}{b} \sin \pi \frac{z}{c} \right] \left(1 - \frac{x}{a} \right) + \\
&+ \left[F_{2,1,3} \left(1 - \frac{y}{b} \right) \sin \pi \frac{z}{c} + F_{2,2,3} \frac{y}{b} \sin \pi \frac{z}{c} \right] \frac{x}{a}.
\end{aligned} \tag{17}$$

При выполнении равенств $F_{1,1,3} = F_{1,2,3} = F_{2,1,3} = F_{2,2,3} = Q$ внутренний источник в (17) будет зависеть только от координаты z и не будет зависеть от x и y :

$$F(x, y, z) = Q \sin \pi \frac{z}{c}. \tag{18}$$

Запишем граничные условия, которые будут выполняться для источника (18). Пусть в равенствах (10) некоторые функции равны нулю

$$f_{1,j}(z) = f_{2,j}(z) = f_{3,j}(y) = f_{4,j}(z) = f_{5,j}(z) = f_{6,j}(y) = 0, \quad j = 3; 4,$$

а также равны нулю коэффициенты

$$\begin{aligned}
&f_{1,1,4} = f_{1,2,4} = f_{2,1,4} = f_{2,2,4} = f_{3,1,4} = f_{3,2,4} = \\
&= f_{4,1,4} = f_{4,2,4} = f_{5,1,4} = f_{5,2,4} = f_{6,1,4} = f_{6,2,4} = 0.
\end{aligned}$$

В этом случае граничные условия (2) с учетом равенств (11), (12), (15) и обозначений

$$\begin{aligned}
f_{1,1,1} &= f_{2,1,1} = f_{3,1,1} = C_1, & f_{1,1,2} &= f_{2,1,2} = f_{6,1,1} = C_2, \\
f_{1,1,3} &= f_{2,1,3} = \frac{c^2}{\pi^2}Q, & f_{1,2,1} &= f_{5,1,1} = f_{3,1,2} = C_3, \\
f_{1,2,2} &= f_{5,1,2} = f_{6,1,2} = C_4, & f_{1,2,3} &= f_{5,1,3} = \frac{c^2}{\pi^2}Q, \\
f_{2,2,1} &= f_{4,1,1} = f_{3,2,1} = C_5, & f_{2,2,2} &= f_{4,1,2} = f_{6,2,1} = C_6, \\
f_{2,2,3} &= f_{4,1,3} = \frac{c^2}{\pi^2}Q, & f_{4,2,1} &= f_{5,2,1} = f_{3,2,2} = C_7, \\
f_{4,2,2} &= f_{5,2,2} = f_{6,2,2} = C_8, & f_{4,2,3} &= f_{5,2,3} = \frac{c^2}{\pi^2}Q,
\end{aligned} \tag{19}$$

примут вид

$$\begin{aligned}
C|_{x=0} &= \left(C_1 \left(1 - \frac{z}{c} \right) + C_2 \frac{z}{c} \right) \left(1 - \frac{y}{b} \right) + \left(C_3 \left(1 - \frac{z}{c} \right) + C_4 \frac{z}{c} \right) \frac{y}{b} + \\
&+ \frac{c^2}{\pi^2}Q \sin \pi \frac{z}{c}, \\
C|_{y=0} &= \left(C_1 \left(1 - \frac{z}{c} \right) + C_2 \frac{z}{c} \right) \left(1 - \frac{x}{a} \right) + \left(C_5 \left(1 - \frac{z}{c} \right) + C_6 \frac{z}{c} \right) \frac{x}{a} + \\
&+ \frac{c^2}{\pi^2}Q \sin \pi \frac{z}{c}, \\
C|_{z=0} &= \left(C_1 \left(1 - \frac{y}{b} \right) + C_3 \frac{y}{b} \right) \left(1 - \frac{x}{a} \right) + \left(C_5 \left(1 - \frac{y}{b} \right) + C_7 \frac{y}{b} \right) \frac{x}{a}, \\
C|_{x=a} &= \left(C_5 \left(1 - \frac{z}{c} \right) + C_6 \frac{z}{c} \right) \left(1 - \frac{y}{b} \right) + \left(C_7 \left(1 - \frac{z}{c} \right) + C_8 \frac{z}{c} \right) \frac{y}{b} + \\
&+ \frac{c^2}{\pi^2}Q \sin \pi \frac{z}{c}, \\
C|_{y=b} &= \left(C_3 \left(1 - \frac{z}{c} \right) + C_4 \frac{z}{c} \right) \left(1 - \frac{x}{a} \right) + \left(C_7 \left(1 - \frac{z}{c} \right) + C_8 \frac{z}{c} \right) \frac{x}{a} + \\
&+ \frac{c^2}{\pi^2}Q \sin \pi \frac{z}{c}, \\
C|_{z=c} &= \left(C_2 \left(1 - \frac{y}{b} \right) + C_4 \frac{y}{b} \right) \left(1 - \frac{x}{a} \right) + \left(C_6 \left(1 - \frac{y}{b} \right) + C_8 \frac{y}{b} \right) \frac{x}{a}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Подставляя в (14) коэффициенты из (19) и, учитывая принятые равными нулю коэффициенты из граничных условий и внутреннего источника, получим

$$\begin{aligned}
A_{1,1,1} &= C_1, & A_{1,1,2} &= C_2, & A_{1,1,3} &= \frac{c^2}{\pi^2}Q, & A_{1,2,1} &= C_3, & A_{1,2,2} &= C_4, \\
A_{1,2,3} &= \frac{c^2}{\pi^2}Q, & A_{2,1,1} &= C_5, & A_{2,1,2} &= C_6, & A_{2,1,3} &= \frac{c^2}{\pi^2}Q, & A_{2,2,1} &= C_7, \\
A_{2,2,2} &= C_8, & A_{2,2,3} &= \frac{c^2}{\pi^2}Q.
\end{aligned}$$

После упрощений точное решение уравнения (1), соответствующее условиям (20), с внутренним источником (18) принимает вид

$$\begin{aligned}
C(x, y, z) &= \left[\left(C_1 \left(1 - \frac{z}{c} \right) + C_2 \frac{z}{c} \right) \left(1 - \frac{y}{b} \right) + \left(C_3 \left(1 - \frac{z}{c} \right) + C_4 \frac{z}{c} \right) \frac{y}{b} \right] \times \\
&\times \left(1 - \frac{x}{a} \right) + \left[\left(C_5 \left(1 - \frac{z}{c} \right) + C_6 \frac{z}{c} \right) \left(1 - \frac{y}{b} \right) + \right. \\
&\left. + \left(C_7 \left(1 - \frac{z}{c} \right) + C_8 \frac{z}{c} \right) \frac{y}{b} \right] \frac{x}{a} + \frac{c^2}{\pi^2}Q \sin \pi \frac{z}{c}.
\end{aligned} \tag{21}$$

По формуле (21) можно вычислить концентрацию вещества $C(x, y, z)$ в любой точке параллелепипеда. В частности, подставляя в (21) $x = a/2$, $y = b/2$ и $z = c/2$, вычислим

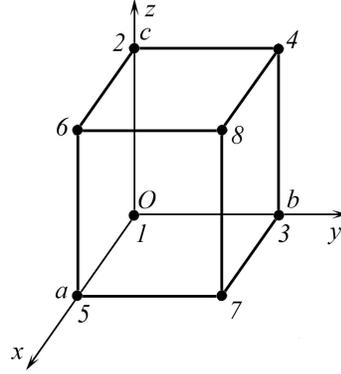


Рис. 1. Параллелепипед

значение концентрации в центре тела

$$C\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right) = \frac{c^2}{\pi^2}Q + \frac{C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 + C_7 + C_8}{8}. \quad (22)$$

Из (22) следует, что концентрация вещества в центре параллелепипеда равна сумме среднеарифметического значения концентраций вещества в его вершинах (рис. 1) и амплитуды Q внутреннего источника умноженного на величину c^2/π^2 .

Вычислим диффузионные потоки вещества по формулам [15]

$$\begin{aligned} q_x(x, y, z) &= -D \frac{\partial C(x, y, z)}{\partial x}, \quad q_y(x, y, z) = -D \frac{\partial C(x, y, z)}{\partial y}, \\ q_z(x, y, z) &= -D \frac{\partial C(x, y, z)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (23)$$

где D – коэффициент диффузии.

Подставляя в (23) точное решение (21), после преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} q_x(x, y, z) &= -\frac{D}{a} \left(-(C_1 - C_5) + \frac{z}{c} \left((C_1 - C_5) - (C_2 - C_6) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{y}{b} \left((C_1 - C_5) - (C_3 - C_7) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{z}{c} \frac{y}{b} \left((C_2 - C_6) - (C_1 - C_5) + (C_3 - C_7) - (C_4 - C_8) \right) \right), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} q_y(x, y, z) &= -\frac{D}{b} \left(-(C_1 - C_3) + \frac{z}{c} \left((C_1 - C_3) - (C_2 - C_4) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x}{a} \left((C_1 - C_3) - (C_5 - C_7) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{z}{c} \frac{x}{a} \left((C_2 - C_4) - (C_1 - C_3) + (C_5 - C_7) - (C_6 - C_8) \right) \right), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} q_z(x, y, z) &= -\frac{D}{c} \left(\frac{c^2}{\pi} Q \cos \pi \frac{z}{c} - (C_1 - C_2) + \frac{y}{b} \left((C_1 - C_2) - (C_3 - C_4) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x}{a} \left((C_1 - C_2) - (C_5 - C_6) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{y}{b} \frac{x}{a} \left(-(C_1 - C_2) + (C_3 - C_4) + (C_5 - C_6) - (C_7 - C_8) \right) \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Из (24)-(26) видно, что потоки $q_x(x, y, z)$ и $q_y(x, y, z)$ не зависят от амплитуды внутреннего источника Q , а зависят только от концентраций вещества в вершинах

параллелепипеда (рис. 1). Величины потоков $q_x(x, y, z)$ и $q_y(x, y, z)$ обратно пропорциональны соответствующим геометрическим размерам параллелепипеда a и b . На поток $q_z(x, y, z)$ влияют и концентрации вещества в вершинах, и амплитуда внутреннего источника, причем вклад слагаемого, содержащего внутренний источник, тем больше чем больше высота параллелепипеда c .

В формулах (24)-(26) концентрации C_i , $i = 1..8$ сгруппированы так, чтобы выделить разность концентраций вещества в вершинах на данном ребре параллелепипеда (рис. 1). Таким образом, из (24)-(26) видно, что в описании потока $q_x(x, y, z)$ присутствуют разности концентраций в вершинах на ребрах коллинеарных только оси OX (формула (24)). Для описания $q_y(x, y, z)$ учитываются разности концентраций в вершинах на ребрах коллинеарных только оси OY (формула (25)), а в формуле (26) в записи $q_z(x, y, z)$ присутствуют разности концентраций вещества в вершинах на ребрах коллинеарных только оси OZ .

Введем обозначения для разности концентраций в вершинах на соответствующих ребрах

$$\Delta C_{2,6} = C_2 - C_6, \quad \Delta C_{1,5} = C_1 - C_5, \quad \Delta C_{3,7} = C_3 - C_7, \quad \Delta C_{4,8} = C_4 - C_8, \quad (27)$$

$$\Delta C_{2,4} = C_2 - C_4, \quad \Delta C_{1,3} = C_1 - C_3, \quad \Delta C_{5,7} = C_5 - C_7, \quad \Delta C_{6,8} = C_6 - C_8, \quad (28)$$

$$\Delta C_{3,4} = C_3 - C_4, \quad \Delta C_{1,2} = C_1 - C_2, \quad \Delta C_{5,6} = C_5 - C_6, \quad \Delta C_{7,8} = C_7 - C_8. \quad (29)$$

Описание потоков $q_x(x, y, z)$, $q_y(x, y, z)$ и $q_z(x, y, z)$ формулами (24)-(26) показывает, что возможны случаи качественно различных профилей $q_x(x, y, z)$, $q_y(x, y, z)$ и $q_z(x, y, z)$ в зависимости от того сколько будет одинаковых значений разности концентраций $\Delta C_{i,j}$, $i = 1..7$, $j = 2..8$ в формулах (27)-(29).

Если в равенствах (27)-(29) все $\Delta C_{i,j}$, $i = 1..7$, $j = 2..8$ одинаковые, т.е.

$$\begin{aligned} \Delta C_{2,6} = \Delta C_{1,5} = \Delta C_{3,7} = \Delta C_{4,8}, \quad \Delta C_{2,4} = \Delta C_{1,3} = \Delta C_{5,7} = \Delta C_{6,8}, \\ \Delta C_{3,4} = \Delta C_{1,2} = \Delta C_{5,6} = \Delta C_{7,8}, \end{aligned} \quad (30)$$

то будем иметь следующие выражения для потоков вещества

$$\begin{aligned} q_x(x, y, z) &= \frac{D}{a} \Delta C_{1,5}, \quad q_y(x, y, z) = \frac{D}{b} \Delta C_{1,3}, \\ q_z(x, y, z) &= \frac{D}{c} \Delta C_{1,2} - D \frac{c}{\pi} Q \cos \pi \frac{z}{c}. \end{aligned} \quad (31)$$

Из (31) следует, что при выполнении условий (30) потоки $q_x(x, y, z)$ и $q_y(x, y, z)$ будут постоянными, а $q_z(x, y, z)$ переменен только по оси OZ .

Если в равенствах (27)-(29) три значения из четырех $\Delta C_{i,j}$, $i = 1..7$, $j = 2..8$ одинаковые, например

$$\Delta C_{2,6} = \Delta C_{1,5} = \Delta C_{3,7} \neq \Delta C_{4,8}, \quad (32)$$

$$\Delta C_{2,4} = \Delta C_{1,3} = \Delta C_{5,7} \neq \Delta C_{6,8}, \quad (33)$$

$$\Delta C_{3,4} = \Delta C_{1,2} = \Delta C_{5,6} \neq \Delta C_{7,8}, \quad (34)$$

то потоки вещества описываются формулами

$$\begin{aligned} q_x(x, y, z) &= \frac{D}{a} \Delta C_{1,5} - \frac{D}{a} \frac{z}{c} \frac{y}{b} (\Delta C_{3,7} - \Delta C_{4,8}), \\ q_y(x, y, z) &= \frac{D}{b} \Delta C_{1,3} - \frac{D}{b} \frac{z}{c} \frac{x}{a} (\Delta C_{5,7} - \Delta C_{6,8}), \\ q_z(x, y, z) &= \frac{D}{c} \Delta C_{1,2} - D \frac{c}{\pi} Q \cos \pi \frac{z}{c} - \frac{D}{c} \frac{y}{b} \frac{x}{a} (\Delta C_{5,6} - \Delta C_{7,8}). \end{aligned} \quad (35)$$

Если же в (27)-(29) только два значения из четырех $\Delta C_{i,j}$, $i = 1...7$, $j = 2...8$ равны друг другу, например

$$\Delta C_{2,6} = \Delta C_{1,5} \neq \Delta C_{3,7} \neq \Delta C_{4,8}, \quad (36)$$

$$\Delta C_{2,4} = \Delta C_{1,3} \neq \Delta C_{5,7} \neq \Delta C_{6,8}, \quad (37)$$

$$\Delta C_{3,4} = \Delta C_{1,2} \neq \Delta C_{5,6} \neq \Delta C_{7,8}, \quad (38)$$

то потоки вещества определяются по формулам

$$\begin{aligned} q_x(x, y, z) &= \frac{D}{a} \left(\Delta C_{1,5} - \frac{y}{b} (\Delta C_{1,5} - \Delta C_{3,7}) - \frac{z}{c} \frac{y}{b} (\Delta C_{3,7} - \Delta C_{4,8}) \right), \\ q_y(x, y, z) &= \frac{D}{b} \left(\Delta C_{1,3} - \frac{x}{a} (\Delta C_{1,3} - \Delta C_{5,7}) - \frac{z}{c} \frac{x}{a} (\Delta C_{5,7} - \Delta C_{6,8}) \right), \\ q_z(x, y, z) &= \frac{D}{a} \left(\Delta C_{1,2} - \frac{x}{a} (\Delta C_{1,2} - \Delta C_{5,6}) - \frac{y}{b} \frac{x}{a} (\Delta C_{5,6} - \Delta C_{7,8}) \right) - \\ &\quad - D \frac{c}{\pi} Q \cos \pi \frac{z}{c}. \end{aligned} \quad (39)$$

При всех различных значениях $\Delta C_{i,j}$, $i = 1...7$, $j = 2...8$ в (27)-(29) потоки $q_x(x, y, z)$, $q_y(x, y, z)$ и $q_z(x, y, z)$ будут вычисляться по формулам (24)-(26).

Покажем вид распределений диффузионных потоков вещества, соответствующие случаям, когда в равенствах (27) и (28) будут одинаковы по два значения $\Delta C_{i,j}$ из четырех, а в (29) – три значения $\Delta C_{i,j}$ из четырех. Подобная ситуация выполнима, например, при данных

$$\begin{aligned} C_1 = 1, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = 3, \quad C_4 = 4, \quad C_5 = 6, \quad C_6 = 7, \quad C_7 = 14, \quad C_8 = 11, \\ Q = 5, \quad a = 1 \text{ м}, \quad b = 2 \text{ м}, \quad c = 3 \text{ м}, \quad D = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}. \end{aligned} \quad (40)$$

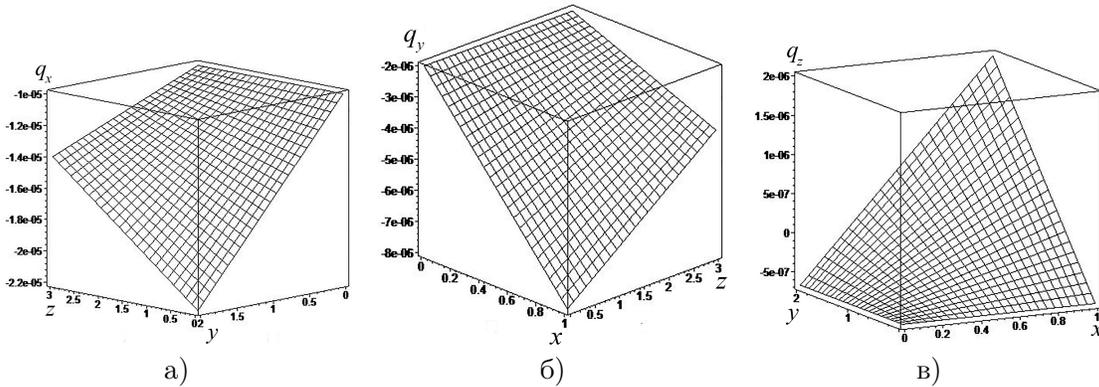


Рис. 2. Потоки вещества в параллелепипеде: а) $q_x(x, y, z)$, б) $q_y(x, y, z)$, в) $q_z(x, y, z)$ в сечении $z = c/2$

Для значений (40) на рис. 2а изображено распределение $q_x(x, y, z)$ для которого выполняются условия (36). На рис. 2б представлен профиль $q_y(x, y, z)$, соответствующий условиям (37), а на рис. 2в показан график $q_z(x, y, z)$ в сечении $z = c/2$, построенный при выполнении условий (34).

Распределение $C(x, y, z)$, рассчитанное по формуле (21), для случая (40) в сечениях плоскостями $x = a/2$, $y = b/2$ и $z = c/2$ показано на рис. 3а, рис. 3б и рис. 3в соответственно.

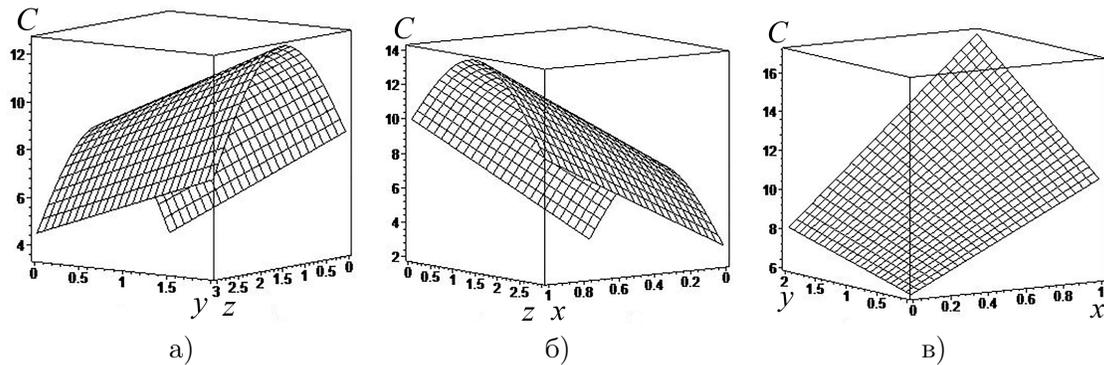


Рис. 3. Концентрация вещества $C(x, y, z)$ в параллелепипеде в сечениях: а) $x = a/2$, б) $y = b/2$, в) $z = c/2$

Из рис. 3 видно, что данные распределения концентрации плоскостей симметрии не имеют. Если же в (21) принять все начальные концентрации одинаковыми $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = C_7 = C_8$, то в этом случае получим распределения, имеющие плоскости симметрии, проходящие через центр параллелепипеда. Подобная ситуация соответствует выполнению условий (30) для диффузионных потоков вещества.

Заключение. Подбор численных значений коэффициентов функций, входящих в граничные условия и источник $F(x, y, z)$, следует вести с учетом равенств (11)–(13), (15).

Показано, что для внутреннего источника переменного только по оси OZ потоки $q_x(x, y, z)$ и $q_y(x, y, z)$ не зависят от его амплитуды, а зависят только от концентраций вещества в вершинах параллелепипеда. На поток $q_z(x, y, z)$ влияют и концентрации вещества в вершинах, и амплитуда внутреннего источника. Для описания диффузионных потоков получены формулы, в которых выделены слагаемые, представляющие разности концентраций вещества в вершинах на соответствующих ребрах. Тем самым, было показано, что в описании потока $q_x(x, y, z)$ присутствуют разности концентраций в вершинах на ребрах коллинеарных только оси OX . Для описания $q_y(x, y, z)$ учитывается разности концентраций в вершинах на ребрах коллинеарных только оси OY , а в записи $q_z(x, y, z)$ присутствуют разности концентраций вещества в вершинах на ребрах коллинеарных только оси OZ . Описание потоков $q_x(x, y, z)$, $q_y(x, y, z)$, $q_z(x, y, z)$ полученными формулами, показывает, что возможны случаи качественно различных их профилей в зависимости от количества одинаковых значений разности концентраций в вершинах на соответствующих ребрах.

Получено, что концентрация вещества в центре параллелепипеда равна сумме среднеарифметического значения концентраций вещества в его вершинах и амплитуды Q внутреннего источника умноженного на величину c^2/π^2 .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Губарев С. В., Берг Д. Б., Добряк П. В. Математическая модель и численный метод для решения задач диффузии и теплопроводности // Современные проблемы науки и образования. 2013. № 6. С. 176–186.

- [2] Жуков В. Т., Новикова Н. Д., Феодоритова О. Б. Параллельный многосеточный метод для разностных эллиптических уравнений. Анизотропная диффузия // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2012. № 76. С. 1–36.
- [3] Юлдашев О. И., Юлдашева М. Б. Граничный метод взвешенных невязок с разрывными базисными функциями для высокоточного решения линейных краевых задач с уравнениями Лапласа и Пуассона // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. 2013. № 4. С. 143–153.
- [4] Алгазин О. Д., Копаев А. В. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в многомерном бесконечном слое // Математика и Математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2015. № 4. С. 41–53.
- [5] Земсков А. В., Файкин Г. М. Изгиб упругодиффузионной консольно-закрепленной балки Бернулли-Эйлера с учетом конечной скорости распространения диффузионных потоков // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4(46). С. 107–114.
- [6] Исаев В. И., Шапеев В. П., Идимешев С. В. Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнения Пуассона // Вычислительные технологии. 2011. Т. 16, № 1. С. 85–93.
- [7] Zhong H., He Y. Solution of Poisson and Laplace equations by quadrilateral quadrature element // International Journal of Solids and Structures. 1998. Vol. 35, no. 21. P. 2805–2819.
- [8] Ghasemi M. Spline-based DQM for multi-dimensional PDEs: Application to biharmonic and Poisson equations in 2D and 3D // Computers & Mathematics with Applications. 2017. Vol. 73, no. 7. P. 1576–1592.
- [9] Shi Z., Cao Y. Y., Chen Q. J. Solving 2D and 3D Poisson equations and biharmonic equations by the Haar wavelet method // Applied Mathematical Modelling. 2012. Vol. 36, no. 11. P. 5143–5161.
- [10] Чернышов А. Д. Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54, № 1. С. 13–24.
- [11] Чернышов А. Д., Марченко А. Н., Горяйнов В. В. Температурный режим при естественной конвекции термовязкой несжимаемой жидкости в емкости прямоугольной формы // Тепловые процессы в технике. 2012. Т. 4, № 11. С. 482–486.
- [12] Горяйнов В. В., Попов М. И., Чернышов А. Д. Решение задачи о напряжениях в остром клиновидном режущем инструменте методом быстрых разложений и проблема согласования граничных условий // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2019. № 5. С. 113–130.
- [13] Шашкин А. И., Переяславская И. И. Применение метода быстрых разложений для нахождения напряженно-деформированного состояния упругого цилиндра с учетом силы тяжести // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4(22). С. 68–79.
- [14] Применение быстрых разложений для построения точных решений задачи о прогибе прямоугольной мембраны под действием переменной нагрузки / А. Д. Чернышов, В. В. Горяйнов, С. Ф. Кузнецов [и др.] // Вестник томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 70. С. 127–142.
- [15] Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. Наука: Москва, 1987. 502 с.

A. D. Chernyshov, V. V. Goryainov, S. F. Kuznetsov, O. Yu. Nikiforova

THREE-DIMENSIONAL EXACT SOLUTIONS OF THE DIFFUSION EQUATION

Voronezh State University of Engineering Technology, Voronezh, Russia

Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia

Abstract. The authors solve the problem of diffusion in a parallelepiped-shaped body with boundary conditions of the 1st kind and an internal source of substance, depending on the parallelepiped points coordinates with the fast expansions method. The proposed exact solution in general form contains free parameters, which can be used to obtain many new exact solutions with different properties. An example of constructing an exact solution with a variable internal source depending on one coordinate z is shown in the work. An analysis of the features of diffusion flows in a parallelepiped with the indicated internal source is given. It was found that the concentration of a substance in the center of a parallelepiped is equal to the sum of the arithmetic mean of the concentration of a substance at its vertices and the amplitude of the internal source multiplied by the value c^2/π^2 .

