

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

**ВЕСТНИК**  
**ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО**  
**УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**  
**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ**  
**Научный журнал**  
**№ 4(50)**

**Учредитель**

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”  
**Основатели серии:** Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,  
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.  
Выходит 4 раза в год

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных  
технологий и массовых коммуникаций  
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,  
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций  
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге “Пресса России” 13109

**Главный редактор:** Б. Г. Миронов

**Ответственный редактор:** Ю. Н. Радаев

**Заместитель ответственного редактора:** Н. М. Матченко, С. В. Тихонов

**Ответственные секретари:** С. В. Матвеев, Е. В. Мурашкин

**Редакционная коллегия:** В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,  
В. В. Глаголев, В. Г. Зубчанинов, Л. А. Игумнов, Р. А. Каюмов, И. Э. Келлер,  
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, Д. С. Лисовенко, Е. В. Ломакин,  
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, Н. В. Минаева, Ю. В. Немировский,  
Р. И. Непершин, В. Н. Орлов, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов,  
А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

**Международный совет:** В. М. Мирсалимов (Азербайджан), А. В. Чигарев (Бе-  
лоруссия)

**Адрес редакции:** 428000, г. Чебоксары, Президентский бульвар, 19А

**Адрес издателя:** 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

**Тел.:** (8352) 22-28-71, доб. 1182

**E-mail:** predel21@mail.ru

**WWW:** <http://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический  
университет им. И. Я. Яковлева, 2021

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

**VESTNIK  
CHUVASHSKOGO GOSUDARSTVENNOGO PEDAGOGICHESKOGO  
UNIVERSITETA IM. I. YA. YAKOVLEVA  
SERIYA: MEKHANIKA PREDEL'NOGO SOSTOYANIYA**

**Scientific journal  
№ 4(50)**

**The Journal founder:** I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University  
**Founders of the series:** D. D. Ivlev, D. M. Klimov, L. A. Maksimova, A. V. Manzhirov,  
B. G. Mironov, G. K. Mikhailov, Yu. N. Radaev, E. I. Shemyakin

Published since March 2007  
Published four times a year

Registered in Federal Service for Supervision of Communications  
Information Technology, and Mass Media "Roskomnadzor"  
(Accreditation Certificate PI No. FS77-58094 d/d 20 May, 2014).

Hard copy of the Journal is available by subscription from the catalogue "Press of Russia"  
(reg. No. 13109).

**Editor-in-chief:** B. G. Mironov

**Executive Editor:** Yu. N. Radayev

**Associate Editor:** N. M. Matchenko, S. V. Tikhonov

**Executive Secretary:** E. V. Murashkin, S. V. Matveev

**Editorial Board:** V. G. Bazhenov, A. A. Burenin, D. V. Georgievskiy,  
V. V. Glagolev, V. G. Zubzhaninov, L. A. Igumnov, R. A. Kayumov, I. E. Keller,  
D. M. Klimov, V. A. Kovalev, L. Yu. Kossovich, D. S. Lisovenko, E. V. Lomakin,  
L. A. Maksimova, A. A. Markin, N. V. Minaeva, Yu. V. Nemorovskii, R. I. Nepershin,  
V. N. Orlov, V. P. Radchenko, A. F. Revuzhenko, S. I. Senashov, A. N. Sporihin,  
A. A. Treshev, A. D. Chernishov, A. I. Khromov, A. I. Shashkin

**International Council:** V. M. Mirsalimov (Azerbaijan), A. V. Chigarev (Belorussia)

**Postal address::** ul. K. Marksa 38, 428000 Cheboksary, Russia

**Phone::** +7 352 22 28 71, ex.ph. 1182

**E-mail::** predel21@mail.ru

**Journal website::** <http://limit21.ru>

Г. Т. Володин, Д. С. Кочергин

## РАЗРУШЕНИЕ ВЗРЫВОМ БАЛОЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ В ВОДЕ

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

**Аннотация.** Представлено решение задачи о гарантированном разрушении балки, свободно лежащей на недеформируемых (идеальных) опорах в воде на глубине  $H$  взрывом неконтактного сферического заряда ВВ, расположенного на заданном расстоянии  $a$  от балки. Учтены эффекты отражения потока возмущений среды от преграды (балки), характеристики ВВ заряда, его расположение относительно балки. Влияние водной среды учитывается введением присоединенной массы воды.

**Ключевые слова:** гарантированное разрушение, подводный взрыв, балочная конструкция, эффекты отражения, присоединенная масса воды

DOI: 10.37972/chgpu.2021.50.4.001

УДК: 531/534

### Постановка задачи.

**Физическая модель (основные допущения).** Рассматривается прямолинейная до деформации балка прямоугольного поперечного сечения, свободно лежащая на недеформируемых (идеальных) опорах. Сферический заряд радиуса  $r_0$  определенного вида ВВ расположен на расстоянии  $a$  от оси балки над произвольной точкой пролета балки. Рассматриваемая балочная конструкция и заряд расположены в воде на глубине  $H$  водоёма. Эффекты сопротивления воды движению балки при взрыве учитываются введением присоединенной массы.

**Математическая модель.** Совместим ось абсцисс прямоугольной декартовой системы координат с осью балки, а начало координат расположим на левом ее конце. Уравнение упругих колебаний балки под действием внешней нагрузки в принятой системе координат при взрыве в воздухе имеет вид [1], [2]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{K_1 b}{m_*} P_2(x) f(t), \quad (1)$$

---

© Володин Г. Т., Кочергин Д. С. 2021

Володин Геннадий Тимофеевич

e-mail: g.volodin@yandex.ru, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Кочергин Денис Сергеевич

e-mail: sir.cod4@yandex.ru, аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Поступила 03.11.2021

где  $w(x, t)$  – прогиб балки,  $P_2(x)$  – давление на балку в момент приложения к ней нагрузки,  $b$  – ширина сечения балки,  $K_1$  – коэффициент формы,  $m_*$  – погонная масса (масса единицы длины) балки,  $f(t)$  – функция времени, учитывающая спад давления. Эту функцию в большинстве случаев, согласно экспериментальным данным, принимают в виде [1]:

$$f(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^n, \quad (2)$$

где  $\tau$  – время действия фазы сжатия ударной волны,  $n$  – показатель степени, обычно принимаемый в интервале (1;3) в зависимости от интенсивности ударной волны;

$$\beta = \sqrt{\frac{EJ}{m_*}} \quad (3)$$

где  $E$  – модуль упругости материала балки,  $J$  – момент инерции ее поперечного сечения.

Для случая взрыва в воде, эффект сопротивления колебаниям балки со стороны воды учитывается введением присоединенной массы  $m_{*1}$  в уравнение движения (1) и соотношение (3). Поэтому в случае взрыва в воде уравнение движения примет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{K_1 b}{m_* + m_{*1}} P_2(x) f(t), \quad (4)$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{EJ}{m_* + m_{*1}}} \quad (5)$$

Рассмотрим поведение балки под действием кратковременно действующего импульса, интенсивность которого по длине балки зависит от положения её сечения  $x$ , т.е.

$$i(x) = KbP_m(x) \int_0^\tau f(t) dt, \quad (6)$$

где  $P_m(x)$  – давление, действующее на элемент  $dx$  балки в точке  $x$  в момент отражения элементарной струйки потока на фронте ударной волны.

В работе [3] найдена формула для  $P_m(x)$ :

$$P_m = P_3 \left( \frac{\rho_2 u_2}{\rho_3 u_3} \right)^2 \frac{a^2}{a^2 + (x_* - x)^2}, \quad (7)$$

где  $x_*$  – проекция заряда на ось балки,  $\rho_2, u_2$  – соответственно плотность и скорость частиц на фронте водной ударной волны,  $a$  – расстояние заряда от оси балки,  $P_3, \rho_3, u_3$  – соответственно давление, плотность, скорость на фронте детонационной волны, при этом [1]:  $u_3 = \frac{D_0}{k_3 + 1}$ ,  $\rho_3 = \frac{k_3 + 1}{k_3} \rho_0$ ,  $P_3 = \frac{\rho_0 D_0^2}{k_3 + 1}$ ; показатель политропы  $k_3$  соответствует виду ВВ заряда,  $D_0, \rho_0$  – соответственно скорость фронта детонационной волны и плотность ВВ заряда. Для удельного импульса получим соотношение

$$i(x) = \left[ P_3 \left( \frac{\rho_2 u_2}{\rho_3 u_3} \right)^2 \frac{a^2}{a^2 + (x_* - x)^2} - P_{01} \right] \vartheta, \quad (8)$$

где  $K$  – коэффициент восстановления при ударе,  $\rho_2$  и  $u_2$  – соответственно плотность и скорость частиц на фронте падающей на балку ударной волны. Постоянная времени  $\vartheta$  входит в соотношение

$$\frac{P - P_{01}}{P_{01}} = \frac{P_m - P_{01}}{P_{01}} \cdot e^{-\frac{t}{\vartheta}} \quad (9)$$

которое соответствует закону изменения давления во времени и является конкретизацией для выражения (2) на случай распространения ударной волны в воде. В формуле (9) величина  $\vartheta$  определяется соотношением [1]

$$\frac{a_{01}\vartheta}{r_0} = 1,4 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{0,24} \quad (10)$$

Так как импульс действует кратковременно, то за время его действия частицы балки не успевают получить заметных смещений, а получают только начальные скорости. Деформирование балки происходит после окончания действия нагрузки, т.е. в период её свободных колебаний, которые описываются однородным уравнением

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (11)$$

Для балки, свободно опертой на идеальные (недеформируемые) опоры, краевые условия для уравнения (11) примут вид:

$$w(0, t) = w(l, t) = 0 \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0, \quad (13)$$

где  $l$  – длина балки.

Условия (12) означают, что концы балки лишены возможности перемещаться по направлению оси  $w$ , а условия (13) означают, что концы балки неспособны воспринимать изгибающего момента.

Начальные условия для уравнения (11) соответствуют характеру действующей нагрузки [1]:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{i_*(x)}{m_* + m_{*1}} \quad (14)$$

В работе [1] получено решение уравнения (11) с краевыми условиями (12) - (13) и начальным условием (14), записанными для аналогичного расположения балки только в воздухе. Используя это решение для случая расположения балки в воде путём введения присоединенной массы воды, запишем искомое решение в виде

$$w(x, t) = \frac{2l}{\pi^2 \beta (m_* + m_{*1})} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \sin \left( j\pi \frac{x}{l} \right) \sin \left( \frac{j^2 \pi^2}{l^2} \beta t \right) S, \quad (15)$$

где

$$S(j) = \int_0^l i_*(\xi) \sin \left( j\pi \frac{\xi}{l} \right) d\xi, i_* = ibK_1 \quad (16)$$

Следовательно,

$$S(j) = bK_1 \vartheta a P_3 \left( \frac{\rho_2 u_2}{\rho_3 u_3} \right)^2 \int_0^l \frac{\sin \left( j\pi \frac{\xi}{l} \right) d\xi}{a^2 + (x_* - \xi)^2} + \frac{P_{01}}{j\pi} (\cos(j\pi) - 1) \quad (17)$$

Найдем теперь условие гарантированного разрушения рассматриваемой балочной конструкции в воде. Воспользуемся соотношением [2], [4]

$$\sigma_{MAX} = \frac{M_{MAX}^*}{W} \geq K_* \mu_3 \delta_* \quad (18)$$

где  $\mu_3$  – коэффициент динамичности материала балки,  $K_*$  – коэффициент однородности на гарантированное разрушение,  $\delta_*$  – нормативное сопротивление материала при изгибе,  $W$  – момент сопротивления балки,  $M_{MAX}^*$  – максимальный изгибающий момент в середине балки.

Формулу для  $M_{MAX}$ , исходя из известного соотношения для малых прогибов [4]

$$M_{MAX} = -EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (19)$$

запишем с учетом выражения (15) для прогибов в виде

$$M_{MAX} = \frac{2EJ}{\beta(m_* + m_{*1})} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \sin\left(\pi j \frac{x}{l}\right) \sin\left(\frac{j^2 \pi^2}{l^2} \beta t\right) S(j) \quad (20)$$

Максимальный изгибающий момент возникает в моменты времени  $t_*$ , которые определяются из соотношения  $\sin\left(\frac{j^2 \pi^2}{l^2} \beta t_*\right) = 1$ . Отсюда следует  $\frac{j^2 \pi^2 \beta t_*}{l^2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , из которого следует

$$t_* = \frac{(2n + 1)l^2}{2j^2 \pi \beta} \quad (21)$$

Наибольшее значение в распределении максимальных прогибов достигается в середине пролёта балки, т.е.

$$M_{MAX}^* = \frac{2EJ}{\beta(m_* + m_{*1})} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \sin \pi j \frac{x}{l} S(j) \Bigg|_{x=\frac{l}{2}}$$

или

$$M_{MAX}^* = \frac{2EJ}{\beta(m_* + m_{*1})} (S(1) - S(3) + S(5) - S(7) + \dots). \quad (22)$$

Подставив выражение  $M_{MAX}^*$  из (22) в соотношение (18), получим

$$\frac{2EJ}{\beta(m_* + m_{*1})W} [S(1) - S(3) + S(5) - S(7) + \dots] \geq K_* \mu_3 \delta_*. \quad (23)$$

Чтобы из соотношения (23) определить массу заряда, необходимого для гарантированного разрушения рассматриваемой балочной конструкции при взрыве в воде, нужно найти параметры на фронте ударной волны. Эти параметры определяются из соотношений для взрыва в воде с привлечением экспериментальных данных. Найденные в работе [4], они соответствуют алгоритму для вычислений

$$\begin{cases} \varepsilon = 1 - \left(\frac{P_2 - P_{01}}{BP_{01}} + 1\right)^{-\frac{1}{n}} \\ D = \sqrt{\frac{P_2 - P_1}{\varepsilon \rho_1}} \\ u_2 = \varepsilon D \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1}{1 - \varepsilon} \end{cases} \quad (24)$$

В представленном алгоритме параметры на фронте ударной волны определяются по известному давлению на фронте. Давление на фронте ударной волны определяется

по экспериментальным зависимостям [4]

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_2 - P_{01}}{P_{01}} &= 14700 \left( \frac{r_0}{r} \right)^{1,13}, & \frac{r}{r_0} > 12 \\ \frac{P_2 - P_{01}}{P_{01}} &= 37000 \left( \frac{r_0}{r} \right)^{\frac{3}{2}}, & 6 < \frac{r}{r_0} < 12 \end{aligned} \right\}, \quad (25)$$

справедливым для сферических зарядов, радиусов  $r_0$  на расстояниях  $r$ . Для соотношений (24) параметры  $B$  и  $n$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} B &= \begin{cases} 2945, & \frac{P_2 - P_{01}}{P_{01}} < 3 \cdot 10^4 \\ 4115, & \frac{P_2 - P_{01}}{P_{01}} \geq 3 \cdot 10^4 \end{cases} \\ n &= \begin{cases} 7, 15, & \frac{P_2 - P_{01}}{P_{01}} < 3 \cdot 10^4 \\ 6, 29, & \frac{P_2 - P_{01}}{P_{01}} \geq 3 \cdot 10^4 \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

при этом  $P_1 = P_{01} + \rho_1 g H$ , где  $P_{01}$  – давление на поверхности водоёма,  $\rho_1$  – плотность воды,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $H$  – глубина погружения балочной конструкции. Учитывая соотношение для массы заряда  $C$

$$C = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \rho_0, \quad (27)$$

где  $\rho_0$  – плотность ВВ, получим формулу для  $r_0$

$$r_0 = \left( \frac{3C}{4\pi\rho_0} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (28)$$

и, следовательно, согласно соотношениям (25), (26), (28), (7) из неравенства (23), определим массу  $C$  заряда ВВ, взрыв которого в воде приводит к её гарантированному разрушению.

Для вычислений выполним предварительные преобразования. Введём следующие обозначения: примем  $r=a$  в формулах (25),

$$\omega(j) = \int_0^l \frac{\sin(j \frac{\pi\xi}{l}) d\xi}{a^2 + (x_* - \xi)^2}, \quad (29)$$

$$y = \frac{r_0}{a}. \quad (30)$$

В этих обозначениях соотношения (25) и (10) примут вид

$$\frac{P_2 - P_{01}}{P_{01}} = 14700 y^{1,18}, \quad \frac{1}{y} > 12, \quad (31)$$

$$\frac{P_2 - P_{01}}{P_{01}} = 37000 y^{1,5}, \quad 6 < \frac{1}{y} < 12, \quad (32)$$

$$\vartheta = 1,4 \frac{a}{a_{01}} y^{0,76}, \quad (33)$$

а неравенство (23) в виде:

$$\frac{2EJbK_1\vartheta}{\beta(m_* + m_{*1})lW} \sum_{j=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}l\right) \left[ P_3 \left( \frac{\rho_2 u_2}{\rho_3 u_3} \right)^2 a^2 \omega(j) + \frac{P_{01}l}{j\pi} (\cos(j\pi - 1)) \right] - K_* \mu_3 \delta_* \geq 0. \quad (34)$$

Неравенство (34) нужно решить относительно  $y$ . Однако, это неравенство является неопределенным относительно величин параметров  $B$  и  $n$ , которые зависят от неизвестного  $y$ . Исходя из соотношений (31) и (32), которые приводят к двум вариантам неравенства (34), построим следующий алгоритм вычислений. Предполагая расположение величины  $y$  в интервале (31), находим решение неравенства (34) через экспериментальные значения давления  $P_2$ , а затем по найденному таким образом значению  $y$  проверяем выбор значений  $B$  и  $n$  по соотношениям (26). Если диапазон выбранных значений  $y$  не соответствует используемым значениям  $B$  и  $n$ , вместо соотношения (31) используем соотношение (32).

**Пример.** В качестве примера рассмотрим определение массы  $C$  заряда тротила, расположенного на расстоянии  $a = 1$  м от стальной балки (материал Сталь3) прямоугольного сечения  $b = 0,1$  м,  $h = 0,1$  м, свободно лежащей на идеальных (недеформируемых) опорах, на глубине  $H = 10$  м от свободной поверхности водоема. Длина балки длиной  $l = 2,5$  м, заряд расположен на расстоянии  $x_* = 1$  от одного из концов пролета балки. Плотность воды  $\rho_1 = 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ , скорость звука в воде  $a_{01} = 1460 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ ,  $T = 288^\circ \text{K}$ ,  $P_{01} = 1,013 \cdot 10^5$  Па, тротил литой, плотность  $\rho_0 = 1620 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ , коэффициент однородности на гарантированное разрушение  $K_* = 1,644$ , нормированный браковочный минимум  $\delta_* = 2,4 \cdot 10^8$ , коэффициент динамичности  $\mu_3 = 2$ , модуль упругости Ст.3:  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па, коэффициент формы  $K_1 = 1$ , коэффициент восстановления при ударе  $K = 1$ , плотность Ст.3:  $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ . Для вычисления присоединенной массы использованы формулы [1], [4]:

$$m_* = bh\rho,$$

$$m_{*1} = \frac{\pi}{4} \rho_1 hb.$$

В результате решения поставленной задачи получим радиус сферического заряда  $y \geq 0,159$  м и массу заряда  $C = 27,301$  кг.

Для формирования заключения изменим некоторые входные параметры и проверим как изменятся радиус и масса сферического заряда. В качестве варьируемых параметров выберем расстояние до заряда  $a$ , глубину погружения  $H$  и длину балки  $l$ .

**Заключение.** Получен алгоритм для расчета радиуса и массы сферического заряда взрывчатого вещества, действие которого гарантированно разрушит балку (балочную конструкцию), расположенную в воде. Обнаружено существенное влияние на результаты расчётов свойств ВВ заряда, его расположения в воде по отношению к преграде (балки), геометрических и механических характеристик балочной конструкции.

**ЛИТЕРАТУРА**

- [1] Саламахин Т. М. Разрушение взрывом элементов конструкций. Москва: ВИА, 1961. 275 с.
- [2] Володин Г. Т. Действие взрыва зарядов конденсированного ВВ в газовой и жидкой средах. Часть 2. Взрывостойкость и гарантированное разрушение элементов конструкций. Тула: Левша, 2005. 160 с.
- [3] Володин Г.Т., Кочергин Д. С. Импульсная нагрузка на неподвижную преграду при взрыве в воде // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 2(48). с. 12–18.
- [4] Беляев Н. М. Сопротивление материалов. Москва: Наука, 1976. 607 с.

*G. T. Volodin, D. S. Kochergin*

**DESTRUCTION OF BEAM STRUCTURES IN WATER BY EXPLOSION**

*Tula State University, Tula, Russia.*

**Abstract.** The solution of the problem of guaranteed destruction of a beam lying freely on non-deformable (ideal) supports in water at a depth  $H$  by an explosion of a non-contact spherical explosive charge located at a given distance  $a$  from the beam is presented. The effects of reflection of the flow of perturbations of the medium from the barrier (beam), the characteristics of the explosive charge, its location relative to the beam are taken into account. The influence of the aquatic environment is taken into account by introducing an attached mass of water.

**Keywords:** guaranteed destruction, underwater explosion, beam structure, reflection effects, attached water mass.

**REFERENCES**

- [1] Salamakhin T. Explosion destruction of structural elements. Moscow: VIA, 1961. 275 p. (in Russian).
- [2] Volodin G. Action of explosion of condensed explosive charges in gas and liquid media. Part 2. Explosion resistance and guaranteed destruction of structural elements. Tula: lefty, 2005. 160 p. (in Russian).
- [3] Volodin G.T., Kochergin D.S. Pulse load on a stationary barrier during an explosion in water. № 2(48). с. 12–18. (in Russian).
- [4] Belyaev N. Resistance of materials. Moscow: Science, 1976. 607 p. (in Russian).

---

*Volodin Gennady Timofeevich*, Doctor of Technical Sciences, Professor, Tula State University, Tula, Russia.

*Kochergin Denis Sergeevich*, postgraduate student, Tula State University, Tula, Russia.

Б. Г. Миронов<sup>1</sup>, А. В. Никитин<sup>2</sup>

## ОБ ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ПЛОСКОСТИ ИЗ АНИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

<sup>1</sup>Российский университет транспорта, г. Москва, Россия

<sup>2</sup>Чебоксарский институт (ф) Московского политехнического университета,  
г. Чебоксары, Россия

**Аннотация.** Рассматривается упругопластическое положение плоскости из анизотропного материала, в котором имеется эллиптическое отверстие. Анизотропия – умение кристалла выражать разнообразные качества в разных направлениях. Присутствие данного качества в простейшем виде выражается только у монокристаллов. У поликристаллов анизотропия тела в основном (макроскопически) способна никак не выражаться из-за беспорядочной ориентировки микрокристаллов, или совершенно никак не проявляется, за исключением специальных случаев. При упорядоченном расположении химических частиц силы взаимодействия между ними и межатомные расстояния оказываются неодинаковыми, именно это и является причиной анизотропии кристаллов. Также это может быть и асимметрия его молекул. Неодинаковость макроскопически проявляется, лишь не симметричностью кристаллической структуры. Актуальность объясняется влиянием анизотропии на напряженно-деформированное состояние различных конструкций и тел.

**Ключевые слова:** отверстие, плоскость, анизотропия, упругопластическое состояние.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.50.4.002

УДК: 539.735

В статье рассматривается задача о трансляционной анизотропии при растяжении бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием (рис. 1). Условие пластичности представлено [1]:

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + (\tau_{xy} - k_3)^2 = k_0^2, \quad k_0, k_1, k_2, k_3 - const, \quad (1)$$

---

© Миронов Б. Г., Никитин А. В., 2021

*Миронов Борис Гурьевич*

**e-mail:** mbg.chspru@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математика и естественные науки», Российский университет транспорта, г. Москва, Россия.

*Никитин Андрей Витальевич*

**e-mail:** ligalas5@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чебоксарский институт (ф) Московского Политехнического университета, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 01.11.2021

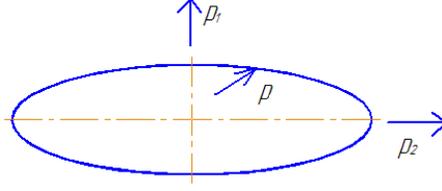


Рис. 1. Бесконечная плоскость с эллиптическим отверстием.

где  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  – компоненты напряжения,  $k_0$  – предел текучести.

Величины имеющие размерность напряжения относятся к пределу текучести  $k_0$  рассматриваются безразмерными. Индекс « $p$ » приписан наверху к компонентам напряжений в пластической зоне индекс, « $e$ » – компонентам в упругой зоне. Условие (1) имеет вид:

$$\left( \frac{\sigma_x^p - \sigma_y^p}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + (\tau_{xy}^p - k_3)^2 = 1 \quad (2)$$

По условию (2), анизотропия показана в прямоугольной системе координат  $x, y$ .

Взаимодействие между напряжениями в прямоугольной системе координат  $x, y$  и в полярной системе координат  $\rho, \theta$  представлена [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (2), (3) в полярных координатах условие пластичности имеет вид:

$$\left( \frac{\sigma_\rho^p + \sigma_\theta^p}{2} \right)^2 + (\tau_{\rho\theta}^p)^2 - 2R \left( \frac{\sigma_\rho^p + \sigma_\theta^p}{2} \right) \cos(2\theta + \mu) - 2\tau_{\rho\theta}^p \sin(2\theta + \mu) + R^2 - 1 = 0, \quad (4)$$

где

$$R = \sqrt{\left( \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + k_3^2}, \quad \frac{k_1 - k_2}{2R} = \cos \mu, \quad \frac{k_3}{2} = \sin \mu.$$

Допустим:

$$k_1 = \delta_1 k'_1, \quad k_2 = \delta_1 k'_2, \quad k_3 = \delta_1 k'_3, \quad (5)$$

Отметим:

$$R = \delta_1 R', \quad R' = \sqrt{\left( \frac{k'_1 - k'_2}{2} \right)^2 + k'_3}. \quad (6)$$

В последующем допустим:  $\delta_1 = g_1 \delta_1$ , и  $0 \leq g_1 \leq 1$

Уравнения равновесия имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Станем рассматривать, что нормальное давление  $p$  действует на контуре отверстия, взаимно перпендикулярными усилиями  $p_1, p_2$  плоскость растягивается на бесконечности.