Keywords: analytical solution, exact solution, diffusion flows, variable internal source, parallelepiped, fast expansions

REFERENCES

- [1] Gubarev S. V., Berg D. B., Dobryak P. V. Mathematical model and numerical method for solving problems of diffusion and heat conduction // Modern problems and science. 2013. no. 6. P. 176–186.
- [2] Zhukov V. T., Novikova N. D., Feodoritova O. B. Parallel multigrid method for elliptic difference equations. Anisotropic diffusion // Keldysh Institute preprints M.V. Keldysh. 2012. no. 76. P. 1–36.
- [3] Yuldashev O. I., Yuldasheva M. B. Boundary method of weighted residuals with discontinuous basis functions for high-precision solution of linear boundary value problems with the Laplace and Poisson equations // Bulletin of RUDN university. Series Mathematics. Informatics. Physics. 2013. no. 4. P. 143–153.
- [4] Algazin O. D., Kopaev A. V. Solution of the Dirichlet problem for the Poisson equation in a multidimensional infinite layer // Mathematics and Mathematical Modeling. MSTU named after N.E. Bauman. Electron journal. 2015. no. 4. P. 41–53.
- [5] Zemskov A. V., Faykin G. M. Euler-Bernoulli cantilever beam bending considering the inner diffusion flows finite propagation speed // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2020. no. 4(46). P. 107–114.

Chernyshov Alexander Danilovich

e-mail: chernyshovad@mail.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh State University of Engineering Technology, Voronezh.

Goryainov Vitaly Valerievich

e-mail: gorvit77@mail.ru, Ph.D. Phys. & Math., Assoc. Professor, Voronezh State Technical University, Voronezh.

Kuznetsov Sergey Fedorovich

e-mail: sfs134@mail.ru, Ph.D. Phys. & Math., Assoc. Professor, Voronezh State University of Engineering Technology, Voronezh.

Nikiforova Olga Yurievna

e-mail: niki22@mail.ru, Senior Lecturer, Voronezh State University of Engineering Technology, Voronezh.

- [6] Isayev V. I., Shapeyev V. P., Idimeshev S. V. Variants of the method of collocations and least squares of increased accuracy for the numerical solution of the Poisson equation // Computational technologies. 2011. Vol. 16, no. 1. P. 85–93.
- [7] Zhong H., He Y. Solution of Poisson and Laplace equations by quadrilateral quadrature element // International Journal of Solids and Structures. 1998. Vol. 35, no. 21. P. 2805–2819.
- [8] Ghasemi M. Spline-based DQM for multi-dimensional PDEs: Application to biharmonic and Poisson equations in 2D and 3D // Computers & Mathematics with Applications. 2017. Vol. 73, no. 7. P. 1576–1592.
- [9] Shi Z., Cao Y. Y., Chen Q. J. Solving 2D and 3D Poisson equations and biharmonic equations by the Haar wavelet method // Applied Mathematical Modelling. 2012. Vol. 36, no. 11. P. 5143–5161.
- [10] Chernyshov A. Method of fast expansions for solving nonlinear differential equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014. Vol. 54, no. 1. P. 13–24.
- [11] Chernyshov A. D., Marchenko A. N., Goryainov V. V. Temperature regime under natural convection of thermoviscous incompressible fluid in a rectangular container // Thermal processes in technology. 2012. Vol. 4, no. 11. P. 482–486.
- [12] Goryainov V. V., Popov M. I., Chernyshov D. Solving the stress problem in a sharp-wedge-shaped cutting tool using the quick decomposition method and the problem of matching boundary conditions // Mechanics of Solids. 2019. no. 5. P. 113–130.
- [13] Shashkin A. I., Pereyaslavskaya I. I. Application of the method of fast decompositions for finding the stress-strain state of an elastic cylinder under the action of force of gravity // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2014. no. 4(22). P. 68–79.
- [14] Application of fast expansions to obtain exact solutions to a problem on rectangular membrane deflection under alternating load / A. D. Chernyshov, V. V. Goryainov, S. F. Kuznetsov et al. // Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 2021. no. 70. P. 127–142.
- [15] Frank-Kamenetskii D. A. Diffusion and heat exchange in chemical kinetics. Science: Moscow, 1987. 502 p.

А. Б. Мустафаев

ОПТИМАЛЬНАЯ ФОРМА ОТВЕРСТИЯ ДЛЯ ОСТАНОВКИ ТРЕЩИНЫ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА

Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан

Аннотация. Рассматривается задача об отыскании оптимальной формы отверстия в вершине трещины продольного сдвига. Искомая форма отверстия удовлетворяет условию минимальной концентрации напряжений на его контуре. Исследуется влияние отверстия оптимальной формы на торможение трещины. Дается критерий и метод решения задачи по предотвращению хрупкого разрушения тела, ослабленного прямолинейной трещиной продольного сдвига. Используется минимаксный критерий. Получено условие хрупкого разрушения.

Ключевые слова: трещина, продольный сдвиг, оптимальное отверстие, минимаксный критерий.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.008

УДК: 539.375

Введение. Как известно, добиться остановки или торможения медленно растущей трещины возможно с помощью засверловки отверстия в ее кончике [1]. Влияние кругового и эллиптического отверстий в вершине на развитие трещины исследовалось в работах [2, 3]. Однако, форма отверстия, имеющегося в конструкционном элементе, оказывает значительное влияние на механические свойства конструкции. Оптимальная форма отверстия позволяет повысить такие свойства конструкции как прочность, надежность, долговечность. Поэтому задачи по отысканию оптимальной формы отверстия являются актуальными и имеют несомненное прикладное значение. Таким образом, целесообразно тормозить медленно растущую трещину засверловкой в вершине отверстия оптимальной формы. Оптимальной можно считать форму отверстия, при которой концентрация напряжений на контуре минимальна (относительно других возможных форм отверстий). В некоторых случаях для определения такой формы отверстия нужно решать задачу теории упругости с неизвестной границей [4–14].

В настоящей работе строится математическая модель для остановки трещины продольного сдвига с помощью засверловки в ее вершине отверстия с минимальной концентрацией напряжений.

© Мустафаев А. Б., 2021

Мустафаев Азер Байрам оглы

e-mail: : azer_bm@list.ru, кандидат физико-математических наук, докторант, Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан.

Поступила 15.05.2021

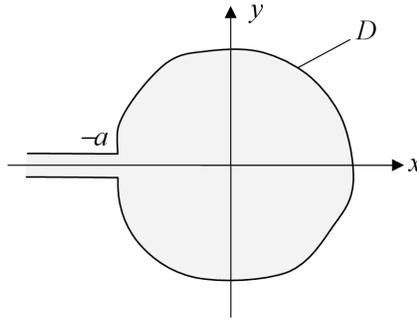


Рис. 1. Схема расположения искомого оптимального отверстия и трещины

Постановка задачи. Рассмотрим сплошное упругое деформированное тело, ослабленное прямолинейной трещиной продольного сдвига. Деформации тела приняты малыми величинами. Полагаем, что выполняется условие локальной симметрии, согласно которому в малой окрестности каждой точки контура прямолинейной трещины имеет место симметрия относительно касательной плоскости к поверхности трещины в этой точке. Считаем, что для торможения роста трещины в ее вершине высверлено отверстие. Функция геометрии формы отверстия в вершине трещины неизвестна и требует определения.

Будем рассматривать наиболее типичный и общий случай, когда характерный линейный размер отверстия мал относительно характерного линейного размера тела, т.е., выполняется условие: $L \gg R \gg \rho$ (L – характерный линейный размер тела; R – характерный линейный размер отверстия в вершине трещины; ρ – радиус кривизны конца трещины). В качестве характерного линейного размера тела можно брать линейный размер трещины, расстояние от конца трещины до границы тела, радиус кривизны контура трещины.

Разместим в вершине трещины центр O системы прямолинейных декартовых координат x, y, z , ось y которой направлена по нормали к поверхности трещины, ось z – вдоль контура трещины, а ось x – вглубь тела (рис. 1). Рассмотрим окрестность вершины трещины, малую относительно характерного линейного размера тела L , но большую по сравнению с размером R отверстия в вершине трещины. Рассматриваемая малая окрестность представится на плоскости Oxy бесконечной областью, занимающей внешность контура D . Параметры, характеризующие напряженно-деформированное состояние тела в этой малой окрестности, не зависят от координаты z . Считается, что упругое тело находится в условиях антиплоской деформации.

Таким образом, приходим к следующей задаче теории упругости с неизвестной границей:

$$\tau_{yz} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad -\infty < x < -a, \quad (1)$$

на неизвестном контуре отверстия $r = \rho(\theta)$

$$\tau_{zn} = 0, \quad \lim (\tau_{yz} \sqrt{z}) = K_{III} \quad \text{при} \quad y = 0, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Здесь τ_{xz} , τ_{yz} , τ_{zn} – напряжения; θ – полярный угол; K_{III} – коэффициент интенсивности напряжений (параметр нагружения), считается известным.

Требуется определить функцию $\rho(\theta)$ (отыскать форму отверстия).

Напомним, что в условиях антиплоской деформации поле упругих смещений в рассматриваемом теле описывается следующим образом:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = w(x, y), \quad (3)$$

а напряжения на основании закона Гука представляются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 0, \\ \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \tau_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\mu = E/2(1 + \nu)$ – модуль сдвига; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона.

В условиях антиплоской деформации напряжения и перемещения можно представить [15] через одну аналитическую функцию $f(z)$

$$w = \operatorname{Re} f(z), \quad \tau_{xz} + i\tau_{yz} = \mu \overline{f'(z)}, \quad z = x + iy. \quad (5)$$

Для нахождения формы отверстия (определения функции $\rho(\theta)$) постановку задачи следует дополнить критерием выбора формы отверстия. В качестве этого критерия принимаем минимизацию максимального напряжения $\tau_{\theta z}$ вдоль контура отверстия. Следовательно, в рассматриваемом случае отыскания для отверстия в вершине трещины в упругом теле, формы, обладающей минимальной концентрацией напряжения, приходим к обратной задаче теории упругости с дополнительным условием

$$\min_{\eta \in C} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \tau_{\theta z}(\theta, \eta), \quad (6)$$

где $\tau_{\theta z}$ – касательное напряжение, C – ограничения, подлежащие определению, η – проектные параметры.

Дополнительное условие (6) позволяет найти искомую функцию $\rho(\theta)$ формы отверстия.

Метод решения. Представим неизвестный контур отверстия в виде

$$\rho(\theta) = R + \varepsilon h(\theta), \quad (7)$$

в котором функция $h(\theta)$ подлежит определению в процессе решения задачи. Здесь $\varepsilon = R_0/R$ – малый параметр, R_0 – наибольшая высота отклонения (неровности) профиля контура отверстия от окружности $r = R$. Используется полярная система координат r, θ с центром в точке O , в которой линия $\theta = 0$ соответствует продолжению трещины.

Без уменьшения общности рассматриваемой задачи принимаем, что неизвестная функция $h(\theta)$ может быть представлена в виде отрезка тригонометрического ряда Фурье

$$h(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta). \quad (8)$$

Напряжения и перемещения ищутся в виде разложений по малому параметру ε , в которых для упрощения пренебрегается членами, содержащими ε в степени выше первой:

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^{(0)} + \varepsilon \tau_{xz}^{(1)} + \dots, \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}^{(0)} + \varepsilon \tau_{yz}^{(1)} + \dots, \quad w = w^{(0)} + \varepsilon w^{(1)} + \dots \quad (9)$$

Каждое из этих приближений удовлетворяет дифференциальным уравнениям плоской задачи теории упругости в условиях антиплоской деформации.

Разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности $r = R$, находим значения компонент тензора напряжений при $r = \rho(\theta)$. Согласно известным формулам для компонент напряжений, граничные условия задачи примут следующий вид: для нулевого приближения

$$\tau_{zn}^{(0)} = 0 \quad \text{на контуре } r = R, \quad (10)$$

$$\tau_{yz}^{(0)} = 0 \quad \text{на берегах трещины при } y = 0, \quad -\infty < x < -R; \quad (11)$$

для первого приближения

$$\tau_{zn}^{(1)} = T(\theta) \quad \text{на контуре } r = R, \quad (12)$$

$$\tau_{yz}^{(1)} = 0 \quad \text{на берегах трещины при } y = 0, \quad -\infty < x < -R. \quad (13)$$

Здесь функция $T(\theta)$ зависит от напряженного состояния в нулевом приближении и функции $h(\theta)$.

Решение задачи в нулевом приближении. Введем вспомогательную аналитическую функцию $\phi(z) = zf'(z)$. Тогда задача (10)-(12) в нулевом приближении (рис. 2) сводится с помощью представлений (5) к граничной задаче для аналитической функции $\phi(z)$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[\phi(z)] &= 0 \quad \text{при } y = 0, \quad -\infty < x < -R; \\ \operatorname{Re}[\phi(z)] &= 0 \quad \text{при } |z| = R; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \phi(z) = -\frac{2iK_{III}}{\mu} \sqrt{z} \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Сначала следует найти функцию $z = \omega(\zeta)$, осуществляющую отображение верхней полуплоскости комплексного переменного ζ на внешность контура D_0 в физической плоскости $z = x + iy$ (рис. 2). Применяя преобразование $z_1 = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}$ верхнюю полуплоскость ζ отображаем на верхнюю полуплоскость z_1 с выброшенным полукругом единичного радиуса, затем, с помощью функции $z_2 = -iz_1$, переводим полуплоскость z_1 в правую полуплоскость с выброшенным полукругом единичного радиуса. Используя преобразование $z_3 = z_2^2$ правую полуплоскость z_2 отображаем на внешность контура D_1 , представляющего собой разрез вдоль $y = 0, -\infty < x_3 < -1$ и единичной окружности с центром в начале координат $x_3 y_3$. С помощью преобразования $z = Rz_3$, отображаем внешность контура D_1 на внешность контура D_0 в физической плоскости z . Таким образом, функция $z = \omega(\zeta)$ записывается в раскрытом виде

$$z = Rz_3 = Rz_2^2 = R(-z_1^2) = R \left[- \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)^2 \right]. \quad (16)$$

Перейдем на параметрическую плоскость комплексного переменного ζ при помощи преобразования $z = \omega(\zeta)$.

Принимая обозначения

$$\Phi(\zeta) = \phi[\omega(\zeta)],$$

на основании граничного условия (14) получаем на вспомогательной плоскости $\zeta = \eta + i\xi$ смешанную краевую задачу для определения аналитической функции $\Phi(\zeta)$

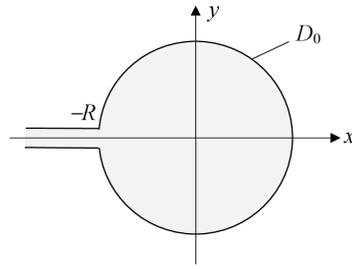


Рис. 2. Расчетная схема задачи в нулевом приближении

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\Phi(\zeta) &= 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad -\infty < \eta < -1; \\ \operatorname{Re}\Phi(\zeta) &= 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad -1 < \eta < 1; \\ \operatorname{Im}\Phi(\zeta) &= 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad 1 < \eta < \infty. \end{aligned} \quad (17)$$

В бесконечно удаленной точке на основании (15) для функции $\Phi(\zeta)$ имеет место выражение:

$$\Phi(\zeta) = -\frac{2K_{\text{III}}\sqrt{R}\zeta}{\mu}. \quad (18)$$

Решение краевой задачи (17), (18) в классе всюду ограниченных функций имеет вид:

$$\Phi(\zeta) = -\frac{2K_{\text{III}}\sqrt{R}}{\mu}\sqrt{\zeta^2 - 1}. \quad (19)$$

Таим образом, для аналитической функции $f(z)$ имеем

$$f'(z) = -\frac{iK_{\text{III}}}{\mu}\left(\frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{R}{z^{3/2}}\right). \quad (20)$$

Используя полученные соотношения (20) и представления (5), находим напряжения в нулевом приближении

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^0 &= -\frac{K_{\text{III}}}{\sqrt{r}}\left(\sin\frac{1}{2}\theta + \frac{R}{r}\sin\frac{3}{2}\theta\right), \\ \tau_{yz}^0 &= \frac{K_{\text{III}}}{\sqrt{r}}\left(\cos\frac{1}{2}\theta + \frac{R}{r}\cos\frac{3}{2}\theta\right), \\ \tau_{z\theta}^0 &= \frac{K_{\text{III}}}{\sqrt{r}}\left(1 + \frac{R}{r}\right)\cos\frac{1}{2}\theta, \quad \tau_{zr}^0 = \frac{K_{\text{III}}}{\sqrt{r}}\left(1 - \frac{R}{r}\right)\sin\frac{1}{2}\theta. \end{aligned} \quad (21)$$

Получив напряженное состояние в нулевом приближении, находим формально функцию $T(\theta)$.

Решение задачи в первом приближении. В первом приближении граничные условия задачи для вспомогательной аналитической функции $\phi_1(z) = zf'_1(z)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\phi_1(z) &= 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad -\infty < \eta < -R, \\ \operatorname{Re}[\phi_1(z)] &= T \quad \text{при} \quad |z| = R, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\lim \phi_1(z) = 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Для решения краевой задачи (22), применяя преобразование $z = \omega(\zeta)$, переходим на параметрическую плоскость комплексного переменного ζ .

Обозначая

$$\Phi_1(\zeta) = \phi_1[\omega(\zeta)],$$

с помощью граничного условия (22) приходим на параметрической плоскости $\zeta = \eta + i\xi$ к смешанной краевой задаче для нахождения аналитической функции $\Phi_1(\zeta)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\Phi_1(\zeta) &= 0 \quad \text{при } \xi = 0, \quad -\infty < \eta < -1, \\ \operatorname{Re}\Phi_1(\zeta) &= T \quad \text{при } \xi = 0, \quad -1 < \eta < 1, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\operatorname{Im}\Phi_1(\zeta) = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \quad 1 < \eta < \infty. \quad (25)$$

На основании (23) в бесконечно удаленной точке $\Phi_1(\zeta) \rightarrow 0$.

Решение краевой задачи (24)-(25) в классе всюду ограниченных функций имеет вид

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{T(\eta) d\eta}{\eta - \zeta}. \quad (26)$$

Учитывая поведение функции $\Phi_1(\zeta)$ на бесконечности, записываем условие разрешимости краевой задачи (24)-(25):

$$\int_{-1}^1 \frac{T(\eta) d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} = 0. \quad (27)$$

Условие (27) служит для определения размера a (рис. 1).

С помощью полученных соотношений (26), (27) и представления (5), также как и в нулевом приближении, находим напряжения в первом приближении.

Решение задачи оптимизации. Для заданной функции $h(\theta)$ формы отверстия полученные соотношения являются замкнутыми и позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние тела в условиях антиплоской деформации.

Чтобы построить недостающие уравнения, позволяющие найти коэффициенты α_k и β_k ряда Фурье искомой функции $h(\theta)$, определим тангенциальное напряжение $\tau_{z\theta}$ на контуре отверстия. Используя полученное решение, находим напряжения $\tau_{z\theta}$ в поверхностном контуре $L(r = \rho(\theta))$ с точностью до величин первого порядка относительно малого параметра ε

$$\tau_{z\theta} = \tau_{z\theta}^{(0)}|_{r=R} + \varepsilon \left[h(\theta) \frac{\partial \tau_{z\theta}^{(0)}}{\partial r} + \tau_{z\theta}^{(1)}(\theta) \right] \Big|_{r=R}. \quad (28)$$

Недостающие уравнения для определения искомых коэффициентов α_k, β_k получаем, требуя распределения напряжений на контуре отверстия соответственно условию (7) оптимизации. Для функции $\tau_{z\theta}(\theta, \alpha_k, \beta_k)$ находим ее максимальное значение на контуре L

$$\max \tau_{z\theta}(\theta_*, \alpha_k, \beta_k).$$

Здесь величина θ_* есть решение следующего уравнения

$$\frac{d\tau_{z\theta}(\theta)}{d\theta} = 0.$$

Максимальное значение функции $\tau_{z\theta}(\theta)$ находится обычными методами дифференциального исчисления. Для построения недостающих уравнений требуем минимизации максимальное значение функции $\tau_{z\theta}$ вдоль контура L

$$\min_{\eta \in C} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \tau_{z\theta}(\eta, \theta). \quad (29)$$

Необходимо, чтобы обеспечивалась минимизация максимального касательного напряжения $\tau_{z\theta}$ на контуре отверстия, т.е. выполнялся минимаксный критерий (29) при ограничениях

$$\tau_{z\theta} \leq [\tau]. \quad (30)$$

Здесь $[\tau]$ – допустимое касательное напряжение, определяемое опытным путем.

Следует распорядиться функцией $H(\theta)$ таким образом, чтобы обеспечивалась минимизация максимального значения напряжения $\tau_{z\theta}$. Требуется найти такие значения коэффициентов α_k, β_k , которые удовлетворяют полученной системе уравнений и обращают в минимум линейную функцию $\max \tau_{z\theta}$ (целевую функцию).

Поскольку напряжения $\tau_{z\theta}(\theta, \alpha_k, \beta_k)$ (показатель качества управления) и $\max \tau_{z\theta}$ линейно зависят от искомым коэффициентов α_k, β_k , задача сводится к задаче линейного программирования. В рассматриваемой задаче наиболее эффективным оказывается метод симплексного алгоритма.

Система уравнений (30) совместно с полученными соотношениями задачи теории упругости в нулевом и первом приближении позволяет определить оптимальную форму отверстия, напряженно-деформированное состояние тела.

Рост трещины продольного сдвига происходит по направлению максимального касательного напряжения $\tau_{z\theta}$ [16]. Таким направлением является продолжение трещины ($\theta = 0$). Следовательно, как только напряжение $\tau_{z\theta}$ окажется равным некоторой предельной величине τ_c , характерной для данного материала, трещина продольного сдвига будет расти. Таким образом, условием хрупкого разрушения будет

$$\tau_{z\theta}(K_{III}) = \tau_c. \quad (31)$$

Согласно условию (31) трещина будет расти, как только коэффициент интенсивности напряжений K_{III} (параметр нагружения) достигает некоторой критической величины, при которой оптимальное значение напряжения оказывается равной предельной величине τ_c . Величина τ_c характерной для данного материала и зависит от характерного размера отверстия в кончике трещины и прочности материала.

При выполнении расчетов для упрощения принималось, что искомый контур отверстия симметричен относительно координатных осей. Результаты расчетов коэффициентов α_{2k} разложения функции $h(\theta)$ приведены в таблице.

Выводы

a_0	a_2	a_4	a_6	a_8	a_{10}	a_{12}
0,0772	0,0943	0,0102	0,0090	0,0063	0,0038	0,0017

Таблица 1. Значение коэффициентов Фурье для оптимальной формы отверстия кончике трещины продольного сдвига

Построена математическая модель торможения трещины продольного сдвига с помощью засверловки в ее вершине отверстия с минимальной концентрацией напряжений на контуре. Построенная модель позволяет находить решение задачи оптимального проектирования по определению формы отверстия, эффективно замедляющего рост трещины.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Финкель В. М. Физические основы торможения разрушения. Металлургия: Москва, 1977. 360 с.
- [2] Мирсалимов В. М. Влияние разгружающих отверстий на развитие трещины // Проблемы прочности. 1971. Т. 3, № № 4. С. 18–19.
- [3] Мирсалимов В. М. Об одном способе торможения растущих трещин // Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 1972. № № 1. С. 34–38.
- [4] Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. Наука: Москва, 1980. 256 с.
- [5] Wheeler L. T. Stress minimum forms for elastic solids // ASME. Appl. Mech. Rev. 1992. Vol. 45, no. No. 1. P. 1–12.
- [6] Vigdergauz S. The stress-minimizing hole in an elastic plate under remote shear // J. of Mechanics of Materials and Structures. 2006. Vol. 1, no. No. 2. p. 387–406.
- [7] Cherepanov G. P. Optimum shapes of elastic bodies: equistrong wings of aircrafts and equistrong underground tunnels // Физ. мезомеханика. 2015. Vol. 18, no. No. 5. p. 114–123.
- [8] Mirsalimov V. M. Inverse problem of elasticity for a plate weakened by hole and cracks // Mathematical Problems in Engineering. 2019. Vol. 2019, no. Article ID 4931489. p. 11.
- [9] Mir-Salim-zade M. V. Minimization of the stressed state of a stringer plate with a hole and rectilinear cracks // Journal of Mechanical Engineering. 2019. Vol. 22, no. No. 2. p. 59–69.
- [10] Mirsalimov V. M. Minimization of the stressed state of a stringer plate with a hole and rectilinear cracks // Engineering Optimization. 2020. Vol. 52, no. No. 2. p. 288–302.
- [11] Zeng X., Lu A., Sh. W. Shape optimization of two equal holes in an infinite elastic plate // Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2020. Vol. 48, no. No. 2. p. 133–145.
- [12] Mirsalimov V. M. Optimal hole shape in plate with cracks taking into account body forces // Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2020. p. 133–145.
- [13] Vigdergauz S., Elishakoff I. Stress minimization around a hole with a stochastically simulated micro-rough edge in a loaded elastic plate // J. of mechanics of materials and structures. 2020. Vol. 15, no. No. 2. p. 277–289.
- [14] Mirsalimov V. M. Optimal design of shape of a working in cracked rock mass // Geomechanics and Engineering. 2021. Vol. 24, no. No. 3. p. 227–235.
- [15] Мирсалимов В. М. Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами. Элм: Баку, 1984. 124 с.
- [16] Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О хрупких трещинах продольного сдвига // Прикл. математика и механика. 1961. Т. 25, № Вып. 6. с. 1110–1119.

A. B. Mustafayev

OPTIMAL HOLE SHAPE FOR ARREST OF LONGITUDINAL SHEAR CRACK

Institute of Mathematics and Mechanics of the Academy of Sciences of Azerbaijan

Abstract. The problem of finding optimal hole shape at the tip of a longitudinal shear crack is considered. The desired hole shape satisfies the condition of the minimum stress concentration on the contour. The effect of the optimal hole shape on deceleration of a crack is studied. A criterion and solution method for the problem of preventing brittle fracture of the solid weakened by rectilinear longitudinal shear crack is given. The minimax criterion is used. The brittle fracture condition is obtained.