При переходе системы координат в полярную:

$$\sigma_\rho = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta,$$

в упругой зоне, граничные условия запишем в виде:

$$\sigma_\rho^e|_{\rho=\infty} = q - \delta_2 \cos 2\theta, \quad \sigma_\theta^e|_{\rho=\infty} = q + \delta_2 \cos 2\theta, \quad \tau_{\rho\theta}^e|_{\rho=\infty} = \delta_2 \sin 2\theta,$$

где

$$\delta_2 = \frac{p_1 - p_2}{2}, \quad \delta_2 = g_2 \delta, \quad 0 \leq g_2 \leq 1, \quad q = \frac{p_1 + p_2}{2}$$

Допустим, то что будущее решение находится в зависимости от определенного параметра  $\delta$ , решение будем искать в следующем в виде:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma'_{ij} \delta + \sigma''_{ij} \delta^2 + \dots, \quad \rho_s = \rho_s^{(0)} + \rho'_s \delta + \rho''_s \delta^2 + \dots, \quad (8)$$

где  $\rho_s$  – радиус пластической зоны.

В последующем присвоим всем компонентам индекс « $p$ » в пластической области, а индекс « $e$ » в упругой области. Величины, считаются безразмерными и отнесенными к пределу текучести в нулевом приближении  $k_0$  в том случае если имеют размерность напряжения, а линейные размеры будут считаться безразмерными и отнесенными к радиусу пластической зоны в том же приближении  $\rho_s^{(0)}$ .

Из (4), (7), (8), приобретаем следующее условия сопряжения напряжений на границе раздела пластической и упругой областях и граничных условий [3]:

$$\sigma_\rho^{(0)p} = -p + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad \sigma_\theta^{(0)p} = -p + 2 + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad (9)$$

$$\sigma_\rho^{(0)e} = q - \frac{q + p + 2 \ln \alpha}{\rho^2}, \quad \sigma_\theta^{(0)e} = q + \frac{q + p + 2 \ln \alpha}{\rho^2}. \quad (10)$$

Представляется соотношениями радиус упругопластической зоны в начальном приближении:

$$2 \ln \alpha = -p - q + 1. \quad (11)$$

Из (4) в первоначальном приближении имеет роль:

$$\sigma_\rho^{(I)} - \sigma_\theta^{(I)} = 2R' \cos(2\theta + \mu) \quad (12)$$

Уравнения равновесия предположим:

$$\sigma_p'^p = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta'^p = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}'^p = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right). \quad (13)$$

Из (12), (13) следует:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = -\rho^2 \left[ 2R' \cos(2\theta + \mu) \right]. \quad (14)$$

В первоначальном приближении условия соответственно [2] выглядят:

$$\sigma_\rho^{(I)p}|_{\rho=\alpha} = -2d_1 \cos 2\theta \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p}|_{\rho=\alpha} = -4d_1 \sin 2\theta \quad (15)$$

В пластической зоне решение будет состояться из (13), (14), (15):

$$\begin{aligned}\sigma_p^{(I)p} = \sigma_\theta^{(I)p} &= -R' \left( \frac{\alpha}{\rho} \left( \cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}) \right) - 1 \right) g_1 \cos(2\theta + \mu) - \\ &\quad - \left( \frac{2d_1\alpha}{\rho} \cos 2\theta \right) \left( \cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}) \right) \\ \tau_{p\theta}^{(I)p} &= R' \left( \frac{\alpha}{\rho} \left( \cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}) \right) - 1 \right) g_1 \sin(2\theta + \mu) - \\ &\quad - \left( \frac{4d_1\alpha}{\rho} \sin 2\theta \right) \cos(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha})\end{aligned}\quad (16)$$

Установим напряжения в упругой области в соответствии [4, 5]:

$$\begin{aligned}\sigma_p^{(I)e} &= - \left( 1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} \right) g_2 \cos 2\theta + \\ &+ \left( -\frac{1}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^2} \right) \left( -R' \left[ \alpha \left( \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) - 1 \right] g_1 \cos(2\theta + \mu) - \right. \\ &\quad \left. - (2d_1\alpha \cos 2\theta) \left( \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) \right) \\ &+ \left( \frac{2}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2} \right) \left( R' \left( \alpha \left( \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) - 1 \right) g_1 \cos(2\theta + \mu) - \right. \\ &\quad \left. - (4d_1\alpha \cos 2\theta) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) \\ \sigma_\theta^{(I)e} &= \left( 1 + \frac{3}{\rho^4} \right) g_2 \cos 2\theta + \\ &+ \left( \frac{1}{\rho^4} \right) \left( -R' \left[ \alpha \left( \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) - 1 \right] g_1 \cos(2\theta + \mu) - \right. \\ &\quad \left. - (2d_1\alpha \cos 2\theta) \left( \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) \right) + \\ &+ \left( \frac{-2}{\rho^4} \right) \left( R' \left[ \alpha \left( \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) - 1 \right] g_1 \cos(2\theta + \mu) - \right. \\ &\quad \left. - (4d_1\alpha \cos 2\theta) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) \\ \tau_{p\theta}^{(I)e} &= - \left( -1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} \right) g_2 \sin 2\theta + \\ &+ \left( -\frac{1}{\rho^4} + \frac{1}{\rho^2} \right) \left( -R' \left[ \alpha \left( \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) + 1 \right] g_1 \sin(2\theta + \mu) - \right. \\ &\quad \left. - (2d_1\alpha \cos 2\theta) \left( \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) \right) + \\ &+ \left( \frac{2}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2} \right) \left( R' \left[ \alpha \left( \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) - 1 \right] g_1 \sin(2\theta + \mu) - \right. \\ &\quad \left. - (4d_1\alpha \sin 2\theta) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) \right)\end{aligned}\quad (17)$$

Из (16), (17) составим радиус в первоначальном приближении упругопластической области:

$$\begin{aligned}\rho_s^{(I)} &= \frac{1}{4}(\sigma_\theta^{(I)e} - \sigma_\theta^{(I)p}) = g_2 \cos 2\theta - \\ &- R' \left\{ \frac{\alpha}{2} \left( \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right) - 1 \right\} g_1 \cos(2\theta + \mu) - \\ &- (d_1\alpha \cos 2\theta) \left( \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \right)\end{aligned}\quad (18)$$

Следует, напряженное положение в упругой (17) и пластической (16) определяется, изменением границы пластической зоны (18).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д.Д., Максимова Л. А., Миронов Б.Г. О соотношениях теории трансляционной идеально-пластической анизотропии в случае плоской деформации // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 2. С. 41–43.
- [2] Ивлев Д.Д., Ершов. Л.В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
- [3] Миронов Б. Г., Никитин А. В. Предельное состояние многослойной анизотропной толстостенной трубы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. Т. 4, № 22. с. 58–67.

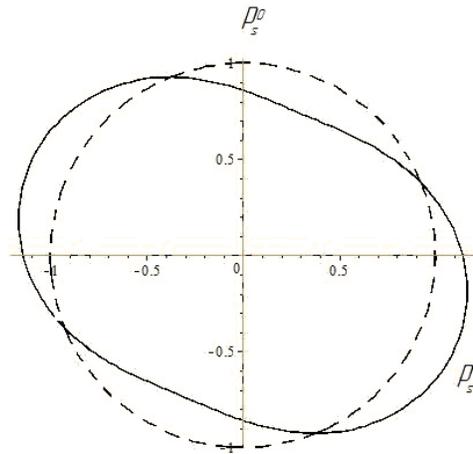


Рис. 2. Радиус раздела упругой и пластической областей.

- [4] Никитин А. В. Предельное состояние неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. Т. 1, № 23. с. 60–70.
- [5] Никитин А. В. Определение деформированного состояния толстостенной линейно-неоднородной трубы при трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. Т. 3, № 17. с. 142–150.

*B. G. Mironov<sup>1</sup>, A. V. Nikitin<sup>2</sup>*

#### DETERMINATION OF THE ELASTIC-PLASTIC STATE OF A PLANE FROM AN ANISOTROPIC MATERIAL WITH AN ELLIPTICAL HOLE

<sup>1</sup>*Russian University of transport, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*Cheboksary Institute (f) of Moscow Polytechnic University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** The elastic-plastic position of a plane made of an anisotropic material in which there is an elliptical hole is considered. Anisotropy is the ability of a crystal to express various qualities in different di-rections. The presence of this quality in its simplest form is expressed only in single crystals. In polycrystals, the anisotropy of the body is mainly (macroscopically) capable of not being expressed in any way due to the disorderly orientation of microcrystals, or does not manifest itself at all, ex-cept in special cases. With an ordered arrangement of chemical particles, the interaction forces be-tween them and the interatomic distances are not the same, and this is the reason for the anisotropy of crystals. It may also be the asymmetry of its molecules. The disparity is macroscopically mani-fested, only not by the symmetry of the crystal structure. The activity is explained by the influence of anisotropy on the stress-strain state of various structures and bodies.

**Keywords:** hole, plane, anisotropy, elastic-plastic state.

---

*Mironov Boris Gurjevich, Dr. of Sci. Phys. & Math., Professor, Russian University of transport, Moscow, Russia.*

**REFERENCES**

- [1] Ivlev D., Maksimova L. A., Mironov B. G. On the relations of the theory of translational ideal-plastic anisotropy in the case of plane deformation // *Izv. RAN. MTT.* 2011. no. 2. P. 41–43.
- [2] Ivlev D., Ershov. L. Perturbation method in the theory of an elastoplastic body. M.: Nauka, 1978. 208 p.
- [3] Mironov B. G., Nikitin A. V. Limit state of multilayer anisotropic thick-walled pipe // *Vestnik of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of Limit State.* 2014. Vol. 4, no. 22. p. 58–67.
- [4] Nikitin A. V. Limit state of an inhomogeneous pipe under the influence of internal pressure // *Vestnik of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of Limit State.* 2015. Vol. 1, no. 23. p. 60–70.
- [5] Nikitin A. V. Determination of the deformed state of a thick-walled linearly inhomogeneous pipe with translational anisotropy // *Vestnik of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of Limit State.* 2013. Vol. 3, no. 17. p. 142–150.

В. И. Гультияев, В. Г. Зубчанинов, А. А. Алексеев, И. А. Саврасов

**ПРОВЕРКА ПОСТУЛАТА ИЗОТРОПИИ ПРИ СЛОЖНОМ  
КИНЕМАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ МАТЕРИАЛА СТАЛЬ 45 ПО  
ТРАЕКТОРИЯМ ДЕФОРМИРОВАНИЯ В ВИДЕ  
ПОЛУОКРУЖНОСТЕЙ**

*Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия*

**Аннотация.** В работе представлены результаты экспериментальной проверки постулата изотропии А.А. Ильюшина при сложном упругопластическом деформировании тонкостенных трубчатых образцов, выполненных из материала сталь 45, по траекториям в виде полуокружностей (жесткое или кинематическое нагружение). Экспериментальные данные получены на автоматизированном расчетно-экспериментальном комплексе СН-ЭВМ. Приводятся и обсуждаются результаты 4 экспериментов, в которых были реализованы траектории деформирования в виде полуокружностей постоянной кривизны 133,3. Экспериментально подтверждается, что для реализованных сложных траекторий постоянной кривизны постулат изотропии выполняется как по скалярным, так и векторным свойствам.

**Ключевые слова:** пластичность, сложное нагружение, постулат изотропии, экспериментальные данные, траектория деформирования, векторные и скалярные свойства материала.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.50.4.003

УДК: 579.3

---

© Гультияев В. И., Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Саврасов И. А., 2021

*Гультияев Вадим Иванович*

**e-mail:** vig0@mail.ru, доктор технических наук, заведующий кафедрой автомобильные дороги, основания и фундаменты, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

*Зубчанинов Владимир Георгиевич*

**e-mail:** vlgzub@gmail.com, доктор технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия,

*Алексеев Андрей Алексеевич*

**e-mail:** alexeew@bk.ru, кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия,

*Саврасов Иван Александрович*

**e-mail:** flam\_47@mail.ru, аспирант кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Поступила 08.11.2021

Некоторые элементы конструкций и машин работают в условиях сложного (непропорционального) нагружения и деформирования, и допускают в своей работе ограниченные пластические деформации. Поэтому исследования закономерностей упругопластического деформирования конструкционных материалов при сложном нагружении и деформировании является важной и актуальной проблемой теории пластичности и экспериментальной механики. Результаты большого количества экспериментальных исследований при сложном нагружении материалов и варианты математических моделей теории пластичности частично представлены в работах [1-10]. Одно из основных положений теории пластичности – постулат изотропии А.А. Ильюшина [1, 2]. Постулат изотропии утверждает инвариантность связи векторов напряжений и деформаций относительно преобразований вращения и отражения в линейных координатных евклидовых пятимерных пространствах. Его сущность состоит в том, что при ортогональных преобразованиях вращения и отражения траекторий в векторном девиаторном пространстве с базисом А.А. Ильюшина образ процесса деформирования либо нагружения сохраняется, т.е. сохраняются скалярные и векторные свойства конструкционных материалов. Постулат изотропии был экспериментально проверен для различных конструкционных материалов на разных траекториях деформирования и нагружения [11-17]. Особый интерес при проверке постулата изотропии представляют траектории деформирования, на которых сложное (непропорциональное) нагружение реализуется с самого начала траектории.

В работе [17] отмечается, что ортогональные нагружения могут вносить некоторые поправки в зависимость между напряжениями и деформациями при пластическом деформировании. Поэтому, основной задачей в данной работе, является проверка постулата изотропии А.А. Ильюшина на криволинейных траекториях постоянной кривизны в виде полуокружностей с радиусом 0,75 %, получаемых при ортогональных преобразованиях вращения исходной траектории.

Испытания тонкостенных трубчатых образцов из стали 45 проводились на автоматизированном комплексе СН-ЭВМ (рис. 1) в лаборатории механических испытаний кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета. На рисунке 1 представлен общий вид испытательного комплекса СН-ЭВМ.

Тонкостенные цилиндрические оболочки имели длину рабочей части  $l = 110$  мм, толщину стенки  $h = 1$  мм и радиус срединной поверхности  $r = 15,5$  мм. При обработке результатов экспериментальных данных для определения компонент  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) тензоров деформаций и напряжений использовались формулы [3]

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta l}{l}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\Delta r}{R}, \quad \varepsilon_{12} = \varphi \frac{r}{2l}, \quad \varepsilon_{33} = -(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \frac{\sigma_0}{K}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{3K}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\mu)}, \quad (1)$$

$$\sigma_{11} = \frac{P}{2\pi r h}, \quad \sigma_{22} = p \frac{r}{h}, \quad \sigma_{12} = \frac{M}{2\pi r^2 h}, \quad \sigma_{33} \approx 0, \quad \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

Здесь  $\Delta l$  – абсолютное удлинение рабочей части образца,  $\varphi$  – угол взаимного закручивания поперечных сечений,  $\Delta r$  – изменение радиуса срединной поверхности образца,  $\sigma_0$  – среднее напряжение,  $\varepsilon_0$  – средняя деформация,  $K$  – объемный модуль упругости,  $\mu$  – коэффициент поперечной деформации Пуассона,  $E$  – модуль Юнга,  $P$  – осевая сила,  $p$  – внутреннее давление,  $M$  – крутящий момент. Для стали 45 принято  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu = 0.3$ . Считалось, что  $\sigma_{33} = \sigma_{32} = \sigma_{31} = 0$ ,  $\varepsilon_{32} = \varepsilon_{31} = 0$ , то есть напряженное состояние в точках образцов полагалось однородным плоским, так как толщина стенки образцов намного меньше радиуса срединной поверхности  $h \ll r$ . При обработке экспериментальных данных использовалось условие



Рис. 1. Испытательный комплекс СН-ЭВМ.

несжимаемости материала, то есть равенство нулю объемной и средней деформации  $\varepsilon_0 = 0$ , так как с появлением пластических деформаций коэффициент поперечной деформации быстро возрастал и был близок к значению  $\mu_p = 0,5$ . В экспериментах при простых нагружениях (растяжение, сжатие, кручение, пропорциональное сжатие с кручением) на образцах из той же партии было установлено, что материал образцов с достаточной степенью был начально изотропным.

Реализованные экспериментальные исследования базируются на векторном представлении напряжений и деформаций в рамках теории упругопластических процессов по А.А. Ильюшину [1-3], где девиаторам напряжений и деформаций ставятся в соответствие векторы напряжений и деформаций формоизменения

$$\bar{\sigma} = S_k \hat{i}_k, \quad \bar{\varepsilon} = \mathcal{E}_k \hat{i}_k \quad (k = 1, 2, 3), \quad (2)$$

где  $\hat{i}_k$  – единичные векторы базиса А.А. Ильюшина. Координаты векторов напряжений и деформаций  $S_k, \mathcal{E}_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) в девиаторном трехмерном пространстве А.А. Ильюшина, определяются по формулам:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} S_{11} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ \sigma_{11} - \frac{1}{2} (\sigma_{22} + \sigma_{33}) \right], \\ S_2 &= \sqrt{2} \left( S_{22} + \frac{1}{2} S_{11} \right) = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{\sqrt{2}}, \quad S_3 = \sqrt{2} S_{12} = \sqrt{2} \sigma_{12}, \\ \mathcal{E}_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \mathcal{E}_{11} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_0), \quad \mathcal{E}_2 = \sqrt{2} \left( \mathcal{E}_{22} + \frac{1}{2} \mathcal{E}_{11} \right) = \frac{\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}}{\sqrt{2}}, \\ &\quad \mathcal{E}_3 = \sqrt{2} \mathcal{E}_{12} = \sqrt{2} \varepsilon_{12}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0, \quad \mathcal{E}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0 \quad (4)$$

– компоненты девиаторов напряжений и деформаций соответственно,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Модули векторов напряжений и деформаций и равные им модули девиаторов напряжений и деформаций определяются соотношениями

$$\sigma = \sqrt{S_{ij}S_{ij}} = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}, \quad \vartheta = \sqrt{\vartheta_{ij}\vartheta_{ij}} = \sqrt{\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2}. \quad (5)$$

Программы деформирования реализовывались в девиаторной плоскости  $\vartheta_1 - \vartheta_3$  (жесткое или кинематическое нагружение) при одновременном комбинированном действии на образец растяжения-сжатия и кручения. Координата вектора деформаций  $\vartheta_1$  отвечает нагружению образца осевой силой, а координата  $\vartheta_3$  – нагружению образца крутящим моментом. Исходная траектория (траектория 1) деформирования представляет собой полуокружность радиуса  $R = 0,75\%$ , начинающуюся из начала координат, где координаты центра полуокружности  $\vartheta_1^0 = 0, \quad \vartheta_3^0 = 0,75\%$ , а кривизна траектории равна  $\kappa = 133,3$ . В процессе деформирования по данной траектории значение  $\vartheta_1$  непропорционально возрастает до  $1,5\%$  (растяжение), а значение  $\vartheta_3$  (кручение) сначала непропорционально возрастает до  $0,75\%$ , а затем, после четверти окружности, убывает до нуля. Ортогональные преобразования траектории 1 осуществлялось её вращением по ходу часовой стрелки на  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  и  $270^\circ$  (траектории деформирования 2, 3 и 4 соответственно). Все четыре реализованные программы экспериментов показаны на рис. 2.

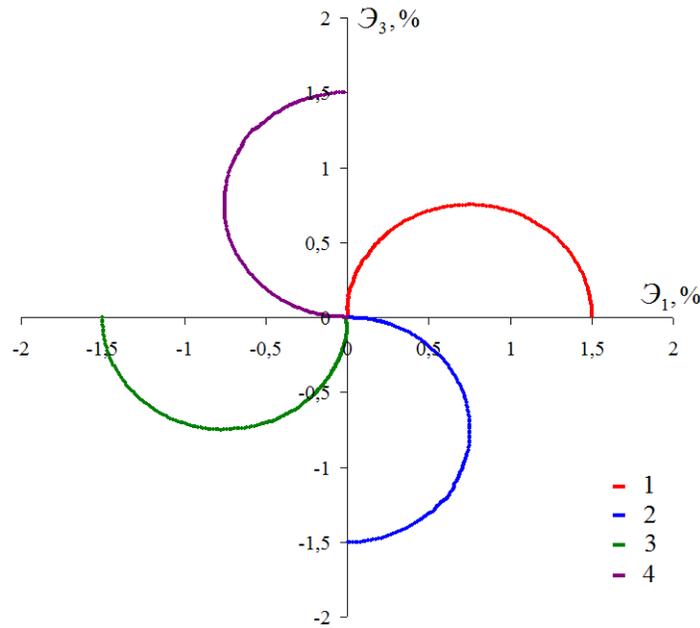


Рис. 2. Программы эксперимента в плоскости  $\vartheta_1$ - $\vartheta_3$

На рисунках 3-7 представлены совмещенные результаты испытаний тонкостенных трубчатых образцов по программам 1, 2, 3, 4. На рисунке 3 представлены отклики на реализованные траектории деформирования по напряжениям на плоскости  $S_1 - S_3$ , то есть траектории напряжений. По экспериментальным данным видно, что траектории напряжений также ортогональны друг другу.

В теории упругопластических процессов А.А. Ильюшина связь между напряжениями и деформациями определяется скалярными и векторными свойствами материалов. Скалярные свойства материала характеризуют диаграммы деформирования  $\sigma - s$ , где  $s$  – длина дуги траектории деформирования. На рис. 4 представлены совмещенные  $\sigma - s$  диаграммы для всех четырех экспериментов. Видно, что экспериментальные данные для всех траекторий на рис. 4 практически совпадают, значит можно сделать вывод о том, что для данной серии испытаний постулат изотропии по скалярным свойствам выполняется.

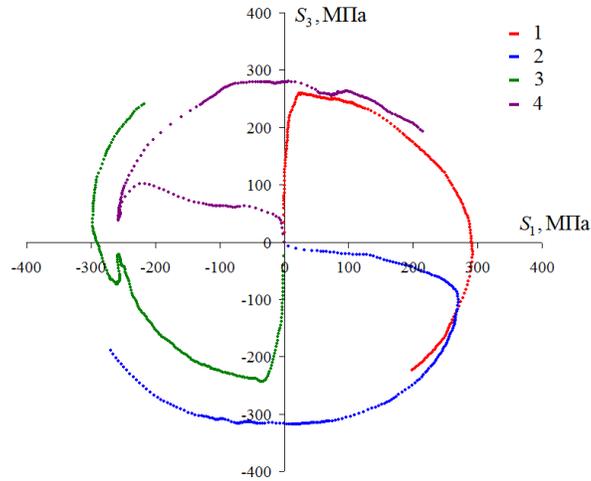


Рис. 3. Траектории напряжений на плоскости  $S_1 - S_3$

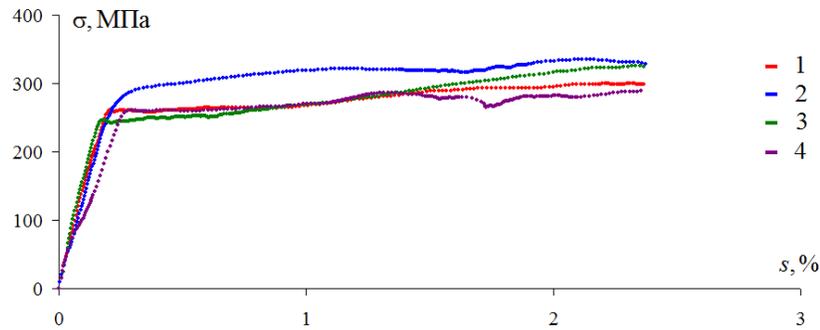


Рис. 4. Глобальная диаграмма деформирования  $\sigma - s$

На рис. 5, 6 приведены локальные диаграммы деформирования растяжения-сжатия по компонентам  $S_1 - \mathcal{E}_1$  и чистого сдвига по компонентам  $S_3 - \mathcal{E}_3$  соответственно. Из них видно, что диаграммы для траекторий 1 и 3, а так же 2 и 4 являются кососимметричными.

На рис. 7 представлены диаграммы  $\vartheta_1 - s$ , характеризующие векторные свойства материала, где  $\vartheta_1$  – угол между вектором напряжений  $\bar{\sigma}$  и касательной к траектории

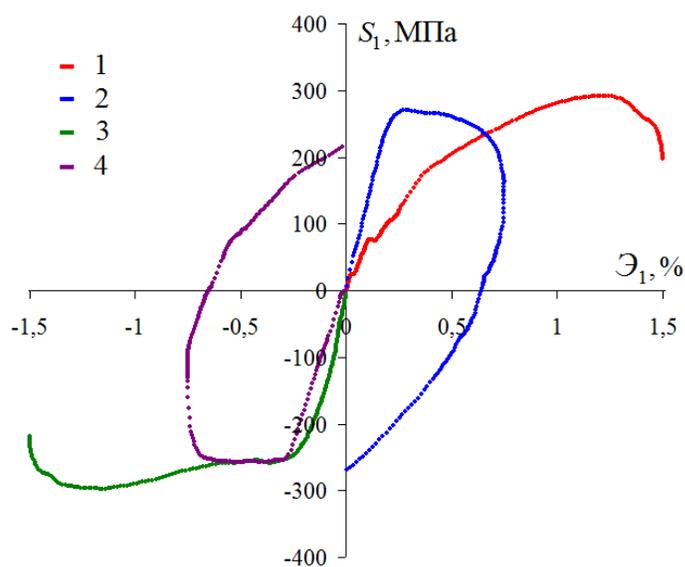


Рис. 5. Локальная диаграмма деформирования  $S_1 - \epsilon_1$ .