Keywords: crack, longitudinal shear, optimal hole, minimax criterion

REFERENCES

- [1] Finkel V. M. Physics of Fracture. Metallurgiya: Moscow, 1977. 360 p.
- [2] Mirsalimov V. M. Effect of relieving apertures on crack development // Strength of Materials. 1971. Vol. 3, no. No. 4. P. 18–19.
- [3] Mirsalimov V. M. On a method of growing cracks inhibition // Izv. Akad. nauk Azerbajdzhanskoj SSR, serija fiz.-tehn. i mat. nauk. 1972. no. No. 1. P. 34–38.
- [4] Banichuk N. V. Optimization of shapes of elastic solids. Nauka: Moscow, 1980. 256 p.
- [5] Wheeler L. T. Stress minimum forms for elastic solids // ASME. Appl. Mech. Rev. 1992. Vol. 45, no. No. 1. P. 1–12.
- [6] Vigdergauz S. The stress-minimizing hole in an elastic plate under remote shear // J. of Mechanics of Materials and Structures. 2006. Vol. 1, no. No. 2. p. 387–406.
- [7] Cherepanov G. P. Optimum shapes of elastic bodies: equistrong wings of aircrafts and equistrong underground tunnels // Physical Mesomechanics. 2015. Vol. 18, no. No. 5. p. 114–123.
- [8] Mirsalimov V. M. Inverse problem of elasticity for a plate weakened by hole and cracks // Mathematical Problems in Engineering. 2019. Vol. 2019, no. Article ID 4931489. p. 11.
- [9] Mir-Salim-zade M. V. Minimization of the stressed state of a stringer plate with a hole and rectilinear cracks // Journal of Mechanical Engineering. 2019. Vol. 22, no. No. 2. p. 59–69.
- [10] Mirsalimov V. M. Minimization of the stressed state of a stringer plate with a hole and rectilinear cracks // Engineering Optimization. 2020. Vol. 52, no. No. 2. p. 288–302.
- [11] Zeng X., Lu A., Wang S. Shape optimization of two equal holes in an infinite elastic plate // Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2020. Vol. 48, no. No. 2. p. 133–145.
- [12] Mirsalimov V. M. Optimal hole shape in plate with cracks taking into account body forces // Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2020. p. 133–145.
- [13] Vigdergauz S., Elishakoff I. Stress minimization around a hole with a stochastically simulated micro-rough edge in a loaded elastic plate // J. of mechanics of materials and structures. 2020. Vol. 15, no. No. 2. p. 277–289.
- [14] Mirsalimov V. M. Optimal design of shape of a working in cracked rock mass // Geomechanics and Engineering. 2021. Vol. 24, no. No. 3. p. 227–235.
- [15] Mirsalimov V. M. Fracture of elastic and elastoplastic solids with cracks. Elm: Baku, 1984. 124 p.
- [16] Barenblatt G. I., Cherepanov G. P. On brittle cracks under longitudinal shear // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1961. Vol. 25, no. 6. p. 1654–1666.

Mustafayev Azer Bayram ogly

e-mail: azer_bm@list.ru, Ph.D. Phys. & Math., doctoral student, Institute of Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan.

Т. С. Алероев¹, А. Н. Хворова²

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРА ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В СКВАЖИНЕ

¹ *Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия*

² *Центральный научно-исследовательский институт строительных конструкций (ЦНИИСК) имени В. А. Кучеренко, г. Москва, Россия*

Аннотация. В данной статье рассматривается идентификация параметров математической модели, основанной на дифференциальном уравнении с дробными производными. С помощью этой модели описывается установившееся течение в скважине в трещинном деформированном пласте. Рассматриваемая модель может быть использована и при разработке нефтяных месторождений с трещиноватыми коллекторами. Идентификация параметра осуществлялась с помощью оптимизации показателя качества адекватности математической модели - коэффициента детерминации. Также была представлена технология прогнозирования результатов давлений, для области, в которой не проводились экспериментальные измерения. Предлагаемая технология сопровождается расчетами.

Ключевые слова: идентификация параметра, дробная производная, коэффициент детерминации, математическая модель, уравнение движение жидкости

DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.009

УДК: 539.374

Введение.

Как правило, разработка нефтяных месторождений - сложная задача и поэтому вместо реально существующего объекта рассматривают математическую модель, которая отражает основные свойства реальной технической системы. Эффективность

© Алероев Т. С., Хворова А. Н., 2021

Алероев Темирхан Султанович

e-mail: aleroevts@mgsu.ru, профессор, доктор физико-математических наук, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Хворова Алла Николаевна

e-mail: attemp2016@gmail.com, инженер, Центральный научно-исследовательский институт строительных конструкций (ЦНИИСК) имени В. А. Кучеренко, г. Москва, Россия.

Поступила 20.08.2021

разработки месторождений напрямую зависит от состояния призабойной зоны скважины (ПЗС) – участка пласта, примыкающего к стволу скважины. Так как в пределах ПЗС изменяются фильтрационные характеристики продуктивного пласта, на всех этапах разработки месторождений необходимо вести регистрацию забойного давления [1]. Экспериментальное определение забойного давления, сопровождается некоторыми погрешностями, которые могут снизить точность построения индикаторных линий и вычисления коэффициента продуктивности. В работе [2] рассматривается двухмерная задача установившегося течения жидкости для скважины в трещиноватом деформированном пласте, которая описывается уравнением (1)

$$P'(r) [D^\alpha P(r)]^2 = a(r)D^\alpha P(r) + b(r), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1)$$

с начальным условием

$$P(0) = 0.$$

Данное уравнение содержит оператор дробного дифференцирования и описывает зависимость мощности слоя H , вскрываемого пласта, от значений градиента давления ∇P . Уравнение (1) сводится к системе уравнений (2)

$$\begin{cases} D^\beta v(r) [v(r)]^2 = a(r)v(r) + b(r), \\ D^\alpha P(r) = v(r), \end{cases} \quad (2)$$

с граничным условием

$$P(0) = 0.$$

В случае $P(0) = c \neq 0$, применяем замену переменной $P_1(r) = P(r) - c$, при этом новая функция так же будет удовлетворять уравнению (1) [2].

α – эмпирический коэффициент, описывающий изменение мощности слоя в зависимости от градиента давления.

Значение β вычисляется как:

$$\beta = 1 - \alpha.$$

Коэффициенты $a(r)$ и $b(r)$ вычисляются как

$$a(r) = \frac{\mu Q |\nabla P|_{crit}^\alpha}{2\pi r h k}; \quad (3)$$

$$b(r) = \frac{\mu \beta_k}{k} \left(\frac{Q |\nabla P|_{crit}^\alpha}{2\pi r h} \right)^2, \quad r \in [0, r_k], \quad (4)$$

где ∇P – градиент давления, \bar{v} – вектор скорости, k – проницаемость среды, v – модуль \bar{v} , μ – вязкость жидкости, β_k – константа пропорциональности, r_k – радиус контура питания.

На рис. 1 представлены зависимости, полученные при решении численным методом с помощью программы MATHCAD уравнения (1) и при различных значениях α со следующими параметрами [3]

$$\mu = 10^{-13} \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad k = 10^{-3} \text{ м}^2, \quad h = 10 \text{ м}, \quad |\nabla P|_{crit} = 2.5 \cdot \frac{10^5 \text{ Па}}{\text{м}}, \quad \beta_k = 10^3 \text{ с/м},$$

$$Q = 11.5 \times 10^{-5} \cdot \text{м}^3/\text{с}.$$

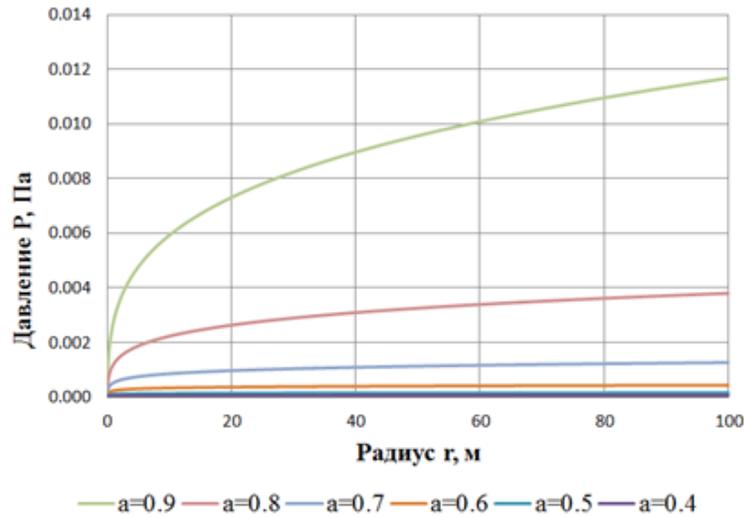


Рис. 1. Зависимость изменения давления P от r при $Q = 11,5 \times 10^{-5} \cdot \text{м}^3/\text{с}$ и при различных α .

Каждой скважине соответствует конкретная величина α . Определить ее можно путем обработки зависимости действующей толщины пласта от градиента давления, получаемой в результате промысловых исследований. Поэтому идентификация параметра α является важнейшей задачей для аппроксимации полученных исследований.

В данной статье для исследования рассматриваются эмпирические данные измерения давлений в призабойных зонах нескольких скважин Ставропольского края. На рисунке 2 приведены зависимости результатов измерений давлений на расстоянии r от ствола скважин под номером 1 и 2. В таблицах 1, 2 эти значения представлены в числовом виде [2].

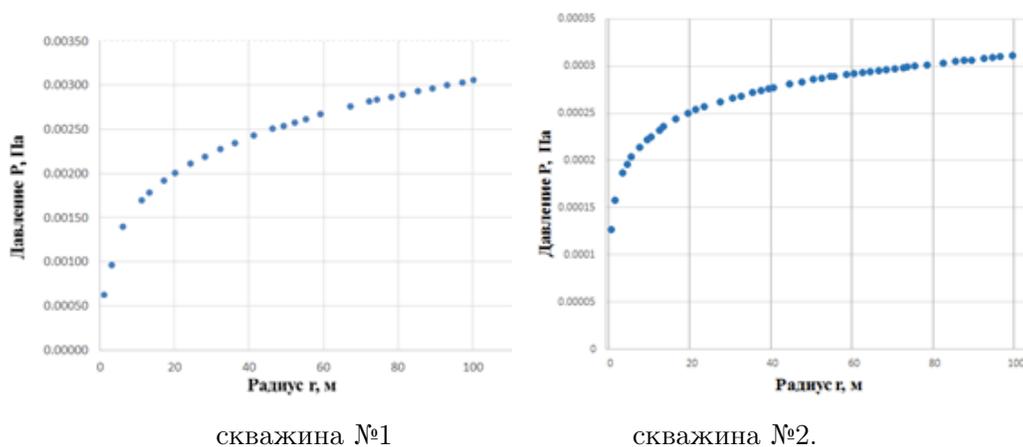


Рис. 2. Эмпирические данные изменения давления P в призабойных зонах.

Метод исследования

R, м	2	4	7	12	14	18	21	25	29
P, Па · 10 ⁻⁴	6.3	97	14	17.05	17.85	19.25	20.15	21.15	22
R, м	33	37	42	47	50	53	56	60	67
P, Па · 10 ⁻⁴	22.8	23.5	24.35	25.1	25.4	25.8	26.25	26.75	27.67
R, м	72	74	78	81	85	89	93	97	100
P, Па · 10 ⁻⁴	28.2	28.4	28.7	29	29.4	29.7	30.03	30.33	30.6

Таблица 1. Экспериментальные значения для скважины №1.

R, м	2	3.5	6	7	8	9	10.5	12	13
P, Па · 10 ⁻⁴	1.27	1.58	1.87	1.96	2.04	2.15	2.23	2.26	2.32
R, м	14.5	17	20	22	24	28	31	33	36
P, Па · 10 ⁻⁴	2.36	2.44	2.51	2.55	2.58	2.63	2.67	2.69	2.72
R, м	38	40	41.5	45	48	51	53	56	59
P, Па · 10 ⁻⁴	2.74	2.77	2.78	2.82	2.84	2.86	2.88	2.9	2.92
R, м	61	63	65	67	69	71	73	74.5	76
P, Па · 10 ⁻⁴	2.93	2.94	2.95	2.96	2.97	2.98	2.99	2.99	3
R, м	79	83	86	88	90	93	95	97	100
P, Па · 10 ⁻⁴	3.02	3.04	3.05	3.06	3.07	3.09	3.1	3.11	3.12

Таблица 2. Экспериментальные значения для скважины №2.

Методы математического моделирования широко применяются в различных областях науки производства и техники, например, экономики [4-8], животноводстве [9,10], на предприятиях нефтегазовой отрасли [11,12,13] и других. Применим идею прогнозирования для моделей, основанных на дифференциальных уравнениях с дробными производными.

Предлагаем идентификацию параметра дробной производной для конкретной скважины производить с помощью максимизации численного показателя качества математической модели - коэффициента детерминации (R^2). Коэффициент детерминации будет являться мерой адекватности математической модели. Коэффициент детерминации равен 1 в случае абсолютной сходимости графика численного решения с кривой экспериментальных данных. В нашем случае коэффициент детерминации определяется как:

$$R^2 = 1 - \frac{D_{\text{ост}}}{D_{\text{общ}}} \cdot \frac{n-1}{n-2}, \quad (5)$$

где n – количество рассматриваемых значений, $n-1$ – степень свободы для общей дисперсии ($D_{\text{общ}}$), $n-2$ – степень свободы для остаточной дисперсии ($D_{\text{ост}}$):

$$D_{\text{ост}} = \sum_1^n (P_{r_i}^{\text{ч}} - P_{r_i}^{\text{э}}). \quad (6)$$

$P_{r_i}^{\text{ч}}$ – значения давлений в точках r_i , полученные при численном решении задачи (1), $P_{r_i}^{\text{э}}$ – измерения полученные при экспериментальном исследовании скважины, n – количество данных. $D_{\text{общ}}$ – общая дисперсия \bar{P} – среднее значение экспериментальных

измерений:

$$D_{\text{общ}} = \sum_1^n (P_{r_i}^{\text{э}} - \bar{P}) \quad (7)$$

На рисунке 3 представлена геометрическая интерпретация экспериментальных данных и результатов математической модели (1), полученных при решении системы уравнений (2) с идентифицированным параметром α . Для скважины №1 $\alpha = 0.653$, для скважины №2 $\alpha = 0.762$.

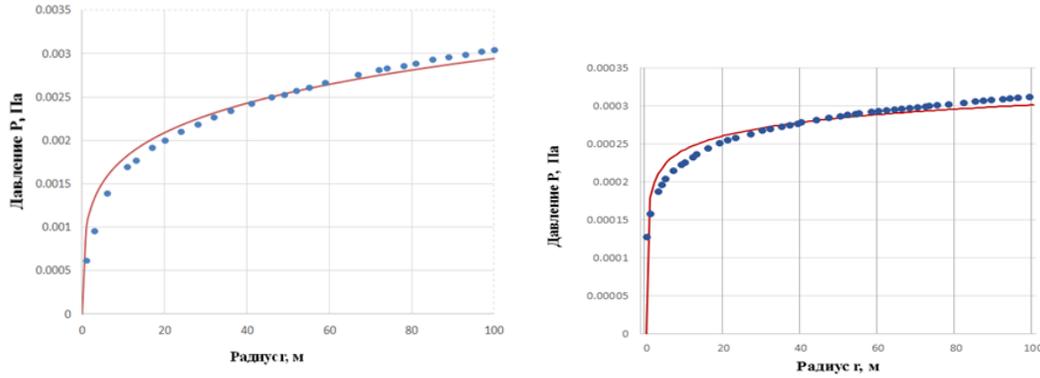


Рис. 3. Точечный график соответствует экспериментальным данным, сплошная линия соответствует результатам математической модели.

В таблице 3 приведены рассчитанные значения показателя качества модели – R^2 , необходимые для идентификации параметра α двух рассматриваемых скважин. Значимость коэффициента качества модели подтверждена с помощью критерия Фишера на уровне значимости 0.05 для скважины №1 ($F_{\text{кр}} = 1.9472$; $F_{\text{набл}} = 210.3656$ при $k_1 = 26$, $k_2 = 25$) и для скважины №2 ($F_{\text{кр}} = 1.6475$; $F_{\text{набл}} = 786.4016$ при $k_1 = 45$, $k_2 = 44$). Отвергается основная гипотеза о незначимости показателя качества R^2 : $H_0 : R^2 = 0$ и принимается конкурирующая гипотеза о значимости R^2 : $H_1 : R^2 \neq 0$. Из таблицы 3 наблюдаем, что значения R^2 для скважины №1 и №2 близки к единице. Следовательно, рассматриваемая математическая модель с идентифицированными параметрами является адекватной для описания рассматриваемого процесса.

Номер скважины	Порядок производной	$D_{\text{ост}}$	$D_{\text{общ}}$	R^2
Скважина №1	$\alpha = 0.653$	$8.138 \cdot 10^{-7}$	0.000524	0.99545
Скважина №2	$\alpha = 0.762$	$7.83181 \cdot 10^{-7}$	0.000622	0.99873

Таблица 3. Расчетные значений коэффициентов детерминации.

В случае прогнозирования значений давления в областях, где экспериментальных измерений не проводилось, может быть применена технология прогнозирования с вычислением доверительного интервала для искомой величины. Доверительный интервал для прогнозируемого значения находится следующим образом

$$(P_{\text{пр}} - (1 - R^2)P_{\text{пр}}) \leq P_{\text{прогн}} \leq (P_{\text{пр}} + (1 - R^2)P_{\text{пр}}) \quad (8)$$

$P_{\text{прогн}}$ – прогнозируемое значение давления в скважине. $P_{\text{пр}}$ – значение точечного прогноза давления в призабойной зоне скважины, полученное с помощью математической модели (1) численным методом при идентифицированном параметре α . $(1 - R^2)P_{\text{пр}}$ – величина стандартной ошибки прогнозированного значения.

Обсуждение результатов.

Для прогнозируемого значения давления на расстоянии 103 метра от центра скважины № 1, при $\alpha = 0.653$, был рассчитан доверительный интервал [0.0003256 Па, 0.0003268 Па]. Для скважины № 2, при $\alpha = 0.762$, был получен доверительный интервал [0.002946 Па, 0.002954 Па].

Представленная технология построения математической модели и ее идентификация является эффективным инструментом для решения рассматриваемой задачи. Как показывают расчеты, вариант прогнозирования, основанный на дисперсионном анализе, позволяет получить минимальный доверительный интервал для прогнозируемого значения и обеспечен необходимыми критериями.

Заключение.

Математическая модель, представленная в данной статье, хорошо аппроксимирует данные промысловых исследований, полученных на основе индикаторных линий. Также модель обосновывает зависимость расхода жидкости от перепада давления, которая используется при обработке данных гидродинамических исследований при установившемся притоке жидкости к скважине в трещиноватом деформированном пласте.

Предложенная технология прогнозирования позволяет получить минимальный доверительный интервал прогнозируемого значения и для модели, основанной на дифференциальном уравнении с дробными производными, приводится впервые.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шаймуратов Р. В. Гидродинамика нефтяного трещиноватого пласта. М. : Недра, 1980.
- [2] Aleroev T. S., Aleroeva H. T., Yifa Tang, Siyan Zhang Features of seepage of a liquid to a chink in the cracked deformable layer // International journal of modeling, simulation, and scientific computing. 2010. Vol. 01. No 3. P. 333–347.
- [3] Хворова А. Н., Ерохин С. В. Математическая модель просачивания жидкости в трещиноватом слое // Научно-технический вестник Поволжья. № 1. 2020. С. 138–141.
- [4] Орлов В. Н., Иванова Т. В. Построение прогнозных математических моделей анализа сельскохозяйственного производства // Экономика, управление. 2016. № 10. С. 67–76.
- [5] Орлов В. Н., Иванова Т. В. Математическое моделирование в исследовании воспроизводства кадров массовых профессий в растениеводстве и животноводстве Чувашской Республики // Экономика сельскохозяйственных и перерабатывающих предприятий. 2016. № 12. С. 73–77.
- [6] Orlov V., Ivanova T., Brenchagova S. Rumbayeva N. Mathematical modeling of economic factors impact: reproduction of personnel potential in agriculture sector of Russia // IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science. 2020. Vol. 433. P. 012012.
- [7] Орлов В. Н., Иванова Т. В., Соколова Г. Н. Методика оценки кадрового потенциала в сельском хозяйстве Экономика сельского хозяйства России. 2017. № 7. С. 47–53.
- [8] Ivanova T., Arkhipova V., Ivanitskaya I. Assessment of the influence of social factors on reproduction of personnel potential in agriculture of Russia // E3S Web Conf. 2019. Vol. 110
- [9] Орлов В. Н., Кульмакова Н. И. Прогнозирование в технологии воспроизводства свиней Инновации в АПК: проблемы и перспективы // Белгородский ГСХА. 2016. №4(12). С. 130–137.
- [10] Orlov V., Kulmakova N., Ivanitskiy A., Sevastyanova N., Mongush S. Pork production technology optimization based on mathematical modelling // E3S Web Conf. 2019. Vol. 91. P. 06009
- [11] Orlov V., Detina E., Kovalchuk O. Mathematical modeling of emergency situations at objects of production and gas transportation // MATEC Web of Conferences. 2018. Vol. 251

- [12] Orlov V., Detina E. Probabilistic approach to the investigation of the causes of emergencies at the gas pipeline facilities // MATEC Web of Conferences. 2018. Vol. 251
- [13] Orlov V., Detina E., Kovalchuk O. Mathematical modelling in tasks of predicting the operational reliability of gas networks facilities // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2021. Vol. 1030. P. 012083

T. S. Aleroev¹, A. N. Hvorova²

A MATHEMATICAL MODEL FOR IDENTIFYING THE FRACTIONAL DERIVATIVE PARAMETER AND PREDICTING THE RESULTS FOR THE FLUID FLOW EQUATION IN THE WELL.

¹*Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

²*Research Institute of Building Constructions (TSNIISK) Named After V. A. Koucherenko, Moscow, Russia*

Abstract. This article discusses the identification of the parameters of a mathematical model based on a differential equation with fractional derivatives. This model is used to describe the steady-state flow in a well in a fractured deformed formation. The considered model can be used in the development of oil fields with fractured reservoirs. The identification of the parameter was carried out by optimizing the quality indicator of the adequacy of the mathematical model - the coefficient of determination. The technology for predicting the results of pressures was also presented, for an area in which no experimental measurements were carried out. The proposed technology is accompanied by calculations.

Keywords: parameter identification, fractional derivative, determination coefficient, mathematical model, fluid motion equation.

REFERENCES

- [1] Shaimuratov RV Hydrodynamics of a fractured oil reservoir. M.: Nedra, 1980.
- [2] Aleroev T. S., Aleroeva H. T., Yifa Tang, Siyan Zhang Features of seepage of a liquid to a chink in the cracked deformable layer // International journal of modeling, simulation, and scientific computing. 2010. Vol. 01.No 3.P. 333-347.
- [3] Khvorova AN, Erokhin SV Mathematical model of fluid seepage in a fractured layer // Scientific and technical bulletin of the Volga region. No. 1. 2020. P. 138-141.
- [4] Orlov V. N., Ivanova T. V. Construction of predictive mathematical models for the analysis of agricultural production // Economics, Management. 2016. No. 10. P. 67-76.
- [5] Orlov V. N., Ivanova T. V. Mathematical modeling in the study of the reproduction of personnel of mass professions in plant growing and animal husbandry of the Chuvash Republic // Economy of agricultural and processing enterprises. 2016.No. 12.P. 73-77.
- [6] Orlov V., Ivanova T., Brenchagova S. Rumbayeva N. Mathematical modeling of economic factors impact: reproduction of personnel potential in agriculture sector of Russia // IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science. 2020. Vol. 433. P. 012012.
- [7] Orlov V. N., Ivanova T. V., Sokolova G. N. Methods for assessing human resources in agriculture Economy of agriculture in Russia. 2017.No. 7.P. 47-53.

Aleroev Temirkhan Sultanovich, Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

Hvorova Alla Nikolaevna, Engineer, Research Institute of Building Constructions (TSNIISK) Named After V. A. Koucherenko, Moscow, Russia

-
- [8] Ivanova T., Arkhipova V., Ivanitskaya I. Assessment of the influence of social factors on reproduction of personnel potential in agriculture of Russia // E3S Web Conf. 2019. Vol. 110
 - [9] Orlov VN, Kulmakova NI Forecasting in the technology of reproduction of pigs Innovations in the agro-industrial complex: problems and prospects // Belgorod State Agricultural Academy. 2016. No. 4 (12). S. 130-137.
 - [10] Orlov V., Kulmakova N., Ivanitskiy A., Sevastyanova N., Mongush S. Pork production technology optimization based on mathematical modeling // E3S Web Conf. 2019. Vol. 91. P. 06009
 - [11] Orlov V., Detina E., Kovalchuk O. Mathematical modeling of emergency situations at objects of production and gas transportation // MATEC Web of Conferences. 2018. Vol. 251
 - [12] Orlov V., Detina E. Probabilistic approach to the investigation of the causes of emergencies at the gas pipeline facilities // MATEC Web of Conferences. 2018. Vol. 251
 - [13] Orlov V., Detina E., Kovalchuk O. Mathematical modeling in tasks of predicting the operational reliability of gas networks facilities // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2021. Vol. 1030. P. 012083

Ю. В. Немировский

РАЦИОНАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГИБРИДНЫХ ПОЛИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ МАССОВЫХ НАГРУЗОК

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия

Аннотация. Рассмотрена проблема рационального (оптимального) проектирования высотных или административно-управленческих сооружений при активном использовании гибридных полиметаллических стандартизированных элементов, создаваемых на основе различных надежно разработанных технологий. Целью решения проблемы является подбор и перераспределение материалов, при которых с обеспечением требуемых комфортных и безопасных условий существования будут значительно улучшены экономические показатели создаваемого проекта. В качестве гарантированных требований комфортного существования использованы разработанные автором три различия критерия деформативности фазовых материалов в условиях заданных типов и полей внешних нагрузок. Первый критерий: «предельно допустимое упругое состояние» – когда ни один из фазовых материалов не будет деформироваться за пределом упругости. Второй критерий: «предельно допустимые деформации упрочнения» – когда фазовые материалы не переходят в состояние разупрочнения. Третий критерий: «предельно допустимые деформации разрушения» – когда какой-либо из фазовых материалов будет «локально» разрушаться. При расчетах учитывается, что ряд физических характеристик материалов в широких пределах технологических переработок довольно устойчиво сохраняют свои значения и используются как заранее известные данные из справочной литературы. К ним относятся пределы упругости и прочности, модули Юнга, удельные плотности и стоимости фазовых материалов. Такая малочувствительная технологическая устойчивость позволила для всех фазовых материалов при аппроксимации диаграммы деформирования различных металлических материалов использовать единообразную зависимость в виде кубической параболы, коэффициенты которой и упомянутые три предельно допустимые деформации выражаются через устойчивые характеристики – пределы упругости, прочности и модуль Юнга. На основе известных кинематических и статических гипотез описания неупругого деформирования стержневых систем для всех типов предельно-допустимых деформаций, получены единообразные системы уравнений, которые позволяют для заданных условий внешнего воздействия определить геометрические параметры и топологическую структуру распределения всех фазовых материалов по конструкции. В качестве внешних воздействий на конструкцию высотного сооружения рассматриваются традиционные ветровые нагрузки с заданным законом изменения вдоль вертикальной оси, заданные моменты и силы на верхнем вертикальном срезе и изменяемые при топологических перераспределениях массовые нагрузки. Степень усовершенствования проекта оценивается на основе анализа изменения введенных относительных характеристик несущей способности, податливости и стоимости проекта. Для сравнения используется эталонный проект из однородного материала.