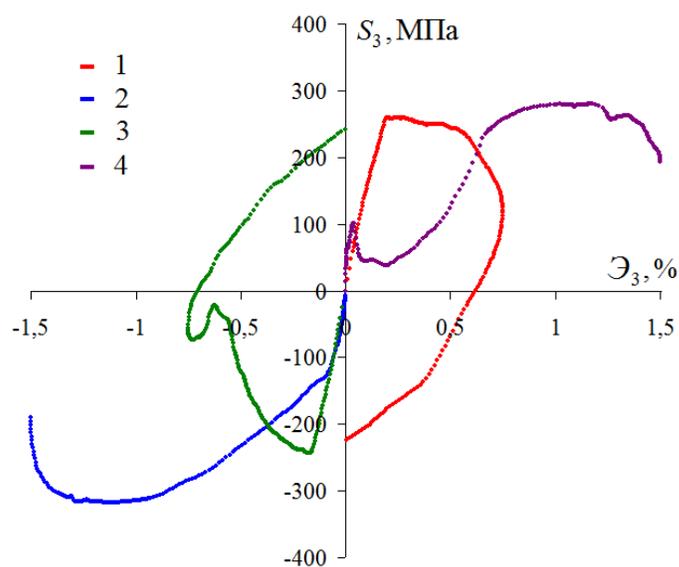


Рис. 6. Локальная диаграмма деформирования  $S_3 - \epsilon_3$ .

деформирования в каждой ее точке. Этот называется углом сближения, и он отражает влияние векторных свойств материала на процесс деформирования. При обработке экспериментальных данных для определения  $\vartheta_1$  использовалось выражение

$$\cos \vartheta_1 = \frac{1}{\sigma} \left( S_1 \frac{(\epsilon_3 - \epsilon_3^0)}{R} - S_3 \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_1^0)}{R} \right), \quad (6)$$

где  $\vartheta_1^0, \vartheta_3^0$  – координаты центров полуокружностей.

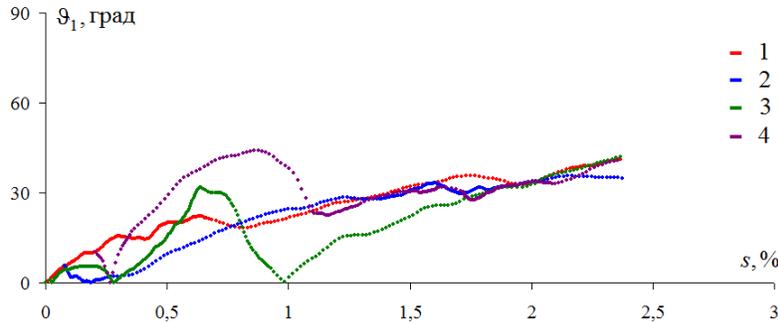


Рис. 7. Диаграмма  $\vartheta_1 - s$ .

Экспериментально установлено [3], что при деформировании по окружным траекториям наступает стационарный режим деформирования с практически постоянным значением угла сближения  $\vartheta_1^* \approx \text{const}$ . Это что также подтверждается в данной серии экспериментов, причем после стабилизации  $\vartheta_1^* \approx 30^\circ$ . Так как в данных опытах углы сближения  $\vartheta_1 < 90^\circ$ , то процессы деформирования по всем четырем траекториям были активными, без сложных разгрузок. На начальном этапе деформирования (при  $\Delta s < 1,5\%$ ) видно некоторое различие на диаграммах на рис. 7. Однако при стабилизации процесса деформирования ( $\Delta s > 1,5\%$ ) видно, что все диаграммы на рис. 7 близки друг к другу, значит можно сделать вывод о том, что для данной серии экспериментов постулат изотропии выполняется и по векторным свойствам.

**Заключение.** Рассмотрена серия из четырех экспериментов, проведенных на автоматизированном экспериментальном комплексе СЧ-ЭВМ, по упругопластическому деформированию материала сталь 45 по ортогональным криволинейным траекториям деформирования в виде полуокружностей со смещенным центром, выходящих из начала координат. Исследованы скалярные и векторные свойства материала сталь 45. Установлено, что для реализованных сложных траекторий постоянной кривизны постулат изотропии выполняется достаточно точно, как по скалярным, так и по векторным свойствам материала. Результаты серии экспериментов могут быть полезны при разработке и верификации математических моделей теории пластичности, оценке ресурса и надежности элементов конструкций.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1971. 310 с.
- [2] Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 273 с.
- [3] Зубчанинов В. Г. Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. 352 с.
- [4] Зубчанинов В. Г. Общая математическая теория пластичности и постулаты макроскопической определенности и изотропии А.А. Ильюшина // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2018. № 5. С. 29-46.
- [5] Аннин Б. Д., Жигалкин В. М. Поведение материалов в условиях сложного нагружения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 342 с.
- [6] Митенков Ф. М., Волков И. А., Игумнов Л. А., Коротких Ю. Г. и др. Прикладная теория пластичности. М.: Физматлит, 2015. 284 с.
- [7] Bondar V. S. Inelasticity. Variants of the theory. New York: Begell House, 2013.

- [8] Пелешко В. А. Прикладной и инженерный варианты теории упругопластических процессов активного сложного нагружения. Часть 2: Идентификация и верификация // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 1. С. 110-135.
- [9] Молодцов И. Н. Прикладные вопросы теории упругопластических процессов А. А. Ильюшина // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. № 5. 2020. С. 33-38
- [10] Алексеев А. А. Моделирование процесса упругопластического деформирования стали 45 по траекториям типа спирали Архимеда. Вычислительная механика сплошных сред. Том 14 (1). 2021. С 102-109.
- [11] Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Гультияев В. И. О построении поверхности текучести стали 45 и проверке постулата изотропии на прямолинейных траекториях при многократных знакопеременных нагружениях // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2014. № 3. С. 71–88.
- [12] Ленский В. С. Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций // Вопросы теории пластичности. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 58–82.
- [13] Васин Р. А., Никиточкин А. Н., Огибалов П. М. О проверке постулата изотропии при переменной скорости деформирования // Механика полимеров. 1975. № 2. С. 224-227.
- [14] Шевченко Ю. Н., Терехов Р. Г. Исследование закономерностей термовязкопластического деформирования твердого тела при неизотермических сложных процессах нагружения. Ч. 1 // Прикладная механика. 2001. Т. 37. № 3. С. 3–34.
- [15] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Alekseeva E. G., Gultiaev V. I. Experimental verification of postulate of isotropy and mathematical modeling of elastoplastic deformation processes following the complex angled nonanalytic trajectories // Materials Physics and Mechanics. 2017. № 32(3). P. 298–304.
- [16] Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Алексеева Е. Г. Проверка постулата изотропии и численное моделирование процессов деформирования материалов на сложных гладких траекториях // Materials Physics and Mechanics. 2016. Т. 29. № 2. С. 150-157.
- [17] Зубчанинов В. Г., Гультияев В. И. О проверке постулата изотропии в теории процессов сложного пластического деформирования // Проблемы прочности и пластичности. 2008. № 70. С. 18–23.

*V. I. Gultiaev, V. G. Zubchaninov, A. A. Alekseev, I. A. Savrasov*

### VERIFICATION OF ISOTROPY POSTULATE UNDER COMPLEX KINEMATIC LOADING OF STEEL 45 ALONG THE STRAIN TRAJECTORIES AS SEMICIRCLES

*Tver State Technical University, Tver, Russia*

**Abstract.** The paper presents the results of experimental verification of A.A. Ilyushin’s postulate of isotropy at complex elastoplastic deformation of thin-walled tubular specimens of steel 45, along the trajectories in the form of semicircles (rigid or kinematic loading). Experimental data have been obtained on the automated testing machine SN-EVM. The results of 4 experiments in which strain trajectories in the form of semicircles of constant curvature 133.3 were realized are presented and discussed. It is experimentally confirmed that for the realized complex trajectories of constant curvature the isotropy postulate is fulfilled both in scalar and vector properties.

**Keywords:** plasticity, complex loading, isotropy is postulate, experimental data, strain trajectory, vector and scalar material properties.

---

*Gulyiaev, Vadim Ivanovich*, Doctor of technical sciences, Head of Department of Automobile roads, bases and foundations, Tver State Technical University, Tver, Russia.

*Zubchaninov, Vladimir Georgievich*, Doctor of technical sciences, Professor, Department of Strength of materials, theory of elasticity and plasticity, Tver State Technical University, Tver, Russia,

## REFERENCES

- [1] Ilyushin A. A. Continuum Mechanics. Moscow: MSU Publishing House, 1990. – 310 p.
- [2] Ilyushin A. A. Plasticity: Fundamentals of the general mathematical theory. Moscow: Izd-vo AN USSR, 1963. 273 p.
- [3] Zubchaninov V. G. Mechanics of processes of plastic environments. Moscow: Fizmatlit, 2010. 352 p.
- [4] Zubchaninov V. G. The General Mathematical Theory of Plasticity and the Il'yushin Postulates of Macroscopic Definability and Isotropy // Moscow University Mechanics Bulletin. 2018. Vol. 73. Issue 5. pp. 101–116.
- [5] Annin B. D., Zhigalkin V. M. Material Behavior under Conditions of Complex Loading. Novosibirsk: Izdat. SO RAN, 1999. 342 p.
- [6] Mitenkov F. M., Volkov I. A., Igumnov L. A., Kaplienko A. V., Korotkikh Yu. G., Panov V. A. Applied theory of plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2015. 284 p.
- [7] Bondar V. S. Inelasticity. Variants of the theory. New York: Begell House, 2013.
- [8] Peleshko V.A. Applied and engineering versions of the theory of elastoplastic processes of active complex loading part 2: Identification and verification // Mechanics of Solids. 2016. Vol. 51. Issue 1. pp 91–113.
- [9] Molodtsov, I.N. Applied questions of Il'yushin theory of elastoplastic processes // Moscow University Mathematics Bulletin. Ser. Mat. Mekh. 2020. No 5. pp. 33–38
- [10] Alekseev A. A. Modeling of elastoplastic deformation of steel 45 along Archimedes spiral type trajectories // Computational Continuum Mechanics. 2021. Vol. 14(1). pp. 102-109.
- [11] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Gultyaev V. I. About drawing of the yield surface for steel 45 and verification of the postulate of isotropy on straight-line paths during repeated sign-variable loadings // PNRPU Mechanics Bulletin. 2014. No 3. P. 71–88.
- [12] Lenskii V. S. Experimental verification of the basic postulates from the general theory of elastic-plastic deformations,"in: Problems in Plasticity Theory [in Russian]. Moscow: Publ.house AN SSSR, 1961. pp. 58–82.
- [13] Vasin R. A., Nikitovich A. N., Ogibalov P. M. Verification of the postulate of isotropy during variable rate deformation // Polymer Mechanics. 1975. No 2. P. 224-227.
- [14] Shevchenko Yu. N., Terekhov R. G. Studying the laws of the thermoviscoplastic deformation of a solid under nonisothermal complex loading. International Applied Mechanics. 2001. No 37(3). pp. 287–316.
- [15] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Alekseeva E. G., Gultiaev V. I. Experimental verification of postulate of isotropy and mathematical modeling of elastoplastic deformation processes following the complex angled nonanalytic trajectories // Materials Physics and Mechanics. 2017. No 32(3). P. 298–304.
- [16] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Alekseeva E. G. Verification of the postulate of the isotropy and numerical simulation of the deformation of materials on a complex smooth trajectories // Materials Physics and Mechanics. 2016. No 29(2). pp. 150–157.
- [17] Zubchaninov V. G., Gultiaev V. I. On the verification of the postulate of isotropy in theory of complex plastic deformation processes // Problems of strength and plasticity. 2008. No 70. pp. 18–23.

---

*Alekseev, Andrey Alekseevich*, Ph.D. (Technical Sciences), Associate Professor, Department of Strength of Materials, Theory of Elasticity and Plasticity, Tver State Technical University, Tver, Russia,

*Savrasov, Ivan Alexandrovich*, Postgraduate Student of the Department of Strength of Materials, Theory of Elasticity and Plasticity, Tver State Technical University, Tver, Russia.

Ш. Т. Нгуен

## НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ УПРУГОСТИ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

**Аннотация.** Рассмотрен вариант нелинейных определяющих соотношений для упругого ортотропного материала. Для описания зависимостей деформаций от напряжений второго и третьего порядков используется по 9 дополнительных параметров. Предложена система двумерных экспериментов на пластинчатых образцах, позволяющая определить все константы нелинейных моделей. Числовые значения параметров двух моделей найдены по известным экспериментальным данным. Сравнение результатов моделирования показывает, что модель третьего порядка более соответствует данным экспериментов, чем модель второго порядка.

**Ключевые слова:** нелинейные определяющие соотношения, ортотропные материалы, идентификация, композиты.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.50.4.004

УДК: 539.3

**Введение.** Современные материалы проявляют нелинейное механическое поведение в упругой области даже при малых деформациях [1–3] и при этом обладают выраженной анизотропией свойств. Поэтому разработка обоснованных моделей нелинейной упругости для анизотропных материалов, их идентификация и верификация в экспериментах являются актуальными. В работах [4–6] на основе потенциала Гиббса построены нелинейные модели второго и третьего порядков, описывающие упругое поведение ортотропного материала. Целью работы является разработка системы экспериментов для определения числовых значений параметров указанных моделей, а также нахождение этих значений по известным экспериментальным данным [1]. Эти данные получены в результате двумерных опытов с пластинами из композиционного материала. В статье [4] предложена модель ламинированного композита в форме пластины из анизотропного материала.

**Основные соотношения модели.** Для описания деформированного состояния используем тензор деформаций Коши–Грина  $\epsilon$ . Напряжённое состояние описывается тензором истинных напряжений  $\mathbf{S}$ . В работах [4, 6] был получен вариант определяющих соотношений для описания нелинейного упругого поведения ортотропного

---

© Нгуен Ш. Т., 2021

Нгуен Ши Тоан

e-mail: sytoantula@gmail.com,

аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Поступила 01.11.2021

материала на основе конкретизации потенциала Гиббса для обратимых процессов изотермического деформирования таких материалов:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= A_{1111}S_{11} + A_{1122}S_{22} + A_{1133}S_{33} + \\
&+ B_{1111}S_{11}^2 + B_{1122}S_{22}^2 + B_{1133}S_{33}^2 + B_{1112}S_{11}S_{22} + B_{1113}S_{11}S_{33} + B_{1123}S_{22}S_{33} + \\
&+ C_{1111}S_{11}^3 + C_{1112}S_{11}^2S_{22} + C_{1113}S_{11}^2S_{33} + C_{1122}S_{11}S_{22}^2 + C_{1133}S_{11}S_{33}^2 + \\
&+ C_{1123}S_{11}S_{22}S_{33} + C_{1222}S_{22}^3 + C_{1223}S_{22}^2S_{33} + C_{1233}S_{22}S_{33}^2 + C_{1333}S_{33}^3, \\
\varepsilon_{22} &= A_{2211}S_{11} + A_{2222}S_{22} + A_{2233}S_{33} + \\
&+ B_{2211}S_{11}^2 + B_{2222}S_{22}^2 + B_{2233}S_{33}^2 + B_{2212}S_{11}S_{22} + B_{2213}S_{11}S_{33} + B_{2223}S_{22}S_{33} + \\
&+ C_{2111}S_{11}^3 + C_{2112}S_{11}^2S_{22} + C_{2113}S_{11}^2S_{33} + C_{2122}S_{11}S_{22}^2 + C_{2133}S_{11}S_{33}^2 + \\
&+ C_{2123}S_{11}S_{22}S_{33} + C_{2222}S_{22}^3 + C_{2223}S_{22}^2S_{33} + C_{2233}S_{22}S_{33}^2 + C_{2333}S_{33}^3, \\
\varepsilon_{33} &= A_{3311}S_{11} + A_{3322}S_{22} + A_{3333}S_{33} + \\
&+ B_{3311}S_{11}^2 + B_{3322}S_{22}^2 + B_{3333}S_{33}^2 + B_{3312}S_{11}S_{22} + B_{3313}S_{11}S_{33} + B_{3323}S_{22}S_{33} + \\
&+ C_{3111}S_{11}^3 + C_{3112}S_{11}^2S_{22} + C_{3113}S_{11}^2S_{33} + C_{3122}S_{11}S_{22}^2 + C_{3133}S_{11}S_{33}^2 + \\
&+ C_{3123}S_{11}S_{22}S_{33} + C_{3222}S_{22}^3 + C_{3223}S_{22}^2S_{33} + C_{3233}S_{22}S_{33}^2 + C_{3333}S_{33}^3, \\
\varepsilon_{12} &= 2 \left( D_0^{(1)} + \frac{3}{2}D_1^{(1)} |S_{12}| + 2D_2^{(1)}S_{12}^2 \right) S_{12}, \quad \varepsilon_{23} = 2 \left( D_0^{(2)} + \frac{3}{2}D_1^{(2)} |S_{23}| + 2D_2^{(2)}S_{23}^2 \right) S_{23}, \\
\varepsilon_{31} &= 2 \left( D_0^{(3)} + \frac{3}{2}D_1^{(3)} |S_{31}| + 2D_2^{(3)}S_{31}^2 \right) S_{31}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Определяющие соотношения (1) являются моделью упругости третьего порядка для ортотропного материала и содержат константы первого порядка  $A_{ijkl}$  и  $D_0^{(i)}$ , константы второго порядка  $B_{ijkl}$ ,  $D_1^{(i)}$  и третьего порядка  $C_{ijkl}$ ,  $D_2^{(i)}$ . Если параметры второго и третьего порядков  $B_{ijkl}$ ,  $C_{ijkl}$ ,  $D_1^{(i)}$ ,  $D_2^{(i)}$  считать равными нулю, то соотношения (1) будут выражениями обобщённого закона Гука.

Компоненты тензора деформаций должны удовлетворять условиям существования потенциала Гиббса

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial S_{22}} = \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial S_{11}}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial S_{33}} = \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial S_{11}}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial S_{33}} = \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial S_{22}}. \tag{2}$$

Условия (2) приводят к соотношениям между параметрами модели:

$$\begin{aligned}
A_{1122} &= A_{2211}, \quad A_{1133} = A_{3311}, \quad A_{2233} = A_{3322}, \\
B_{2212} &= 2B_{1122}, \quad B_{1112} = 2B_{2211}, \quad B_{1123} = B_{2213}, \\
B_{3313} &= 2B_{1133}, \quad B_{1113} = 2B_{3311}, \quad B_{1123} = B_{3312}, \\
B_{3323} &= 2B_{2233}, \quad B_{2223} = 2B_{3322}, \quad B_{2213} = B_{3312}, \\
C_{1112} &= 3C_{2111}, \quad C_{1122} = C_{2112}, \quad C_{2122} = 3C_{1222}, \quad C_{1113} = 3C_{3111}, \\
C_{1133} &= C_{3113}, \quad C_{3133} = 3C_{1333}, \quad C_{2223} = 3C_{3222}, \quad C_{2233} = C_{3223}, \quad C_{3233} = 3C_{2333}, \\
C_{1123} &= 2C_{2113} = 2C_{3112}, \quad C_{2123} = 2C_{1223} = 2C_{3122}, \quad C_{3123} = 2C_{1233} = 2C_{2133}.
\end{aligned} \tag{3}$$

С учётом равенств (3) определяющие соотношения (1) принимают вид

$$\varepsilon_{11} = A_{1111}S_{11} + A_{1122}S_{22} + A_{1133}S_{33} +$$

$$\begin{aligned}
 & +B_{1111}S_{11}^2 + B_{1122}S_{22}^2 + B_{1133}S_{33}^2 + 2B_{2211}S_{11}S_{22} + 2B_{3311}S_{11}S_{33} + B_{1123}S_{22}S_{33} + \\
 & +C_{1111}S_{11}^3 + 3C_{2111}S_{11}^2S_{22} + 3C_{3111}S_{11}^2S_{33} + C_{1122}S_{11}S_{22}^2 + C_{1133}S_{11}S_{33}^2 + \\
 & +2C_{2113}S_{11}S_{22}S_{33} + C_{1222}S_{22}^3 + C_{1223}S_{22}^2S_{33} + C_{1233}S_{22}S_{33}^2 + C_{1333}S_{33}^3, \\
 \varepsilon_{22} & = A_{1122}S_{11} + A_{2222}S_{22} + A_{2233}S_{33} + \\
 & +B_{2211}S_{11}^2 + B_{2222}S_{22}^2 + B_{2233}S_{33}^2 + 2B_{1122}S_{11}S_{22} + B_{1123}S_{11}S_{33} + 2B_{3322}S_{22}S_{33} + \\
 & +C_{2111}S_{11}^3 + C_{1122}S_{11}^2S_{22} + C_{2113}S_{11}^2S_{33} + 3C_{1222}S_{11}S_{22}^2 + C_{1233}S_{11}S_{33}^2 + \\
 & +2C_{1223}S_{11}S_{22}S_{33} + C_{2222}S_{22}^3 + 3C_{3222}S_{22}^2S_{33} + C_{2233}S_{22}S_{33}^2 + C_{2333}S_{33}^3, \\
 \varepsilon_{33} & = A_{1133}S_{11} + A_{2233}S_{22} + A_{3333}S_{33} + \tag{4} \\
 & +B_{3311}S_{11}^2 + B_{3322}S_{22}^2 + B_{3333}S_{33}^2 + B_{1123}S_{11}S_{22} + 2B_{1133}S_{11}S_{33} + 2B_{2233}S_{22}S_{33} + \\
 & +C_{3111}S_{11}^3 + C_{2113}S_{11}^2S_{22} + C_{1133}S_{11}^2S_{33} + C_{1223}S_{11}S_{22}^2 + 3C_{1333}S_{11}S_{33}^2 + \\
 & +2C_{1233}S_{11}S_{22}S_{33} + C_{3222}S_{22}^3 + C_{2233}S_{22}^2S_{33} + 3C_{2333}S_{22}S_{33}^2 + C_{3333}S_{33}^3, \\
 \varepsilon_{12} & = 2 \left( D_0^{(1)} + \frac{3}{2}D_1^{(1)} |S_{12}| + 2D_2^{(1)} S_{12}^2 \right) S_{12}, \quad \varepsilon_{23} = 2 \left( D_0^{(2)} + \frac{3}{2}D_1^{(2)} |S_{23}| + 2D_2^{(2)} S_{23}^2 \right) S_{23}, \\
 \varepsilon_{31} & = 2 \left( D_0^{(3)} + \frac{3}{2}D_1^{(3)} |S_{31}| + 2D_2^{(3)} S_{31}^2 \right) S_{31}.
 \end{aligned}$$

В определяющие соотношения (4) входят по 9 констант первого, второго и третьего порядков. При этом линейно независимыми являются все 6 параметров  $A_{ijkl}$ , все 9 параметров  $D_0^{(1)}, D_0^{(2)}, D_0^{(3)}, D_1^{(1)}, D_1^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(1)}, D_2^{(2)}, D_2^{(3)}$ , 6 из 10 параметров  $B_{ijkl}$  и 6 из 15 параметров  $C_{ijkl}$ . Если положить все параметры  $C_{ijkl}, D_2^{(1)}, D_2^{(2)}, D_2^{(3)}$ , равными нулю, то соотношения (4) будут квадратичной моделью ортотропного материала.

Если в квадратичной части соотношений в качестве независимых параметров выбрать  $B_{1111}, B_{1122}, B_{2211}, B_{2222}, B_{3311}, B_{3333}$ , то остальные 4 параметра  $B_{1123}, B_{1133}, B_{2233}, B_{3322}$  линейно выражаются через них следующим образом:

$$\begin{aligned}
 B_{1123} & = \frac{\sqrt{3} - 2\sqrt{6} + 1}{2} B_{1111} + \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{3} - 1}{2} B_{1122} + \\
 & + \frac{6\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 4\sqrt{6} - 9}{2} B_{2211} + \frac{4\sqrt{6} + 9 - 6\sqrt{2} - 5\sqrt{3}}{2} B_{2222} + 2B_{3311}, \\
 B_{1133} & = \frac{10\sqrt{2} + 3\sqrt{6} - 10}{12} B_{1111} + \frac{6 - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} B_{1122} + \frac{9\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 4\sqrt{6} - 8}{4} B_{2211} + \\
 & + \frac{12\sqrt{6} + 32 - 23\sqrt{2} - 18\sqrt{3}}{12} B_{2222} - \sqrt{2} B_{3311} + \frac{\sqrt{2} - 1}{3} B_{3333}, \\
 B_{2233} & = \frac{\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 4}{12} B_{1111} + \frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 4}{4} B_{1122} + \frac{6\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{6} - 6}{4} B_{2211} + \\
 & + \frac{9\sqrt{6} + 26 - 14\sqrt{2} - 12\sqrt{3}}{12} B_{2222} - \sqrt{2} B_{3311} + \frac{\sqrt{2} - 1}{3} B_{3333},
 \end{aligned}$$

$$B_{3322} = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{6} - 4}{2} B_{1111} + \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - \sqrt{6} + 4}{2} B_{1122} + \\ + \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6} - 4}{2} B_{2211} + \frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 4}{2} B_{2222} + B_{3311}.$$

В кубической части определяющих соотношений (4) независимыми параметрами модели выбраны  $C_{1111}$ ,  $C_{1222}$ ,  $C_{2111}$ ,  $C_{2222}$ ,  $C_{3111}$ ,  $C_{3333}$ . Остальные 9 из 15 параметров линейно выражены через них:

$$C_{1122} = \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + \sqrt{6} - 6}{12} C_{1111} + \frac{7\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6} + 2}{4} C_{1222} + \\ + \frac{2\sqrt{3} - 21\sqrt{2} + \sqrt{6} + 6}{12} C_{2222} + \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6} - 2}{4} C_{3111} + \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{3} C_{3333},$$

$$C_{1123} = \frac{14\sqrt{6} - 3\sqrt{2} - 26\sqrt{3} + 6}{12} C_{1111} + \frac{3\sqrt{2} + 34\sqrt{3} - 10\sqrt{6} - 6}{12} C_{1222} + \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{3} C_{2111} + \\ + \frac{61\sqrt{6} - 102\sqrt{2} - 82\sqrt{3} + 138}{12} C_{2222} + \frac{34\sqrt{2} + 30\sqrt{3} - 19\sqrt{6} - 46}{4} C_{3111} + (2\sqrt{3} - \sqrt{6}) C_{3333},$$

$$C_{1133} = \frac{2\sqrt{3} - 15\sqrt{2} - 5\sqrt{6} - 6}{12} C_{1111} + \frac{15\sqrt{2} - 10\sqrt{3} - 3\sqrt{6} + 6}{12} C_{1222} + \frac{4\sqrt{3}}{3} C_{2111} + \\ + \frac{6 - 9\sqrt{2} - 14\sqrt{3} - 5\sqrt{6}}{12} C_{2222} + \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6} - 2}{4} C_{3111} + \frac{6\sqrt{3} + 4\sqrt{6}}{3} C_{3333},$$

$$C_{1223} = \frac{4\sqrt{3} - 30\sqrt{2} - \sqrt{6} + 36}{24} C_{1111} + \frac{30\sqrt{2} + \sqrt{3} + 5\sqrt{6} - 36}{24} C_{1222} + \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{6} C_{2111} + \\ + \frac{46\sqrt{6} - 75\sqrt{2} - 52\sqrt{3} + 108}{24} C_{2222} + \frac{25\sqrt{2} + 20\sqrt{3} - 14\sqrt{6} - 36}{8} C_{3111} + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{2} C_{3333},$$

$$C_{1233} = \frac{\sqrt{3} - 9\sqrt{2} - \sqrt{6} - 9}{6} C_{1111} + \frac{9\sqrt{2} - 5\sqrt{3} - 3\sqrt{6} + 9}{6} C_{1222} + \frac{4\sqrt{3}}{3} C_{2111} + \\ + \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3} - 7\sqrt{6} - 9}{6} C_{2222} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3} + 3}{2} C_{3111} + \frac{6\sqrt{3} + 4\sqrt{6}}{3} C_{3333},$$

$$C_{1333} = \frac{7\sqrt{6} - 10\sqrt{3} + 18}{36} C_{1111} + \frac{6\sqrt{3} - \sqrt{6} - 6}{12} C_{1222} + \frac{\sqrt{6}}{3} C_{2111} + \\ + \frac{40\sqrt{6} - 63\sqrt{2} - 46\sqrt{3} + 90}{36} C_{2222} + \frac{7\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 4\sqrt{6} - 10}{4} C_{3111} + \frac{2\sqrt{3} - 5\sqrt{6}}{9} C_{3333},$$

$$C_{2223} = \frac{275\sqrt{2} - 278\sqrt{3} + 178\sqrt{6} - 326}{72} C_{1111} + \frac{906\sqrt{3} - 825\sqrt{2} - 466\sqrt{6} + 978}{216} C_{1222} + \\ + \frac{\sqrt{6} - 6\sqrt{3}}{54} C_{2111} + \frac{437\sqrt{6} - 546\sqrt{2} - 714\sqrt{3} + 690}{216} C_{2222} + \\ + \frac{182\sqrt{2} + 262\sqrt{3} - 123\sqrt{6} - 230}{72} C_{3111} + \frac{6\sqrt{3} - 35\sqrt{6}}{54} C_{3333},$$

$$C_{2233} = \frac{14\sqrt{3} - 33\sqrt{2} - 11\sqrt{6} + 6}{12}C_{1111} + \frac{33\sqrt{2} - 22\sqrt{3} + 3\sqrt{6} - 6}{12}C_{1222} + \frac{4\sqrt{3}}{3}C_{2111} +$$

$$+ \frac{9\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 11\sqrt{6} - 6}{12}C_{2222} + \frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2}{4}C_{3111} + \frac{6\sqrt{3} + 4\sqrt{6}}{3}C_{3333},$$

$$C_{2333} = \frac{27\sqrt{2} - 40\sqrt{3} + 22\sqrt{6} - 12}{36}C_{1111} + \frac{16\sqrt{3} - 9\sqrt{2} - 6\sqrt{6} + 4}{12}C_{1222} + \frac{\sqrt{6}}{3}C_{2111} +$$

$$+ \frac{55\sqrt{6} - 90\sqrt{2} - 76\sqrt{3} + 120}{36}C_{2222} + \frac{30\sqrt{2} + 28\sqrt{3} - 17\sqrt{6} - 40}{12}C_{3111} + \frac{2\sqrt{3} - 5\sqrt{6}}{9}C_{3333}.$$

В качестве независимых могут выступать и другие наборы констант  $B_{ijkl}$ ,  $C_{ijkl}$ , однако, сделанный выбор объясняется тем, что параметры  $B_{1111}$ ,  $B_{1122}$ ,  $B_{2211}$ ,  $B_{2222}$ ,  $B_{3311}$ ,  $B_{3333}$  и  $C_{1111}$ ,  $C_{1222}$ ,  $C_{2111}$ ,  $C_{2222}$ ,  $C_{3111}$ ,  $C_{3333}$  можно определить по результатам одних и тех же механических экспериментов с макрообразцами.

**Идентификация модели по данным экспериментов с пластинами.** Широко распространены эксперименты на пластинах, так как в них можно измерить деформации в двух направлениях в плоскости. Для определения параметров  $A_{ijkl}$ ,  $B_{ijkl}$ ,  $C_{ijkl}$  образцы для экспериментов должны быть вырезаны во взаимно перпендикулярных направлениях, образованных главными осями анизотропии ортотропного материала.

Из эксперимента в плоскости  $Ox_1x_2$  на растяжение-сжатие по оси  $Ox_1$  определяются параметры  $A_{1111}$ ,  $A_{1122}$ ,  $B_{1111}$ ,  $B_{2211}$ ,  $C_{1111}$ ,  $C_{2111}$ . Из эксперимента в плоскости  $Ox_1x_2$  на растяжение-сжатие по оси  $Ox_2$  определяются параметры  $A_{2222}$ ,  $B_{2222}$ ,  $B_{1122}$ ,  $C_{2222}$ ,  $C_{1222}$ . Из эксперимента в плоскости  $Ox_1x_3$  на растяжение-сжатие по оси  $Ox_3$  определяются параметры  $A_{1133}$ ,  $A_{3333}$ ,  $B_{1133}$ ,  $B_{3333}$ ,  $C_{1333}$ ,  $C_{3333}$ . Из эксперимента в плоскости  $Ox_2x_3$  на растяжение-сжатие по оси  $Ox_3$  определяется  $A_{2233}$ . Для определения некоторых параметров можно использовать результаты экспериментов по одноосному растяжению-сжатию под углом  $45^\circ$  к главным осям анизотропии.

Коэффициенты модели  $D_i^{(j)}$  определяются по результатам трёх экспериментов на сдвиг в плоскостях  $Ox_1x_2$  ( $D_0^{(1)}$ ,  $D_1^{(1)}$ ,  $D_2^{(1)}$ ),  $Ox_2x_3$  ( $D_0^{(2)}$ ,  $D_1^{(2)}$ ,  $D_2^{(2)}$ ),  $Ox_1x_3$  ( $D_0^{(3)}$ ,  $D_1^{(3)}$ ,  $D_2^{(3)}$ ), образованных главными направлениями анизотропии ортотропного материала. При этом эксперименты на сдвиг могут быть выполнены как опыты на двухосное растяжение-сжатие под углом  $45^\circ$  к главным осям анизотропии.

В работе [1] приведены экспериментальные диаграммы зависимостей напряжений от деформаций, построенные в результате испытаний на одноосное растяжение, одноосное сжатие вдоль главных осей анизотропии  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_3$ , а также на сдвиг в плоскостях  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  и  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_3$  углерод-углеродного композиционного материала AVCO Mod3a. При этом отмечается, что механическое поведение в направлении  $\mathbf{a}_2$  идентично поведению в направлении  $\mathbf{a}_1$  из-за способа изготовления материала. Данные опытов показывают, что используемый композиционный материал обладает разносопротивляемостью при растяжении и сжатии.

Рассмотрим ортотропную пластину, у которой одна ось анизотропии  $\mathbf{a}_2$  перпендикулярна плоскости, а две другие  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_3$  направлены по сторонам пластины. Направим оси декартовой системы координат вдоль сторон пластины.

При плоском напряжённом состоянии ( $S_{12} = S_{22} = S_{23} = 0$ ) определяющие соотношения (4) записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= A_{1111}S_{11} + A_{1133}S_{33} + B_{1111}S_{11}^2 + B_{1133}S_{33}^2 + 2B_{3311}S_{11}S_{33} + \\
&\quad + C_{1111}S_{11}^3 + 3C_{3111}S_{11}^2S_{33} + C_{1133}S_{11}S_{33}^2, \\
\varepsilon_{22} &= A_{1122}S_{11} + A_{2233}S_{33} + B_{2211}S_{11}^2 + B_{2233}S_{33}^2 + B_{1123}S_{11}S_{33} + \\
&\quad + C_{2111}S_{11}^3 + C_{2113}S_{11}^2S_{33} + C_{1233}S_{11}S_{33}^2 + C_{2333}S_{33}^3, \\
\varepsilon_{33} &= A_{1133}S_{11} + A_{3333}S_{33} + B_{3311}S_{11}^2 + B_{3333}S_{33}^2 + 2B_{1133}S_{11}S_{33} + \\
&\quad + C_{3111}S_{11}^3 + C_{1133}S_{11}^2S_{33} + 3C_{1333}S_{11}S_{33}^2 + C_{3333}S_{33}^3, \\
\varepsilon_{31} &= 2 \left( D_0^{(3)} + \frac{3}{2}D_1^{(3)} |S_{31}| + 2D_2^{(3)} S_{31}^2 \right) S_{31}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Данные экспериментов [1] позволили, используя метод наименьших квадратов, определить материальные параметры, входящие в определяющие соотношения (4). При использовании квадратичной модели

$$\begin{aligned}
A_{1111} &= A_{2222} = 1,70 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}, & A_{3333} &= 7,58 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-1}; \\
B_{1111} &= B_{2222} = 2,69 \cdot 10^{-13} \text{Па}^{-2}, & B_{3333} &= -4,32 \cdot 10^{-13} \text{Па}^{-2}; \\
D_0^{(1)} &= 4,39 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-1}, & D_1^{(1)} &= 6,44 \cdot 10^{-12} \text{Па}^{-2}; \\
D_0^{(2)} &= D_0^{(3)} = 8,97 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}, & D_1^{(2)} &= D_1^{(3)} = -3,01 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-2}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Для модели третьего порядка

$$\begin{aligned}
A_{1111} &= A_{2222} = 1,12 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}, & A_{3333} &= 6,48 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-1}; \\
B_{1111} &= B_{2222} = 9,15 \cdot 10^{-13} \text{Па}^{-2}, & B_{3333} &= -7,82 \cdot 10^{-13} \text{Па}^{-2}; \\
C_{1111} &= C_{2222} = 2,86 \cdot 10^{-14} \text{Па}^{-3}, & C_{3333} &= 5,94 \cdot 10^{-15} \text{Па}^{-3}; \\
D_0^{(1)} &= 1,93 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}, & D_1^{(1)} &= -1,08 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-2}, & D_2^{(1)} &= 5,19 \cdot 10^{-13} \text{Па}^{-3}; \\
D_0^{(2)} &= D_0^{(3)} = 8,78 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}, & D_1^{(2)} &= D_1^{(3)} = -2,47 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-2}, \\
D_2^{(2)} &= D_2^{(3)} = -3,69 \cdot 10^{-13} \text{Па}^{-3}.
\end{aligned} \tag{7}$$

На рисунках 1, 2 приведены экспериментальные данные для материала AVCO Mod3a и кривые, соответствующие линейной, квадратичной и кубической моделям (4).

Анализ графиков на рисунке 1 позволяет сделать вывод, что нелинейные определяющие соотношения (4) позволяют описать результаты экспериментов с анизотропным материалом более адекватно, чем линейные соотношения обобщённого закона Гука. Они позволяют описывать разноспротивляемость анизотропного материала растяжению и сжатию, наблюдаемую в эксперименте. При этом квадратичная модель с константами (6) неверно описывает данные эксперимента на растяжение по оси  $\mathbf{a}_3$ , поэтому для учёта нелинейности следует использовать кубическую модель (5) с параметрами (7). Отметим, что на рисунке 2, б) кривые, построенные по квадратичной и кубической моделям, практически совпадают.

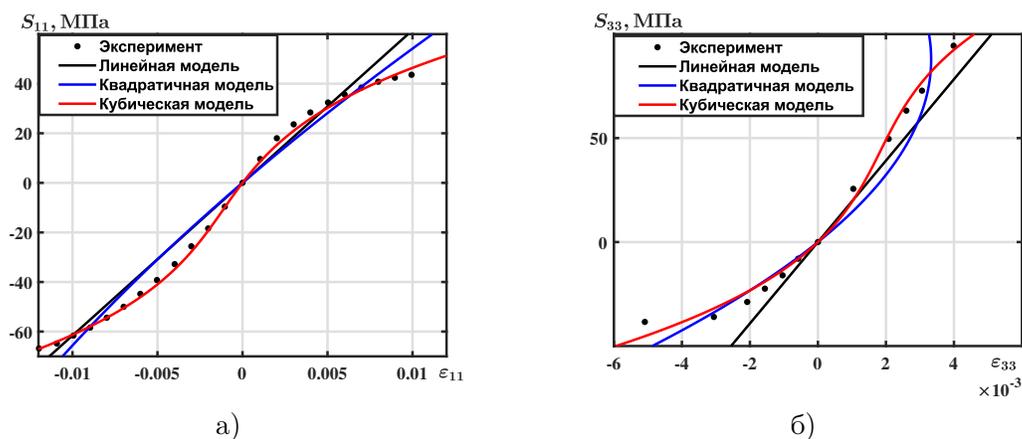


Рис. 1. Зависимости напряжений от деформаций: а) эксперимент при растяжении и сжатии в направлении  $\mathbf{a}_1$ ; б) эксперимент при растяжении и сжатии в направлении  $\mathbf{a}_3$

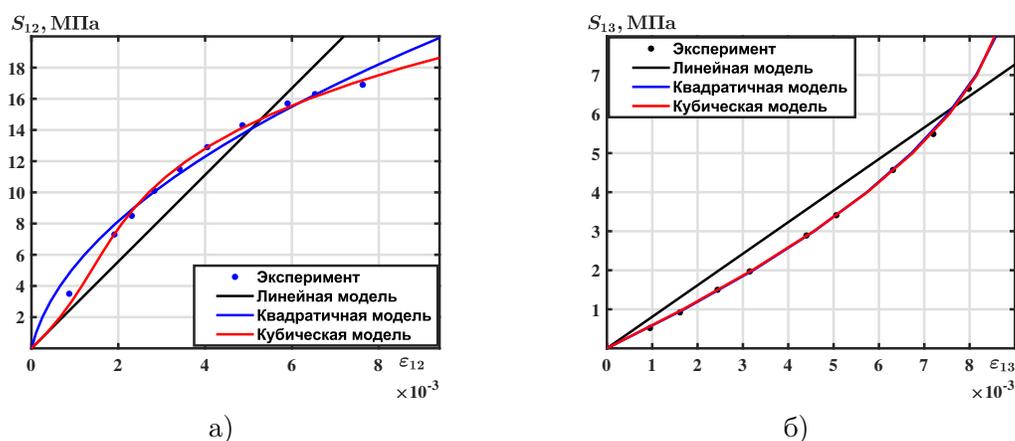


Рис. 2. Зависимость касательных напряжений от деформации сдвига: а) в плоскости  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ; б) в плоскости  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3$

**Заключение.** Таким образом, для учёта слагаемых, описывающих нелинейную зависимость деформаций от напряжений второго и третьего порядков, в модель добавляется по 9 материальных параметров. Предложена система двумерных экспериментов на пластинчатых образцах, позволяющая определить все параметры нелинейных моделей. Выполнена идентификация параметров двух моделей по данным экспериментов [1]. Результаты определения числовых значений констант моделей показывают, что модель третьего порядка лучше описывает экспериментальные данные, чем модель второго порядка.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Jones R. Modeling nonlinear deformation of carbon-carbon composite materials // AIAA Journal. 1980. Vol. 18, no. 8. P. 995–1001.

- [2] Lomakin E., Fedulov B. Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // *Meccanica*. 2015. Vol. 50, no. 6. P. 1527–1535.
- [3] Smith E., Pascoe K. The role of shear deformation in the fatigue failure of a glass fiber-reinforced composite // *Composites*. 1977. no. 8. P. 237–243.
- [4] Соколова М.Ю., Христич Д.В., Рудаков В.В. Нелинейная модель пластин из композиционных материалов // *Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2018. Т. 37, № 3. С. 100–106.
- [5] Христич Д.В. Идентификация анизотропных материалов и моделирование процессов конечного деформирования гипопругих тел. Дисс. . . д.ф.-м.н. Тула. 2015.
- [6] Sokolova M., Rudakov V., Khristich D. Strains of plates of nonlinear anisotropic materials // *IOP Conference Series: Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1203. p. 012024 (11 pages).

*S. T. Nguyen*

## NONLINEAR ELASTIC MODELS OF ORTHOTROPIC MATERIAL

*Tula State University, Tula, Russia*

**Abstract.** A variant of nonlinear constitutive relations for an elastic orthotropic material is considered. To describe the dependences of deformations on stresses of the second and third orders, 9 additional parameters are used. A system of two-dimensional experiments on plate samples is proposed, which allows one to determine all the constants of nonlinear models. The numerical values of the parameters of the two models are found from the known experimental data. Comparison of the simulation results shows that the third-order model is more consistent with the experimental data than the second-order model.

**Keywords:** nonlinear constitutive relations, orthotropic materials, identification, composites.

### REFERENCES

- [1] Jones R. Modeling nonlinear deformation of carbon-carbon composite materials // *AIAA Journal*. 1980. Vol. 18, no. 8. P. 995–1001.
- [2] Lomakin E., Fedulov B. Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // *Meccanica*. 2015. Vol. 50, no. 6. P. 1527–1535.
- [3] Smith E., Pascoe K. The role of shear deformation in the fatigue failure of a glass fiber-reinforced composite // *Composites*. 1977. no. 8. P. 237–243.
- [4] Sokolova M.Yu., Khristich D.V., Rudakov V.V. A nonlinear model of plates made of composite materials // *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 2018. Т. 37, № 3. С. 100–106. (in Russian).
- [5] Khristich D.V. Identification of anisotropic materials and modeling of processes of finite deformation of hypoelastic bodies. Dissertation for the Degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences. 2015. (in Russian).
- [6] Sokolova M., Rudakov V., Khristich D. Strains of plates of nonlinear anisotropic materials // *IOP Conference Series: Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1203. p. 012024 (11 pages).

Г. Т. Володин, Д. С. Кочергин

## О ПРОБЛЕМЕ ГАРАНТИРОВАННОГО РАЗРУШЕНИЯ ВЗРЫВОМ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ В ВОДЕ

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

**Аннотация.** Найдены условия гарантированного разрушения балки в воде взрывом заряда конденсированного ВВ. Под гарантированным разрушением балки понимается нарушение ее несущей способности вследствие появления в ней трещин, сколов, ведущих при дальнейших колебаниях к недопустимым по величине максимальным прогибам, разделением её на фрагменты, соскакиванием с опор. Учтены эффекты сжимаемости воды; её влияние на движение балки под действием импульсной нагрузки взрыва учитывается введением присоединенной массы, учитывается глубина погружения балки и заряда от поверхности водоёма, расположение заряда относительно балки, эффекты отражения ударной волны от поверхности балки, геометрические и физические характеристики заряда ВВ.

**Ключевые слова:** взрыв заряда конденсированного ВВ, разрушение балки на опорах в воде, ударная волна, отражение, глубина погружения, сжимаемость воды.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.50.4.007

УДК: 531/534

### Постановка задачи.

Физическая модель (основные допущения). Рассматривается балка длиной  $l$  с прямолинейной до деформации линией прогибов, свободно опертая по концам на недеформируемых неподвижных опорах. Балка расположена в воде на глубине  $H$ , имеет прямоугольное поперечное сечение  $b \times h$ , где  $b$  – ширина,  $h$  – высота сечения. Балка изготовлена из упругого изотропного материала.

Заряд конденсированного ВВ является сферическим некоторого радиуса  $r_0$ ; физические характеристики заряда предполагаются известными (плотность ВВ, скорость детонации, удельная энергия взрывного превращения – калорийность). Заряд расположен на расстоянии  $r_*$  от оси балки в произвольной точке её пролёта, то есть имеет координаты  $(x_*, r_*)$  в системе координат  $xOw$ , где  $x_*$  – точка пролёта балки – эпицентр взрыва. (Рис.1).

---

© Володин Г. Т., Кочергин Д. С. 2021

Володин Геннадий Тимофеевич

e-mail: g.volodin@yandex.ru, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Кочергин Денис Сергеевич

e-mail: sir.cod4@yandex.ru, аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Поступила 30.11.2021

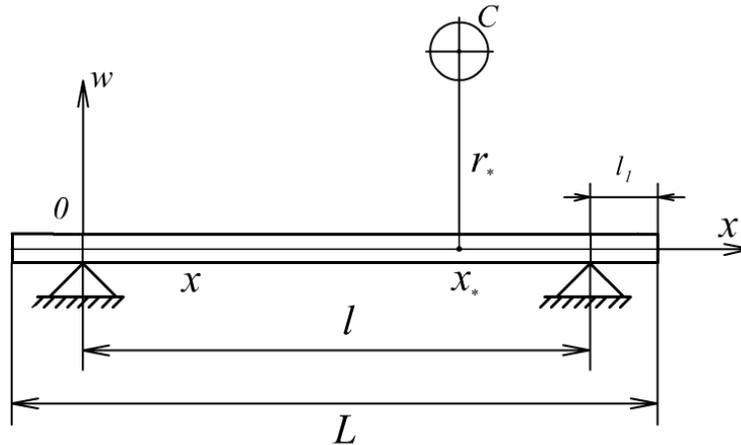


Рис. 1 Схема расположения заряда над балкой

Предполагается, что изначально (до действия взрывной нагрузки) балка надежно лежит на опорах; при этом, как известно [1], [2], [3], для надежного опирания свободно опертых балок их свободные концы должны иметь длину  $\frac{l_1}{2}$ , удовлетворяющую соотношению

$$\frac{l_1}{h} \geq \frac{4}{3} \quad (1)$$

Максимальное давление, формирующее удельный импульс взрывной нагрузки, определяется с учетом эффектов отражения ударной волны, распространяющейся в воде, от поверхности балки. Снято распространенное в исследованиях предположение о несжимаемости воды, использованы динамические адиабаты воды в соответствующих диапазонах давлений.

В решении проблемы разрушения взрывом элементов конструкций возможны два взаимно противоположных подхода [1], [4]. Первый подход: при фиксированном расстоянии  $r_*$  заряда ВВ от элемента конструкции найти минимальную массу заряда, взрыв которого гарантированно разрушит этот элемент конструкции. Второй подход: при фиксированной массе заряда ВВ определенного типа найти максимальное расстояние этого заряда от элемента конструкции для фиксированного эпицентра взрыва, приводящее на этом и меньших расстояниях к гарантированному разрушению элемента конструкции. В данном исследовании использован первый подход.

#### Математическая модель и решение задачи.

Рассматривается взрыв сферического заряда радиуса  $r_0$  конденсированного ВВ в воде, заряд неконтактный, детонация мгновенная [1], [4]. Вода представлена сжимаемой средой с уравнением состояния Тэта [5], [6], [7], [8] и различными значениями констант, входящих в это уравнение в зависимости от величин относительных давлений в волне; используются соотношения представленной выше физической модели рассматриваемого явления.

Найдём сначала максимальное давление, формирующее удельный импульс взрывной нагрузки. Таким давлением является давление отражения после встречи ударной волны взрыва с поверхностью преграды (в данном случае с поверхностью балки).

Рассмотрим нормальное отражение ударной волны в воде. Для отраженной ударной волны в непосредственной близости у поверхности балки, скорость среды в отраженной волне на фронте вследствие неподвижности преграды равна нулю [5], [6] и уравнения неразрывности и количества движения примут вид [6]

$$\left. \begin{aligned} \rho_2(D_3 + w_2) &= \rho_3 D_3 \\ \rho_2(D_3 + w_2)^2 - \rho_3 D_3^2 &= P_3 - P_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $\rho_2$  и  $\rho_3$  – соответственно плотность среды на фронте падающей и отраженной ударных волн,  $w_2$  и  $w_3 = 0$  – скорости среды в падающей и отраженной волне на фронте,  $D_3$  – скорость фронта отраженной ударной волны,  $P_2$  и  $P_3$  – давления на фронте падающей и отраженной ударных волн.