Ключевые слова: гибридные полиметаллические конструкции, фазовые материалы, топология распределения, удельные плотности и стоимости фазовых материалов, модуль упругости, пределы упругости и прочности, предельно-допустимые деформации упругости (первая), начала разупрочнения (вторая) и начала локального разрушения (третья), несущая способность и податливость гибридных конструкций, относительные расходы материалоу относительные стоимости гибридных проектов, эталонные конструкции

DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.010

УДК: 539.374

Наблюдаемое в последние четверть века прогрессивное развитие отраслей строительной индустрии связано с необходимостью проектирования и создания высотных сооружений с повышенными требованиями комфортного пребывания в них и надежного функционирования в условиях эксплуатации. Возникающие при этом жесткие экономические и ресурсные требования чаще всего не могут быть выполнены с использованием существующих и многократно выверенных конструкционных материалов. В связи с этим в строительной науке активно и параллельно развиваются два направления: теория оптимального (или рационального) проектирования сооружений и теория разработки новых технологических принципов и приемов создания гибридных композитных конструкций с поиском необходимых наборов фазовых материалов и необходимого их топологического распределения в проектируемой конструкции.

Теория оптимального проектирования развивалась применительно к конструкциям из однородных материалов, подчиняющихся моделям деформирования упругих и вязкоупругих материалов, идеальных жестко-пластических, жестко-вязкопластических и ползучих материалов.

Были получены многие интересные аналитические решения и разработаны методы построения приближенных асимптотических и численных методов решения большого количества задач практического проектирования конструкций. При этом массовые нагрузки отбрасывались и задачи сводились к геометрическим задачам о распределении в пространстве материала проектируемой конструкции. Экономические ограничения для проектируемых конструкций также игнорировались. Впервые вопрос о влиянии массовых нагрузок на распределения материала оптимальной конструкции для идеальных жестко-пластических материалов был рассмотрен в работе [1], и на конкретных примерах показано, что неучет массовых нагрузок может приводить к ошибочным результатам. Эта работа была развита в [2–8], где наряду с физической неоднородностью материала, учитывалась также и конструктивная неоднородность

© Немировский Ю. В. 2021

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemiruyuy@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия, профессор Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00038.

Поступила 30.07.2021

(гибридные и пластические конструкции). Влияние экономических ограничений слоистой конструкции было рассмотрено в работе [9,10], где было показано, что экономические ограничения в ряде случаев могут выступать непреодолимыми препятствиями при реализации планируемого строительного проекта.

Разработка различных технологических приемов создания разнообразных типов гибридных строительных композитных конструкций, используя разнообразные достижения последних десятилетий в области технической физики и химфизики, строительной механики и материаловедения, в настоящее время успешно и ускоренно развиваются. Многие отработанные технологии основанные на принципах склейки, наплавки, поверхностных упрочнений, разнообразных типах сварок, газодинамических и плазменных способов нанесения покрытий, уже в настоящее время позволяют надежно и без каких-либо серьезных ограничений по топологическим распределениям создавать на больших площадях гибридные пакеты из наборов практически любых существующих в строительной практике конструкционных металлов и сплавов [11–16].

Отметим важное обстоятельство. При анализе результатов испытаний по стандартным методикам образцов фазовых материалов в исходном состоянии и подвергаемым различным технологическим процедурам некоторые физико-технические характеристики фазовых материалов остаются практически неизменными и будут использованы нами как заранее известные в состоянии постановки, до включения в создаваемую гибридную конструкцию. К ним относятся: удельные плотности и удельные стоимости, модули упругости, пределы упругости и прочности, коэффициенты температурного расширения, предельная деформация разрушения для соответствующего фазового материала. Такая малочувствительная технологическая устойчивость позволяет при процессах неупругого деформирования для всех фазовых материалов использовать для аппроксимации процессов одноосного деформирования j -го фазового материала простейшую зависимость [17–22]

$$\bar{\sigma}_j = \bar{E}_j \varepsilon + \bar{B}_j \varepsilon^3, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_j^{**}, \quad (1)$$

где

$$\bar{B}_j = -\frac{1}{3} \frac{\bar{E}_j}{(\varepsilon_j^*)^2} = -\frac{1}{3} \frac{(\bar{\sigma}_j^*)^2 \bar{E}_j}{(\bar{E}_{cj}^*)^2}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_j^* = \frac{3}{2} \frac{\bar{\sigma}_j}{\bar{E}_j}, \quad \varepsilon_j^0 = \frac{\bar{\sigma}_j^0}{\bar{E}_j}, \quad (3)$$

где \bar{E}_j , $\bar{\sigma}_j^0$, $\bar{\sigma}_j^*$, $\bar{\varepsilon}_j^0$, $\bar{\varepsilon}_j^*$, $\bar{\varepsilon}_j^{**}$ – модуль Юнга, предел прочности, предельная упругая деформация, предельная деформация упрочнения и предельная деформация разрушения j -го фазового материала.

В таблице 1 приведены в качестве примера доступные автору из справочной литературы необходимые для расчетов характеристики разных марок сталей, используемых в строительной практике.

При использовании законов деформирования фазовых материалов в ряде исследований [23–26] были разработаны замкнутые системы разрешающих модельных уравнений для описания деформирования состояния разнообразных гибридных стержневых конструкций в условиях сложных и продольно-поперечных изгибов и устойчивости, получен ряд принципиально новых и интересных практических результатов.

Марка стали ¹	σ_T , МПа ¹	σ_B , МПа ³	δ , % ²	E , ГПа	ρ кг/м ³	Стоимость
ВСтЗсп5	235	360	25	194	7850	1,00
ВСтЗсп5-1	235	365	25	194	7850	1,01
ВСтЗсп5-2	265	380	23	194	7850	1,03
09Г2С-6-1	325	470	21	200	7850	1,12
09Г2С-6-2	345	490	21	200	7850	1,14
14Г2АФ	390	540	20	196	7850	1,23
16Г2АФ	440	590	20	200	7850	1,27
12Г2СМФ	590	685	14	199	7850	1,56
12ХГН2МФБАЮ	735	735	2	199	7850	2,00

Таблица 1. Строительные стали различных уровней прочности

¹ σ_T – предел текучести по данным из *Металлические конструкции. В 3т. Т.1. Общая часть. (Справочник проектировщика) / Под общей редакцией засл. строителя РФ, лауреата госуд. премии СССР В.В. Кузнецова (ЦНИИпроектстальконструкция им. Н.П. Мельникова). М.: Изд-во АСВ, 1998. 576 с.*

² δ – относительное удлинение после разрыва по данным из ¹

³ σ_B – временное сопротивление (предел прочности при разрыве) по данным из ¹

Однако ожидать существенного развития исследований в этом направлении в ближайшее время трудно ожидать из-за отсутствия четко сформулированных требований по условиям и срокам эксплуатации, гарантия ресурсного и экономического обеспечения. Это особенно касается обсуждаемых проектов строительства высотных зданий и большепролетных сооружений в специальных замкнутых районах Юго-Запада, Алтая, Приполярья и Дальнего Востока. Здесь, в первую очередь, необходимо четко и однозначно сформулировать требования к условиям эксплуатации проектируемых сооружений, критерии оценки качества проектов, их связи с существующими отработанными технологическими приемами и установления допустимых границ комфортного существования при возникновении нештатных отклонений от утвержденных условий эксплуатации. Данная работа преследует цель в продвижении исследований в некоторых из сформулированных проблем.

1. Постановка задачи .

В ряде вышедших в последние годы детальных аналитических обзоров и монографий [27–35] обращено внимание на безальтернативную тенденцию бурного развития в крупных городах всех стран и континентов высотного строительства. Это связано с неблагоприятным влиянием развивающихся кризисных общественно-экономических факторов и быстрым ростом народонаселения в странах Юго - Восточной Азии, Южной Америки, Африки. К настоящему времени в странах построены и функционируют уникальные впечатляющие инженерную фантазию сооружения. Анализ накопленного опыта строительства показывает, что каждый из существующих проектов по многим причинам практически не может быть тиражирован и служить основой для массовой экономически и ресурсно обеспеченной застройки. В настоящий кризисный период в

первую очередь востребованы жилые и гостинично-туристические комплексы доступные для массового потребителя с обеспечением безопасного и комфортного проживания. С этой целью необходимо развивать новые методы инженерного проектирования и технологического производства широкопролетных многоэтажных сооружений с поточным изготовлением отдельных блоков на современном заводе с обеспечением необходимых материальных ресурсов и жесткого контроля качества создаваемых для сборки элементов. Производство отдельного жилого блока при этом превращается в производство десятка подконструкций. При этом надежность эксплуатации с обеспечением требуемой комфортности пребывания в помещении намного возрастет.

Одну из перспективных существующих направлений высотного строительства связано с надеждами использования разнообразного набора композитных конструкций, для обеспечения практически альтернативных требований по деформированию сооружений в горизонтальных и вертикальных направлениях. Это обстоятельство приводит к необходимости проектирования модульно консольных типов сооружений с существенно различными требованиями деформативности, надежности и комфортности при эксплуатации. Существующий опыт высотного строительства показывает [36], что с точки зрения развитие ускоренных сроков индустриального строительства, наиболее рациональный путь обеспечивают созданием систем каркасов с консольными и подвесными жилыми блоками, в котором используют современные технологии монолитного производства перекрытий и ограждающих плит. При использовании таких технологических приемов наиболее ответственным и гибким инструментом к оптимизации становится несущий рамно-стержневой каркас, усовершенствование которого путем создания целевых металлокомпозитных структур, может существенно улучшить экономические и эксплуатационные параметры проектируемых сооружений.

2. Рациональное проектирование гибридных слоистых стержневых конструкций Технологические приемы создания слоистых полиметаллических конструкций [8–17, 30–36] указывают, что толщина каждого фазового материала остается неизменной вдоль оси гибридного стержня. Для стержней k -го блока обозначим ее Δ_{ki} ($i = 1, 2, 3$), где $i = 1, 2$ соответствуют горизонтальным стержням с длинами l_i , а $i = 3$ соответствуют вертикальному в блоке k стержню с высотой $h = l_{3k}$. Главная проблема заключается в поиске параметров Δ_{ki} , с выбором и перераспределением подходящих наборов конструкционных материалов в связи с прогнозируемыми внешними нагрузками и используемыми критериями комфортного и безопасного существования потребителей. В качестве последнего, в соответствии с разработками в [3–8, 17–23] предполагается использовать критерий предельно допустимых деформаций по требованию заказчика проекта или потребителей могут быть использованы первые (предельные упругие), вторые (деформации локальных пределов разупрочнения) или третьи (локальное разрушение) предельно допустимые деформации фазовых материалов.

Используя для полиметаллических стержней кинематические гипотезы Кирхгофа-Лява для осевых деформаций стержня имеем выражения

$$\varepsilon(x_i, \xi) = e_0(x_i) + \xi \varkappa_i(x_i), \quad (4)$$

где $e_0(x_i)$ – деформация осевой линии стержня, а \varkappa_i – изменение ее кривизны при изгибе. Тогда обозначая предельно допустимую деформацию i -го фазового материала через $\tilde{\varepsilon}_i$ получим следующие соотношения

$$\Delta_{k1i} = \frac{\tilde{\varepsilon}_{k2i} - \tilde{\varepsilon}_{k1i}}{\tilde{\varkappa}_{ki}}, \quad \Delta_{k2i} = \frac{\tilde{\varepsilon}_{k3i} - \tilde{\varepsilon}_{k2i}}{\tilde{\varkappa}_{ki}}, \quad \Delta_{k3i} = \frac{\tilde{\varepsilon}_{k4i} - \tilde{\varepsilon}_{k3i}}{\tilde{\varkappa}_{ki}}. \quad (5)$$

Так как $\Delta_{kji} > 0$ и $\tilde{\varkappa}_{ki} > 0$, то из этих равенств следует

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{k2i} > \tilde{\varepsilon}_{k1i}, \quad \tilde{\varepsilon}_{k3i} > \tilde{\varepsilon}_{k2i}, \quad \tilde{\varepsilon}_{k4i} > \tilde{\varepsilon}_{k3i}, \dots, \\ 2\tilde{\varepsilon}_{k2i} > (\tilde{\varepsilon}_{k1i} + \tilde{\varepsilon}_{k3i}), \quad (\tilde{\varepsilon}_{k2i} - \tilde{\varepsilon}_{k1i}) > (\tilde{\varepsilon}_{k3i} - \tilde{\varepsilon}_{k2i}). \end{aligned} \quad (6)$$

Эти неравенства устанавливают необходимые правила расположения материалов слоев с рациональной структурой и связи с предельно допустимыми искривлениями соответствующих гибридных стержней при их изгибании.

Исключая $\tilde{\varkappa}_{ki}$ получим зависимости

$$\begin{aligned} \Delta_{k2i} &= \frac{(\tilde{\varepsilon}_{k3i} - \tilde{\varepsilon}_{k2i})}{(\tilde{\varepsilon}_{k2i} - \tilde{\varepsilon}_{k1i})} \Delta_{k1i}, \quad \Delta_{k3i} = \frac{(\tilde{\varepsilon}_{k4i} - \tilde{\varepsilon}_{k3i})}{(\tilde{\varepsilon}_{k2i} - \tilde{\varepsilon}_{k1i})} \Delta_{k1i}, \quad \Delta_{k4i} = \frac{(\tilde{\varepsilon}_{k5i} - \tilde{\varepsilon}_{k4i})}{(\tilde{\varepsilon}_{k2i} - \tilde{\varepsilon}_{k1i})} \Delta_{k1i}, \dots, \\ \Delta_{k1i} + \Delta_{k2i} &= \frac{(\tilde{\varepsilon}_{k3i} - \tilde{\varepsilon}_{k1i})}{(\tilde{\varepsilon}_{k2i} - \tilde{\varepsilon}_{k1i})} \Delta_{k1i}, \\ \Delta_{k1i} + \Delta_{k2i} + \Delta_{k3i} &= \frac{(\tilde{\varepsilon}_{k4i} - \tilde{\varepsilon}_{k1i})}{(\tilde{\varepsilon}_{k2i} - \tilde{\varepsilon}_{k1i})} \Delta_{k1i}, \\ \Delta_{k1i} + \Delta_{k2i} + \Delta_{k3i} + \Delta_{k4i} &= \frac{(\tilde{\varepsilon}_{k5i} - \tilde{\varepsilon}_{k1i})}{(\tilde{\varepsilon}_{k2i} - \tilde{\varepsilon}_{k1i})} \Delta_{k1i}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (7)$$

устанавливающие связи толщин всех слоев с толщинами базовых слоев Δ_{k1i} .

Чтобы определить толщины базовых слоев прогнозируемого проекта высотного сооружения далее в постановочной части необходимо конкретизировать условия внешних механических воздействий на создаваемое сооружение, а также экономические и ресурсные требования для успешного завершения разрабатываемого проекта.

Главные внешние воздействия на высотные сооружения связаны с воздействием интенсивных ветровых потоков, массовыми нагрузками, создаваемыми собственным весом материалов проектируемого сооружения, и поверхностными нагрузками специальных назначений в верхней части небоскребов.

Распределение этих нагрузок по поверхности создаваемого сооружения заранее известно и обычно характеризуется малой изменчивостью в горизонтальном сечении и довольно большой изменчивостью в вертикальном направлении. Эти нагрузки для конкретного проекта считаются известными и обычно не содержат изменяемых параметров проектирования. Массовые нагрузки разделяются на две подгруппы. Массовые нагрузки для элементов ограждения от внешних пространств и соседних блоков заранее известны и не содержат элементов рационального проектирования. Проектируемые гибридные части блоков, наоборот, содержат параметры проектирования и могут достаточно сильно изменяться как с точки зрения материальных ресурсов, так и с точки зрения общих экономических затрат.

Рассмотрим схематическую форму многопролетных высотных зданий (рис. 1).

Массовый расход материалов, необходимый для создания элементов выделенного ($k \sim i$) – блока конструкции может быть представлен в форме

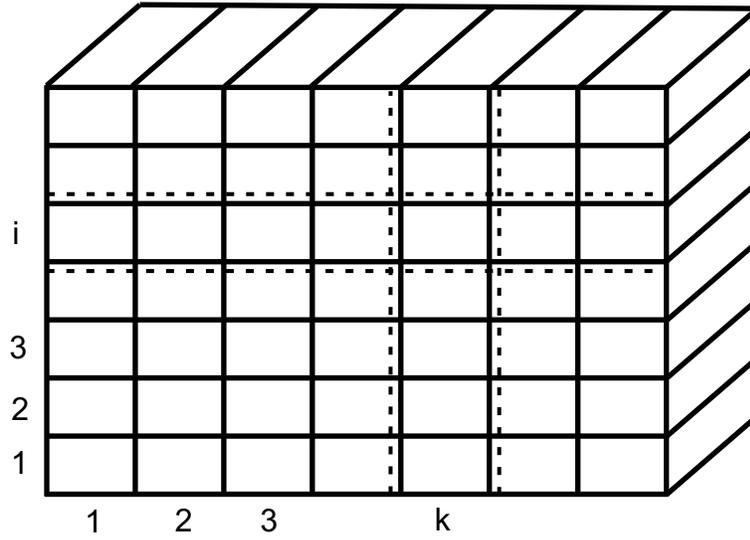


Рис. 1. Схема многоэтажного здания

$$\begin{aligned}
 G_{ki} &= G_{ki1} + G_{ki2} + G_{ki3} + G_{ki4}, \\
 G_{ki1} &= 2l_2l_3 \sum_{j=1}^{n_{1i}} (\rho_{kij} \Delta_{kij}), \quad G_{ki3} = 2l_1l_2 \sum_{j=1}^{n_{3i}} (\rho_{kij} \Delta_{kij}), \\
 G_{ki2} &= l_1l_3 \sum_{j=1}^{n_{2i}} (\rho_{kij} \Delta_{kij}) \left(1 - \frac{a}{l_1}\right) \left(1 - \frac{b}{l_3}\right),
 \end{aligned} \tag{8}$$

где ρ_{kij} , Δ_{kij} – удельная плотность и толщина в направлении j -го материала в блоке ($k \sim i$), $\frac{a}{l_1}$, $\frac{b}{l_3}$ – относительные размеры оконного проема и G_{ki4} – общий массовый расход всех ограждающих конструкций в ($k \sim i$) – блоке.

Общая экономическая стоимость необходимых для ($k \sim i$) – блока товаров будет равна

$$\begin{aligned}
 \Phi_{ki} &= \Phi_{ki1} + \Phi_{ki2} + \Phi_{ki3} + \Phi_{ki4}, \\
 \Phi_{ki1} &= 2l_2l_3 \sum_{j=1}^{n_{1i}} (c_{kij} \rho_{kij} \Delta_{kij}), \quad \Phi_{ki3} = 2l_1l_2 \sum_{j=1}^{n_{3i}} (c_{kij} \rho_{kij} \Delta_{kij}), \\
 \Phi_{ki2} &= l_1l_3 \left(1 - \frac{a}{l_1}\right) \left(1 - \frac{b}{l_3}\right) \sum_{j=1}^{n_{2i}} (c_{kij} \rho_{kij} \Delta_{kij}),
 \end{aligned}$$

где c_{kij} – удельные стоимости фазовых материалов и Φ_{ki4} – полные стоимости ограждающих конструкций в блоке ($k \sim i$).

3. Основные соотношения предельных состояний одноосных полиметаллических слоистых стержней при продольно-поперечных изгибаниях

В рамках описанных выше допустимых условий эксплуатации исследуемые элементы будут деформироваться элементы одноосных стержней при продольно-поперечных изгибаниях.

Тогда в системе декартовых координат с вертикальной осью x_3 , проходящую через центр опорного прямоугольного основания с размерами l_1 и l_2 будем иметь уравнения равновесия

$$dN = \alpha_3^0(x_3)G_{ki}(x_3)dx_3, \quad x_{3j}^0 \leq x_3 \leq x_{3j}^0 + h_j, \quad (9)$$

$$\frac{dM}{dx} = Q, \quad \frac{d^2M}{dx^2} = q_0\varphi(x_3), \quad (10)$$

где $N(x_3)$, $Q(x_3)$, $M(x_3)$ – продольная перерезающая сила и изгибающий момент, q_0 и $\varphi(x_3)$ – амплитуда и закон изменения распределенной вдоль оси x_3 ветровой нагрузки.

Осевая деформация определяется равенством

$$\varepsilon(x_3, \xi) = e_0(x_3) + \xi\kappa_i(x_3s), \quad (11)$$

$$e_0(x_3) = \frac{du_0(x_3)}{dx_3}, \quad \kappa = -\frac{d^2w}{dx_3^2}, \quad (12)$$

где $u_0(x_3)$ – осевое перемещение, $w(x_3)$ – прогиб оси стержня при изгибе.

При интегрировании уравнений (9), (10) должны соблюдаться условия непрерывности усилий N , Q и изгибающего момента M , а также граничные условия

$$N(H) = -P, \quad M(H) = M_0, \quad Q(H) = Q_0. \quad (13)$$

Величины P , M_0 , Q_0 являются заданными внешними нагрузками в высшей точке $x_3 = H$.

При интегрировании соотношений (12) должны выполняться кинематические условия закрепления

$$u_0(0) = 0, \quad w(0) = 0, \quad \left. \frac{dw}{dx_3} \right|_{x_3=0} = 0. \quad (14)$$

Связи продольного усилия N и изгибающего момента M с деформационными характеристиками e_0 и κ определяются выражениями

$$N = \sum_{j=1}^{n_i} \left[\int_{-l_2}^{l_2} (A_j \Delta_j (e_0 + \xi\kappa) + B_j \Delta_j (e_0 + \xi\kappa)^3) d\xi \right], \quad (15)$$

$$M = \sum_{j=1}^{n_i} \left[\int_{-l_2}^{l_2} (A_j \Delta_j (e_0 + \xi\kappa) + B_j \Delta_j (e_0 + \xi\kappa)^3) \xi d\xi \right].$$

При интегрировании уравнений равновесия получим

$$Q(x_3) = Q_0 + \int_H^{x_3} \varphi(x) dx,$$

$$M(x_3) = M_0 + Q_0(x_3 - H) + q_0 \int_H^{x_3} \left[\int_H^{x_3} \varphi(x) dx \right] dx.$$

В точке заземления $x_3 = 0$ изгибающий момент достигнет значения $-\tilde{M}^*$ и амплитуда распределенной нагрузки - значения q_0^* . Таким образом получим равенство

$$M_0 - HQ_0 + q_0^* \int_H^0 \left[\int_H^{x_3} \varphi(x) dx \right] dx = -\tilde{M}^*. \quad (16)$$

В пределах $0 \leq x_3 \leq H$ максимальный изгибающий момент будет реализован в точке с координатой x_3^* , которая соответствует условию

$$\left. \frac{dM}{dx} \right|_{x_3=x_3^*} = 0$$

и определяется из уравнения

$$Q_0 + q_0^* \int_H^{x_3^*} \varphi(x) dx = 0. \quad (17)$$

В итоге получим уравнение

$$M_0 + Q_0(x_3^* - H) + q_0^* \int_H^{x_3^*} \left[\int_H^{x_3^*} \varphi(x) dx \right] dx = \tilde{M}^*. \quad (18)$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Немировский Ю. В. Об оценке веса пластических оптимальных конструкций // Инженерный журнал. Механика твердого тела. АН СССР. 1968. № 4. С. 159–162.
- [2] Немировский Ю. В. Об учете веса при проектировании конструкций в условиях ползучести // Инженерный журнал АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 4. С. 113–123.
- [3] Немировский Ю. В. Равнопрочные слоистые упругие арки и балки // Известия вузов. Строительство. 1996. № 8. С. 113–123.
- [4] Вохмянин И. В., Немировский Ю. В. Оптимальное проектирование равнопрочных слоистых статически неопределимых балок // Известия вузов. Строительство. 1996. № 8. С. 15–25.
- [5] Вохмянин И. В., Немировский Ю. В. О проектировании равнопрочных слоистых балок минимального веса и стоимости с учетом температуры // Проблемы оптимального проектирования сооружений. Доклады всероссийского семинара в двух частях. Часть 2 / НГАСУ. Новосибирск: 1997. С. 39–46.
- [6] Вохмянин И. В., Немировский Ю. В. Оптимальное проектирование равнопрочных слоистых статически неопределимых упругих балок // Известия вузов. Строительство. 1996. № 12. С. 19–27.
- [7] Вохмянин И. В., Немировский Ю. В. Оценки и критерий оптимального проектирования жестко-пластических элементов конструкций минимального объема // Известия вузов. Строительство. 1996. № 3. С. 20–25.
- [8] Немировский Ю. В. Мозаичное проектирование слоистых балок // Известия вузов. Строительство. 2002. № 10. С. 14–19.
- [9] Ржаницын А. Р. Составные стержни и пластинки. М.: Стройиздат, 1986. 130 с.