Используем динамическую адиабату [1]

$$\frac{P_3 - P_{01}}{P_{01}} = A \left[ \left( \frac{\rho_3}{\rho_{01}} \right)^\alpha - 1 \right], \quad (3)$$

где значения констант соответствуют диапазонам давлений: для давлений в интервале

$$1 < \frac{P}{P_{01}} \leq 3 \cdot 10^4 \quad (4)$$

значения  $A = 2945$ ;  $\alpha = 7, 15$ ; если

$$\frac{P}{P_{01}} > 3 \cdot 10^4 \quad (5)$$

значения  $A = 4115$ ;  $\alpha = 6, 29$ .

Величины  $\rho_{01}$  и  $P_{01}$  соответствуют плотности и давлению воды на поверхности водоёма. Из второго уравнения системы (2) найдем давление

$$P_3 = P_2 + \frac{\rho_2^2 w_2^2}{\rho_3 - \rho_2} + \rho_2 w_2^2 \quad (6)$$

Из первого уравнения системы (2) найдем  $D_3$  в виде

$$D_3 = \frac{\rho_2 w_2}{\rho_3 - \rho_2} \quad (7)$$

Сравнивая соотношения (3) и (6), получим трансцендентное уравнение для определения  $\rho_3$  в воде

$$Ax^\alpha - a_2 \frac{x}{x - a_3} + b = 0, \quad (8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\rho_3}{\rho_{01}}; \quad a_1 = \frac{P_2}{P_{01}}; \quad a_2 = \frac{\rho_2 a_2^2}{P_{01}}; \\ a_3 &= \frac{\rho_2}{\rho_{01}}; \quad b = 1 - A - a_1 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

После нахождения величины  $\rho_3$  из уравнения (5) по соотношению (6) с учётом  $w_3 = 0$  определим искомое давление отражения  $P_3$  у преграды.

Из соотношений (6) и (8) видно, что для нахождения решения уравнения (8), а затем давления  $P_3$  в отраженной волне у поверхности балки необходимо знать параметры  $P_2, \rho_2, w_2$  на фронте падающей ударной волны.

Для установления зависимостей между параметрами на фронте падающей УВ в воде от взрыва заряда ВВ следует использовать интегральные законы сохранения массы, импульса и энергии, которые приводят к уравнениям [5]

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= \varepsilon D_2 \\ P_2 - P_{01} &= \rho_{01} \varepsilon D_2^2 \\ \varepsilon &= 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где  $\varepsilon$  – относительная объёмная деформация воды на фронте ударной волны, при этом плотность невозмущенной среды (воды)  $\rho_1 = \rho_{01}$ , то есть практически мало отличается от плотности на любой глубине  $H$  водоёма.

Уравнения системы (10) представляют соответственно формулировки законов сохранения массы и импульса при переходе через фронт ударной волны. Уравнение, формирующее интегральный закон сохранения энергии, не может быть привлечено, так как в него входит дополнительная неизвестная величина – внутренняя энергия, неопределяемая для воды через давление и плотность [1]. Вместо этого уравнения для воды, как указывалось выше, можно привлечь уравнения динамических адиабат (4), (5), из которых следует дополнительное уравнение

$$\frac{\rho_2}{\rho_{01}} = \left( \frac{P_2 - P_{01}}{AP_{01}} + 1 \right)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (11)$$

Вводя относительную деформацию, получим

$$\varepsilon = 1 - \left( \frac{P_2 - P_{01}}{AP_{01}} + 1 \right)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (12)$$

Сгруппировав привлекаемые уравнения в единую систему, получим алгоритм [5]

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= 1 - \left( \frac{P_2 - P_{01}}{AP_{01}} + 1 \right)^{-\frac{1}{\alpha}} \\ D_2 &= \sqrt{\frac{P_2 - P_1}{\varepsilon \rho_1}} \\ u_2 &= \varepsilon D_2 \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{1}{1 - \varepsilon} \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

определяющий параметры на фронте ударной волны по известному давлению на фронте. Это давление находится по экспериментальным зависимостям, для сферических зарядов в виде соотношения

$$\frac{P_2 - P_{01}}{P_{01}} = 14700 \left( \frac{r_0}{r_*} \right)^{1,13} \quad (14)$$

для расстояний, удовлетворяющих соотношению

$$\frac{r_*}{r_0} > 12, \quad (15)$$

где  $r_0$  радиус заряда ВВ,  $r_*$  расстояние от центра взрыва до балки. Для сосредоточенных (сферических) зарядов на расстояниях

$$6 < \frac{r_*}{r_0} \leq 12 \quad (16)$$

давление на фронте можно определять по формуле [5], [7]

$$\frac{P_2 - P_{01}}{P_{01}} = 37000 \left( \frac{r_0}{r_*} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (17)$$

При вычислениях по алгоритму (13) следует положить [5]:

$$A = \begin{cases} 2945, & \text{если } \frac{P_2 - P_{01}}{P_{01}} < 3 \cdot 10^4 \\ 4115, & \text{если } \frac{P_2 - P_{01}}{P_{01}} \geq 3 \cdot 10^4 \end{cases} \\ \alpha = \begin{cases} 7, 15, & \text{если } \frac{P_2 - P_{01}}{P_{01}} < 3 \cdot 10^4 \\ 6, 29, & \text{если } \frac{P_2 - P_{01}}{P_{01}} \geq 3 \cdot 10^4 \end{cases} \quad (18)$$

Следует также различать величины давлений  $P_1$  и  $P_{01}$ , а именно:  $P_1$  – давление жидкости в точке наблюдения на глубине  $H$ ,  $P_{01}$  – давление на свободной поверхности воды, при этом

$$P_1 = P_{01} + \rho_1 g H \quad (19)$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести.

Перейдём теперь к нахождению условий гарантированного разрушения рассматриваемой балки импульсной нагрузкой, определяемой максимальным давлением, созданным взрывом сферического заряда радиуса  $r_0$  ВВ в воде на расстоянии  $r_*$  от оси балки.

Совместим ось абсцисс прямоугольной декартовой системы координат с осью балки, а начало координат расположим на её левом конце. Уравнение упругих колебаний балки под действием её внешней нагрузки в принятой системе координат для случая взрыва в воде с учетом введения присоединенной погонной массы воды  $m_{*1}$  в уравнение движения, запишем в виде [9]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{K_1 b}{m_* + m_{*1}} P_3(x) f(t), \quad (20)$$

где  $w(x, t)$  – прогиб балки в её сечении с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ,  $P_3(x)$  – максимальное давление на балку в момент приложения к ней импульсной нагрузки (в данном случае – давление отражения),  $b$  – ширина сечения балки,  $K_1$  – коэффициент формы [10],  $m_*$  – погонная (на единицу длины) масса балки,  $f(t)$  – функция времени, учитывающая спад давления. Эту функцию в большинстве случаев, согласно экспериментальным данным, принимают в виде [10]

$$f(t) = \left( 1 - \frac{t}{\tau} \right)^n, \quad (21)$$

где  $\tau$  – время действия фазы сжатия ударной волны,  $n$  – показатель степени, обычно принимаемый из интервала (1;3) в зависимости от интенсивности ударной волны; величина  $\beta$  определяется соотношением

$$\beta = \sqrt{\frac{EJ}{m_* + m_{*1}}} \quad (22)$$

Рассмотрим поведение балки под действием кратковременно действующего импульса, интенсивность которого по длине балки зависит от положения её сечения  $x$ , то есть

$$i(x) = K_1 b P_3(x) \int_0^\tau f(t) dt \quad (23)$$

Согласно экспериментальным данным, удобно в исследованиях ввести постоянную времени  $\vartheta$ , определяемую соотношением

$$\frac{a_{01}\vartheta}{r_0} = 1,4 \cdot \left(\frac{r_*}{r_0}\right)^{0,24} \quad (24)$$

где  $a_{01}$  – скорость звука в воде на поверхности водоёма (например при температуре  $T = 288^\circ K$ ,  $a_{01} = 1460 \frac{m}{c}$ ). Тогда спад давления с течением времени следует определять соотношением [5], [6], [8], [10]:

$$\frac{P - P_{01}}{P_{01}} = \frac{P_3 - P_{01}}{P_{01}} \cdot e^{-\frac{t}{\vartheta}} \quad (25)$$

в котором время  $t$  отсчитывается от момента прихода фронта ударной волны в данную точку пространства.

Удельный импульс фазы сжатия определяется тогда соотношением

$$i = \int_0^{\tau_{\pm}} (P - P_{01}) dt = (P_3 - P_{01}) \int_0^{\tau_{\pm}} e^{-\frac{t}{\vartheta}} dt = (P_3 - P_{01}) \vartheta \left(1 - e^{-\frac{\tau_{\pm}}{\vartheta}}\right)$$

В неограниченной среде  $\frac{\tau_{\pm}}{\vartheta} > 5$ , поэтому

$$i = (P_3 - P_{01}) \vartheta \quad (26)$$

Так как импульс действует кратковременно, то за время его действия частицы балки не успевают получить заметных смещений, а получают только начальные скорости. Деформирование балки происходит после окончания действия нагрузки, то есть в период свободных колебаний, которые описываются однородным уравнением

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (27)$$

Краевые условия для уравнения (27) соответствуют условиям закрепления концов балки на опорах.

Для свободно опертой на концах балки на идеальные (недеформируемые) опоры, краевые условия для уравнения (27) примут вид

$$w(0, t) = w(l, t) = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = 0, \quad (29)$$

где  $l$  – длина балки.

Условия (28) означает, что концы балки лишены возможности перемещаться по направлению оси  $w$ , а условия (29) означают, что концы балки неспособны воспринимать изгибающего момента.

Начальные условия для уравнения (27) соответствуют характеру действующей нагрузки [1], [4], [9]

$$\frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{i_*(x)}{m_* + m_{*1}}, \quad (30)$$

где  $i_*(x) = bK_1 i$  – погонный импульс [5].

В работе [10] найдено решение начально-краевой задачи (27)-(29) для случая расположения свободно опертой балки в воздухе. Для случая её расположения в воде

решение, согласно замечанию профессора Т.М. Саламахина [1], будет отличаться наличием в этом решении слагаемого  $m_{*1}$ , то есть вместо  $m_*$  будет фигурировать сумма  $m_* + m_{*1}$ . Это решение для случая расположения балки в воде имеет вид

$$w = \frac{2l}{\pi^2 \beta (m_* + m_{*1})} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \sin j\pi \frac{x}{l} \sin \frac{j^2 \pi^2}{l^2} \beta t \int_0^l i_*(\xi) \sin \frac{j\pi \xi}{l} d\xi, \quad (31)$$

при этом  $\beta = \sqrt{\frac{EJ}{m_* + m_{*1}}}$ .

Условие гарантированного разрушения рассматриваемой балочной конструкции примем в виде [4]

$$M_{\max} \geq K_{0*} \mu_3 \delta_{*n} W_* \quad (32)$$

где  $\mu_3$  – коэффициент динамичности материала балки ( $\mu_3 = \frac{\delta_{*3}}{\delta_*}$ ,  $\delta_{*3}$  – динамический предел прочности,  $\delta_*$  – статический предел прочности);  $K_{0*}$  – коэффициент однородности на гарантированное разрушение ( $K_{0*} = \frac{\delta_{*\max}}{\delta_{*0}}$ ,  $\delta_{*0}$  – нормированный браковочный минимум,  $\delta_{*\max}$  – максимальное сопротивление материала);  $\delta_{*n}$  – нормативное сопротивление материала при изгибе,  $W_*$  – момент сопротивления балки при изгибе. Используя формулу для максимального изгибающего момента  $M_{\max}$  для малых прогибов

$$M_{\max} = -EJ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (33)$$

и найденное решение (31), получены соотношения между фиксированным расстоянием  $r_*$  расположения заряда ВВ над балкой и величиной этого заряда  $r_0$ , определяющие эффект гарантированного разрушения рассматриваемой балочной конструкции.

**Заключение.** Полученные результаты исследований отличаются от результатов работы [9] методами нахождения давления отражения  $P_3$ , однако их численные различия незначительные.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Саламахин Т. М. Действие взрыва на элементы конструкций. Москва: ВИА, 1969. 168 с.
- [2] Рабинович И. М. Основы строительной механики стержневых систем. Москва: Госстройиздат, 1960. 519 с.
- [3] Киселёв В. А. Строительная механика. Специальный курс (динамика и устойчивость сооружений). Москва: Стройиздат, 1980. 616 с.
- [4] Володин Г. Т. Действие взрыва зарядов конденсированных ВВ в газовой и жидких средах. Часть 2. Взрывостойкость и гарантированное разрушение элементов конструкций. Тула: Левша, 2005. 160 с.
- [5] Саламахин Т. М. Физические основы механического действия взрыва и методы определения взрывных нагрузок. Москва: ВИА, 1974. 255 с.
- [6] Сунцов Н. Н. Основы теории подводного и воздушного взрыва. Ленинград: Б.и., 1956. 185 с.
- [7] Замышляев Б. В., Яковлев Ю. С. Динамические нагрузки при подводном взрыве. Ленинград: Судостроение, 1967. 194 с.
- [8] Перцев А. К., Кадыров С. Г. Воздействие подводного взрыва на элементы корабля. Санкт-Петербург: СПбГМТУ, 2009. 321 с.
- [9] Володин Г. Т., Кочергин Д. С. Импульсная нагрузка на неподвижную преграду при взрыве в воде // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. № 3(49).
- [10] Саламахин Т. М. Разрушение взрывом элементов конструкций. Москва: ВИА, 1961. 275 с.

G. T. Volodin, D. S. Kochergin

## ON THE PROBLEM OF GUARANTEED DESTRUCTION BY EXPLOSION OF STRUCTURAL ELEMENTS IN WATER

*Tula State University, Tula, Russia.*

**Abstract.** The conditions of guaranteed destruction of the beam in water by the explosion of a condensed explosive charge are found. Guaranteed destruction of a beam is understood as a violation of its bearing capacity due to the appearance of cracks, chips in it, leading to unacceptable maximum deflections, its separation into fragments, jumping off supports with further fluctuations. The effects of compressibility of water are taken into account; its effect on the movement of the beam under the action of the pulse load of the explosion is taken into account by the introduction of the attached mass, the depth of immersion of the beam and the charge from the surface of the reservoir, the location of the charge relative to the beam, the effects of shock wave reflection from the surface of the beam, geometric and physical characteristics of the explosive charge are taken into account.

**Keywords:** explosion of a condensed explosive charge, destruction of a beam on supports in water, shock wave, reflection, immersion depth, compressibility of water.

### REFERENCES

- [1] Salamakhin T. M. Explosion effect on structural elements. Moscow: VIA, 1969. 168 p. (in Russian).
- [2] Rabinovich I. M. Fundamentals of structural mechanics of rod systems. Moscow: Gosstroyizdat, 1960. 519 p. (in Russian).
- [3] Kiselyov V. A. Construction mechanics. Special course (dynamics and stability of structures). Moscow: Stroyizdat, 1980. 616 p. (in Russian).
- [4] Volodin G. T. Action of explosion of charges of condensed explosives in gas and liquid media. Part 2. Explosion resistance and guaranteed destruction of structural elements. Tula: Lefty, 2005. 160 p. (in Russian).
- [5] Salamakhin T. M. Physical foundations of the mechanical action of an explosion and methods for determining explosive loads. Moscow: VIA, 1974. 255 p. (in Russian).
- [6] Suntsov N. N. Fundamentals of the theory of underwater and air explosion. Leningrad: B.I., 1956. 185 p. (in Russian).
- [7] Zamyshlyayev B. V., Yakovlev Y. S. Dynamic loads during underwater explosion. Leningrad: Shipbuilding, 1967. 194 p. (in Russian).
- [8] Pertsev A. K., Kadyrov S. G. The impact of an underwater explosion on the elements of the ship. St. Petersburg: SPbGMTU, 2009. 321 p. (in Russian).
- [9] Volodin G. T., Kochergin D. S. Pulse load on a stationary barrier during an explosion in water // Vestnik of the I. Ya. Yakovlev ChSPU. Series: Mechanics of the limit state. 2021. no. 3(49). 12-18 p. (in Russian).
- [10] Salamakhin T. M. Explosion destruction of structural elements. Moscow: VIA, 1961. 275 p. (in Russian).

---

*Volodin Gennady Timofeevich*, Doctor of Technical Sciences, Professor, Tula State University, Tula, Russia.

*Kochergin Denis Sergeevich*, postgraduate student, Tula State University, Tula, Russia.

А. А. Локтев<sup>1,2</sup>, Л. А. Илларионова<sup>1</sup>, А. Баракат<sup>2</sup>

## ВОЗМОЖНОСТИ ВИБРОДИАГНОСТИКИ НИЗКОВОДНЫХ МОСТОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

<sup>1</sup>Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия

<sup>2</sup>Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

**Аннотация.** Настоящее исследование посвящено изучению динамического поведения однопролетного низководного моста и оценке возможности детектирования появляющихся в процессе его эксплуатации дефектов. Актуальность работы подтверждается тем, что уровень воды для низководных мостов не позволяет провести визуальный осмотр и инструментальное обследование нижней части пролетного строения и ригельных балок опор. Поскольку для таких мостовых переходов не учитываются возможности пропуска ледохода, высоких вод и водного транспорта, то в вязкоупругую модель опирания пролетного строения вводятся обобщенные параметры вязкости и упругости, которые могут позволить учесть эти факторы. За расчетную схему принята балочная система, для описания деформирования которой могут быть применены уравнения для балки или пластины-полоски, которая может быть усилена дополнительной конструкцией для увеличения жесткости. В данной работе получены аналитические и графические зависимости для геометрических и динамических характеристик деформирования пролетного строения, с помощью которых можно выполнить оценку эксплуатационного состояния моста по собственным частотам колебаний пролетного строения.

**Ключевые слова:** мониторинг мостового перехода, собственные частоты, пролетное строение, динамическая нагрузка, вязкоупругая модель, вертикальное перемещение

DOI: 10.37972/chgpu.2021.50.4.008

УДК: 539.3, 624.21

---

© Локтев А. А., Илларионова Л. А., Баракат А., 2021

*Локтев Алексей Алексеевич*

**e-mail:** aaloktev@yandex.ru, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой транспортного строительства, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия, профессор, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия,

*Илларионова Лилия Алексеевна*

**e-mail:** illarionova.goat@mail.ru, старший преподаватель, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия,

*Баракат Ахмад*

**e-mail:** ahmadbarakat9992@gmail.com, аспирант, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Поступила 25.11.2021

Отличительной особенностью современного состояния дорог регионального, межмуниципального, местного значения и частных (например, подъездные пути к промышленным предприятиям) дорог по сравнению с дорогами федерального значения является меньший контроль за скоростным режимом и массо-габаритными характеристиками транспортных средств, а также меньшее внимание со стороны как эксплуатирующих организаций, так и со стороны нормативно-правовой документации.

В настоящей работе рассмотрены особенности эксплуатации и мониторинга низководных мостов, которые встречаются чаще всего и встречаются на таких дорогах. Низководные мосты возводятся для преодоления препятствия не небольшой высоты над его поверхностью, при этом за основное положение уровня воды может приниматься уровень межня, т.е. пролетные строения таких искусственных сооружений могут затопляться при высоком уровне проходящей воды, чаще всего такие сооружения имеют временную категорию.

В целом, можно отметить, что низководные мостовые переходы возводятся без учета возможности пропуска ледохода, высоких вод и водного транспорта, чаще всего за расчетную схему принимают балочную разрезную систему, которая может быть усилена пространственной ферменной конструкцией (рис. 1). В данной работе изучается возможность оценки эксплуатационного состояния моста по собственным частотам колебаний пролетного строения, что особенно актуально при диагностике и паспортизации из-за сложностей визуального осмотра конструкций моста с воды [1-3].

В качестве характеристики, изменение которой учитывает изменение состояния мостового сооружения, предлагается использовать частоту собственных колебаний, определение изменений в ее величине позволит выявить дефекты, повреждения и отступления от проекта, приводящие к уменьшению несущей способности моста [4,5]. Разработанное математическое и алгоритмическое обеспечение могут быть реализованы в системах вибродиагностики мостовых переходов, позволяющих не только обнаруживать и идентифицировать дефекты и неисправности, но и прогнозировать динамику изменения эксплуатационных параметров в любое время года [6,7].

Верхнее строение мостового перехода воспринимает нагрузку от проходящего транспорта и передает давление от нее на пролетное строение, которая затем через узлы опирания передает нагрузку на ригельную балку опоры, а через нее и на стойки-сваи и далее на грунт основания. Для моделирования динамических воздействий со стороны транспорта и динамического поведения отдельных элементов и всего сооружения в целом предполагается использовать вязкоупругие элементы типа Кельвина-Фойгта, которые, как показали исследования отечественных и зарубежных исследователей, наилучшим образом описывают изменения во времени параметров состояния применяемых материалов, конструктивных решений, узлов и окружающей среды при действии внешней динамической нагрузки [8,9].

При этом считается, что параметры жесткости и вязкости могут меняться в достаточно широком интервале значений, позволяя учесть особенности инженерно-геологических характеристик грунта, материал и конструкцию верхнего строения (дорожной одежды), особенности узлов опирания пролета и объем воды в подмостовом пространстве, непосредственно контактирующей с ригельной частью береговой опоры [10,11].

Одним из известных подходов в расчете колебаний пролетного строения является рассмотрение вязкоупругого взаимодействия двух твердых массивных тел, одним из которых является часть пролетного строения с приведенной длиной и массой, а



Рис. 1. Низководный мостовой переход с однопролетной расчетной схемой в виде пространственной фермы.

другим - верхняя часть опоры, на которую через узел специальной конструкции опирается пролет (рис.2).

Система определяющих уравнений, описывающих вертикальные перемещения системы двух твердых тел, связанных между собой вязкоупругим демпфером типа Кельвина-Фойгта и одно из которых испытывает воздействие транспортного средства [8,12], может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} m_1 (\ddot{z}_1 + \ddot{z}_3) + K (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + C (z_1 - z_2) &= 0, \\ m_2 (\ddot{z}_2 + \ddot{z}_3) + K (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + C (z_2 - z_1) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

здесь  $m_1$  и  $m_2$  - приведенные массы части пролетного строения и ригельной балки опоры соответственно,  $z_1$  и  $z_2$  - координаты центров тяжести фрагмента пролетного строения и ригельной балки опоры относительно верхней точки опорного узла до начала его деформирования,  $z_3$  - координата верхнего сечения опорного узла до его нагружения относительно инерциальной системы отсчёта,  $K$  - коэффициент линейного вязкого сопротивления опорного узла,  $C$  - коэффициент жесткости опорного узла,  $t'$  - время, являющееся переменной интегрирования.

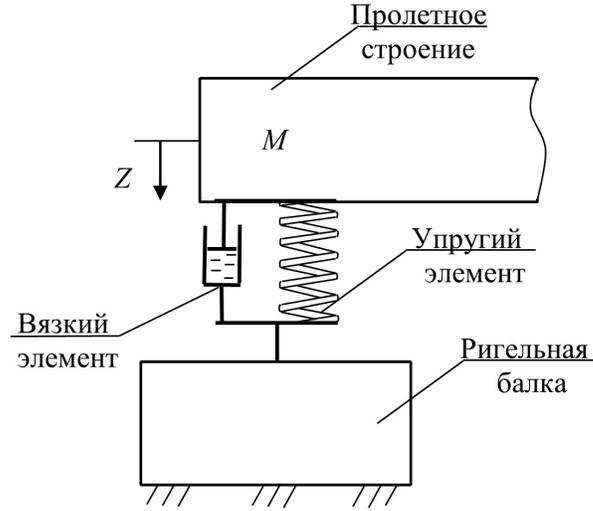


Рис. 2. Береговая опора балочного пролетного строения с вязкоупругим демпфером типа Кельвина-Фойгта.

В качестве метода решения системы (1) традиционно используется представление основных неизвестных перемещений и их производных в пространстве Лапласа [6,9,13]. Для обратного перехода в пространство оригиналов требуется записать характеристические уравнения и найти параметры  $p$ , при которых знаменатель и системные параметры обращаются в ноль. В случае системы (1) эти соотношения принимают вид:

$$K \cdot p + C = 0, \quad (2)$$

$$m_2 \cdot p^2 + K \cdot p + C = 0, \quad (3)$$

$$m_1 \cdot m_2 \cdot p^4 + K \cdot p^3 \cdot (2m_1 + m_2) + Cp^2 \cdot (2m_1 + m_2) - K^2 \cdot p^2 - K \cdot C \cdot p - C^2 = 0. \quad (4)$$

Совокупность решений уравнений (2) – (4) можно представить графически в виде набора точек на действительно-мнимой плоскости, каждая из которых получена при определенных величинах параметров  $K$  и  $C$ . Множество точек-решений объединяются между собой в концентрические кривые, в центре которых расположены полюсы. Физически полюсы означают равновесные значения параметров вязкости и жесткости для которых требуется определить перемещения взаимодействующих тел и силу контакта между ними [14,15].

Работа опорного демпфированного узла характеризуется геометрическими (перемещение), кинематическими (скорость вертикального перемещения) и динамическими (вертикальное ускорение) характеристиками. Рассмотрим более подробно функцию вертикального перемещения [15,16].

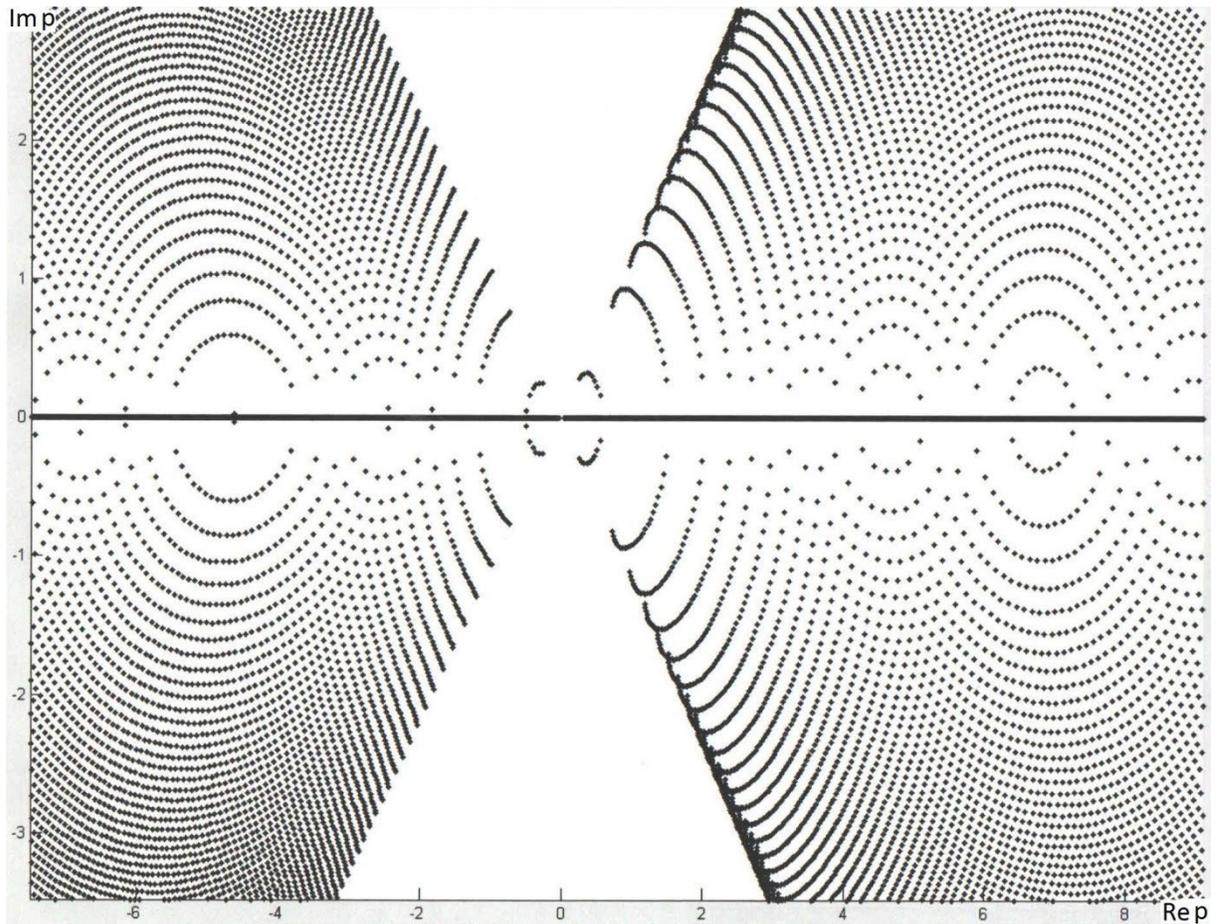


Рис. 3. Графическая зависимость поведения корней характеристических уравнений и системных множителей (2) – (4) для различных значений параметров вязкости  $K$  и упругости  $C$ .

Граничные условия для шарнирного опирания пролетного строения можно представить в виде (если начало координат будет находиться в середине пролета):

$$u(-l, 0) = u(l, 0) = \frac{\partial^2 u(-l, 0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(l, 0)}{\partial x^2} = 0, \quad (5)$$

здесь  $l$  – полудлина пролетного строения.

В начальный момент времени считаем, что опорные узлы (рис.2) находятся в недеформированном состоянии, т.е. к граничным условиям (5) можно присоединить начальные:

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (6)$$

Для описания динамического поведения пролетного строения балочной расчетной схемы [17,18] часто используют дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = -\frac{\rho}{EI} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{q(x, t)}{EI}, \quad (7)$$

здесь  $\rho$  - погонная масса стержня,  $E$  - модуль упругости материала пролетного строения,  $I$  - момент инерции поперечного сечения балки,  $q(x,t)$  - внешняя нагрузка от экипажей.

Для проверки условия прочности пролетного строения вычисляют наибольшие нормальные (в середине пролета) и касательные напряжения (на опоре):

$$\sigma_{\nu} = \frac{M(x = \frac{l}{2})}{1W_{nt}} \leq R_y \cdot m; \quad (8)$$

$$\tau_{\nu} = \frac{Q_0 \cdot S_{br}}{2 \cdot J_{br} t_w} \leq R_s; \quad (9)$$

здесь  $m, \nu_1, \nu_2$  - коэффициенты надежности;  $R_y$  - расчетное сопротивление материала пролетного строения изгибу;  $R_s$  - расчетное сопротивление материала пролетного строения срезу;  $W_{nt}$  - момент сопротивления поперечного сечения нетто пролетного строения;  $t_w$  - толщина стенки балки;  $J_{br}$  - момент инерции поперечного сечения брутто пролетного строения;  $S_{br}$  - статический момент части поперечного сечения  $S_{br} = 0,5 \cdot F_{bp} \cdot y_{цт}$ ,  $F_{br}$  - площадь сечения брутто пролетного строения;  $y_{цт}$  - ордината центра тяжести половины сечения пролетного строения.

Выбор в качестве одного из основных параметров мониторинга технического состояния мостового перехода частоты собственных колебаний пролетного строения объясняется тем, что данная характеристика отражена в нормативно-правовой документации по проектированию и эксплуатации искусственных сооружений. При проектировании мостовых переходов, пролетные строения которых работают по балочной схеме необходимо, чтобы первая собственная частота вертикальных колебаний, удовлетворяла условиям

$$f_{1,min} \leq f_1 \leq f_{1,max}, \quad 1.2f_1 \leq f_{1,t} \quad , \quad (10)$$

здесь  $f_1$  - первая собственная частота вертикальных колебаний;  $f_{1,t}$  - собственная частота по первой крутильной форме;  $f_{1,max}$  - верхний предел первой собственной частоты, связан с частотами возбуждения, возникающими из-за неровностей проезжей части и нехарактерных деформаций колесных пар транспортных средств;  $f_{1,min}$  - нижний предел собственной частоты, связан с возможным резонансом пролетного строения из-за перемещения колесных пар экипажей и существенно зависит от длины пролетного строения.

Графически описанные условия-ограничения могут быть представлены в виде двух кривых, между которыми находится область допустимых значения для первой собственной частоты пролетного строения (рис.4), кривая для  $f_{1,max}$  - представлена сплошной линией, а для  $f_{1,min}$  - пунктирной.

Как показывают результаты исследований, данные графические условия ограничения хорошо подходят для скоростей экипажей от 100 до 450 км/ч.

Определяющее уравнение (7) решается в пространстве изображений, это позволяет уменьшить число неизвестных величин, к которым относится функция прогибов (нормальных перемещений) и ее производные по времени и по продольной координате, поскольку в пространстве изображений вместо производных по времени присутствуют сами функции, умноженные на параметр  $p$ .

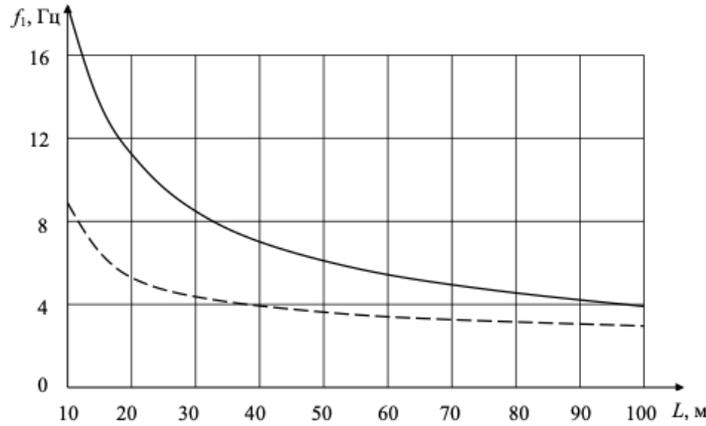


Рис. 4. Ограничения собственной частоты колебаний по первой форме для пролетных строений с разрезной балочной расчетной схемой.

Перемещение в этом случае можно записать в следующем виде:

$$\tilde{u}(x, p) = \frac{2\tilde{P}(p)l^3}{EI\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^2n^4} \sin\left(\frac{n\pi a}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (11)$$

в этом выражении  $a$  – координата места приложения внешней силы  $\tilde{P}(p)$  от экипажа, верхняя тильда обозначает на представление величины в пространстве Лапласа.

Несмотря на увеличивающиеся скорости движения транспортных средств, их абсолютные величины все еще существенно меньше скоростей продольных и поперечных волн в материале искусственного сооружения, поэтому имеет смысл рассматривать немгновенное динамическое воздействие на элементы инфраструктуры со стороны экипажей, а также учитывать местное деформирование взаимодействующих элементов [19-21]. Таким образом, функцию  $\tilde{P}(p)$  в пространстве изображений или  $P(t)$  в пространстве оригиналов предлагается определять из решения контактной задачи и за основу взять модифицированную модель типа [16,22,23]:

$$\alpha(t) = bP(t)^q, \quad (12)$$

здесь  $\alpha(t)$  - функция местного смятия материалов контактирующих тел от времени, параметры  $b$  и  $q$  определяются геометрическими и механическими характеристиками взаимодействующих элементов сооружения.

Используя описанный подход, в настоящей работе получены графические зависимости нормального перемещения точек пролетного строения от времени для различных значений параметров упругости и вязкости опорного узла (рис.5) [24-26]. Кривые 1, 2, 3 получены для следующих пар значений  $C$  и  $K$  соответственно:  $C = 10^4$  Н/м,  $K = 10^6$  Нс/м;  $C = 10^4$  Н/м,  $K = 10^4$  Нс/м;  $C = 10^6$  Н/м,  $K = 10^4$  Нс/м. Остальные параметры взаимодействия принимают следующие значения:  $E = 7 \cdot 10^4$  МПа,  $q = 2/3$ ,  $m = 20$  т,  $V_0 = 10$  м/с,  $l = 9$  м,  $r_0 = 0.1$  м, тип балки пролетного строения – железобетонная балка серии 3.503.1-81 (двутаповая с развитым верхним поясом). Полученные зависимости говорят о том, что после приложения нагрузки через некоторый временной

интервал конструкция вернется в свое первоначальное положение, максимальное значение вертикального перемещения с изменением соотношения параметров жесткости и вязкости смещается вправо в пределах времени деформирования [27,28]. Опорный узел реализованный в виде вязкоупругого демпфера типа Кельвина-Фойгта позволяет воздействовать на характеристики напряженно-деформированного состояния пролетного строения, в том числе, на прогиб. Совмещая полученные результаты рис. 5 с предельными значениями собственных частот колебаний рис. 4 можно получить рекомендуемые скорости движения транспортных средств по мостовому переходу, а можно решать и обратную задачу, подобрать значения упругих и вязких параметров опоры пролетного строения для организации движения в составе высокоскоростной транспортной системы.

Формат получаемых результатов соответствует требованиям нормативных документов о попадании первой формы собственных частот колебаний мостовых пролетов в интервал между верхним и нижним значением соответствующего предела, это позволит при строительстве, реконструкции или капитальных ремонтах искусственных сооружений правильно подобрать длину пролетных строение, скоростной режим движения транспортных средств и вязкоупругие параметры узла опирания пролетного строения на береговую опору.

Мониторинг мостовых переходов с использованием предложенных математических моделей позволит своевременно диагностировать износ, появление дефектов в бетоне растянутой зоны и разрушение опорных узлов пролетных строений, например, растрескивание и выкрашивание резинометаллических опорных частей, выявлять опирание железобетонного элемента на элемент из такого же материала (это возможно как из-за полного разрушения резинометаллической опорной части).

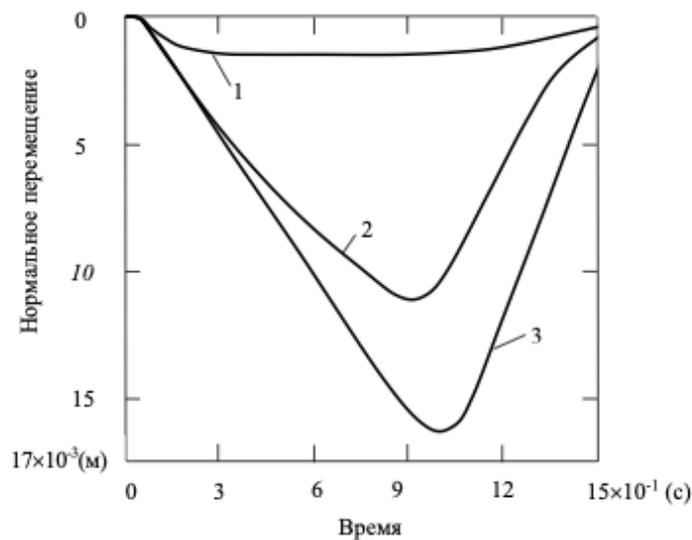


Рис. 5. Зависимость нормального перемещения от времени для различных значений упругих и вязких характеристик узла опирания.

Выявление упомянутых дефектов таких дефектов посредством оценки частот собственных колебаний, позволяет более точно планировать ремонтные работы, вводить

ограничения на нагрузку, передаваемую на ось транспортного средства, общий вес экипажа, на расстояние между экипажами и скорости при их движении по искусственному сооружению.

Полученные аналитические и графические зависимости особенно актуальны для низководных мостов, которые отличаются тем, что не позволяют провести визуальный осмотр и инструментальное обследование с нижней стороны несущей части пролетного строения.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hess J. Rail expansion joints – the underestimated track work material // *Track-Bridge Interaction on High-Speed Railways*, Taylor & Francis Group, London, UK. 2009. P. 149–164.
- [2] Технические условия для конструкций пути на подходах к искусственным сооружениям. Утв. Департаментом пути и сооружений МПС 16.12.2003, М. Транспорт. 2004. 24 с.
- [3] Специальные технические условия. Верхнее строение пути участка Москва – Казань – Екатеринбург высокоскоростной железнодорожной магистрали. Технические нормы и требования к проектированию и строительству. Санкт-Петербург. 2014. 32 с.
- [4] Иванченко И. И. Динамика транспортных сооружений. Высокоскоростные подвижные, сейсмические и ударные нагрузки. Москва, 2011. 574 с. ISBN: 978–5–02–037488–1.
- [5] Matsumoto N., Asanuma K. Some experiences on track-bridge interaction in Japan // *Track-Bridge Interaction on High-Speed Railways*. Taylor & Francis Group, London, UK. 2009. P. 80–97.
- [6] Fryba L. Dynamic of railway bridges. Academia, Praha, 1996. 330 p. ISBN: 0–7277–2044–9.
- [7] Poliakov V. Interaction Optimization in Multibody Dynamic System // *International Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2017. Volume 2. P. 43–51.
- [8] Барченков А. Г. Динамический расчет автодорожных мостов. М.: Транспорт, 1976 – 200 с.
- [9] Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 600 с.
- [10] Коган А. Я. Динамика пути и его взаимодействие с подвижным составом. М. Транспорт. 1997, 325 с.
- [11] Chen Y. H., Li C. Y. Dynamic response of elevated high-speed railway // *J. Bridge Eng. ASCE*. No 5(2). 2000. P. 124–130.
- [12] Kawatani M., Kim C. W. Computer simulation for dynamic wheel loads of heavy vehicles // *Struct. Eng. & Mech.* No 12(4). 2001. P. 409–428.
- [13] Pan T. C., Li J. Dynamic vehicle element method for transient response of coupled vehicle–structure systems // *J. Struct. Eng. ASCE*. No 128(2). 2002. P. 214–223.
- [14] Kou J. W., DeWolf J. T. Vibrational behavior of continuous span highway bridge - Influencing variables // *J. Struct. Eng. ASCE*. No 123(3). 1997. P. 333–344.
- [15] Курбацкий Е. Н., Тигов Е. Ю., Голосова О. А., Косауров А. П. Метод защиты сооружений от вибраций и сейсмических воздействий // *Строительство и реконструкция*. 2018. С. 55 – 67.
- [16] Kurihara M. Vibration of an elastic beam subjected to discrete moving loads / M. Kurihara, T. Shimogo // *J. Mech. Design. ASME*. No 100(7). 1978. P. 514–519.
- [17] Loktev A. A. Non-elastic models of interaction of an impactor and an Uflyand-Mindlin plate // *International Journal of Engineering Science*. 2012. Vol. 50. No 1. P. 46-55.
- [18] Loktev A. A. Dynamic contact of a spherical indenter and a prestressed orthotropic Uflyand-Mindlin plate // *Acta Mechanica*. 2011. Vol. 222. No 1-2. P. 17-25.
- [19] Glusberg B., Savin A., Loktev A., Korolev V., Shishkina I., Alexandrova D., Loktev D. New lining with cushion for energy efficient railway turnouts // *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2020. Vol. 982. P. 556-570.
- [20] Loktev A. A., Korolev V. V., Shishkina I. V., Basovsky D. A. Modeling the dynamic behavior of the upper structure of the railway track // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 189. P. 133-137.
- [21] Локтев А. А., Королев В. В., Локтев Д. А., Шукюров Д. Р., Гелюх П. А., Шишкина И. В. Перспективные конструкции мостовых переходов на транспортных магистралях // *Вестник научно-исследовательского института железнодорожного транспорта*. 2018. Т. 77. № 6. С. 331-336.
- [22] Гридасова Е. А., Никифоров П. А., Локтев А. А., Гришин А. В., Сухорада А. Е. Влияние высокочастотного нагружения на структуру малоуглеродистой стали // *Наука и техника транспорта*. 2017. № 2. С. 82-91.

- [23] Локтев А. А., Локтев Д. А. Решение задачи ударного взаимодействия твердого тела и сферической оболочки лучевым методом // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2007. № 2. С. 128-135.
- [24] Lyudagovsky A., Loktev A., Korolev V., Shishkina I., Alexandrova D., Geluh P., Loktev D. Energy efficiency of temperature distribution in electromagnetic welding of rolling stock parts // В сборнике: E3S Web of Conferences. 2018 International Science Conference on Business Technologies for Sustainable Urban Development, SPbWOSCE 2018. 2019. P. 01017.
- [25] Локтев А. А. Упругопластическая модель взаимодействия цилиндрического ударника и пластинки // Письма в Журнал технической физики. 2007. Т. 33. № 16. С. 72-77.
- [26] Локтев А. А. Ударное взаимодействие твердого тела и упругой ортотропной пластинки // Механика композиционных материалов и конструкций. 2005. Т. 11. № 4. С. 494-508.
- [27] Локтев А. А., Локтев Д. А. Решение задачи ударного взаимодействия твердого тела и сферической оболочки лучевым методом // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2007. № 2. С. 128-135.
- [28] Сычёв В. П., Локтев А. А., Локтев Д. А., Виноградов В. В. Повышение информативности оценки содержания железнодорожного пути // Мир транспорта. 2017. Т. 15. № 2 (69). С. 20-31.

A. A. Loktev<sup>1,2</sup>, L. A. Illarionova<sup>1</sup>, A. Barakat<sup>2</sup>

## POSSIBILITIES OF VIBRATION DIAGNOSTICS OF LOW-WATER BRIDGE CROSSINGS

<sup>1</sup>*Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

**Abstract.** The present investigation is devoted to the study of the dynamic behavior of a single-span low-water bridge and the assessment of the possibility of detecting defects appearing during its operation. The relevance of the work is confirmed by the fact that the water level for low-water bridges does not allow for a visual inspection and instrumental examination of the lower part of the superstructure and the girder beams of the supports. Since such bridge crossings do not take into account the possibility of ice passage, high waters and water transport, generalized viscosity and elasticity parameters are introduced into the viscoelastic model of the superstructure support, which can allow these factors to be taken into account. A beam system has been adopted as the design scheme, to describe the deformation of which equations for a beam or a strip plate can be applied, which can be reinforced with an additional structure to increase rigidity. In this paper, analytical and graphical dependences are obtained for the geometric and dynamic characteristics of the deformation of the superstructure, with the help of which it is possible to assess the operational condition of the bridge by the natural frequencies of vibrations of the superstructure.

**Keywords:** Bridge crossing monitoring, natural frequencies, superstructure, dynamic load, viscoelastic model, vertical displacement

---

*Loktev Alexey Alekseevich* Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia, Professor, National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia, *Lilia Alekseevna Illarionova*, Senior Lecturer, Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia *Barakat Ahmad*, PhD student, National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

## REFERENCES

- [1] Hess J. Rail expansion joints - the underestimated track work material // *Track-Bridge Interaction on High-Speed Railways*, Taylor & Francis Group, London, UK. 2009. P. 149–164.
- [2] Technical conditions for track structures on approaches to artificial structures. Approved. Department of tracks and structures of the Ministry of Railways 12/16/2003, M. Transport. 2004. 24 p.
- [3] Special specifications. Track superstructure of the Moscow - Kazan - Yekaterinburg section of the high-speed railway. Technical standards and requirements for design and construction. Saint Petersburg. 2014. 32 p.
- [4] Ivanchenko I. I. Dynamics of transport facilities. High-speed moving, seismic and shock loads. Moscow, 2011. 574 p. ISBN: 978-5-02-037488-1.
- [5] Matsumoto N., Asanuma K. Some experiences on track-bridge interaction in Japan // *Track-Bridge Interaction on High-Speed Railways*. Taylor & Francis Group, London, UK. 2009. P. 80-97.
- [6] Fryba L. Dynamic of railway bridges. Academia, Praha, 1996. 330 p. ISBN: 0-7277-2044-9.
- [7] Poliakov V. Interaction Optimization in Multibody Dynamic System // *International Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2017. Volume 2. P. 43–51.
- [8] Barchenkov A. G. Dynamic calculation of road bridges. Moscow: Transport, 1976. 200 p.
- [9] Bolotin VV Dynamic stability of elastic systems. M.: Goste-hizdat. 600 p.
- [10] A. Ya. Kogan. Track dynamics and its interaction with rolling stock. M. Transport. 1997, 325 p.
- [11] Chen Y. H., Li C. Y. Dynamic response of elevated high-speed railway // *J. Bridge Eng. ASCE*. No 5 (2). 2000. P. 124-130.
- [12] Kawatani M., Kim C. W. Computer simulation for dynamic wheel loads of heavy vehicles // *Struct. Eng. & Mech.* No 12 (4). 2001. P. 409-428.
- [13] Pan T. C., Li J. Dynamic vehicle element method for transient response of coupled vehicle – structure systems // *J. Struct. Eng. ASCE*. No 128 (2). 2002. P. 214-223.
- [14] Kou J. W., DeWolf J. T. Vibrational behavior of continuous span highway bridge - Influencing variables // *J. Struct. Eng. ASCE*. No 123 (3). 1997. P. 333-344.
- [15] Kurbatsky E. N., Titov E. Yu., Golosova O. A., Kosaurov A. P. Method of protecting structures from vibrations and seismic influences // *Construction and reconstruction*. 2018. P. 55 - 67.
- [16] Kurihara M. Vibration of an elastic beam to discrete moving loads / M. Kurihara, T. Shimogo // *J. Mech. Design. ASME*. No 100 (7). 1978. P. 514-519.
- [17] Loktev A. A. Non-elastic models of interaction of an impactor and an Uflyand-Mindlin plate // *International Journal of Engineering Science*. 2012. Vol. 50. No 1. P. 46-55.
- [18] Loktev A. A. Dynamic contact of a spherical indenter and a prestressed orthotropic Uflyand-Mindlin plate // *Acta Mechanica*. 2011. Vol. 222.No. 1-2. P. 17-25.
- [19] Glusberg B., Savin A., Loktev A., Korolev V., Shishkina I., Alexandrova D., Loktev D. New lining with cushion for energy efficient railway turnouts // *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2020. Vol. 982. P. 556-570.
- [20] Loktev A. A., Korolev V. V., Shishkina I. V., Basovsky D. A. Modeling the dynamic behavior of the upper structure of the railway track // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 189. P. 133-137.
- [21] Loktev A. A., Korolev V. V., Loktev D. A., Shukurov D. R., Gelyukh P. A., Shishkina I. V. Perspective designs of bridge crossings on highways // *Bulletin of the Scientific Research Institute of Railway Transport*. 2018.Vol. 77. No. 6. P. 331-336.
- [22] Gridasova E. A., Nikiforov P. A., Loktev A. A., Grishin A. V., Suhorada A. E. Influence of high-frequency loading on the structure of low-carbon steel // *Science and technology of transport*. 2017. No. 2. P. 82-91.
- [23] Loktev A. A., Loktev D. A. Solution of the problem of impact interaction of a rigid body and a spherical shell by the ray method // *Bulletin of the Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*. 2007. No. 2. P. 128-135.
- [24] Lyudagovsky A., Loktev A., Korolev V., Shishkina I., Alexandrova D., Geluh P., Loktev D. Energy efficiency of temperature distribution in electromagnetic welding of rolling stock parts // In the collection: E3S Web of Conferences. 2018 International Science Conference on Business Technologies for Sustainable Urban Development, SPbWOSCE 2018.2019.P. 01017.
- [25] Loktev A. A. Elastoplastic model of interaction of a cylindrical impactor and a plate // *Letters to the Journal of Technical Physics*. 2007. Vol. 33. No. 16. P. 72-77.