- [10] Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. М.: Госстройиздат, 1954. 304 с.
- [11] Немировский Ю. В. Обратные задачи механики тонкостенных конструкций // Механика композиционных материалов. 2001. № 5/6. С. 655–668.
- [12] Немировский Ю. В. Синтез плоских ферменных композитных конструкций // Проблемы оптимального проектирования сооружений. Доклады всероссийского семинара в двух частях. IV Всероссийский семинар, 3-5 апреля 2002 / НГАСУ. Новосибирск: 2002. С. 274–281.
- [13] Немировский Ю. В., Мищенко А. В., Вохмянин И. В. Рациональное и оптимальное проектирование слоистых стержневых систем. Новосибирск: НГАСУ, 2004. 488 с.
- [14] Мищенко А. В., Немировский Ю. В. Структурно неоднородные профилированные стержневые системы. Palmatium Academic Publishing, 2016.
- [15] Король В. К., Гильденгорн М. С. Основы производства многослойных металлов. М.: Металлургия, 1978. 237 с.
- [16] Физические свойства сталей и сплавов, применяемых в энергетике. М.-Л. 1967.
- [17] Немировский Ю. В., Пятаев С. Ф. Граница упругого поведения композитных материалов с полыми сферическими включениями и переходной зоной // Механика композитных материалов. 1988. № 4. С. 636–643.
- [18] Немировский Ю. В. Прогнозирование нелинейного деформирования гибридных композитных материалов // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела. Труды второй Международной конференции / Казанский госуниверситет. Казань: 2009.
- [19] Немировский Ю. В. Допредельное деформирование армированных бетонных конструкций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3(37). С. 26–37.
- [20] Немировский Ю. В. Метод расчета композитных стержневых систем из разномодульных материалов // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики. Материалы всероссийской научной конференции / ТГУ. Томск: 2006. С. 288–290.
- [21] Немировский Ю. В. Второе предельное состояние однородных и композитных балок // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1. С. 150–159.
- [22] Немировский Ю. В., Моховнев Д. В. Устойчивость гибридного композитного стержня в условиях высоких температур // Омский научный вестник. 2019. Т. 3, № 4. С. 16–25.
- [23] Немировский Ю. В. Прогнозирование нелинейного деформирования гибридных композитных стержневых элементов // Аэродинамика и прочность конструкций летательных аппаратов. Труды всероссийской юбилейной научно-технической конференции, посвященной 70-летию со дня основания СибНИА / Новосибирск. СибНИА: 2011. С. 261–263.
- [24] Немировский Ю. В. Второе предельное состояние круглых и кольцевых пластин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1(23). С. 189–195.
- [25] Немировский Ю. В. Предельное состояние слоистых выпуклых пластин с прямым углом контура // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 3(45). С. 120–129.
- [26] Немировский Ю. В. Оптимальное проектирование гибридных тавровых балок по предельным допустимым деформациям // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3(29). С. 76–84.
- [27] Гордеев В. Н., Лантух-Лященко А. И. Нагрузки и воздействия на здания и сооружения. М.: Издательство АСВ, 2006. 482 с.
- [28] Беспрозванная И. М., Соколов А. Г., Фомин Г. М. Воздействия ветра на высокие сплошностенчатые сооружения. М.: Стройиздат, 1976. 183 с.
- [29] Ветюнов Ю. М., Елисеев В. В. Моделирование каркасов зданий как пространственных стержневых систем с геометрической и физической нелинейностью // Вычислительная механика сплошных сред. 2010. Т. 3, № 3. С. 32–45.
- [30] Ведяков И. И., Конин Д. В., Кониная С. М. О совершенствовании отечественных сортов для развития их применения в современных металлических конструкциях // Вестник НИЦ Строительство. 2014. № 11. С. 20–29.

-
- [31] Ведяков И. И., Мельникова Е. И. Тенденции мирового высотного строительства // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2013. Т. 31(50). С. 47–53.
- [32] Баранов А. О. Конструктивные решения высотных зданий // Alfabuild. 2018. № 3(6). С. 33–51.
- [33] Шукина М. Н. Современное высотное строительство. ГУП ИТЦ Москомархитектуры, 2007. 440 с.
- [34] Магай А. А. Архитектурное проектирование высотных зданий и комплексов. М.: Изд-во АСВ, 2015. 328 с.
- [35] Маклакова Т. Г. Высотные здания. Градостраительные и архитектурно-конструктивные проблемы проектирования. М.: Изд-во АСВ, 2008. 160 с.
- [36] Металлические конструкции. В 3 т. Т. 2. Конструкции зданий: учебник для строительных вузов / В. В. Горев, Б. Ю. Уваров, В. В. Филиппов [и др.]. М.: Высшая школа, 2004. 528 с.

Yu. V. Nemirovskii

RATIONAL DESIGN OF HYBRID POLYMETALLIC STRUCTURES TAKING INTO ACCOUNT MASS LOADS*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia**Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia*

Abstract. The problem of rational (optimal) design of high-rise or administrative and management structures with the active use of hybrid polymetallic standardized elements, created on the basis of various reliably developed technologies, is considered. The purpose of solving the problem is the selection and redistribution of materials, in which, with the provision of the required comfortable and safe conditions of existence, the economic indicators of the project being created will be significantly improved. Three differences in the deformability criterion of phase materials under conditions of specified types and fields of external loads, developed by the author, were used as guaranteed requirements for comfortable existence. The first criterion: "maximum permissible elastic state when none of the phase materials will deform beyond the elastic limit. The second criterion: "maximum permissible hardening deformations when phase materials do not pass into a softening state. The third criterion: "maximum permissible fracture strains when any of the phase materials will "locally"fail. The calculations take into account that a number of physical characteristics of materials in a wide range of technological processing rather stably retain their values and are used as data known in advance from the reference literature. These include the limits of elasticity and strength, Young's moduli, specific densities and costs of phase materials. Such a low-sensitivity technological stability made it possible for all phase materials to use a uniform dependence in the form of a cubic parabola for approximating the deformation diagram of various metallic materials, the coefficients of which and the above three maximum permissible deformations are expressed in terms of stable characteristics - the limits of elasticity, strength and Young's modulus. On the basis of the known kinematic and static hypotheses of the description of inelastic deformation of rod systems for all types of maximum permissible deformations, uniform systems of equations are obtained that allow for the given conditions of external action to determine the geometric parameters and the topological structure of the distribution of all phase materials over the structure. Traditional wind loads with a given law of variation along the vertical axis, given moments and forces on the upper vertical cut, and mass loads varying during topological redistributions are considered as external influences on the structure of a high-rise structure. The degree of improvement of the project is estimated based on the analysis of changes in the entered relative characteristics of bearing capacity, flexibility and cost of the project. For comparison, a reference design from a homogeneous material is used.

Keywords: hybrid polymetallic structures, phase materials, distribution topology, specific densities and costs of phase materials, elastic modulus, limits of elasticity and strength, maximum permissible elastic deformations (first), onset of softening (second) and onset of local destruction (third), load-bearing capacity and flexibility of hybrid designs, relative material costs and relative costs of hybrid designs, reference designs

REFERENCES

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia, Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia.

- [1] Neimirovsky Yu. V. On the estimation of the weight of optimal plastic structures // Engineering journal. Rigid Body Mechanics. Academy of Sciences of the USSR. 1968. № 4. C. 159–162.
- [2] Neimirovsky Yu. V. On the Consideration of Weight in the Design of Structures in Creep Conditions // Engineering journal of the USSR Academy of Sciences. Rigid Body Mechanics. 1970. № 4. C. 113–123.
- [3] Neimirovsky Yu. V. Equally strong layered elastic arches and beams // News of universities. Building. 1996. № 8. C. 113–123.
- [4] Vokhmyanin I. V., Neimirovsky Yu. V. Optimal design of equal-strength layered statically indeterminate beams // News of universities. Building. 1996. № 8. C. 15–25.
- [5] Vokhmyanin I. V., Neimirovsky Yu. V. About the design of equal strength laminated beams of minimum weight and cost, taking into account temperature // Problems of optimal design of structures. Reports of the All-Russian Seminar in two parts. Part 2 / NGASU. Novosibirsk: 1997. C. 39–46.
- [6] Vokhmyanin I. V., Neimirovsky Yu. V. Optimal design of equal-strength layered statically indeterminate elastic beams // News universities. Building. 1996. № 12. C. 19–27.
- [7] Vokhmyanin I. V., Neimirovsky Yu. V. Estimates and criterion for the optimal design of rigid-plastic structural elements of minimum volume // News universities. Building. 1996. № 3. C. 20–25.
- [8] Neimirovsky Yu. V. Mosaic Design of Laminated Beams // News of universities. Building. 2002. № 10. C. 14–19.
- [9] Rzhantsyn A. R. Composite Bars and Plates. M.: Stroyizdat, 1986. 130 c.
- [10] Rzhantsyn A. R. Calculation of structures taking into account the plastic properties of materials. M.: Gosstroyizdat, 1954. 304 c.
- [11] Neimirovsky Yu. V. Inverse problems of the mechanics of thin-walled structures // Mechanics of Composite Materials. 2001. № 5/6. C. 655–668.
- [12] Unspoken I. M., Sokolov A. G., Fomin G. M. Impact of wind on high solid-wall structures. M.: Stroyizdat, 1976. 183 c.
- [13] Gordeev V. N., Lantukh-Lyashchenko A. I. Loads and impacts on buildings and structures. M.: Publisher ACV, 2006. 482 c.
- [14] Nemirovsky Yu. V. Synthesis of flat truss composite structures // Problems of optimal design of structures. Reports of the All-Russian Seminar in two parts. IV All-Russian Seminar, 3-5 April 2002 / NGASU. Novosibirsk: 2002. C. 274–281.
- [15] Nemirovsky Y. V., Mishchenko A. V., Vokhmyanin I. V. Rational and optimal design of layered rod systems. Novosibirsk: NGASU, 2004. 488 c.
- [16] Mishchenko A. V., Nemirovsky Yu. V. Structurally heterogeneous profiled bar systems. Palmatium Academic Publishing, 2016.
- [17]
- [18] Physical properties of steels and alloys used in power engineering. M.-L. 1967.
- [19] Nemirovsky Yu. V., Pyataev S. F. The boundary of elastic behavior of composite materials with hollow spherical inclusions and a transition zone // Mechanics of Composite Materials. 1988. № 4. C. 636–643.
- [20] Nemirovsky Yu. V. Predicting Nonlinear Deformation of Hybrid Composite Materials // Problems of nonlinear mechanics of deformable solids. Proceedings of the Second International Conference / Kazan State University. Kazan: 2009.
- [21] Nemirovsky Yu. V. Limit deformation of reinforced concrete structures // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of Limit State. 2018. № 3 (37). C. 26–37.
- [22] Nemirovsky Yu. V. Method for calculating composite rod systems from multi-modular materials // Fundamental and applied problems of modern mechanics. Materials of the All-Russian Scientific Conference / TSU. Tomsk: 2006. C. 288–290.
- [23] Nemirovsky Yu. V. Second limit state of homogeneous and composite beams // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of Limit State. 2009. № 1. C. 150–159.
- [24] Nemirovsky Y. V., Mokhovnev D. V. Stability of the hybrid composite rod at high temperatures // Omsk Scientific Bulletin. 2019. T. 3, № 4. C. 16–25.
- [25] Nemirovsky Yu. V. Predicting Nonlinear Deformation of Hybrid Composite Bar Elements // Aerodynamics and strength of aircraft structures. Proceedings of the All-Russian Jubilee Scientific

- and Technical Conference dedicated to the 70th anniversary of the founding of SibNIA / Novosibirsk. SibNIA: 2011. С. 261–263.
- [26] Nemirovsky Yu. V. Second limit state of circular and annular plates // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of Limit State. 2015. № 1 (23). С. 189–195.
- [27] Nemirovsky Yu. V. Limit state of layered convex plates with a right angle contour // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of Limit State. 2020. № 3 (45). С. 120–129.
- [28] Nemirovsky Yu. V. Optimal Design of Hybrid T-Beams for Maximum Allowable Deformations // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of Limit State. 2016. № 3 (29). С. 76–84.
- [29] Vetyunov Yu.M., Eliseev V.V. Modeling building frames as spatial bar systems with geometric and physical nonlinearity // Computational Continuum Mechanics. 2010. Т. 3, № 3. С. 32–45.
- [30] Vedyakov I. I., Konin D. V., Konina S. M. On the improvement of domestic assortments for the development of their application in modern metal structures // Bulletin of SIC Construction. 2014. № 11. С. 20–29.
- [31] Vedyakov I. I., Melnikova E. I. Trends in world high-rise construction // Bulletin of the Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series: Construction and Architecture. 2013. Т. 31 (50). С. 47–53.
- [32] Baranov A.O. Constructive solutions for high-rise buildings // Alfabuild. 2018. № 3 (6). С. 33–51.
- [33] Shukina M.N. Modern high-rise construction. GUP ITC Moskomarkhitektura, 2007. 440 с.
- [34] Magai A. A. Architectural design of high-rise buildings and complexes. M.: Publishing house ASV, 2015. 328 с.
- [35] Maklakova T. G. High-rise buildings. Urban planning and architectural design problems. M.: Publishing house ASV, 2008. 160 с.
- [36] Metal structures. In 3 volumes. V. 2. Structures of buildings: textbook for construction universities / V. V. Gorev, B. Yu. Uvarov, V. V. Filippov [и др.]. M.: High School, 2004. 528 с.

Ю. В. Немировский^{1,2}, С. В. Тихонов³

ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ МНОГОСЛОЙНЫХ БЕТОННЫХ СТЕРЖНЕЙ АРМИРОВАННЫХ СТАЛЬНОЙ АРМАТУРОЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ МАССОВЫХ СИЛ

¹Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия

³Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. В работе рассматриваются многослойные бетонные стержни постоянного поперечного сечения армированные стальной арматурой. Предполагается, что в стержне имеет место одноосное напряженное состояние. На примере армирования сталями марок А240, А400, А800 показано влияние степени армирования на несущую способность стержня. Рассматриваются случаи армирования как только одного из слоев стержня, так и армирование всех слоев одновременно.

Ключевые слова: продольно-поперечный изгиб, стержень, арматура, сталь, бетон, предельная деформация, железобетон, диаграмма деформирования бетона, растяжение, сжатие, метод Бубнова-Галеркина, системы нелинейных алгебраических уравнений

DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.011

УДК: 539.374

При строительстве зданий и сооружений стоимость материалов, которые используются при строительстве, зачастую превышает половину всех затрат [1]. Эффективное использование материалов при проектировании указанных объектов если известны

© Немировский Ю. В., Тихонов С. В. 2021

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemiryuy@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия, профессор Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович

e-mail: strangheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий Чувашского государственного университета им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00038.

Поступила 19.07.2021

заранее условия их эксплуатации может существенно снизить стоимость готового объекта.

Одним из путей повышения несущей способности указанных конструкций при заданных нагрузках и сопоставимой стоимости материалов является изменение формы и параметров формы поперечного сечения. В работах [2–5] показано как на примере заземленного с обоих концов железобетонного стержня можно существенно повысить сопротивляемость стержня прилагаемым нагрузкам если изменять форму и параметры формы сечения стержня.

Другим путем повышения несущей способности является использование материалов с высокими эксплуатационными характеристиками. В работе [6] показаны примеры расчета стержней из бетонов и сталефибробетонов. Показано, что использование сталефибробетонов существенно повышает способность конструкций выдерживать прилагаемые нагрузки.

Одним из недостатков указанного способа является высокая стоимость материалов. Поэтому на первый план при проектировании указанных изделий встает рациональное использование материалов.

В данной работе будем рассматривать возможность повышения несущей способности стержней за счет армирования стальными стержнями. Считаем, что стержни имеют постоянное поперечное сечение (рис. 1). Через h_i обозначим высоты соответствующих слоев стержня, $b_i(z)$ – функции ограничивающие контуры поперечного сечения i -го слоя стержня. Будем полагать, что форма поперечного сечения является симметричной относительно оси OZ . В каждом из слоев могут быть реализованы разные марки бетонов и стержень может быть армирован разными марками сталей. Степень армирования в каждом слое может быть различной. Ось Ox направим вдоль оси стержня, ось OZ вертикально вверх.

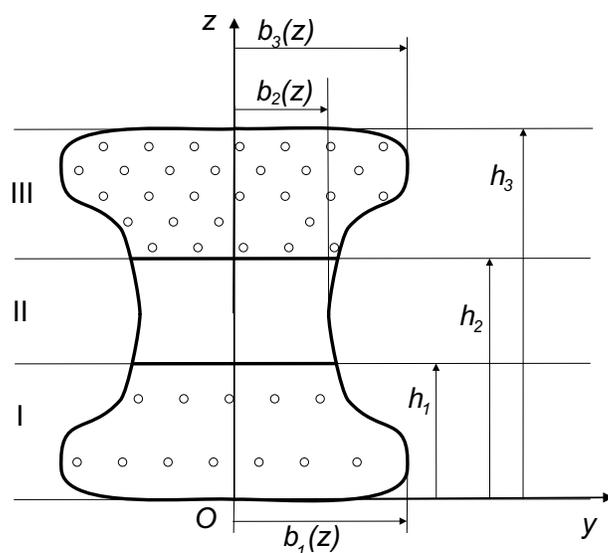


Рис. 1. Трехслойный железобетонный стержень

В качестве аппроксимации диаграммы $\sigma - \varepsilon$ бетонов i -го слоя будем рассматривать аппроксимацию полиномами третьего порядка

$$\sigma_i^c = A_{1i}\varepsilon + A_{2i}\varepsilon^2 + A_{3i}\varepsilon^3. \quad (1)$$

где коэффициенты A_{1i} , A_{2i} , A_{3i} характеризуют физические свойства бетона и могут быть определены из реальных диаграмм растяжения-сжатия бетонов. Индекс «с» обозначает напряжение возникающее в бетонах.

При использовании экспериментальных данных из работ [7, 8] с помощью метода наименьших квадратов в работе [9] были получены необходимые коэффициенты для ряда бетонов. Они приведены в таблице 1.

Марка бетона	$\varepsilon_*^-, 10^{-2}$	$\varepsilon_*^+, 10^{-2}$	A_{1i} , МПА	A_{2i} , МПА	A_{3i} , МПА
B10	0,2	0,015	11 886	5 062 224	677 466 265
B30	0,2	0,015	31 584	12 719 591	1 584 070 150
B50	0,2	0,015	53 813 327	23 019 984	2 879 326 489

Таблица 1. Значения физических параметров бетонов в случае аппроксимацию полиномом третьего порядка

В качестве критерия условного предельного состояния в i -ом слое принимаем достижение в нем максимальной деформации предельно допустимого значения при растяжении ε_*^+ или сжатии ε_*^- . Значения ε_*^+ , ε_*^- на диаграмме растяжения-сжатия бетонов соответствуют точкам начала ниспадающей ветви (точки разупрочнения).

Для сталей марок А240, А400, А800 значение физических параметров приведено в таблице 2 по результатам испытаний стальных стержней диаметром 10 мм, изложенных в работе [7, 8]. Будем принимать, что сталь на растяжение и сжатие «работает» одинаково, т.е. диаграмма растяжения-сжатия симметрична относительно начала координат. В таблице через E обозначен модуль упругости стали, а отрезок $[0, \varepsilon_E]$ соответствует упругому участку растяжения-сжатия стали.

Марка стали	E , МПА	$\varepsilon_E, 10^{-2}$	ρ_s , кг/м ³
A240	211 050	0,2	7 850
A400	197 000	0,4	7 850
A800	189 050	0,9	7 850

Таблица 2. Значения физических параметров сталей

Из таблиц 1, 2 видно, что для всех рассматриваемых бетонов и марок стали предельная деформация бетона как при растяжении так и при сжатии по модулю меньше чем величина ε_E . Соответственно сталь будет работать только в упругой зоне. Соответственно можем принять, что для стали имеет место

$$\sigma_i^s = E_i\varepsilon, \quad (2)$$

где E_i – модуль упругости стали, который используется в соответствующем слое.

Тогда для напряжения в i -ом слое будет иметь место [10]

$$\sigma_i = \nu_i \sigma_i^s + (1 - \nu_i) \sigma_i^c = \nu E_i \varepsilon + (1 - \nu_i) (A_{1i} \varepsilon + A_{2i} \varepsilon^2 + A_{3i} \varepsilon^3), \quad (3)$$

где коэффициент $\nu_i (0 \leq \nu_i \leq 1)$ – степень армирования бетона.

Изгибающие моменты и продольное усилие определим из соотношений

$$N = \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \sigma_i dS, \quad M_y = \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \sigma_i z dS, \quad (4)$$

уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} = q_z - \frac{dm_y}{dx}, \quad \frac{dN}{dx} = -q_x. \quad (5)$$

где q_x , q_z – проекции вектора внешних усилий на соответствующие оси, m_y – проекция вектора распределенного момента на ось y .

Будем считать, что имеют место гипотезы Кирхгофа-Лява

$$\varepsilon(x, z) = \varepsilon_0(x) - z \varkappa_y(x), \quad (6)$$

$$\varepsilon_0(x) = \frac{du_0}{dx}, \quad \varkappa_y = \frac{d^2 w_0}{dx^2}, \quad (7)$$

где u_0 , w_0 – компоненты вектора перемещений точек осевой линии стержня вдоль осей x и z соответственно.

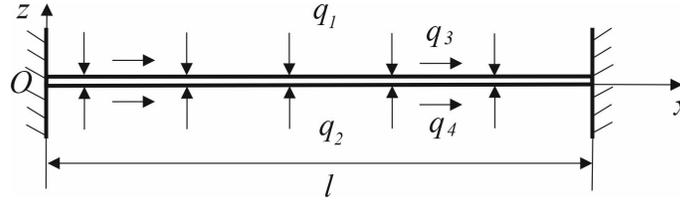


Рис. 2. Защемленный с обоих концов стержень

Рассмотрим задачу продольно-поперечного изгиба защемленного с обоих концов стержня (рис. 3), тогда из условий закрепления стержня имеем

$$u_0(0) = w_0(0) = u_0(l) = w_0(l) = 0, \quad (8)$$

$$\left. \frac{dw_0}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dw_0}{dx} \right|_{x=l} = \left. \frac{du_0}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{du_0}{dx} \right|_{x=l} = 0. \quad (9)$$

Из уравнений (5)-(7) получим систему дифференциальных уравнений относительно перемещений с граничными условиями (8)-(9).

Указанную систему дифференциальных уравнений будем решать методом Бубнова-Галеркина [11].

Положим

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^N B_k y_k(x), \quad w_0(x) = \sum_{k=1}^N C_k r_k(x), \quad (10)$$

где B_k , D_k – постоянные.

Будем считать $y_k(x)$, $r_k(x)$ в выражении (10) равными

$$y_k(x) = r_k(x) = \cos \frac{k-1}{l} \pi x - \cos \frac{k+1}{l} \pi x. \quad (11)$$

тогда граничные условия будут удовлетворены, причем изгибающие моменты и продольное усилие в местах защемления стержня будут отличны от нуля.

Если подставить перемещения (10) в полученные дифференциальные уравнения и обозначить через $L_1(x)$, $L_2(x)$ левые части соответствующих уравнений, положив в качестве базисных функций в методе Бубнова-Галеркина те же функции, что и в разложении (10)

$$f_k(x) = \cos \frac{k-1}{l} \pi x - \cos \frac{k+1}{l} \pi x, \quad k = 1 \dots N, \quad (12)$$

получим систему из $2N$ алгебраических уравнений относительно $2N$ неизвестных B_k , C_k , $k = 1 \dots N$,

$$\int_0^l L_i(x) f_k(x) dx = 0, \quad i = 1 \dots 3, \quad k = 1 \dots N. \quad (13)$$

Значения B_k , C_k можно определить из полученной системы уравнений каким-либо численным методом.

Пусть на стержень действуют распределенные нагрузки q_1, q_2, q_3, q_4 и сила тяжести проекция которой на соответствующие оси равна q_{sx}, q_{sz} .

Тогда для усилий и моментов имеет место

$$q_x = 2 \int_0^{b_1(0)} q_3 dy + 2 \int_0^{b_n(h_n)} q_4 dy + 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_0^{b_i(z)} q_{sx} dy, \quad (14)$$

$$q_z = 2 \int_0^{b_1(0)} q_2 dy + 2 \int_0^{b_n(h_n)} q_1 dy + 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_0^{b_i(z)} q_{sz} dy, \quad (15)$$

$$m_y = -2 \int_0^{b_n(h_n)} x q_1 dy - 2 \int_0^{b_1(0)} x q_2 dy + 2 h_n \int_0^{b_n(h_n)} q_3 dy - \\ - 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_0^{b_i(z)} (x q_{sz} - z q_{sx}) dy. \quad (16)$$

Действующие нагрузки $q_1, q_2, q_3, q_4, q_{sx}, q_{sz}$ примем равными

$$q_1 = t_{11} + t_{12}x, q_2 = t_{21} + t_{22}x, q_3 = t_{31} + t_{32}x, \quad q_4 = t_{41} + t_{42}x, \quad (17)$$

$$q_{sx} = g_x \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_{i+1}} ((1 - \nu_i) \rho_{ci} + \nu_i \rho_{si}) b_i(z) dz, \quad (18)$$

$$q_{sz} = g_z \rho \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_{i+1}} ((1 - \nu_i) \rho_{ci} + \nu_i \rho_{si}) b_i(z) dz, \quad (19)$$

где $t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}, t_{31}, t_{32}, t_{41}, t_{42}$ – постоянные, g_x, g_z – проекции вектора ускорения свободного падения, ρ_{ci}, ρ_{si} – плотности бетона и стали соответствующих слоев стержня.

Для иллюстрации данной методики рассмотрим стержень форма поперечного сечения которого имеет вид изображенный на рис. 3. На указанном рисунке марка бетона из которого сделан материал слоя указан напротив соответствующего номера слоя.