- [26] Loktev A. A. Shock interaction of a rigid body and an elastic orthotropic plate // Mechanics of composite materials and structures. 2005. Vol. 11. No. 4. P. 494-508.
- [27] Loktev A. A., Loktev D. A. Solution of the problem of impact interaction of a rigid body and a spherical shell by the ray method // Bulletin of the Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. 2007. No. 2. P. 128-135.
- [28] Sychev V. P., Loktev A. A., Loktev D. A., Vinogradov V. V. Increasing the information content of assessing the maintenance of a railway track // World of transport. 2017. Vol. 15. No. 2 (69). P. 20-31.

В. И. Прокопьев, П. Э. Стурник

## ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПРОГИБА БАЛКИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

НИУ Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

**Аннотация.** Метод конечных разностей (МКР) один из самых простых и широко распространенных приближенных расчетных методов. Погрешность численного решения зависит от числа разбиений в расчетной схеме. Исследуется влияние числа разбиений на погрешность численного решения на примере краевой задачи для дифференциального уравнения прогиба балки Бернулли при действии статической нагрузки.

**Ключевые слова:** пластичность, сложное нагружение, постулат изотропии, экспериментальные данные, траектория деформирования, векторные и скалярные свойства материала.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.50.4.009

УДК: 517;539.3

**Введение.** Метод конечных разностей (МКР) один из самых простых и широко распространенных приближенных расчетных методов, используемых в механике сплошных сред [1–3]. Одним из недостатков метода является отсутствие точной оценки погрешности численного решения при расчете элементов строительных конструкций. Погрешность численного решения зависит от числа разбиений в расчетной схеме. Исследуется влияние числа разбиений на погрешность численного решения на примере краевой задачи для дифференциального уравнения прогиба балки Бернулли при действии статической нагрузки.

**Основная часть.** Определение прогиба балки Бернулли сводится, к решению следующей краевой задачи:

$$y^{(4)}(x) + \beta y(x) = F(x), \quad 0 < x < L. \quad (1)$$

Условия на концах балки приняты для следующих трех вариантов:

---

© Прокопьев В. И., Стурник П. Э., 2021

*Прокопьев Валерий Иванович*

e-mail: virgokoriev@mail.ru, кандидат технических наук, профессор НИУ Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

*Стурник Павел Эдуардович*

e-mail: virgokoriev@mail.ru, студент НИУ Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Поступила 01.11.2021

1. шарнирное опирание концов

$$\begin{cases} y(0) = y''(0) = 0 \\ y(L) = y''(L) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

2. жесткое защемление концов

$$\begin{cases} y(0) = y'(0) = 0 \\ y(L) = y'(L) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $y$  – прогиб балки;  $x$  – координата сечения по ее длине;  $L$  – длина балки;  $\beta = \frac{\tilde{k}}{EJ}$ ,  $\tilde{k} = k \cdot b_b$ ,  $EJ = E \cdot J$ ,  $J = b_b h_b^3 / 12$ ,  $h_b$  и  $b_b$  – высота и ширина поперечного сечения, соответственно,  $E$  – модуль упругости,  $J$  – момент инерции поперечного сечения балки,  $k$  – коэффициент, характеризующий отпор грунта в рамках модели Винклера.

В качестве модельного примера рассмотрим балку без упругого основания со следующими параметрами:  $F(x) = \frac{P}{EJ} \delta(x - \frac{L}{2})$ ,  $P = 100$  кН – нагрузка, заданная в средней точке (см. рис. 1.);  $L = 8$  м,  $h_b = 1.3$  м,  $b_b = 1$  м;  $E = 2560 \cdot 10^4$  кН/м<sup>2</sup>;  $k = 0$ .

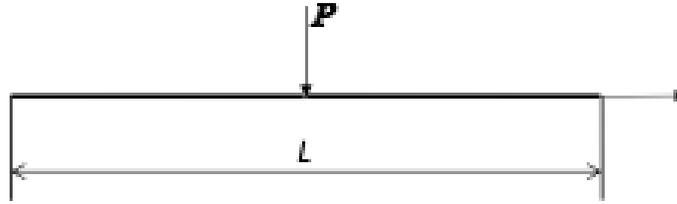


Рис. 1. Нагрузка, приложенная к балке.

Конечноразностное разбиение по длине балки на равные части с шагом  $h$  показано на рис. 2.



Рис. 2. Дискретная аппроксимация балки.

Обозначим  $n$  – общее количество точек, тогда  $h = L/(n - 1)$ . Координаты точек разбиения:  $x_i = h(i - 1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Значения прогиба в точках разбиения:  $y_i = y(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Разностные аналоги производных равны:

$$y'(x_i) \approx \begin{cases} (y_{i+1} - y_i)/h, & i = 1 \\ (y_{i+1} - y_{i-1})/(2h), & 1 < i < n \\ (y_i - y_{i-1})/h, & i = n \end{cases} \quad (4)$$

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}), \quad 1 < i < n \quad (5)$$

$$y'''(x_i) = \begin{cases} (y''(x_{i+1}) - y''(x_i))/h, & i = 1 \\ (y''(x_{i+1}) - y''(x_{i-1}))/2h, & 1 < i < n \\ (y''(x_i) - y''(x_{i-1}))/h, & i = n \end{cases} \quad (6)$$

$$y^{(4)}(x_i) \approx \frac{1}{h^4}(y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}) \quad (7)$$

Из уравнения (8) следует, что для представления разностного аналога уравнения (1) потребуется пять точек. При  $3 \leq i \leq n - 2$  разностный аналог уравнения (1) имеет вид

$$\frac{1}{h^4}(y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}) + \beta y_i = F_h(x_i). \quad (8)$$

Для представления разностных уравнений в точках  $i = 1, i = 2$ , а также в граничных точках  $i = n - 1, i = n$  воспользуемся краевыми условиями для вариантов (2) – (4):

вариант 1

$$\begin{cases} y_1 = y''(x_1) = 0 \\ y_n = y''(x_n) = 0 \end{cases}$$

вариант 2

$$\begin{cases} y_1 = y'(x_1) = 0 \\ y_n = y'(x_n) = 0 \end{cases}$$

Используя их разностные аналоги получим системы линейных алгебраических уравнений для этих вариантов:

вариант 1

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 &= 0 \\ y_{i-2} - 4y_{i-1} + (6 + \beta_h)y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} &= f_i, \quad i = 3, 4, \dots, n - 2; \\ y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2} &= f_{n-1} \\ y_n &= f_n, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{где } \beta_h = h^4\beta, f_i = \begin{cases} 0, & i = 1 \\ h^4F_h(x_i), & 2 \leq i \leq n - 1 \\ 0, & i = n \end{cases}, F_h(x_i) = F(x_i)/h.$$

вариант 2

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 \\ -y_1 + y_2 &= f_2 \\ y_{i-2} - 4y_{i-1} + (6 + \beta_h)y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} &= f_i, \quad i = 3, 4, \dots, n - 2; \\ -y_{n-1} + y_n &= f_{n-1} \\ y_n &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

Решения систем линейных алгебраических уравнений для каждого варианта краевых условий выполнялись для значений  $n = 2, 4, 16, 100, 1000, 10000$  по программе, составленной на языке программирования MATLAB. Расчеты выполнялись на 32 разрядном персональном компьютере.

**Анализ результатов расчета.** Было проведено сравнение максимальных прогибов из решения методом конечных разностей краевой задачи для дифференциального уравнения прогиба балки (1) для двух вариантов краевых условий (2) – (3) с аналитическим решением.

Аналитическое решение имеет вид [4]

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{\sqrt[4]{\beta}x}{\sqrt{2}}} \cos \frac{\sqrt[4]{\beta}x}{\sqrt{2}} + C_2 e^{\frac{\sqrt[4]{\beta}x}{\sqrt{2}}} \cos \frac{\sqrt[4]{\beta}x}{\sqrt{2}} + C_3 e^{\frac{\sqrt[4]{\beta}x}{\sqrt{2}}} \sin \frac{\sqrt[4]{\beta}x}{\sqrt{2}} + C_4 e^{-\frac{\sqrt[4]{\beta}x}{\sqrt{2}}} \sin \frac{\sqrt[4]{\beta}x}{\sqrt{2}} + \frac{P}{EJ\beta}.$$

Константы  $C_1, C_2, C_3, C_4$  находятся из удовлетворения решения каждому из трех краевых условий.

Результаты сравнения приведены в таблицах, где число делений  $N=n-1$ .

N	Аналитическое решение	МКР	Отличие прогибов в %
2	0,0001373 м	0,0001196 м	12,89
4	0,0001373 м	0,0001317 м	4,08
16	0,0001373 м	0,0001367 м	0,437
100	0,0001373 м	0,0001373 м	0
1000	0,0001373 м	0,0001373 м	0
10000	0,0001373 м	0,0002289 м	66,715

Таблица 1. Вариант краевых условий - 1

N	Аналитическое решение	МКР	Отличие прогибов в %
2	0,00005052 м	0,00004038 м	20,07
4	0,00005052 м	0,00004726 м	6,45
16	0,00005052 м	0,00005022 м	0,594
100	0,00005052 м	0,00005052 м	0
1000	0,00005052 м	0,00005052 м	0
10000	0,00005052 м	0,00008419 м	66,647

Таблица 2. Вариант краевых условий - 2

При небольшом числе разбиений наличие ошибки связано с выбором грубой расчетной сетки механической модели. При очень большом числе разбиений ошибка становится большой из-за накопления погрешностей округления в процессе арифметических операций на компьютере, что свидетельствует о плохой обусловленности решаемой системы линейных алгебраических уравнений [5]. Для оценки обусловленности используется число обусловленности  $C(A)$ , которое называется степенью обусловленности матрицы коэффициентов при неизвестных в системе линейных алгебраических уравнений [6]. Условная классификация системы линейных алгебраических уравнений в зависимости от степени обусловленности имеет вид

- $C = 1 \div 10$  – хорошо обусловленная система;
- $C = 10 \div 10^3$  – удовлетворительно обусловленная система;
- $C = 10^3 \div 10^5$  – плохо обусловленная система;
- $C > 10^5$  – почти вырожденная система.

Для вычисления обусловленности матрицы используется её норма. Число обусловленности матрицы принимается равным произведению норм матрицы и её обратной. В Matlab для вычисления нормы матрицы  $A$  используется функция  $\text{norm}(A)$ , а для вычисления числа обусловленности матрицы  $A$  используется функция  $\text{cond}(A)$ .

В таблицах ниже приведены результаты вычислений соответствующих норм матриц и степени обусловленности.

N	Норма матрицы	Число обусловленности матрицы
2	-	-
4	12,157	22,6404
16	15,7	6338,5
100	15,9921	9814900
1000	15,9999	98187000000
10000	-	-

Таблица 3. Вариант краевых условий - 1

N	Аналитическое решение	МКР	Отличие прогибов в %
2	0,00005052 м	0,00004038 м	20,07
4	0,00005052 м	0,00004726 м	6,45
16	0,00005052 м	0,00005022 м	0,594
100	0,00005052 м	0,00005052 м	0
1000	0,00005052 м	0,00005052 м	0
10000	0,00005052 м	0,00008419 м	66,647

Таблица 4. Вариант краевых условий - 2

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Самарский А. А. Теория разностных схем. 3-е изд. М.: Наука, 1989. 616 с.
- [2] Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы: введение в теорию. Учебное пособие. М.: Наука, 1977. 440 с.
- [3] Дегтярев А. А. Метод конечных разностей (электронное учебное пособие). Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет им. С. П. Королёва, 2011. 83 с.
- [4] Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 1. Под ред. д-ра техн. наук проф. И. А. Биргера и чл.-кор. Академии Латвийской ССР Я. Г. Пановко. М.: Издательство «Машиностроение». 1968. 832 стр.
- [5] Jurgen Dankert. Numerische methodn der mechanic. VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG, 1977. 318 p.
- [6] Варапаев В. Н. Вычислительная математика. Учебное пособие. М.: Московский государственный строительный университет, 2009. 162 с.

V. I. Prokopiev, P. E. Sturnik

**EVALUATION OF THE ACCURACY OF SOLVING THE BOUNDARY VALUE  
PROBLEM FOR THE DIFFERENTIAL EQUATION OF THE BEAM  
DEFLECTION BY THE METHOD OF FINITE DIFFERENCES**

*Moscow State University of Civil Engineers, Moscow, Russia*

**Abstract.** The finite difference method (MD) is one of the simplest and most widely used approximate calculation methods. The error of the numerical solution depends on the number of partitions in the calculation scheme. The influence of the number of partitions on the error of the numerical solution is investigated by the example of a boundary value problem for the differential equation of deflection of a Bernoulli beam under the action of a static load.

**Keywords:** finite difference method, error, boundary value problem, conditionality, system of linear algebraic equations, matrix.

**REFERENCES**

- [1] Samarskiy A. A. The theory of spaced circuits. 3rd ed. Moscow: Nauka, 1989. 616 p.
- [2] Godunov S. K., Ryaben'kii V. S. Difference Schemes: An Introduction to Theory. Tutorial. Moscow: Nauka, 1977. 440 p.
- [3] Degtyarev A. A. Finite Difference Method (electronic tutorial). Samara: Samara State Aerospace University named after S. P. Koroleva, 2011. 83 p.
- [4] Strength, stability, vibrations. Handbook in three volumes. Volume 1. Ed. Dr. tech. sciences prof. I. A. Birger and Corresponding Member. Academy of the Latvian SSR Ya. G. Panovko. M.: Publishing house "Mechanical engineering". 1968. 832 pp.
- [5] Jurgen Dankert. Numerische methodn der mechanic. VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG, 1977. 318 p.
- [6] Varapaev V. N. Computational Mathematics. Tutorial. Moscow: Moscow State University of Civil Engineering, 2009. 162 p.

---

*Prokopiev Valery Ivanovich*, Professor, Candidate of Technical Sciences, Moscow State University of Civil Engineers, Moscow, Russia.

*Sturnick Pavel Eduardovich*, undergraduate student, Moscow State University of Civil Engineers, Moscow, Russia.

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

## ПСЕВДОВЕКТОРНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ГЕМИТРОПНОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ УПРУГОСТИ

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** В статье обсуждаются вопросы, связанные с выводом и преобразованиями дифференциальных операторов, соответствующих модели гемитропного микрополярного континуума, при изменении ориентации базисного репера. Приводятся необходимые сведения из алгебры псевдотензоров. В терминах псевдотензоров формулируются уравнения динамики гемитропного микрополярного упругого тела с 9-ю определяющими псевдоскалярами. Указываются формы псевдовекторных гиперболических дифференциальных операторов в специальных системах координат. Обсуждаются свойства дифференциальных операторов изотропной микрополярной упругости. Рассмотрены преобразования дифференциальных операторов в случае зеркального отражения относительно заданной плоскости.

**Ключевые слова:** псевдотензор, фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, определяющий псевдоскаляр, микрополярный гемитропный континуум, дифференциальный оператор

DOI: 10.37972/chgpu.2021.50.4.005

УДК: 539.374

**1. Введение.** В случае, когда тела обладают микроструктурными особенностями возникает необходимость применения микрополярных теорий упругости [1–5]. Изотропное (центрально-симметричное) микрополярное тело не всегда может быть использовано в качестве математической модели материалов с микроструктурой. В особенности это касается материалов и объектов проявляющих свойства хиральности

---

© Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. 2021

*Мурашкин Евгений Валерьевич*

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

*Радаев Юрий Николаевич*

e-mail: y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, radaev.iurii.8e@kyoto-u.jp, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 19-51-60001, № 20-01-00666.

Поступила 20.01.2021

или имеющих винтовую микроструктуру. В этом случае, микрополярное твердое тело, оказывается изотропно относительно вращений координатного репера, но не относительно отражений. Такие среды называются полуизотропными (гемитропными). Материалы могут проявлять полуизотропность в микро- (кварц, сахар, биологические молекулы), а также в макро- масштабе (кости, пористые материалы, композиты, содержащие волокна или включения). Гемитропные среды из-за отсутствия физико-механической симметрии между объектом и его зеркальным отображением известны в оптике как оптически активные материалы. Они характеризуются присущей им лево- или правоориентированностью на оптических частотах из-за естественной спиральной структуры и, следовательно, не могут совпадать с их зеркальным отражением. Физические поля гемитропного микрополярного континуума в рамках математической модели представляются относительными тензорами. Математический аппарат относительных тензоров достаточно хорошо развит, о чем свидетельствуют многочисленные монографии по тензорному исчислению. Тем не менее, формализм относительных тензоров очень редко применяется в исследованиях по микрополярным средам [1–5].

Важное значение имеют дифференциальные операторы, соответствующие математической модели гемитропной микрополярной среды. Вид дифференциального оператора и условия его факторизуемости [5] могут существенно упростить построение решения системы уравнений, составляющих математическую модель. Настоящее исследование осуществляется на основе аппарата псевдотензорного исчисления. Ранее, в работах авторов [11, 14, 15] обсуждались вопросы применения алгебры и анализа псевдотензоров к задачам механики растущих тел и микрополярной теории упругости. Изучались условия гиперболичности и факторизуемости дифференциальных операторов изотропной микрополярной упругости [5].

Во введении обсуждается актуальность настоящего исследования. Приводятся необходимые литературные источники по алгебре псевдотензоров и гемитропной упругости.

Во втором разделе приводятся основные сведения из алгебры псевдотензоров. Вводится понятие фундаментального ориентирующего псевдоскаляра. В терминах псевдотензоров формулируются уравнения динамики гемитропного микрополярного упругого континуума с 9 определяющими псевдоскалярами.

В третьем разделе проводится анализ псевдовекторных дифференциальных операторов, соответствующих модели микрополярного материала. Особое внимание уделено координатным системам, удовлетворяющим ограничению  $e = \pm 1$ <sup>[+1]</sup>. Приводятся формы дифференциальных операторов в право- и левориентированных системах координат. Отмечается, что в отличие от гемитропных дифференциальных операторов, изотропные операторы сохраняют свою форму при изменении ориентации базисного репера.

Четвертый раздел статьи посвящен вопросам преобразования дифференциальных операторов гемитропного тела при зеркальном отражении относительно заданной плоскости. Приведены формы для дифференциальных операторов, векторов перемещений и микровращений. Полученные результаты позволяют заключить, что произвольно заданному решению системы дифференциальных уравнений гемитропной микрополярной упругости соответствует зеркально преобразованное решение. Это обстоятельство позволяет вести речь о прямых и зеркальных модах при распространении связанных монохроматических волн перемещений и микровращений [16].

**2. Система дифференциальных уравнений динамики гемитропного микрополярного упругого континуума.** Динамические уравнения гемитропного микрополярного тела в подавляющем большинстве источников выводятся в терминах абсолютных тензоров [1–3]. Однако, как показали недавние исследования [11, 14, 15], геометрически и физически корректная формулировка уравнений *гемитропной* микрополярной теории возможна только в терминах псевдотензоров. Здесь мы не будем подробно воспроизводить определение и свойства псевдотензоров. Изложение алгебры псевдотензоров с необходимой степенью полноты можно найти в руководствах по тензорному анализу [17–22], а ее применение к механике континуума в работах [11, 14, 15]. Исключительное значение при этом имеет понятие фундаментального ориентирующего псевдоскаляра  $e$  [11, 14, 15], который в  $N$ -мерном пространстве можно определить как косое произведение [23, с. 63–65] абсолютных векторов ковариантного базиса

$$[\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N] = e. \quad (1)$$

Не сложно показать, что в метрическом пространстве справедливо соотношение

$$e^2 = g, \quad (2)$$

где  $g$  — детерминант метрического тензора.

В пространстве трех измерений справедливо

$$e_{ijk} = [\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j, \mathbf{z}_k] = (\mathbf{z}_i \times \mathbf{z}_j) \cdot \mathbf{z}_k, \quad (3)$$

тогда

$$e = e_{123}^{[+1]} = [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3] = (\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2) \cdot \mathbf{z}_3. \quad (4)$$

Отметим лишь, что псевдотензоры легко преобразовывать в абсолютные тензоры при помощи фундаментального ориентирующего псевдоскаляра  $e$  (см. [11, 14, 15]). Для произвольного псевдотензора веса  $W$  имеем

$$T_{ij\dots l}^{pqr\dots s} = e^{-W} T_{ij\dots l}^{[W]pqr\dots s}. \quad (5)$$

Следствием принципа виртуальных перемещений [4, 15] являются уравнения динамики микрополярной среды, которые примем в форме

$$\nabla_i t^{ik} = \rho \partial_{..}^2 u^k, \quad (6)$$

$$\nabla_i \mu_{.k}^{[-1]i} - 2 \tau_k^{[-1]} = \rho \mathfrak{S} \partial_{..}^2 \phi_k, \quad (7)$$

где  $\tau_j^{[-1]}$  — ассоциированный (сопутствующий) псевдовектор силовых напряжений

$$-\tau_j^{[-1]} = \frac{1}{2} \epsilon_{jik} t^{[ik]}, \quad t^{[ik]} = -\epsilon^{ikj} \tau_j^{[-1]}. \quad (8)$$

Ассоциированный (сопутствующий) вектор моментных напряжений определяется по аналогии с (8)

$$\mu^i = \frac{1}{2} \epsilon^{iks} \mu_{[ks]}^{[-1]}, \quad \mu_{[is]}^{[-1]} = \epsilon_{isj} \mu^j. \quad (9)$$

Введем микрополярный упругий потенциал  $\mathcal{U}$ , рассчитанный на единицу инвариантного элемента объема, с псевдотензорными аргументами

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon_{(ij)}, \kappa^{[+1](ij)}, \varphi^{[+1]i}, \kappa_i), \quad (10)$$

где

$$\epsilon_{ij} = \nabla_i u_j - \epsilon_{ijk} \overset{[+1]}{\varphi}^k, \quad \overset{[+1]}{\varphi}^i = \overset{[+1]}{\phi}^i - \frac{1}{2} \epsilon^{ikl} \nabla_k u_l, \quad \kappa_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijs} \overset{[+1]}{\kappa}^{[js]}. \quad (11)$$

Обычно, аргументами упругого потенциала выступают абсолютные тензоры. Здесь существенным является использование формализма псевдотензоров, обеспечивающего чувствительность определяющих псевдоскаляров к преобразованиям инверсии пространства и зеркальным отражениям.

Упругий потенциал  $\mathcal{U}$  по физическому смыслу является объективной величиной и не может меняться при повороте осей системы координат. Поэтому он (так же как и его первая вариация  $\delta\mathcal{U}$ ) является абсолютным скаляром. Первая вариация упругого потенциала представляется сбалансированной по весам суммой

$$\delta\mathcal{U} = t^{(ij)} \delta\epsilon_{ij} + \overset{[-1]}{\mu}_{(ij)} \delta \overset{[+1]}{\kappa}^{(ij)} + 2 \overset{[-1]}{\tau}_i \delta \overset{[+1]}{\varphi}^i + 2\mu^i \delta\kappa_i, \quad (12)$$

откуда могут быть получены определяющие уравнения:

$$t^{(ij)} = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\epsilon_{ij}}, \quad \overset{[-1]}{\mu}_{(ij)} = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial \overset{[+1]}{\kappa}^{(ij)}}, \quad 2 \overset{[-1]}{\tau}_i = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial \overset{[+1]}{\varphi}^i}, \quad 2\mu^i = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\kappa_i}. \quad (13)$$

В качестве потенциала  $\mathcal{U}$ , который как указывалось выше инвариантен относительно поворотов и переносов пространства, а также относительно преобразований инверсии пространства и зеркальных отражений, в гемитропном случае следует выбрать квадратичную функцию

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & G[\nu(1-2\nu)^{-1} g^{is} g^{lm} \epsilon_{(is)} \epsilon_{(lm)} + \\ & + \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} c_3 g_{is} g_{lm} \overset{[+1]}{\kappa}^{(is)} \overset{[+1]}{\kappa}^{(lm)} + g^{is} g^{lm} \epsilon_{(il)} \epsilon_{(sm)} + \\ & + \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} g_{is} g_{lm} \overset{[+1]}{\kappa}^{(il)} \overset{[+1]}{\kappa}^{(sm)} + 2 \overset{[-2]}{c_1} g_{is} \overset{[+1]}{\varphi}^i \overset{[+1]}{\varphi}^s + \\ & + \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} \overset{[+2]}{c_2} g^{is} \kappa_i \kappa_s + \overset{[-1]}{L} c_4 g^{is} g_{lm} \epsilon_{(is)} \overset{[+1]}{\kappa}^{(lm)} + \\ & + \overset{[-1]}{L} c_5 \epsilon_{(is)} \overset{[+1]}{\kappa}^{(is)} + \overset{[-1]}{L} c_6 \kappa_i \overset{[+1]}{\varphi}^i], \quad (14) \end{aligned}$$

где  $G$  — модуль сдвига (имеет размерность силовых напряжений);  $\nu$  — коэффициент

Пуассона (не имеет физической размерности);  $\overset{[-1]}{L}$  — характеристическая микродлина;

$\overset{[-2]}{c_1}$ ,  $\overset{[+2]}{c_2}$ ,  $c_3$ ,  $c_4$ ,  $c_5$ ,  $c_6$  — не имеющие физической размерности псевдоскаляры.