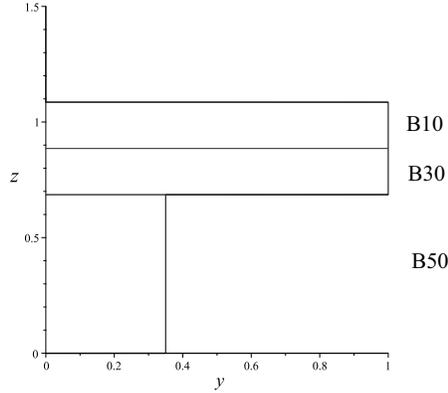


Рис. 3. Форма поперечного сечения стержня

Примем в качестве постоянных характеризующих нагрузки (17) следующие значения

$$t_{11} = -90 \frac{\text{КН}}{\text{М}}, t_{12} = -2 \frac{\text{КН}}{\text{М}^2}, t_{21} = t_{22} = 0, t_{31} = -160 \frac{\text{КН}}{\text{М}}, t_{32} = -2 \frac{\text{КН}}{\text{М}^2}, t_{41} = t_{42} = 0.$$

Примем, что сила тяжести направлена вертикально вниз, т.е. $g_x = 0, g_z = -9.81$. Плотность бетона примем для всех марок бетона одинаковой и равной 2500 кг/м^3 .

Положим в данном примере, что степень армирования одинаковая во во всех слоях, т.е.

$$\nu = \nu_1 = \nu_2 = \nu_3. \quad (20)$$

В дальнейшем будем находить для каждого слоя i максимальную деформацию ε_{mi} , которая возникает в данном слое стержня. Рассмотрим отношение найденной максимальной деформации ε_{mi} к соответствующему значению предельной деформации ε_{i*}^+ для каждого из слоев бетона. Если окажется, что $\varepsilon_{mi} > \varepsilon_{i*}^+$ хотя бы одним из слоев, то мы будем считать, что стержень теряет несущую способность. Рассмотрим коэффициент γ_i для i -го слоя, который определяется из соотношений (21)

$$\gamma_i = 100\% \frac{\varepsilon_{mi}}{\varepsilon_{i*}^+}. \quad (21)$$

Если окажется значение γ_i больше 100% хотя бы в одном из слоев стержня, то конструкция не способна выдерживать прилагаемые нагрузки. Для удобства расчетов будем рассматривать величину $\gamma = \max\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$.

Стоимость готового изделия можно снизить, если положить, что армируются не все слои стержня, а только, например, какой-то один из слоев. Тогда случай армирования только первого слоя будет соответствовать уравнениям (22), второго – (23), третьего – (24), случай же одинакового армирования всех слоев стержня соотношениями – (25).

$$\nu = \nu_1, \quad \nu_2 = \nu_3 = 0. \quad (22)$$

$$\nu = \nu_2, \quad \nu_1 = \nu_3 = 0. \quad (23)$$

$$\nu = \nu_3, \quad \nu_1 = \nu_2 = 0. \quad (24)$$

$$\nu = \nu_1 = \nu_2 = \nu_3. \quad (25)$$

Если последовательно изменять значения ν от 0 до 1 с шагом $\frac{5}{100}$ м. и рассчитывать значение γ для каждого ν , то график полученных зависимостей будут иметь вид, изображенный на рис. 4, максимальный прогиб конструкции w_m в зависимости от параметра параметра ν изобразим на рис. 5.

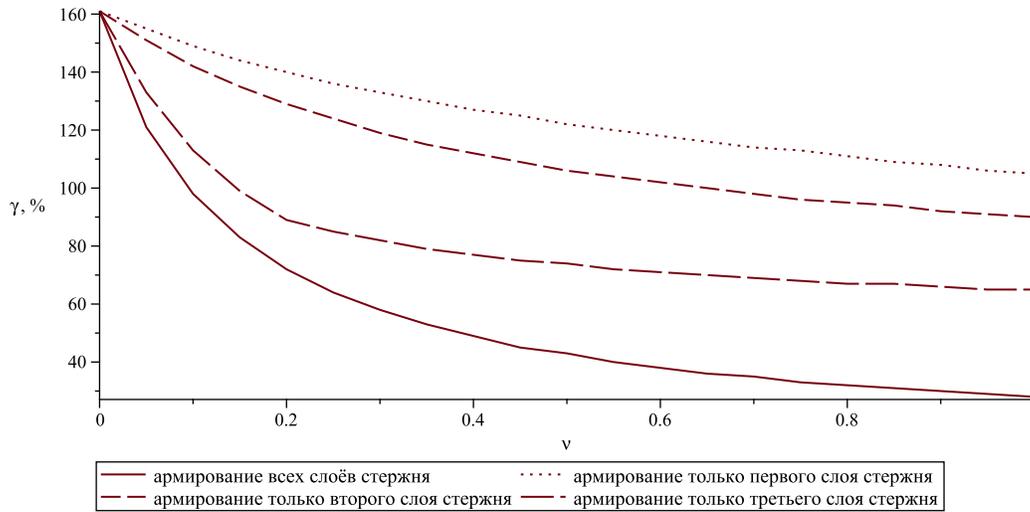


Рис. 4. Зависимость γ от степени армирования ν

Как видно из полученных решений, наибольшую несущую способность при заданных нагрузках будет иметь стержень у которого армированы все слои стержня, т.е. случай (25). В этом случае стержень способен выдержать приложенные нагрузки в случае если степень армирования всех слоев $\nu > \frac{10}{100}$.

Существенно снизить расход арматуры при заданных нагрузках и соответственно стоимость готового изделия можно, если армировать не все слои стержня, а только третий слой стержня (24). В этом случае стержень способен выдержать приложенные нагрузки уже при степени армирования третьего слоя $\nu > \frac{15}{100}$.

Гораздо больше арматуры потребуется если армировать только второй слой стержня (23). В этом случае степень армирования второго слоя должна соответствовать $\nu > \frac{70}{100}$.

Если армировать только третий слой стержня (22), то даже при полном замене его на арматуру $\nu = 1$ он оказывается не способным выдерживать приложенные к нему нагрузки.

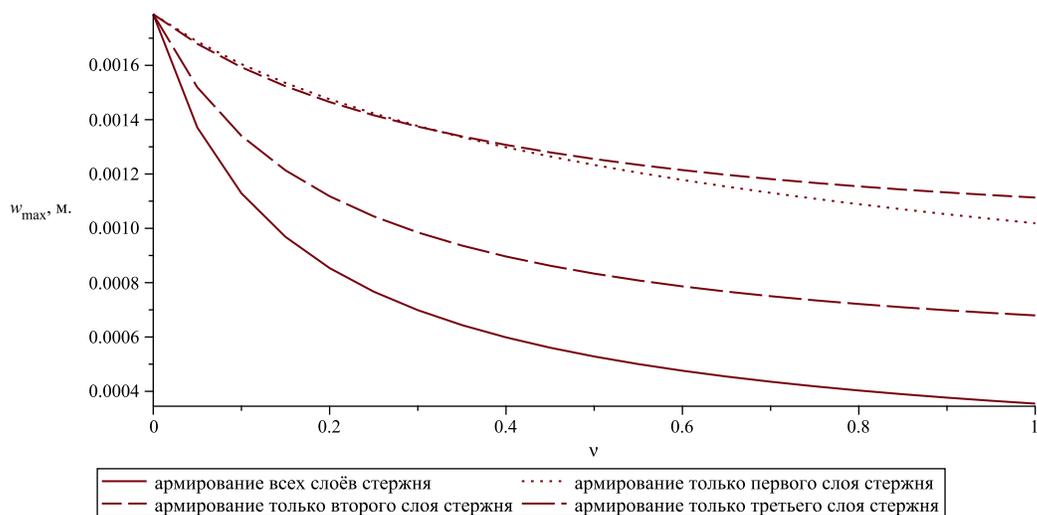


Рис. 5. Зависимость величины прогиба w от степени армирования ν

Таким образом за счет армирования бетонных стержней можно существенно повысить их несущую способность при заданных нагрузках. Причем используя указанную в данной работе методику определения оптимального процента армирования определенных слоев бетонных стержней можно существенно снизить стоимость готового изделия.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Управление технологическими процессами производства модифицированных бетонов / В. А. Кудяков, А. И. Кудяков, С. А. Лукьянчиков [и др.] // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2017. № 6. С. 116–126.
- [2] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Предельное состояние бетонных и железобетонных стержней при сложном и продольно-поперечном изгибе // Вестник ПНИПУ. Механика. 2020. № 1. с. 60–73.
- [3] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Влияние формы поперечного сечения и силы тяжести на деформирование многослойных бетонных стержней при квазистатических нагрузках // Моделирование и механика конструкций. 2020. № 12. С. 11–49.
- [4] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Влияние формы поперечного сечения многослойного бетонного стержня на несущую способность при продольно-поперечной нагрузке // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник тезисов 9-й всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, посвященной 30-летию ИПРИМ РАН. 2019. С. 185–189.
- [5] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of physically nonlinear rods by quasi-static loads and mass forces // Lecture Notes in Civil Engineering. 2021. Vol. 170.
- [6] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Продольно-поперечный изгиб многослойных стержней из бетонов и сталефибробетонов // Известия Алтайского государственного университета. 2021. № 1(117). С. 40–46.
- [7] Иващенко Е. И. Разработка методов расчета железобетонных элементов на основе действительных диаграмм деформирования материалов с учетом фактического изменения площади их поперечных сечений // дис. ... канд. техн. наук. Воронеж, 2006. 230 с.
- [8] Маилян Л. Р., Иващенко Е. И. Расчет железобетонных элементов на основе действительных диаграмм деформирования материалов. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовский гос. строит. ун-т, 2006. 222 с.

- [9] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-Transverse Bending of Reinforced Concrete Rods on The Basis of Nonlinear Diagrams of Deformation of Phase Materials // AIP Conference Proceedings. 2021.
- [10] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Предельные состояния железобетонных балок // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3. с. 134–158.
- [11] Голоскоков Д. П. Построение базиса для одномерных краевых задач в системах символьных вычислений // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2017. Т. 1. С. 77–85.

Yu. V. Nemirovskii, S. V. Tikhonov

LONGITUDINAL-TRANSVERSE BENDING OF MULTILAYER CONCRETE RODS REINFORCED WITH STEEL REINFORCEMENT UNDER THE INFLUENCE OF MASS FORCES

S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia

Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia

I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia

Abstract. The paper deals with multilayer concrete rods of constant cross-section reinforced with steel reinforcement. It is assumed that there is a uniaxial stress state in the bar. Using the example of reinforcement with steels of grades A240, A400, A800, the influence of the degree of reinforcement on the bearing capacity of the bar is shown. Cases of reinforcement of both only one of the layers of the bar and reinforcement of all layers at the same time are considered.

Keywords: longitudinal-transverse bending, bar, reinforcement, steel, concrete, ultimate deformation, reinforced concrete, concrete deformation diagram, tension, compression, Bubnov-Galerkin method, systems of nonlinear algebraic equations

REFERENCES

- [1] Management of technological processes for the production of modified concrete / V. A. Kudyakov, A. I. Kudyakov, S. A. Lukyanchikov et al. // Bulletin of the Tomsk State University of Architecture and Civil Engineering. 2017. no. 6. P. 116–126.
- [2] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Limit state of concrete and reinforced concrete rods in complex and longitudinal-transverse bending // Bulletin of PNRPU. Mechanics. 2020. no. 1. p. 60–73.
- [3] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Influence of the cross-sectional shape and gravity on the deformation of multilayer concrete bars under quasi-static loads // Structural Modeling and Mechanics. 2020. no. 12. P. 11–49.
- [4] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Influence of the cross-sectional shape of a multilayer concrete bar on the bearing capacity under longitudinal-transverse load // Mechanics of composite materials and structures, complex and heterogeneous media. Collection of Abstracts of the 9th All-Russian Scientific Conference with International Participation named after V.I. I.F. Obraztsov and Yu.G. Yanovsky dedicated to the 30th anniversary of the IPRIM RAS. 2019. P. 185–189.

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia, Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia.

Tikhonov Sergey Vladimirovich, PHD, Assoc. Prof., I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia

- [5] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of physically nonlinear rods by quasi-static loads and mass forces // *Lecture Notes in Civil Engineering*. 2021. Vol. 170.
- [6] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of multilayer concrete and steel fiber reinforced concrete rods // *Bulletin of Altai State University*. 2021. no. 1 (117). P. 40–46.
- [7] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-Transverse Bending of Reinforced Concrete Rods on The Basis of Nonlinear Diagrams of Deformation of Phase Materials // *AIP Conference Proceedings*. 2021.
- [8] Ivaschenko E. I. Development of methods for calculating reinforced concrete elements based on actual deformation diagrams of materials taking into account the actual change in the area of their cross-sections // *Dis. ... Cand. Tech. Sciences. Voronezh*, 2006. 230 p.
- [9] Mayilyan L., Ivaschenko E. Calculation of reinforced concrete members based on actual material deformation diagrams. Rostov-on-Don: Publishing house Rostov State Building University, 2006. 222 p.
- [10] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Limit states of reinforced concrete beams // *Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 2016. no. 3. P. 134–158.
- [11] Goloskokov D. Construction of a basis for one-dimensional boundary value problems in symbolic computation systems // *Space, Time and Fundamental Interactions*. 2017. Vol. 1. P. 77–85.

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

ОБ ОДНОМ ПСЕВДОТЕНЗОРНОМ ОБОБЩЕНИИ СВЯЗЫВАЮЩИХ ДВУСТОРОННИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ЮГОНИО-АДАМАРА

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В представляемой работе исследуются особенности связывающих двусторонних граничных условий на поверхностях разрывов, распространяющихся в сплошных средах (в частности, в микрополярных континуумах). Теория Югонио–Адамара, существенно развитая Г. И. Быковцевым, распространения поверхностей разрывов физических полей обобщена на случай псевдотензорного полевого описания. Вводятся понятия фундаментального ориентирующего псевдоскаляра и псевдоскалярного времени. Исследуется геометрия поверхностей уровня псевдоскалярного поля, представляющих интерес для механики наращиваемых тел. Вводится понятие псевдонормали к поверхности. Обсуждаются вопросы дифференцирования по псевдоскалярному времени и его преобразования при зеркальных отражениях и инверсиях пространства. Получены геометрические и кинематические условия совместности первого порядка в терминах псевдотензоров. Выведены условия совместности для слабых разрывов перемещений и микровращений в микрополярном континууме.

Ключевые слова: поверхность разрыва, фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, псевдоскалярное время, условие совместности, микрополярная упругость, перемещение, микровращение

DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.013

УДК: 539.374

1. Введение. Моделирование поведения континуумов которые не инвариантны к зеркальным отражениям и инверсиям пространства (в частности, метаматериалы,

© Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. 2021

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, radaev.iurii.8e@kyoto-u.jp, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 19-51-60001, № 20-01-00666.

Поступила 20.08.2021

биоматериалы и т.д.) требует привлечение аппарата алгебры псевдотензоров [1-3]. Динамические процессы (например многочисленные процессы аддитивный технологий [4] в таких средах связаны с распространением поверхностей уровня псевдоскалярных физических полей.

Постановка связывающих двусторонних граничных условий на поверхностях разрывов физических полей является нетривиальной задачей механики континуума. Вопросам построение решений при учете разрывов в задачах вариационного исчисления посвящены работы [5,6]. Ренкиным и Югонои [7,8] были получены условия совместности на ударных волнах распространяющихся в газе. В монографии [9] содержится полное изложение теории геометрических и кинематических условий совместности первого и второго порядка, которые затем применяются для систематического изучения различных вопросов, связанных с распространением волн в сплошных средах. Для моделирования процессов распространения поверхностей разрывов в необратимо деформируемых средах Г. И. Быковцевым был развит лучевой метод решения динамических задач [10-12], основанный на специальном выборе “внутренней” параметризации поверхности разрыва (см. например дополнительные главы в монографиях [13, 14]). Во всех вышеуказанных публикациях [5-14] для описания динамических процессов использовались абсолютные тензоры.

Однако, корректное описание волновых процессов в континуумах, проявляющих гемитропные свойства требует привлечения псевдотензорного формализма [15-20]. Псевдотензоры естественным образом возникают в механике и термодинамике микрополярных упругих сред. В частности, таковыми выступают: естественных элемент объема, псевдовектор микровращений, псевдотензор моментных напряжений, сопутствующий псевдовектор силовых напряжений и т.д. Более того, в некоторых случаях, распространяющаяся в пространстве поверхность разрывов физических полей оказывается поверхностью уровня псевдоскалярного поля, что накладывает дополнительные ограничения на операторы дифференцирования и ориентацию псевдовектора нормали. Поэтому, при формулировке связывающих двусторонних граничных условий на поверхностях разрывов, распространяющихся в микрополярной гемитропной среде необходимо использовать псевдотензорный формализм.

2. Фундаментальный ориентирующий скаляр в трехмерном плоском пространстве. В настоящем исследовании мы не будем подробно воспроизводить определение и свойства псевдотензоров. Изложение алгебры псевдотензоров с необходимой степенью полноты можно найти в руководствах по тензорному анализу [17-20], а ее применение к механике континуума в работах [2-4].

В микрополярных теориях механики континуума [21-23] исключительное значение имеют ориентации реперов, связанных с элементарными объемами. Особенно остро это проявляется при моделировании гемитропного (полуизотропного) поведения материалов, когда характеристики материала оказываются чувствительны к преобразованиям зеркальных отражений и инверсий пространства. Ясно, что ориентация репера задается нумерацией реперных направлений. При перестановке двух номеров реперных направлений ориентация всего репера изменяется на противоположную, т.е. правоориентированный репер становится левоориентированным. В механике континуума ориентацию *базисного* репера удобно задавать фундаментальным ориентирующим псевдоскаляром ϵ [2,3], образованного последовательным применением операций

скалярного и векторного произведения к базисным векторам:

$$e = {}^{[+1]}e = (\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2) \cdot \mathbf{z}_3. \quad (1)$$

Обратим внимание, что псевдоскаляр (3) с точностью до знака совпадает с объемом параллелепипеда построенного на векторах \mathbf{z}_a . Нетрудно показать, что в плоском пространстве с положительно определенной метрикой

$$|e| = \sqrt{g}. \quad (2)$$

Подчеркнем, что $e > 0$ для правоориентированного репера, $e < 0$ для левоориентированного репера. В дальнейшем изложении у фундаментальных символов, таких как ϵ , e и g , указание на их вес будем опускать.

Формализм ковариантного дифференцирования псевдотензорных полей был нами рассмотрен в публикациях [2–4]. Здесь мы опускаем соответствующие формулы и отсылаем читателя к указанным работам. В частности, для псевдоскалярного поля f веса W имеем:

$$\nabla_p {}^{[W]}f = \partial_p {}^{[W]}f - W e^{-1} {}^{[W]}f \partial_p e. \quad (3)$$

Здесь мы воспользовались формулой

$$\Gamma_{sp}^s = e^{-1} \partial_p e. \quad (4)$$

Несложно показать, что для степеней фундаментального ориентирующего скаляра e справедливо уравнение

$$\nabla_i e^m = 0 \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (5)$$

Ориентирующий пространство псевдоскаляр позволяет без труда осуществить переход от относительного тензора веса W к абсолютному согласно правилу

$$T_{ij\dots l}^{pqr\dots s} = e^{-W} T_{ij\dots l}^{[W]pqr\dots s}. \quad (6)$$

3. Геометрия поверхности уровня псевдоскалярного поля. Зададим, в некоторой области трехмерного пространства, псевдоскалярное поле ${}^{[W]}f(x^i)$ веса W . Определим перемещающуюся в пространстве поверхность Σ , как поверхность уровня псевдоскалярного поля ${}^{[W]}f(x^i)$:

$${}^{[W]}t = {}^{[W]}f(x^i), \quad (7)$$

где ${}^{[W]}t$ — псевдоскалярное время, причем

$${}^{[W]}t = e^W t. \quad (8)$$

Рассмотрим дифференциал псевдоскалярного времени ${}^{[W]}t$. С учетом (8) получим

$$d {}^{[W]}t = d(e^W t) = e^W dt + t W e^{W-1} de. \quad (9)$$

Окончательно получим

$$d {}^{[W]}t = e^W (dt + t e^{-1} \partial_s e dx^s). \quad (10)$$

Отметим важный в прикладных задачах случай [24]. Выберем систему координат подчиненную условию:

$$\sqrt{g} = 1, \quad (11)$$

откуда на основании

$$e^2 = g \quad (12)$$

следует, что

$$e = \operatorname{sgn} e. \quad (13)$$

В трехмерном пространстве таких систем существует бесконечно много, например декартовы лево- и правоориентированные системы координат.

Ограничение $\sqrt{g} = 1$ часто используется не только в теории относительности (см. например монографию А. Копфа¹ [24]), но и в механике деформируемого твердого тела [25]. На страницах 135–142 монографии [24] условие $\sqrt{g} = 1$ используется при выводе уравнения тяготения в 4-пространстве–времени, что существенно упрощает уравнения теории относительности.

Если кроме того, мы будем считать координатную систему левоориентированной (т.е. $e < 0$), то дифференциал псевдоскалярного времени приобретает вид

$$d^{[W]} t = \begin{cases} dt, & W - \text{четный вес;} \\ -dt, & W - \text{нечетный вес.} \end{cases} \quad (14)$$

Отметим также, что частная производная по псевдотензорному времени имеет псевдотензорную природу

$$\frac{\partial}{\partial^{[W]} t} = \frac{[-W]}{\partial}. \quad (15)$$

и может быть преобразована к производной по времени согласно правилу

$$\frac{[-W]}{\partial} = e^{-W} \partial. \quad (16)$$

Вектор единичной нормали n_i к поверхности $\Sigma^{[W]}$, направленный в сторону ее расширения, можно определить, с учетом (5), с точностью до множителя согласно формуле

$$N n_i = \partial_i (e^{-W} f^{[W]}). \quad (17)$$

Отметим, что для абсолютного скаляра a справедливо равенство

$$\nabla_i a = \partial_i a. \quad (18)$$

Тогда выражение (17) с учетом (5) и (18) преобразуется к виду

$$N n_i = \partial_i (e^{-W} f^{[W]}) = \nabla_i (e^{-W} f^{[W]}) = e^{-W} \nabla_i f^{[W]}. \quad (19)$$

Вводя в рассмотрение псевдовектор нормали согласно формуле

$$n_i^{[W]} = e^W n_i, \quad (20)$$

получим

$$N n_i^{[W]} = \nabla_i f^{[W]}. \quad (21)$$

¹Август Копф — немецкий астроном, первооткрыватель комет и астероидов. В период с 1901 по 1909 год им было открыто в общей сложности 68 астероидов.

Учитывая соотношение (w.g.t. $(g^{ij}) = 0$)

$$g^{ij} n_i n_j = e^{2W} \quad (22)$$

несложно заключить, что

$$N^2 e^{2W} = g^{ik} \nabla_i f \nabla_k f, \quad (23)$$

откуда для множителя N следует выражение

$$\pm N = e^{-W} \sqrt{g^{ik} \nabla_i f \nabla_k f}. \quad (24)$$

Окончательно, псевдовектор нормали к поверхности уровня Σ псевдоскалярного поля f вычисляется по формуле²

$$n_i = e^W \frac{\nabla_i f}{\sqrt{g^{ik} \nabla_i f \nabla_k f}}. \quad (25)$$

Линейная псевдоскалярная скорость G распространения движущейся поверхности Σ в направлении псевдовектора нормали n_i вычисляется согласно

$$G = \frac{1}{\sqrt{g^{ik} \nabla_i f \nabla_k f}}. \quad (26)$$

Абсолютный вектор нормали к поверхности уровня Σ псевдоскалярного поля f можно вычислить по формуле

$$n_i = G \nabla_i f. \quad (27)$$

Напомним, что градиент псевдоскалярного физического поля вычисляется по формуле (3).

4. Геометрические условия совместности первого порядка. Допустим теперь, что поверхность уровня Σ псевдоскалярного поля $f(x^i)$, задается внутренней Гауссовой параметризацией u^α ($\alpha = 1, 2$)

$$x^k = x^k(u^1, u^2, t). \quad (28)$$

²В дальнейшем мы будем использовать положительный знак в формуле (24). Обычно, исключительную важность имеет направление распространения поверхности уровня псевдоскалярного поля, т.е. распространяется ли поверхность в направлении нормали n_i или в противоположном направлении. Эта проблема, наряду с выбором знака в (24), решается анализом знака фундаментального ориентирующего псевдоскаляра ϵ и четностью или не четностью веса W псевдотензорного поля. При использовании псевдотензорного формализма вес W псевдотензорных полей предполагается целым числом [20, с. 241].

В формуле (28) x^k являются пространственными “внешними” координатами для $\Sigma^{[W]}$, а u^α — “внутренними”. В работах Г.И. Быковцева показано, что использование специальной Гауссовой параметризации [13, с. 224], при которой псевдовектор $\partial_i x^i$ направлен вдоль псевдовектора нормали $n_i^{[W]}$ к поверхности $\Sigma^{[W]}$ приводит к соотношению

$$\partial_i x^i = e^W G n_i^{[W]}. \quad (29)$$

Г.И. Быковцев систематически использовал уравнение (29) в работах по механике деформируемого твердого тела [10–12].

Пусть задано физическое контравариантное псевдовекторное поле $\varphi^k(x^s, t)$ веса P .³ Предположим, что φ^k непрерывно и дифференцируемо на каждой стороне поверхности $\Sigma^{[W]}$. Величину разрыва $[\varphi^k]$ поля φ^k определим равенством

$$[\varphi^k] = \varphi^k_+ - \varphi^k_-, \quad (30)$$

где $+$ и $-$ относятся к соответствующим сторонам $\Sigma^{[W]}_+$ и $\Sigma^{[W]}_-$ поверхности $\Sigma^{[W]}$. Аналогичным образом определяются разрывы производных ∂_i поля φ^k по пространственным координатам x^i . Введем следующие обозначения

$$[\varphi^k] = A^k, \quad [\partial_i \varphi^k] = B^k n_i, \quad [\partial_i \partial_j \varphi^k] = C^k n_i n_j, \quad (31)$$

где n_j — единичный псевдовектор нормали к поверхности $\Sigma^{[W]}$, направленный в сторону от $\Sigma^{[W]}_-$ к $\Sigma^{[W]}_+$. Здесь, с особой осторожностью, следует учитывать четность (не четность) веса W псевдовекторного поля φ^k , т.к. при преобразованиях инверсии пространства и зеркальных отражениях направление псевдовектора нормали n_j может измениться.

Легко заметить, что

$$\partial_\alpha A^k = [\partial_\alpha \varphi^k] = [\partial_i \varphi^k] \partial_\alpha x^i. \quad (32)$$

Используя известное тождество

$$g^{\alpha\beta} x^i_\alpha x^j_\beta = g^{ij} - e^{-2W} n_i n_j, \quad (33)$$

после несложных преобразований получим

$$[\partial_i \varphi^k] = B^k n_i + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha A^k \partial_\beta x_i, \quad (34)$$

где $g^{\alpha\beta}$ — коэффициенты первой фундаментальной квадратичной формы поверхности $\Sigma^{[W]}$.

³Поясним, что контравариантный псевдовектор φ^k используется как “модель”, т.е. вместо него можно использовать любое псевдотензорное поле.

5. Дифференцирование по псевдоскалярному времени и кинематические условия совместности первого порядка. Рассмотрим два положения поверхности $\Sigma: \Sigma^{[W]}(t)$ и $\Sigma^{[W]}(t + \delta t)$. Построим вектор единичной нормали n^k в некоторой точке P поверхности Σ , а через P' обозначим точку, в которой нормаль n^k пересекает поверхность $\Sigma^{[W]}(t + \delta t)$. Пусть точка P имеет координаты x^k , а P' — координаты $x^k + \delta x^k$.

Нормальная скорость распространения поверхности Σ определяется согласно правилу

$$G^{[-W]} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{|\overrightarrow{PP'}|}{\delta t}. \quad (35)$$

Устремляя к нулю расстояние между поверхностями $\Sigma^{[W]}(t)$ и $\Sigma^{[W]}(t + \delta t)$, т.е. устремляя δt к нулю, можно получить следующие выражения для δ -производных

$$\frac{\delta \varphi_k^{[P]}}{\delta t} = \delta \cdot \varphi_k^{[-W][P]}, \quad \frac{\delta \varphi_k^{[P]}}{\delta t} = \delta \cdot \varphi_k^{[-W][P]}, \quad \frac{\delta A^k}{\delta t} = \delta \cdot A^k, \quad (36)$$

откуда не сложно получить кинематические условия совместности первого порядка

$$\begin{aligned} \left[\delta \cdot \varphi_k^{[P]} \right] &= \delta \cdot \varphi_k^{[-W][P]} - \delta \cdot \varphi_k^{[-W][P]} = \delta \cdot A^k, \\ \delta \cdot x^i &= e^{-W} G^{[-W]} n^i, \\ \left[\delta \cdot \varphi_k^{[P]} \right] &= -e^W B^{[P-W]} G^{[-W]} + \delta \cdot A^k, \end{aligned} \quad (37)$$

Используя полученные соотношения первого порядка не сложно получить условия совместности второго и более высоких порядков.

6. Слабые разрывы перемещений и микровращений Исследуем закономерности распространения слабых разрывы перемещений u^k и микровращений $\phi^{[+1]k}$ в микрополярином континууме. Отметим, что система уравнений динамики содержит частные производные не выше второго порядка. Пусть в трехмерном пространстве с нормальной скоростью G распространяется фронт (волновая поверхность) $\Sigma^{[W]}$ слабых разрывов перемещений u^k и микровращений $\phi^{[+1]k}$. Тогда геометрические и кинематические условия совместности второго порядка Адамара—Томаса (9) будут иметь вид

$$\begin{aligned} [\partial_i \partial_j u^k] &= C^{[-2W]} n_i n_j, & [\partial_i \partial_j \phi^k] &= S^{[+1]} n_i n_j, \\ [\partial_i \partial \cdot u^k] &= -e^W G^{[-W]} C^{[-2W]} n_i, & [\partial_i \partial \cdot \phi^k] &= -e^W G^{[-W]} S^{[+1]} n_i, \\ [\partial \cdot \partial \cdot u^k] &= e^{2W} G^{[-W]} G^{[-W]} C^{[-2W]}, & [\partial \cdot \partial \cdot \phi^k] &= e^{2W} G^{[-W]} G^{[-W]} S^{[+1]}. \end{aligned} \quad (38)$$

Заключение. В настоящей работе исследованы особенности постановки связывающих двусторонних граничных условий на поверхностях разрывов, распространяющихся в сплошных средах (в частности, в микрополярных континуумах).

- (1) Теория Югонио–Адамара распространения поверхностей разрывов полевых переменных обобщена на случай псевдотензорных физических полей.
- (2) Введены понятия фундаментального ориентирующего псевдоскаляра и псевдоскалярного времени.
- (3) Исследуется геометрия поверхностей уровня псевдоскалярного поля. Введено понятие псевдовектора нормали к поверхности.
- (4) Получены геометрические совместности первого порядка для псевдовекторного поля на поверхности уровня псевдоскалярного поля.
- (5) Введена операция дифференцирования по псевдоскалярному времени и получены кинематические условия совместности первого порядка.
- (6) Выведены условия совместности для слабых разрывов перемещений и микроповоротов микрополярного континуума.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном дифференциальном ограничении в асимметричных теориях механики растущих тел // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2019. № 6. С. 38–46.
- [2] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412.
- [3] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a micropolar theory of growing solids // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2020. Т. 24, № 3. С. 424–444.
- [4] Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. Arpseudotensor formulation // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия “Физико-математические науки.” 2020. Т. 24, № 4. С. 752–761.
- [5] Weierstrass K. Note zur vorstehender Abhandlung. Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, 1865.
- [6] Erdmann G. Ueber unstetige Lösungen in der Variationsrechnung. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 1877.
- [7] Rankine W.J.M. On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance // Proceedings of the Royal Society of London. London: The Royal Society, 1870. Vol. 18, P. 80–83.
- [8] Hugoniot P. H. Sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits, 2e Partie // Journal de l'École Polytechnique, 1887. Vol. 57. P. 3–97.
- [9] Thomas T. Plastic flow and fracture in solids. New York, Academic Press, 1961. 267 p.
- [10] Быковцев Г.И., Мяснянкин Ю.М. О поверхностях скольжения в трехмерных жесткопластических телах // ДАН СССР 1966. Т. 167. № 6. С.1260–1262.
- [11] Быковцев Г.И., Кретова Л.Д. О волнах ускорений в идеальных упруго-пластических телах // Инж. журнал МТТ. 1967. № 1. С.102–110.
- [12] Быковцев Г.И., Власова И.А. Свойства уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности // Мех. деформир. тверд. тела, Вып. 2. Куйбышев, 1977. С.33–68.
- [13] Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с.
- [14] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [15] Veblen O. and Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 26, No. 3 (Jul., 1924), pp. 373–377 <https://www.jstor.org/stable/1989146>
- [16] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: Encyclopedia of Physics. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. 226–902 pp. DOI: 10.1007/978-3-642-45943-6_2.

-
- [17] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Eng. Trans. G. B. Gurevich, Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen, Noordhoff, 1964. 429 pp.]
- [18] Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. – 456 с. [Eng. Trans. Schouten J. A., Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 434 pp.]
- [19] Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с. [Eng. Trans. Sokolnikoff I. S. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 pp.]
- [20] Synge J. L. and Schild A. Tensor calculus. New York, Dover Publications Inc., 1978. xi+324 pp.
- [21] Besdo D. Ein beitrag zur nichtlinearen theorie des Cosserat-kontinuums //Acta Mechanica. 1974. Vol. 20. No. 1. P. 105-131.
- [22] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin : Springer, 1972. 285 p.
- [23] Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 pp.
- [24] Копф А. Основы теории относительности Эйнштейна. М.: ГТТИ, 1933. 175 с.
- [25] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Самарский университет, 2006. 340 с.

E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

ON A PSEUDOTENSOR GENERALIZATION OF THE HUGONOT-HADAMARD LINKING BOUNDARY CONDITIONS

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The present work deals with the linking boundary conditions formulated on the both sides of a propagating wave surface (in particular, in micropolar continua). The Hugoniot-Hadamard theory of physical fields wave surfaces propagation, essentially developed by G.I. Bykovtsev, is generalized to the case of a pseudotensor field description. The concepts of fundamental orienting pseudoscalar and pseudoscalar time are introduced and discussed. The geometry of level surfaces of a given pseudoscalar field is studied. The concept of a pseudovector normal to a surface is introduced. The pseudoscalar time derivative is proposed and discussed. Geometric and kinematic first order compatibility conditions are obtained in terms of pseudotensors. The compatibility conditions are derived for weak discontinuities of displacements and microrotations due to deformations of the micropolar solid.

Keywords: pseudotensor, fundamental orienting pseudoscalar, constitutive pseudoscalars, micropolar hemitropic continuum, elastic potential, primary wave mode, mirror mode

REFERENCES

- [1] Radaev Yu.N., Murashkin E.V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problems of Strength and Plasticity. 2020. Vol. 82, No. 4, pp. 399–412.
- [2] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a micropolar theory of growing solids // Bulletin of the Samara State Technical University. Series Physics and Mathematics. 2020, T. 24, No 3.P. 424–444.
- [3] Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. Apseudotensor formulation // Bulletin of Samara State Technical University, Series “ Physics and Mathematics. ” 2020, vol. 24, no. 4, pp. 752–761.
- [4] Murashkin E.V., Radaev Yu.N. On one differential constraint in asymmetric theories of the mechanics of growing bodies // Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Rigid Body Mechanics. 2019. No. 6. P. 38–46.
- [5] Weierstrass K. Note zur vorstehender Abhandlung. Walter de Gruyter, Berlin / New York Berlin, New York, 1865.
- [6] Erdmann G. Ueber un stetige L "o sungen in der Variationsrechnung. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 1877.
- [7] Rankine W. J. M. On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance // Proceedings of the Royal Society of London. London: The Royal Society, 1870. Vol. 18, P. 80–83.
- [8] Hugoniot P.H. Sur la propagation du mouvement dans les corps et sp 'e cialement dans les gaz parfaits, 2e Part // Journal de l' 'E cole Polytechnique, 1887. Vol. 57. P. 3-97.
- [9] Thomas T. Plastic flow and fracture in solids. New York, Academic Press, 1961. 267 p.
- [10] Bykovtsev G.I., Myasnyankin Yu.M. Sliding surfaces in three-dimensional rigid-plastic bodies // DAN SSSR 1966. Vol. 167. No. 6. pp. 1260-1262.
- [11] Bykovtsev G.I., Kretova L.D. On waves of accelerations in ideal elastoplastic bodies // Inzh. magazine MTT. 1967. No. 1. P.102-110.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
Yuri N. Radayev, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

- [12] Bykovtsev G.I., Vlasova I.A. Properties of the equations of the spatial problem of the theory of ideal plasticity // *Mekh. deformed. solid, solid*, Vol. 2. Kuibyshev, 1977. S. 33-68.
- [13] Ivlev D.D., Bykovtsev G.I. The theory of a hardening plastic body. Moscow: Nauka, 1971.232 p.
- [14] Bykovtsev G.I., Ivlev D.D. The theory of plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998.528 p.
- [15] Veblen O. and Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 26, No. 3 (Jul., 1924), pp. 373-377 <https://www.jstor.org/stable/1989146>
- [16] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: *Encyclopedia of Physics*. Vol. III / 1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960.226-902 pp. DOI: 10.1007/978-3-642-45943-6_2.
- [17] Gurevich GB Foundations of the theory of algebraic invariants. M., L. : OGIZ, GITTL, 1948.408 p. [Eng. Trans. G. B. Gurevich, Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen, Noordhoff, 1964. 429 pp.]
- [18] Schouten Ya. A. Tensor analysis for physicists. M. : Science. 1965. – 456 s. [Eng. Trans. Schouten J. A., Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 434 pp.]
- [19] Sokolnikov I. S. Tensor analysis. Theory and applications in geometry and in continuum mechanics. Moscow: Nauka, 1971.376 p. [Eng. Trans. Sokolnikoff I. S. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley Sons Inc, 1964. 361 pp.]
- [20] Synge J. L. and Schild A. Tensor calculus. New York, Dover Publications Inc., 1978. xi + 324 pp.
- [21] Besdo D. Ein beitrage zur nichtlinearen theorie des Cosserat-kontinuums // *Acta Mechanica*. 1974. T. 20.No. 1.S. 105-131.
- [22] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer, 1972.285 p.
- [23] Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986.383 pp.
- [24] Kopf A. Foundations of Einstein's theory of relativity. Moscow: GTTI, 1933.175 p.
- [25] Radaev Yu. N. A spatial problem of the mathematical theory of plasticity. Samara: Samara University, 2006.340 p.

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research projects nos. 19-51-60001, 20-01-00666.

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

ПРЯМЫЕ, ИНВЕРСНЫЕ И ЗЕРКАЛЬНЫЕ ВОЛНОВЫЕ МОДЫ СВЯЗАННЫХ ВОЛН ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И МИКРОВОРАЩЕНИЙ В ГЕМИТРОПНЫХ МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕДАХ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В статье обсуждаются вопросы распространения монохроматических волн в гемитропном микрополярном континууме. Сформулированы уравнения динамики гемитропного микрополярного упругого тела в терминах псевдотензоров с 9-ю определяющими псевдоскалярами. Рассмотрены преобразования указанных уравнений в случаях инверсии пространства и зеркального отражения относительно заданной плоскости. Показано наличие инверсных волновых мод (наряду с прямыми) в распространяющейся плоской волне. Получены формулы преобразования прямых волновых мод перемещений и микровращений в инверсные и зеркально отраженные моды. Приводятся соответствующие формулы.

Ключевые слова: псевдотензор, фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, определяющий псевдоскаляр, микрополярный гемитропный континуум, волна, волновая мода, прямая мода, инверсная мода, зеркальная мода

DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.014

УДК: 539.374

Вводные замечания и предварительные сведения. Волновые задачи механики микрополярных континуумов возникают при моделировании различных процессов: медицинской диагностики, таких как, ультразвуковое исследование, сонография, спектральная доплерография; неразрушающего контроля, передаче энергии и импульса в волноводах. Теоретической основой для этих методов могут служить задачи

© Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. 2021

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, radaev.iurii.8e@kyoto-u.jp, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 19-51-60001, № 20-01-00666.

Поступила 20.01.2021

о распространении гармонических волн в сплошных средах [1–3]. Исследованиям решений волновых задач термомеханики микрополярных континуумов посвящена обширная литература [4–7]. В настоящей работе рассматривается задача о различных поляризациях монохроматической плоской волны перемещений и микровращений в гемитропном микрополярном континууме.

Исследование осуществляется на основе аппарата псевдотензорного исчисления. Ранее, в работах авторов [8–10] обсуждались вопросы применения алгебры и анализа псевдотензоров к задачам механики растущих тел и микрополярной теории упругости. В терминах псевдотензоров сформулированы уравнения динамики гемитропного микрополярного упругого тела с 9 определяющими псевдоскалярами. Рассмотрены преобразования уравнений динамики в случаях инверсии пространства и зеркального отражения относительно заданной плоскости. Показано наличие инверсных волновых мод (наряду с прямыми) при распространении плоских монохроматических волн. Получены формулы преобразования решений прямых волновых мод перемещений и микровращений, в инверсные и зеркальные моды. По прямым волновым модам построены инверсные и зеркальные моды.

1. Определяющие уравнения гемитропного микрополярного тела. Псевдотензорная формулировка. Динамические уравнения гемитропного микрополярного тела в подавляющем большинстве источников выводятся в терминах абсолютных тензоров [4–6]. Однако, как показали недавние исследования [8–10], геометрически и физически корректная формулировка уравнений *гемитропной* микрополярной теории возможна только в терминах псевдотензоров. Здесь мы не будем подробно воспроизводить определение и свойства псевдотензоров. Изложение алгебры псевдотензоров с необходимой степенью полноты можно найти в руководствах по тензорному анализу [11–16], а ее применение к механике континуума в работах [8–10]. Исключительное значение при этом имеет понятие фундаментального ориентирующего псевдоскаляра e [8–10], который в N -мерном пространстве можно определить как косое произведение [17, с. 63–65] абсолютных векторов ковариантного базиса

$$[\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N] = e. \quad (1)$$

Не сложно показать, что в метрическом пространстве справедливо соотношение

$$e^2 = g, \quad (2)$$

где g — детерминант метрического тензора.

В пространстве трех измерений справедливо

$$e_{ijk} = [\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j, \mathbf{z}_k] = (\mathbf{z}_i \times \mathbf{z}_j) \cdot \mathbf{z}_k, \quad (3)$$

тогда

$$e = {}^{[+1]}e_{123} = [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3] = (\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2) \cdot \mathbf{z}_3. \quad (4)$$

Отметим лишь, что псевдотензоры легко преобразовывать в абсолютные тензоры при помощи фундаментального ориентирующего псевдоскаляра e (см. [8–10]). Для произвольного псевдотензора веса W имеем

$$T_{ij\dots l}^{pqr\dots s} = e^{-W} T_{ij\dots l}^{[W]pqr\dots s}. \quad (5)$$

Следствием принципа виртуальных перемещений [7, 10] являются уравнения динамики микрополярной среды, которые примем в форме

$$\nabla_i t^{ik} = \rho \partial_{..}^2 u^k, \quad (6)$$

$$\nabla_i \overset{[-1]}{\mu}_{.k} - 2 \overset{[-1]}{\tau}_k = \rho \mathfrak{S} \partial_{..}^2 \overset{[-2]}{\phi}_k, \quad (7)$$

где $\overset{[-1]}{\tau}_j$ — ассоциированный (сопутствующий) псевдовектор силовых напряжений

$$- \overset{[-1]}{\tau}_j = \frac{1}{2} \epsilon_{jik} t^{[ik]}, \quad t^{[ik]} = -\epsilon^{ikj} \overset{[-1]}{\tau}_j. \quad (8)$$

Ассоциированный (сопутствующий) вектор моментных напряжений определяется по аналогии с (8)

$$\mu^i = \frac{1}{2} \epsilon^{iks} \overset{[-1]}{\mu}_{[ks]}, \quad \overset{[-1]}{\mu}_{[is]} = e_{isj} \mu^j. \quad (9)$$

Введем микрополярный упругий потенциал \mathcal{U} , рассчитанный на единицу инвариантного элемента объема, с псевдотензорными аргументами

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon_{(ij)}, \overset{[+1]}{\kappa}^{(ij)}, \overset{[+1]}{\varphi}_i, \kappa_i), \quad (10)$$

где

$$\epsilon_{ij} = \nabla_i u_j - \epsilon_{ijk} \overset{[+1]}{\varphi}_k, \quad \overset{[+1]}{\varphi}_i = \overset{[+1]}{\phi}_i - \frac{1}{2} \epsilon^{ikl} \nabla_k u_l, \quad \kappa_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijs} \overset{[+1]}{\kappa}^{[js]}. \quad (11)$$

Обычно, аргументами упругого потенциала выступают абсолютные тензоры. Здесь существенным является использование формализма псевдотензоров, обеспечивающего чувствительность определяющих псевдоскаляров к преобразованиям инверсии пространства и зеркальным отражениям.

Упругий потенциал \mathcal{U} по физическому смыслу является объективной величиной и не может меняться при повороте осей системы координат. Поэтому он (так же как и его первая вариация $\delta\mathcal{U}$) является абсолютным скаляром. Первая вариация упругого потенциала представляется сбалансированной по весам суммой

$$\delta\mathcal{U} = t^{(ij)} \delta\epsilon_{ij} + \overset{[-1]}{\mu}_{(ij)} \delta \overset{[+1]}{\kappa}^{(ij)} + 2 \overset{[-1]}{\tau}_i \delta \overset{[+1]}{\varphi}_i + 2\mu^i \delta\kappa_i, \quad (12)$$

откуда могут быть получены определяющие уравнения:

$$t^{(ij)} = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\epsilon_{ij}}, \quad \overset{[-1]}{\mu}_{(ij)} = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial \overset{[+1]}{\kappa}^{(ij)}}, \quad 2 \overset{[-1]}{\tau}_i = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial \overset{[+1]}{\varphi}_i}, \quad 2\mu^i = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\kappa_i}. \quad (13)$$

В качестве потенциала \mathcal{U} , который как указывалось выше инвариантен относительно поворотов и переносов пространства, а также относительно преобразований

инверсии пространства и зеркальных отражений, в гемитропном случае следует выбрать квадратичную функцию

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} = & G[\nu(1 - 2\nu)^{-1}g^{is}g^{lm}\epsilon_{(is)}\epsilon_{(lm)} + \\
& + \frac{[-1][-1]}{L L} c_3 g_{is} g_{lm} \frac{[+1](is)[+1](lm)}{\kappa} + g^{is}g^{lm}\epsilon_{(il)}\epsilon_{(sm)} + \\
& + \frac{[-1][-1]}{L L} g_{is} g_{lm} \frac{[+1](il)[+1](sm)}{\kappa} + 2 \frac{[-2]}{c_1 g_{is}} \frac{[+1]_i [+1]_s}{\varphi} + \\
& + \frac{[-1][-1][+2]}{L L} c_2 g^{is} \kappa_i \kappa_s + \frac{[-1]}{L} c_4 g^{is} g_{lm} \epsilon_{(is)} \frac{[+1](lm)}{\kappa} + \\
& + \frac{[-1]}{L} c_5 \epsilon_{(is)} \frac{[+1](is)}{\kappa} + \frac{[-1]}{L} c_6 \kappa_i \frac{[+1]_i}{\varphi}, \quad (14)
\end{aligned}$$

где G — модуль сдвига (имеет размерность силовых напряжений); ν — коэффициент Пуассона (не имеет физической размерности); L — характеристическая микродлина; $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ — не имеющие физической размерности псевдоскаляры.

В результате приходим к определяющим уравнениям гемитропной микрополярной среды:

$$\begin{aligned}
t^{(is)} = & 2G \left(\nu(1 - 2\nu)^{-1}g^{is}g^{lm} + g^{il}g^{sm} \right) \epsilon_{(lm)} + \\
& + G \frac{[-1]}{L} (c_4 g^{is} g_{lm} \frac{[+1](lm)}{\kappa} + c_5 \frac{[+1](is)}{\kappa}), \\
\mu^{(is)} = & 2G \frac{[-1][-1]}{L L} (c_3 g_{is} g_{lm} + g_{il} g_{sm}) \frac{[+1](lm)}{\kappa} + \\
& + G \frac{[-1]}{L} (c_4 g_{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + c_5 \epsilon_{(is)}), \quad (15) \\
\tau_i = & 2G \frac{[-2]}{c_1 g_{is}} \frac{[+1]_s}{\varphi} + \frac{1}{2} G \frac{[-1]}{L} c_6 \kappa_i, \\
\mu^i = & G \frac{[-1][-1][+2]}{L L} c_2 g^{is} \kappa_s + \frac{1}{2} G \frac{[-1]}{L} c_6 \frac{[+1]_i}{\varphi}.
\end{aligned}$$

Уравнения динамики гемитропного микрополярного упругого континуума в криволинейных координатах, вводя обозначения для дифференциальных операторов \mathcal{L}^i и \mathcal{M}_i и принимая обозначения для определяющих постоянных

$$c'_4 = c_4 + \frac{1}{2}c_5 + \frac{1}{4}c_6, \quad c'_5 = \frac{1}{2}c_5 - \frac{1}{4}c_6, \quad c'_6 = -c_6 \quad (16)$$

записываются в форме

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^i(\partial., \nabla_k, u^k, \phi^{[+1]k}) &= G[(1 + e^{2[-2]c_1})\nabla^s \nabla_s u^i + \\
 &+ (1 - e^{2[-2]c_1} + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\nabla^i \nabla_k u^k + 2^{[-2]c_1} \epsilon^{ikl} \nabla_k \phi^{[+1]l} + \\
 &+ L^{[-1]} c'_4 \nabla^i \nabla_k \phi^{[+1]k} + L^{[-1]} c'_5 \nabla^k \nabla_k \phi^{[+1]i}] - \rho \partial_{..}^2 u^i = 0, \\
 \mathcal{M}_i^{[-1]}(\partial., \nabla_k, u^k, \phi^{[+1]k}) &= G L^{[-1]} L^{[-1]} [(1 + e^{-2[+2]c_2})\nabla^s \nabla_s \phi^{[+1]i} + \\
 &+ (1 - e^{-2[+2]c_2} + 2c_3)\nabla_i \nabla_k \phi^{[+1]k} + L^{[-1]} c'_4 \nabla_i \nabla^k u_k + \\
 &+ L^{[-1]} c'_5 \nabla^k \nabla_k u_i + L^{[-1]} c'_6 \epsilon_{isl} \nabla^s \phi^{[+1]l}] - \\
 &- 2G^{[-2]c_1} (2 \phi^{[+1]i} - e^2 \epsilon_{ikl} g^{ks} \nabla_s u^l) - \rho \mathfrak{I} \partial_{..}^2 \phi^i = 0.
 \end{aligned} \tag{17}$$

На основании данных выше определений дифференциальный оператор \mathcal{L}^i имеет нулевой вес, а оператор $\mathcal{M}_i^{[-1]}$ имеет вес -1 . Для правоориентированной декартовой системы координат уравнения (17) запишутся в виде (см. также таблицу 3)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_i(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) &= G[(1 + c_1)\partial_s \partial_s u_i + (1 - c_1 + \\
 &+ 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\partial_i \partial_k u_k + 2c_1 \epsilon_{ikl} \partial_k \mathcal{U}_l + L c'_4 \partial_i \partial_k \mathcal{U}_k + \\
 &+ L c'_5 \partial_k \partial_k \mathcal{U}_i] - \rho \partial_{..}^2 u_i = 0, \tag{18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_i^{[-1]}(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) &= G L^2 [(1 + c_2)\partial_s \partial_s \mathcal{U}_i + (1 - c_2 + \\
 &+ 2c_3)\partial_i \partial_k \mathcal{U}_k + L^{-1} c'_4 \partial_i \partial_k u_k + L^{-1} c'_5 \partial_k \partial_k u_i + \\
 &+ L^{-1} c'_6 \epsilon_{isl} \partial_s \mathcal{U}_l] - 2G c_1 (2\mathcal{U}_i - \epsilon_{ikl} \partial_k u_l) - \rho \mathfrak{I} \partial_{..}^2 \mathcal{U}_i = 0. \tag{19}
 \end{aligned}$$

\mathcal{U}^k — специальный символ, вес которого мы не будем указывать, точно так же как это имеет место для ϵ -символов.

2. Инверсные волновые моды. Рассмотрим преобразование инверсии пространства $(x_k \rightarrow x_k)$, т.е.

$$x_k = -x_k. \tag{20}$$

Здесь и далее, величины в новой системе координат обозначим звездочкой снизу. В таблице 1 укажем объекты в правоориентированной декартовой системе координат, инверсной к ней системе координат и формулы связи. Снова на основании уравнения (17) и заменяя материальные постоянные на основании таблицы 1 получаем

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_i(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) &= G[(1 + c_1)\partial_s \partial_s u_i + (1 - c_1 + \\
 &+ 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\partial_i \partial_k u_k + 2c_1 \epsilon_{ikl} \partial_k \mathcal{U}_l - L c'_4 \partial_i \partial_k \mathcal{U}_k - \\
 &- L c'_5 \partial_k \partial_k \mathcal{U}_i] - \rho \partial_{..}^2 u_i = 0, \tag{21}
 \end{aligned}$$

Таблица 1. Таблица соответствия для прямой и обратной декартовых координатных систем.

криволинейная система координат	правоориентированная декартова система координат	обратная система координат	формулы преобразования
x^k	x^k	x^k_*	$x^k_* = -x^k$
e	1	-1	$e_* = -e$
g_{ij}	δ_{ij}	δ_{ij}	
ϵ^{ijk}	ϵ_{ijk}	ϵ_{ijk}	
ϵ_{ijk}	ϵ_{ijk}	ϵ_{ijk}	
u^i	u_i	u_i_*	$u_i_* = -u_i$
$^{[+1]}_k \phi$	\mathcal{U}_k	\mathcal{U}_k_*	$\mathcal{U}_k_* = \mathcal{U}_k$
∇_i	∂_i	∂_i_*	$\partial_i_* = -\partial_i$
$\partial.$	$\partial.$	$\partial.$	
$\mathcal{L}^i(\partial., \nabla_k, u^k, \mathcal{U}^k)$	$\mathcal{L}_i(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k)$	$\mathcal{L}_i(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k)_*$	$\mathcal{L}_i_* = -\mathcal{L}_i$
$^{[-1]}_i \mathcal{M}$	$\mathcal{M}_i(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k)$	$\mathcal{M}_i(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k)_*$	$\mathcal{M}_i_* = \mathcal{M}_i$
$^{[-1]}_L$	L	L_*	$L_* = -L$
$^{[-2]}_c$	c_1	c_1	
$^{[+2]}_c$	c_2	c_2	
$^{[-2]}_J$	J	J	

$$\begin{aligned}
^{[-1]}_* \mathcal{M}_i(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) &= GL^2[(1 + c_2)\partial_s \partial_s \mathcal{U}_i + (1 - c_2 + \\
&+ 2c_3)\partial_i \partial_k \mathcal{U}_k - L^{-1}c'_4 \partial_i \partial_k u_k - L^{-1}c'_5 \partial_k \partial_k u_i - \\
&- L^{-1}c'_6 \epsilon_{isl} \partial_s \mathcal{U}_l] - 2Gc_1(2\mathcal{U}_i - \epsilon_{ikl} \partial_k u_l) - \rho J \partial_i^2 \mathcal{U}_i = 0. \quad (22)
\end{aligned}$$

Произведя в дифференциальных операторах замены в соответствии с третьим столбцом таблицы 3, находим

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_i(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k)_* &= -\mathcal{L}_i(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k), \\
^{[-1]}_* \mathcal{M}_i(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) &= ^{[-1]}_* \mathcal{M}_i(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k). \quad (23)
\end{aligned}$$

Откуда следует, что если выполняются уравнения (18) и (19) для исходной правоориентированной декартовой системы координат, то выполняются (в силу выполнимости (23)) и уравнения (21) и (22)) в инверсной координатной системе.⁴ Указанное обстоятельство влечет, наличие прямых и инверсных мод при распространении волн по гемитропному микрополяроному упругому континууму.

3. Зеркальные волновые моды. Рассмотрим преобразование зеркального отражения относительно плоскости $x_1 O x_2$ ($x_k \rightarrow x_k^*$), величины в новой системе координат обозначим звездочкой снизу. Тогда

$$x_1 = x_1, \quad x_2 = x_2, \quad x_3 = -x_3. \quad (24)$$

В таблице 2 укажем объекты в правоориентированной декартовой системе координат, зеркально отраженной системе координат и формулы связи. Снова, на основании системы динамических уравнений (17) и заменяя материальные постоянные в соответствии с таблицей 2 получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) = G[(1 + c_1)\partial_s \partial_s u_i + (1 - c_1 + \\ + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\partial_i \partial_k u_k + 2c_1 \epsilon_{ikl} \partial_k \mathcal{U}_l - Lc'_4 \partial_i \partial_k \mathcal{U}_k - \\ - Lc'_5 \partial_k \partial_k \mathcal{U}_i] - \rho \partial_s^2 u_i = 0, \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_i^{[-1]}(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) = GL^2[(1 + c_2)\partial_s \partial_s \mathcal{U}_i + (1 - c_2 + \\ + 2c_3)\partial_i \partial_k \mathcal{U}_k - L^{-1}c'_4 \partial_i \partial_k u_k - L^{-1}c'_5 \partial_k \partial_k u_i - \\ - L^{-1}c'_6 \epsilon_{isl} \partial_s \mathcal{U}_l] - 2Gc_1(2\mathcal{U}_i - \epsilon_{ikl} \partial_k u_l) - \rho \mathfrak{I} \partial_s^2 \mathcal{U}_i = 0. \quad (26) \end{aligned}$$

Произведем замены в уравнениях (18) согласно таблицы 2 выпишем уравнения

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) = G[(1 + c_1)\partial_s \partial_s u_1 + (1 - c_1 + \\ + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\partial_1 \partial_k u_k + 2c_1 \epsilon_{1kl} \partial_k \mathcal{U}_l - Lc'_4 \partial_1 \partial_k \mathcal{U}_k - \\ - Lc'_5 \partial_k \partial_k \mathcal{U}_1] - \rho \partial_s^2 u_1 = \mathcal{L}_1(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k), \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) = G[(1 + c_1)\partial_s \partial_s u_2 + (1 - c_1 + \\ + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\partial_2 \partial_k u_k + 2c_1 \epsilon_{2kl} \partial_k \mathcal{U}_l - Lc'_4 \partial_2 \partial_k \mathcal{U}_k - \\ - Lc'_5 \partial_k \partial_k \mathcal{U}_2] - \rho \partial_s^2 u_2 = \mathcal{L}_2(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k), \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) = -G[(1 + c_1)\partial_s \partial_s u_3 - (1 - c_1 + \\ + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\partial_3 \partial_k u_k - 2c_1 \epsilon_{3kl} \partial_k \mathcal{U}_l + Lc'_4 \partial_3 \partial_k \mathcal{U}_k + \\ + Lc'_5 \partial_k \partial_k \mathcal{U}_3] + \rho \partial_s^2 u_3 = -\mathcal{L}_3(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k), \quad (29) \end{aligned}$$

⁴Справедливо и обратное утверждение.

Таблица 2. Таблица соответствия для прямой и зеркально отраженной декартовых координатных систем.

криволинейная система координат	правоориентированная декартова система координат	зеркальная система координат	формулы преобразования
x^k	x^k	x^k_*	$x_1 = x_1$ $x_2 = x_2$ $x_3 = -x_3$
e	1	-1	$e = -e$
ϵ^{ijk}	ϵ_{ijk}	ϵ_{ijk}	
ϵ_{ijk}	ϵ_{ijk}	ϵ_{ijk}	
∇_i	∂_i	∂_i^*	$\partial_1 = \partial_1$ $\partial_2 = \partial_2$ $\partial_3 = -\partial_3$
u^i	u_i	u_i^*	$u_1 = u_1$ $u_2 = u_2$ $u_3 = -u_3$
$\overset{[+1]}{\phi}_k$	\mathcal{U}_k	\mathcal{U}_k^*	$\mathcal{U}_1 = -\mathcal{U}_1$ $\mathcal{U}_2 = -\mathcal{U}_2$ $\mathcal{U}_3 = \mathcal{U}_3$
$\mathcal{L}^i(\nabla_k, u^k, \mathcal{U}^k)$	$\mathcal{L}_i(\partial_k, u^k, \mathcal{U}^k)$	$\mathcal{L}_i^*(\partial_k^*, u^k, \mathcal{U}^k)$	$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1$ $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2$ $\mathcal{L}_3 = -\mathcal{L}_3$
$\mathcal{M}_i(\nabla_k, u^k, \mathcal{U}^k)$	$\mathcal{M}_i(\partial_k, u^k, \mathcal{U}^k)$	$\mathcal{M}_i^*(\partial_k^*, u^k, \mathcal{U}^k)$	$\mathcal{M}_1 = -\mathcal{M}_1$ $\mathcal{M}_2 = -\mathcal{M}_2$ $\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_3$
$\overset{[-1]}{L}$	L	L^*	$L = -L$
$\overset{[-2]}{c_1}$	c_1	c_1	
$\overset{[+2]}{c_2}$	c_2	c_2	
$\overset{[-2]}{\mathfrak{J}}$	\mathfrak{J}	\mathfrak{J}	

Производя преобразование уравнений (19) согласно таблицы 2 получим

$$\begin{aligned}
\overset{[-1]}{\mathcal{M}}_1^*(\partial_k^*, u_k, \mathcal{U}_k) = & -GL^2[(1 + c_2)\partial_s\partial_s\mathcal{U}_1 - \\
& - (1 - c_2 + 2c_3)\partial_1\partial_k\mathcal{U}_k - L^{-1}c'_4\partial_1\partial_k u_k - \\
& - L^{-1}c'_5\partial_k\partial_k u_1 - L^{-1}c'_6\epsilon_{1sl}\partial_s\mathcal{U}_l] + 2Gc_1(2\mathcal{U}_1 + \\
& + \epsilon_{1kl}\partial_k u_l) + \rho\mathfrak{J}\partial_s^2\mathcal{U}_1 = -\overset{[-1]}{\mathcal{M}}_1(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k), \quad (30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_2(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) = & -GL^2[(1+c_2)\partial_s\partial_s\mathcal{U}_2 - \\
 & - (1-c_2+2c_3)\partial_2\partial_k\mathcal{U}_k - L^{-1}c'_4\partial_2\partial_k u_k - \\
 & - L^{-1}c'_5\partial_k\partial_k u_2 - L^{-1}c'_6\epsilon_{2sl}\partial_s\mathcal{U}_l] + 2Gc_1(2\mathcal{U}_2 + \\
 & + \epsilon_{2kl}\partial_k u_l) + \rho\mathfrak{I}\partial_s^2\mathcal{U}_2 = -\mathcal{M}_2(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k), \quad (31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_3(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) = & GL^2[(1+c_2)\partial_s\partial_s\mathcal{U}_3 + \\
 & + (1-c_2+2c_3)\partial_3\partial_k\mathcal{U}_k + L^{-1}c'_4\partial_3\partial_k u_k + \\
 & + L^{-1}c'_5\partial_k\partial_k u_3 + L^{-1}c'_6\epsilon_{3sl}\partial_s\mathcal{U}_l] - 2Gc_1(2\mathcal{U}_3 - \\
 & - \epsilon_{3kl}\partial_k u_l) - \rho\mathfrak{I}\partial_s^2\mathcal{U}_3 = \mathcal{M}_3(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k), \quad (32)
 \end{aligned}$$

Из условия существования решения системы связанных уравнений (18) и (19) для исходной правоориентированной декартовой системы координат, следует существование решения (в силу справедливости соотношений (27)–(32)) системы связанных уравнений (17) в зеркально отраженной координатной системе. Вышесказанное указывает на наличие прямых и зеркальных мод при распространении волн по гемитропному микрополяренному упругому континууму.

4. Плоская гармоническая связанная волна перемещений и микровращений. Рассмотрим гемитропный микрополяренный упругий континуум, погруженный в трехмерное “плоское” пространство. Пусть по континууму распространяется плоская гармоническая связанная волна перемещений и микровращений:

$$u_n = A_n e^{i\Phi}, \quad \mathcal{U}_n = S_n^{[+1]} e^{i\Phi}, \quad \Phi = (k_m x_m - \omega t) \quad (n, m = 1, 2, 3) \quad (33)$$

где x_m — абсолютный радиус-вектор; k_m — волновой (комплекснозначный) вектор; ω — циклическая частота (абсолютный скаляр); A_n и $S_n^{[+1]}$ — вектор и псевдовектор пространственной поляризации волны, Φ — фазовый показатель гармонической экспоненты. В самом деле, нетрудно видеть, что ω и t не зависят от выбора системы координат, тогда ωt есть абсолютный скаляр, но тогда и скалярное произведение $k_m x_m$ есть абсолютный скаляр, и в силу того, что радиус-вектор x_m является абсолютным вектором, заключаем что волновой вектор k_m также является абсолютным вектором, а фазовый показатель гармонической экспоненты Φ является абсолютным инвариантом.

4.1. Распространение инверсных мод. Пусть существует решение связанной системы дифференциальных уравнений (17) в форме плоской гармонической связанной волны (33), тогда решение для инверсной моды в соответствии с (21), (22) и таблицей 1 запишется в форме

$$u_n = -A_n e^{i\Phi}, \quad \mathcal{U}_n = S_n^{[+1]} e^{i\Phi}, \quad k_n = -k_n. \quad (34)$$

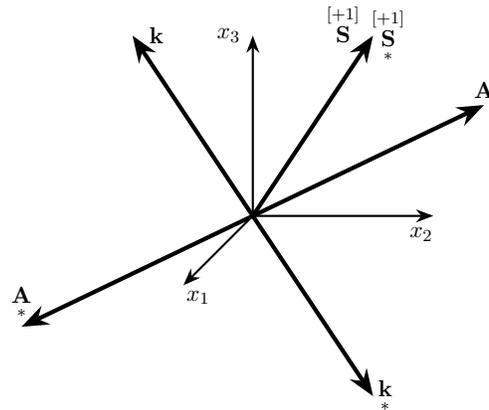


Рис. 1. Векторы поляризации прямых и инверсных волновых мод.

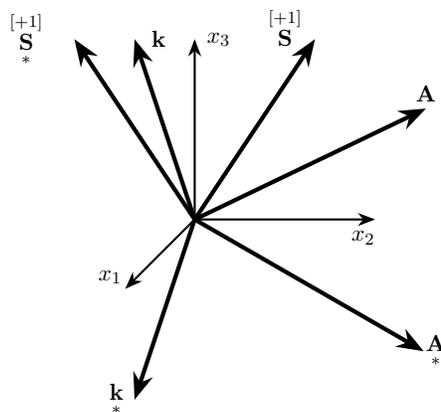


Рис. 2. Векторы поляризации прямой и зеркальной мод.

Схематически представим векторы поляризации монохроматической волны на рисунке 1 перенеся векторы поляризации инверсных мод в исходное пространство. Волновой вектор и вектор поляризации волны перемещений при инверсии пространства изменят свое направление, а псевдовектор поляризации волны микровращений при этом не поменяется.

4.2. *Распространение зеркальных мод.* Решение для случая преобразования зеркального отражения относительно плоскости x_1Ox_2 (24), также можно получить преобразовав решения для прямой волновой моды (33) в соответствии с таблицей 2. В итоге

для зеркальной волновой моды получим

$$\begin{aligned} u_{*1} &= A_1 e^{i\Phi}, & \mathcal{U}_{*1} &= -S_1^{[+]} e^{i\Phi}, & k_{*1} &= k_1, \\ u_{*2} &= A_2 e^{i\Phi}, & \mathcal{U}_{*2} &= -S_2^{[+]} e^{i\Phi}, & k_{*2} &= k_2, \\ u_{*3} &= -A_3 e^{i\Phi}, & \mathcal{U}_{*3} &= S_3^{[+]} e^{i\Phi}, & k_{*3} &= -k_3. \end{aligned} \quad (35)$$

На рисунке 2 мы видим, как изменятся направления волнового вектора, вектора поляризации перемещений и псевдовектора поляризации микровращений при зеркальном отражении если их перенести в исходное пространство. Неизменным остается только фазовый показатель гармонической экспоненты.

Заключение. В статье обсуждаются вопросы распространения гармонических возмущений в гемитропном микрополярном континууме.

- (1) Сформулированы уравнения динамики гемитропного микрополярного упругого тела в терминах псевдотензоров с 9 определяющими псевдоскалярами.
- (2) Рассмотрены преобразования уравнений динамики в случаях инверсии пространства и зеркального отражения относительно заданной плоскости.
- (3) Показано наличие инверсных волновых мод (наряду с прямыми) при распространении плоских монохроматических волн.
- (4) Получены формулы преобразования решений прямых волновых мод перемещений и микровращений, в инверсные и зеркальные моды.
- (5) По прямым волновым модам построены инверсные и зеркальные моды.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Уизем Дж. Б. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
- [2] Бреховских Л. М. Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982. 336 с.
- [3] Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 184 с.
- [4] Besdo D. Ein beitrage zur nichtlinearen theorie des Cosserat-kontinuums // Acta Mechanica. 1974. Т. 20. №. 1. С. 105-131.
- [5] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin : Springer, 1972. 285 p.
- [6] Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 pp.
- [7] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. С. 504–517. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635>.
- [8] Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, No 4. С. 399–412.
- [9] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2020. Т. 24, No 3. С. 424–444.
- [10] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. Arseudotensor formulation // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2020. Т. 24, No 4. С. 752–761.
- [11] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: Encyclopedia of Physics. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. 226–902 pp. DOI: 10.1007/978-3-642-45943-6_2.
- [12] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Eng. Trans. G. B. Gurevich, Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen, Noordhoff, 1964. 429 pp.]

- [13] Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ: с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматлит, 1963. 411 с.
- [14] Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. – 456 с. [Eng. Trans. Schouten J. A., Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 434 pp.]
- [15] Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с. [Eng. Trans. Sokolnikoff I. S. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 pp.]
- [16] Synge J. L. and Schild A. Tensor calculus. New York, Dover Publications Inc., 1978. xi+324 pp.
- [17] Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. М.: Наука. 1966. 648 с.

E. V. Murashkin, Yu. N. Radaev

**DIRECT, INVERSE AND MIRROR WAVE MODES OF COUPLED
DISPLACEMENTS AND MICROROTATIONS MONOCHROMATIC PLANE
WAVES IN HEMITROPIC MICROPOLAR MEDIA**

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The paper deals with the propagation of monochromatic plane waves in a hemitropic micropolar continuum. The dynamics equations of a hemitropic micropolar elastic solid in terms of pseudotensors with 9 constitutive pseudoscalars are derived and discussed. Formulae for the cases of space inversion and mirror reflection relative to a given plane are obtained and considered. The simultaneous existence of the direct, inverse and mirror reflected wave modes in propagating plane waves is established. Formulae for direct wave modes of displacements and microrotations in inverse and mirror modes are given.

Keywords: pseudotensor, fundamental orienting pseudoscalar, constitutive pseudoscalar, micropolar hemitropic continuum, wave, wave mode, inverse mode, mirror mode

REFERENCES

- [1] Whitham J. B. Linear and nonlinear waves. Moscow: Mir, 1977. 622 p.
- [2] Brekhovskikh L. M., Goncharov V. V. Introduction to the mechanics of continuous media (in application to the theory of waves). Moscow: Nauka, 1982. 336 p.
- [3] bibitem vesolovski Blend D. Nonlinear dynamic theory of elasticity. Moscow: Mir, 1972. 184 p.
- [3] Besdo D. Ein Beitrag zur nichtlinearen theorie des Cosserat-kontinuums // Acta Mechanica. 1974. V. 20. No 1. P. 105-131.
- [4] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer, 1972. 285 p.
- [5] Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 pp.
- [6] Radaev, Yu.N., The rule of factors in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics, Vestn. Myslf. state tech. un-that. Ser. Phys.-mat. science. 2018. Vol. 22, pp. 504–517. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635>.
- [7] Radaev Yu.N., Murashkin E.V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problems of Strength and Plasticity. 2020. Vol. 82, No. 4, pp. 399–412.
- [8] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // Bulletin of the Samara State Technical University. Series Physics and Mathematics. 2020, V. 24, No 3. P. 424–444.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
Yuri N. Radaev, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

-
- [9] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. Apseudotensor formulation // Bulletin of the Samara State Technical University, Physics and Mathematics Series. 2020. Vol. 24, No. 4, pp. 752–761.
- [10] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: Encyclopedia of Physics. Vol. III / 1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. 226-902 pp. DOI: 10.1007 / 978-3-642-45943-6 _2.
- [11] Gurevich GB Foundations of the theory of algebraic invariants. M., L.: OGIZ, GITTL, 1948. 408 p. [Eng. Trans. G. B. Gurevich, Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen, Noordhoff, 1964. 429 pp.]
- [12] McConnell A.J. Introduction to tensor analysis: with applications to geometry, mechanics and physics. Moscow: Fizmatlit, 1963. 411 p.
- [13] Schouten Ya. A. Tensor analysis for physicists. M.: Science. 1965. – 456 s. [Eng. Trans. Schouten J. A., Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 434 pp.]
- [14] Sokolnikov I. S. Tensor analysis. Theory and applications in geometry and in continuum mechanics. Moscow: Nauka, 1971. 376 p. [Eng. Trans. Sokolnikoff I. S. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley Sons Inc, 1964. 361 pp.]
- [15] Synge J. L. and Schild A. Tensor calculus. New York, Dover Publications Inc., 1978. xi + 324 pp.
- [16] Rosenfeld B.A. Multidimensional spaces. M.: Nauka. 1966. 648 p.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.012

**НЕМИРОВСКИЙ ЮРИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ.
К 85-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ**



Выдающемуся ученому-механику Юрию Владимировичу Немировскому исполнилось 85 лет.

Молодым человеком, сразу после окончания Московского университета в 1959 году Юрий Владимирович переезжает в Новосибирск и приступает к работе в Сибирском отделении РАН, с тех пор его жизнь непрерывно связана с СО РАН.

В настоящее время Юрий Владимирович – главный научный сотрудник лаборатории «Механика быстропротекающих процессов» Института теоретической и прикладной механики СО РАН имени С. А. Христиановича, доктор физико-математических наук, профессор факультета «Прочности летательных конструкций» НГТУ.

Юрию Владимировичу принадлежат более 450 научных работ, опубликованных в отечественных и зарубежных изданиях, в том числе 11 монографий.

Среди его учеников свыше 40 кандидатов и 14 докторов наук.

Если во времена С. П. Тимошенко, В. З. Власова, А. Л. Гольденвейзера теория оболочек рассматривала однородные материалы, то исследования Ю. В. Немировского отвечают современным запросам: это армированные, многослойные анизотропные,

структурно-неоднородные, композитные и другие конструкции, работающие в условиях статического и динамического нагружения, при разнообразных температурных режимах.

Ю. В. Немировскому принадлежат оригинальные результаты по локально-вихревым турбулентным течениям обыкновенных и намагниченных жидкостей и др.

Для работ Ю. В. Немировского характерно широкое использование современной компьютерной и вычислительной техники.

Учитывая непрерывные и все более настойчивые требования по созданию принципиально новых технических систем он в течении всего периода активной научной деятельности много внимания уделяет поиску и развитию задач оптимального и рационального проектирования неупругих композитных конструкций в условиях кратковременной и длительной эксплуатации. Здесь ему принадлежит большое количество новых разработок, которыми он с энтузиазмом и бескорыстно делится с коллегами.

Юрий Владимирович являлся в течении более 10 лет председателем двух докторских диссертационных советов при ИТПМ СО РАН им. С. А. Христиановича по специальностям «Механика деформируемого твердого тела» и «Динамика и прочность машин, приборов и аппаратуры», член редколлегии отечественных и международных журналов и т. д.

Юрий Владимирович – пример беззаветного труженика, продвинувшего своими трудами целую отрасль науки.

Редколлегия и редакция журнала от души поздравляют Юрия Владимировича Немировского с восьмидесятипятилетием, желают ему крепкого здоровья, многих новых творческих успехов.

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Келлер Илья Эрнстович (kie@icmm.ru) – доктор физико-математических наук, доцент, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матвеев Сергей Владимирович (sergio2100@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Матченко Николай Михайлович (ekc_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Минаева Надежда Витальевна (nminaeva@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Миронов Борис Гурьевич (mbg.chspu@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Немировский Юрий Владимирович (nemiryury@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

Орлов Виктор Николаевич (orlowvn@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должна быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала predel21@mail.ru и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки**

на русском и английском языках; сведения о всех авторах на русском и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `predel.sty`. Стиль `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки BibTeX. Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Матвеев С. А.</i> О вкладе профессора Ю. В. Немировского в дорожную науку	3
<i>Володин Г. Т., Кочергин Д. С.</i> Условия гарантированного разрушения и взрывостойкости балочных элементов конструкций при взрыве в воде	7
<i>Немировский Ю. В., Тырымов А. А.</i> О моделировании напряженных состояний в нетронутых слоистых массивах горных пород	14
<i>Сенашов С. И., Гомонова О. В.</i> Законы сохранения для трехмерных уравнений анизотропной упругости	26
<i>Ткачева А. В.</i> Об использовании критерия максимальных приведенных напряжений в температурных задачах плоского деформирования	32
<i>Петров М. В., Михайлов Б. В., Гоник Е. Г.,</i> Устойчивость тонкостенных цилиндрических оболочек при кручении, заполненных сыпучим наполнителем	40
<i>Чернышов А. Д., Горяйнов В. В., Кузнецов С. Ф., Никифорова О. Ю.</i> Трехмерные точные решения уравнения диффузии	48
<i>Мустафаев А. Б.</i> Оптимальная форма отверстия для остановки трещины продольного сдвига	63
<i>Алероев Т. С., Хворова А. Н.</i> Математическая модель идентификации параметра дробной производной и прогнозирования результатов для уравнения движения жидкости в скважине	72
<i>Немировский Ю. В.</i> Рациональное проектирование гибридных полиметаллических конструкций с учетом массовых нагрузок	80
<i>Немировский Ю. В., Тихонов С. В.</i> Продольно-поперечный изгиб многослойных бетонных стержней армированных стальной арматурой под действием массовых сил	94
<i>Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.</i> Об одном псевдотензорном обобщении связывающих двусторонних граничных условий Югонио-Адамара	104
<i>Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.</i> Прямые, инверсные и зеркальные волновые моды связанных волн перемещений и микровращений в гемитропных микрополярных средах	115
Немировский Юрий Владимирович. К 85-летию со дня рождения	128
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА	130
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	133

СОДЕРЖАНИЕ	135
------------------	-----

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2021. № 2 (48)**

Отв. за выпуск: С. В. Тихонов

Технические редакторы: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Компьютерная верстка: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Макет: С. В. Тихонов

Подписано в печать 25.10.2021. Выход в свет 29.10.2021.
Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by L^AT_EX 2_ε. Усл. печ. л. 17,1.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ № 1912

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском центре Чувашского государственного
педагогического университета им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38