В результате приходим к определяющим уравнениям гемитропной микрополярной среды:

$$\begin{aligned}
 t^{(is)} &= 2G \left( \nu(1-2\nu)^{-1} g^{is} g^{lm} + g^{il} g^{sm} \right) \epsilon_{(lm)} + \\
 &\quad + G L^{[-1]} (c_4 g^{is} g_{lm} \kappa^{[+1](lm)} + c_5 \kappa^{[+1](is)}), \\
 \mu_{(is)}^{[-1]} &= 2G L^{[-1]} L^{[-1]} (c_3 g_{is} g_{lm} + g_{il} g_{sm}) \kappa^{[+1](lm)} + \\
 &\quad + G L^{[-1]} (c_4 g_{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + c_5 \epsilon_{(is)}), \\
 \tau_i^{[-1]} &= 2G c_1 g_{is}^{[-2]} \varphi^{[+1]_s} + \frac{1}{2} G L^{[-1]} c_6 \kappa_i, \\
 \mu^i &= G L^{[-1]} L^{[-1]} L^{[+2]} c_2 g^{is} \kappa_s + \frac{1}{2} G L^{[-1]} c_6 \varphi^i.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Уравнения динамики гемитропного микрополярного упругого континуума в криволинейных координатах, вводя обозначения для дифференциальных операторов  $\mathcal{L}^i$  и  $\mathcal{M}_i^{[-1]}$  и принимая обозначения для определяющих постоянных

$$c'_4 = c_4 + \frac{1}{2} c_5 + \frac{1}{4} c_6, \quad c'_5 = \frac{1}{2} c_5 - \frac{1}{4} c_6, \quad c'_6 = -c_6 \tag{16}$$

записываются в форме

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^i(\partial., \nabla_k, u^k, \phi^{[+1]_k}) &= G[(1 + e^{2[-2]} c_1) \nabla^s \nabla_s u^i + \\
 &\quad + (1 - e^{2[-2]} c_1 + 2\nu(1-2\nu)^{-1}) \nabla^i \nabla_k u^k + 2 c_1^{[-2]} \epsilon^{ikl} \nabla_k \phi_l^{[+1]} + \\
 &\quad + L^{[-1]} c'_4 \nabla^i \nabla_k \phi^{[+1]_k} + L^{[-1]} c'_5 \nabla^k \nabla_k \phi^{[+1]_i}] - \rho \partial_{..}^2 u^i = 0, \\
 \mathcal{M}_i^{[-1]}(\partial., \nabla_k, u^k, \phi^{[+1]_k}) &= G L^{[-1]} L^{[-1]} [(1 + e^{-2[+2]} c_2) \nabla^s \nabla_s \phi_i^{[+1]} + \\
 &\quad + (1 - e^{-2[+2]} c_2 + 2c_3) \nabla_i \nabla_k \phi^{[+1]_k} + L^{[-1]-1} c'_4 \nabla_i \nabla^k u_k + \\
 &\quad + L^{[-1]-1} c'_5 \nabla^k \nabla_k u_i + L^{[-1]-1} c'_6 \epsilon_{isl} \nabla^s \phi_l^{[+1]}] - \\
 &\quad - 2G c_1^{[-2]} (2 \phi_i^{[+1]} - e^2 \epsilon_{ikl} g^{ks} \nabla_s u^l) - \rho \mathfrak{I} \partial_{..}^2 \phi_i = 0.
 \end{aligned} \tag{17}$$

**3. Гиперболические дифференциальные операторы изотропной и гемитропной микрополярной упругости в координатных системах с различной ориентацией.** Рассмотрим подробней операторы в динамических уравнениях (17). Дифференциальные операторы  $\mathcal{L}^i$  и  $\mathcal{M}_i^{[-1]}$  являются соответственно векторным и псевдовекторным гиперболическими линейными дифференциальными операторами второго порядка. Причем естественными компонентами оператора  $\mathcal{L}^i$  являются контравариантные компоненты, а компоненты оператора  $\mathcal{M}_i^{[-1]}$  — ковариантными. Из

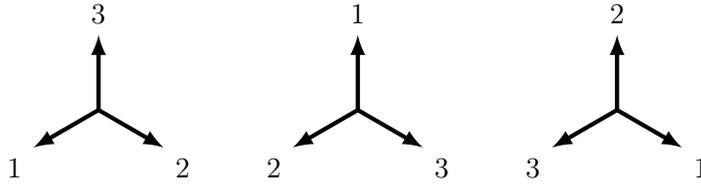


Рис. 1. Правоориентированные тройки направлений в трехмерном пространстве

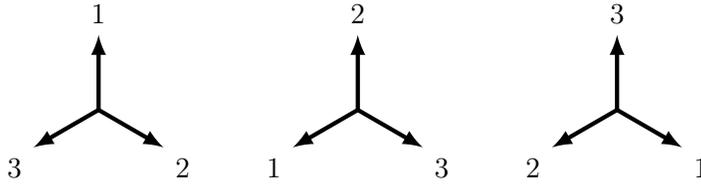


Рис. 2. Левоориентированные тройки направлений в трехмерном пространстве

уравнений (17) видно, что дифференциальный оператор  $\mathcal{L}^i$  имеет нулевой вес, а оператор  $\mathcal{M}_i^{[-1]}$  имеет вес  $-1$ . Поэтому, при изменении ориентации базисного репера дифференциальные операторы  $\mathcal{L}^i$  и  $\mathcal{M}_i^{[-1]}$  будут преобразоваться по разным законам. Из формул (17) видно, что слагаемые с определяющими скалярами  $c'_4, c'_5, c'_6$  изменят свой знак при изменении ориентации базисного репера.

Базисные направления и различные способы их нумерации являются фундаментальными понятиями в теории относительных тензоров. При перестановке двух номеров реперных направлений ориентация всего репера изменяется на противоположную, т.е. правоориентированный репер становится левоориентированным. Как отмечалось в предыдущем разделе, в механике континуума ориентацию базисного репера удобно задавать фундаментальным ориентирующим скаляром  $e$ . Тройки базисных векторов для которых ( $e > 0$ ) будем считать правоориентированными (рис. 1), а для ( $e < 0$ ) — левоориентированными (рис. 2).

Важное прикладное значение имеют системы координат удовлетворяющие ограничению

$$\sqrt{g}^{[+1]} = 1. \quad (18)$$

Такие координатные системы часто используются не только в астрономии и теории относительности [24], но и в механике деформируемого твердого тела [25]. В монографии [24, с. 135–142] условие  $\sqrt{g}^{[+1]} = 1$  используется при выводе уравнения тяготения в 4-пространстве–времени, что существенно упрощает уравнения теории поля. В монографии [25] условие (18) используется в процессе разделения изостатических координат в основных уравнениях математической теории пластичности.

Полученное условие (18), можно заменить более широким условием, учитывающем левостороннюю и правостороннюю ориентацию системы координат,

$$e = \pm 1^{[+1]}. \quad (19)$$

Это оказывается существенным в механике гемитропных микрополярных сред, когда компоненты определяющего тензора чувствительны к изменениям ориентации пространства.

В правоориентированной системе координат ( $e = 1$ ) дифференциальный оператор  $\mathcal{L}^i$  примет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) = G[(1 + c_1)\partial_s\partial_s u_i + (1 - c_1 + \\ + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\partial_i\partial_k u_k + 2c_1\epsilon_{ikl}\partial_k\mathcal{U}_l + Lc'_4\partial_i\partial_k\mathcal{U}_k + \\ + Lc'_5\partial_k\partial_k\mathcal{U}_i] - \rho\partial_{..}^2 u_i, \end{aligned} \quad (20)$$

а оператор  $\mathcal{M}_i^{[-1]}$  —

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_i^{[-1]}(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) = GL^2[(1 + c_2)\partial_s\partial_s\mathcal{U}_i + (1 - c_2 + \\ + 2c_3)\partial_i\partial_k\mathcal{U}_k + L^{-1}c'_4\partial_i\partial_k u_k + L^{-1}c'_5\partial_k\partial_k u_i + \\ + L^{-1}c'_6\epsilon_{isl}\partial_s\mathcal{U}_l] - 2Gc_1(2\mathcal{U}_i - \epsilon_{ikl}\partial_k u_l) - \rho\mathfrak{I}\partial_{..}^2\mathcal{U}_i. \end{aligned} \quad (21)$$

В выражениях (22) и (23) принято обозначение:  $\phi^{k[+1]} \rightarrow \mathcal{U}^k$  — специальный символ, вес которого мы не будем указывать, точно так же как это имеет место для  $\epsilon$ -символов.

В левориентированной декартовой системе координат ( $e = -1$ ) оператор  $\mathcal{L}^i$  запишется в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) = G[(1 + c_1)\partial_s\partial_s u_i + (1 - c_1 + \\ + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\partial_i\partial_k u_k + 2c_1\epsilon_{ikl}\partial_k\mathcal{U}_l - Lc'_4\partial_i\partial_k\mathcal{U}_k - \\ - Lc'_5\partial_k\partial_k\mathcal{U}_i] - \rho\partial_{..}^2 u_i, \end{aligned} \quad (22)$$

а дифференциальный оператор  $\mathcal{M}_i^{[-1]}$  —

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_i^{[-1]}(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) = GL^2[(1 + c_2)\partial_s\partial_s\mathcal{U}_i + (1 - c_2 + \\ + 2c_3)\partial_i\partial_k\mathcal{U}_k - L^{-1}c'_4\partial_i\partial_k u_k - L^{-1}c'_5\partial_k\partial_k u_i - \\ - L^{-1}c'_6\epsilon_{isl}\partial_s\mathcal{U}_l] - 2Gc_1(2\mathcal{U}_i - \epsilon_{ikl}\partial_k u_l) - \rho\mathfrak{I}\partial_{..}^2\mathcal{U}_i. \end{aligned} \quad (23)$$

Псевдовекторные дифференциальные операторы  $\mathcal{L}^i$  и  $\mathcal{M}_i^{[-1]}$  предельным переходом ( $c'_4 \rightarrow 0$ ,  $c'_5 \rightarrow 0$ ,  $c'_6 \rightarrow 0$ ) в формуле (17) преобразуются к операторам для модели

изотропного микрополярного тела:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^i(\partial., \nabla_k, u^k, \phi^{[+1]k}) &= G[(1 + e^{2[-2]c_1})\nabla^s\nabla_s u^i + \\
&+ (1 - e^{2[-2]c_1} + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\nabla^i\nabla_k u^k + 2^{[-2]c_1}\epsilon^{ikl}\nabla_k \phi_l^{[+1]}] - \rho \partial_{..}^2 u_i, \\
\mathcal{M}_i^{[-1]}(\partial., \nabla_k, u^k, \phi^{[+1]k}) &= G L^{[-1]} L^{[-1]} [(1 + e^{-2[+2]c_2})\nabla^s\nabla_s \phi_i^{[+1]} + \\
&+ (1 - e^{-2[+2]c_2} + 2c_3)\nabla_i\nabla_k \phi^{[+1]k}] - 2Gc_1(2\mathcal{U}_i - \epsilon_{ikl}\partial_k u_l) - \rho \mathfrak{J}\partial_{..}^2 \mathcal{U}_i.
\end{aligned} \tag{24}$$

Несложно заметить, что операторы, определенные соотношениями (24), в отличие от гемитропных дифференциальных операторов, сохраняют свою формы при изменении ориентации базисного репера. Для координатных систем с ограничением (19) они примут вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^i(\partial., \nabla_k, u^k, \phi^{[+1]k}) &= G[(1 + {}^{[-2]}c_1)\nabla^s\nabla_s u^i + \\
&+ (1 - {}^{[-2]}c_1 + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\nabla^i\nabla_k u^k + 2^{[-2]c_1}\epsilon^{ikl}\nabla_k \phi_l^{[+1]}] - \rho \partial_{..}^2 u_i, \\
\mathcal{M}_i^{[-1]}(\partial., \nabla_k, u^k, \phi^{[+1]k}) &= G L^{[-1]} L^{[-1]} [(1 + {}^{[+2]}c_2)\nabla^s\nabla_s \phi_i^{[+1]} + \\
&+ (1 - {}^{[+2]}c_2 + 2c_3)\nabla_i\nabla_k \phi^{[+1]k}] - 2Gc_1(2\mathcal{U}_i - \epsilon_{ikl}\partial_k u_l) - \rho \mathfrak{J}\partial_{..}^2 \mathcal{U}_i.
\end{aligned} \tag{25}$$

**4. Преобразование дифференциальных операторов гемитропной микрополярной модели при зеркальном отражении относительно одной из координатных плоскостей.** Рассмотрим преобразование зеркального отражения относительно плоскости  $x_1 O x_2$  ( $x_k \rightarrow x_k^*$ ), величины в новой системе координат обозначим звездочкой снизу. Тогда

$$x_1^* = x_1, \quad x_2^* = x_2, \quad x_3^* = -x_3. \tag{26}$$

В таблице приведем объекты в правоориентированной декартовой системе координат, зеркально отраженной системе координат и формулы, связывающие их между собой. Произведя замену согласно таблице, для оператора  $\mathcal{L}^i$  получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1^i(\partial_k^*, u_k^*, \mathcal{U}_k^*) &= G[(1 + c_1)\partial_s \partial_s u_1 + (1 - c_1 + \\
&+ 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\partial_1 \partial_k u_k + 2c_1 \epsilon_{1kl} \partial_k \mathcal{U}_l - Lc'_4 \partial_1 \partial_k \mathcal{U}_k - \\
&- Lc'_5 \partial_k \partial_k \mathcal{U}_1] - \rho \partial_{..}^2 u_1 = \mathcal{L}_1(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k), \tag{27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2^i(\partial_k^*, u_k^*, \mathcal{U}_k^*) &= G[(1 + c_1)\partial_s \partial_s u_2 + (1 - c_1 + \\
&+ 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\partial_2 \partial_k u_k + 2c_1 \epsilon_{2kl} \partial_k \mathcal{U}_l - Lc'_4 \partial_2 \partial_k \mathcal{U}_k - \\
&- Lc'_5 \partial_k \partial_k \mathcal{U}_2] - \rho \partial_{..}^2 u_2 = \mathcal{L}_2(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k), \tag{28}
\end{aligned}$$

Таблица соответствия для прямой и зеркально отраженной декартовых координатных систем.

криволинейная система координат	правоориентированная декартова система координат	зеркальная система координат	формулы преобразования
$x^k$	$x^k$	$x^k_*$	$x_1 = x_1$ $x_2 = x_2$ $x_3 = -x_3$
$e$	1	-1	$e = -e$
$\epsilon^{ijk}$	$\epsilon_{ijk}$	$\epsilon_{ijk}$	
$\epsilon_{ijk}$	$\epsilon_{ijk}$	$\epsilon_{ijk}$	
$\nabla_i$	$\partial_i$	$\partial_i$	$\partial_1 = \partial_1$ $\partial_2 = \partial_2$ $\partial_3 = -\partial_3$
$u^i$	$u_i$	$u_i$	$u_1 = u_1$ $u_2 = u_2$ $u_3 = -u_3$
$^{[+1]}_{\phi^k}$	$\mathcal{U}_k$	$\mathcal{U}_k$	$\mathcal{U}_1 = -\mathcal{U}_1$ $\mathcal{U}_2 = -\mathcal{U}_2$ $\mathcal{U}_3 = \mathcal{U}_3$
$\mathcal{L}^i(\nabla_k, u^k, \mathcal{U}^k)$	$\mathcal{L}_i(\partial_k, u^k, \mathcal{U}^k)$	$\mathcal{L}_i(\partial_k, u^k, \mathcal{U}^k)$	$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1$ $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2$ $\mathcal{L}_3 = -\mathcal{L}_3$
$\mathcal{M}_i(\nabla_k, u^k, \mathcal{U}^k)$	$\mathcal{M}_i(\partial_k, u^k, \mathcal{U}^k)$	$\mathcal{M}_i(\partial_k, u^k, \mathcal{U}^k)$	$\mathcal{M}_1 = -\mathcal{M}_1$ $\mathcal{M}_2 = -\mathcal{M}_2$ $\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_3$
$^{[-1]}_L$	$L$	$L$	$L = -L$
$^{[-2]}_{c_1}$	$c_1$	$c_1$	
$^{[+2]}_{c_2}$	$c_2$	$c_2$	
$^{[-2]}_{\mathfrak{J}}$	$\mathfrak{J}$	$\mathfrak{J}$	

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_3(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) = & -G[(1 + c_1)\partial_s\partial_s u_3 - (1 - c_1 + \\
 & + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\partial_3\partial_k u_k - 2c_1\epsilon_{3kl}\partial_k\mathcal{U}_l + Lc'_4\partial_3\partial_k\mathcal{U}_k + \\
 & + Lc'_5\partial_k\partial_k\mathcal{U}_3] + \rho\partial^2 u_3 = -\mathcal{L}_3(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k), \quad (29)
 \end{aligned}$$

а для оператора  $\mathcal{M}_i^{[-1]}$  получим

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1^{[-1]}(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) &= -GL^2[(1 + c_2)\partial_s\partial_s\mathcal{U}_1 - \\ &\quad - (1 - c_2 + 2c_3)\partial_1\partial_k\mathcal{U}_k - L^{-1}c'_4\partial_1\partial_k u_k - \\ &\quad - L^{-1}c'_5\partial_k\partial_k u_1 - L^{-1}c'_6\epsilon_{1sl}\partial_s\mathcal{U}_l] + 2Gc_1(2\mathcal{U}_1 + \\ &\quad + \epsilon_{1kl}\partial_k u_l) + \rho\mathfrak{I}\partial_s^2\mathcal{U}_1 = -\mathcal{M}_1^{[-1]}(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k), \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2^{[-1]}(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) &= -GL^2[(1 + c_2)\partial_s\partial_s\mathcal{U}_2 - \\ &\quad - (1 - c_2 + 2c_3)\partial_2\partial_k\mathcal{U}_k - L^{-1}c'_4\partial_2\partial_k u_k - \\ &\quad - L^{-1}c'_5\partial_k\partial_k u_2 - L^{-1}c'_6\epsilon_{2sl}\partial_s\mathcal{U}_l] + 2Gc_1(2\mathcal{U}_2 + \\ &\quad + \epsilon_{2kl}\partial_k u_l) + \rho\mathfrak{I}\partial_s^2\mathcal{U}_2 = -\mathcal{M}_2^{[-1]}(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k), \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_3^{[-1]}(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) &= GL^2[(1 + c_2)\partial_s\partial_s\mathcal{U}_3 + \\ &\quad + (1 - c_2 + 2c_3)\partial_3\partial_k\mathcal{U}_k + L^{-1}c'_4\partial_3\partial_k u_k + \\ &\quad + L^{-1}c'_5\partial_k\partial_k u_3 + L^{-1}c'_6\epsilon_{3sl}\partial_s\mathcal{U}_l] - 2Gc_1(2\mathcal{U}_3 - \\ &\quad - \epsilon_{3kl}\partial_k u_l) - \rho\mathfrak{I}\partial_s^2\mathcal{U}_3 = \mathcal{M}_3^{[-1]}(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k), \quad (32) \end{aligned}$$

**Заключение.** Статья посвящена вопросам вывода и преобразований дифференциальных операторов, соответствующих модели гемитропного микрополярного континуума, при изменении ориентации базисного репера.

- (1) Приводятся основные сведения из алгебры псевдотензоров. Вводится понятие фундаментального ориентирующего псевдоскаляра. В терминах псевдотензоров формулируются уравнения динамики гемитропного микрополярного упругого континуума с 9 определяющими псевдоскалярами.
- (2) Проводится анализ псевдовекторных дифференциальных операторов, соответствующих модели гемитропной микрополярной среды. Особое внимание уделено координатным системам, удовлетворяющим ограничению  $e = \pm 1$ <sup>[+1]</sup>.
- (3) Приводятся формы дифференциальных операторов в право- и левориентированных системах координат. Отмечается, что в отличие от гемитропных дифференциальных операторов, изотропные операторы сохраняют свою форму при изменении ориентации базисного репера.
- (4) Рассмотрены преобразования дифференциальных операторов в случаях зеркального отражения относительно заданной плоскости. Полученные результаты позволяют заключить, что произвольно заданному решению системы дифференциальных уравнений гемитропной микрополярной упругости соответствует зеркально преобразованное решение.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Besdo D. Ein beitrage zur nichtlinearen theorie des Cosserat-kontinuums //Acta Mechanica. 1974. Т. 20. №. 1. С. 105-131.
- [2] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin : Springer, 1972. 285 p.
- [3] Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 pp.
- [4] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. С. 504–517. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635>.
- [5] Радаев Ю.Н. О факторизации основного гиперболического дифференциального оператора микрополярной теории упругости // Изв. РАН. МГТ. 2020. № 6. С. 24-32.
- [6] Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Совместность сильных разрывов в микрополярных термоупругих средах. Псевдотензорная формулировка // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 2(44). С.155-160.
- [7] Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Об одном обобщении алгебраической теории Гамильтона-Кэли // Изв. РАН. МГТ. 2021. № 6. С. 130-138.
- [8] Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Об определяющих псевдоскалярах гемитропных микрополярных сред в инверсных координатных системах, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25 № 3 С. 457-474.
- [9] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном псевдотензорном обобщении связывающих двусторонних граничных условий Югонио-Адамара // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 2(48). С.104-114.
- [10] Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. К теории ориентированных тензорных элементов площади микрополярного континуума, погруженного во внешнее плоское пространство // Изв. РАН. МГТ. 2022. № 2. С. 3-13.
- [11] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2020.Т. 24, No 3. С. 424–444.
- [12] Мурашкин Е. В. О формулировках краевых условий в задачах синтеза тканых 3d материалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 1(47). С.114-121.
- [13] Ковалев В. А., Мурашкин Е. В. О постановке граничных условий при моделировании процессов производства тканых материалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 3(49). С.56-65.
- [14] Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, No 4. С. 399–412.
- [15] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. Arpseudotensor formulation // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2020. Т. 24, No 4. С. 752–761.
- [16] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Прямые, инверсные и зеркальные волновые моды связанных волн перемещений и микровращений в гемитропных микрополярных средах // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 2(48). С.115-127.
- [17] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: Encyclopedia of Physics. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. 226–902 pp. DOI: 10.1007/978-3-642-45943-6\_2.
- [18] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Eng. Trans. G. B. Gurevich, Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen, Noordhoff, 1964. 429 pp.]
- [19] Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ: с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматлит, 1963. 411 с.
- [20] Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. – 456 с. [Eng. Trans. Schouten J. A., Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 434 pp.]

- [21] Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с. [Eng. Trans. Sokolnikoff I. S. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 pp.]
- [22] Synge J. L. and Schild A. Tensor calculus. New York, Dover Publications Inc., 1978. xi+324 pp.
- [23] Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. М.: Наука. 1966. 648 с.
- [24] Корфф А. Mathematical Theory of Relativity. Dutton: Dutton Press, 1921. 214 pp.
- [25] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Самарский университет, 2006. 340 с.

*E. V. Murashkin, Yu. N. Radaev*

## PSEUDOVECTOR HYPERBOLIC DIFFERENTIAL OPERATORS OF HEMITROPIC MICROPOLAR ELASTICITY

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** The paper deals with the derivations and transformations of differential operators related to the hemitropic micropolar elastic model under mirror reflections. The requisite equations from algebra of pseudotensors are given. Dynamic differential equations for a hemitropic micropolar elastic solid with 9 constitutive pseudoscalars are derived in terms of pseudotensors. Pseudovector hyperbolic differential operator forms caused by different coordinate net orientations are obtained and discussed. The properties of differential operators for isotropic micropolar elasticity are discussed. Mirror reflection transformations of the differential operators are considered.

**Keywords:** pseudotensor, fundamental orienting pseudoscalar, constitutive pseudoscalar, micropolar hemitropic continuum, differential operator

### REFERENCES

- [1] Besdo D. Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums // *Acta Mechanica*. 1974. V. 20. No 1. P. 105-131.
- [2] Nowacki W. *Theory of micropolar elasticity*. Berlin: Springer, 1972. 285 p.
- [3] Nowacki W. *Theory of asymmetric elasticity*. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 pp.
- [4] Radaev, Yu. N., The rule of factors in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics, *Vestn. Myself. state tech. un-that. Ser. Phys.-mat. science*. 2018. Vol. 22, pp. 504–517. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635>.
- [5] Radaev Yu. N. Factorization of the Main Hyperbolic Differential Operator of the Micropolar Elasticity Theory // *Mech. Solids*. 2020. Vol. 55 Iss. 6. p. 776-783.
- [6] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Compatibility of strong discontinuities in micropolar thermoelastic media. A pseudotensor formulation // *Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state*. 2020. № 2(44). p. 155-160.
- [7] Murashkin E. V. and Radaev Yu. N., Generalization of the Algebraic Hamilton-Cayley Theory, *Mech. Solids*. 2021. Vol. 56 Iss. 6. Pp. 996-1003.
- [8] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On the constitutive pseudoscalars of hemitropic micropolar media in inverse coordinate frames, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]* 2021. Vol. 25 Iss. 3 Pp. 457–474.
- [9] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On a pseudotensor generalization of the Hugoniot-Hadamard linking boundary conditions // *Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state*. 2021. № 2(48). Pp. 104-114.
- [10] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On the theory of oriented tensor elements of area in a micropolar continuum immersed in outer plane space // *Mech. Solids*. 2022. Vol. 57 Iss. 2. Pp. 220-227.
- [11] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]* Vol. 24, No 3. Pp. 424–444.

---

*Evgenii V. Murashkin*, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,  
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.  
*Yuri N. Radaev*, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,  
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

- 
- [12] Murashkin E. V. On the boundary conditions formulation in the problems of synthesis of woven 3d materials // Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2021. № 1(47). p. 114-121.
- [13] Kovalev V. A., Murashkin E. V. On the statements of boundary conditions in models of the woven materials production // Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2021. № 3(49). p. 56-65.
- [14] Radaev Yu.N., Murashkin E.V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problems of Strength and Plasticity. 2020. Vol. 82, No. 4, pp. 399–412.
- [15] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. Apseudotensor formulation // Bulletin of the Samara State Technical University, Physics and Mathematics Series. 2020. Vol. 24, No. 4, pp. 752–761.
- [16] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Direct, inverse and mirror wave modes of coupled displacements and microrotations monochromatic plane waves in hemitropic micropolar media // Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state . 2021. № 2(48). p. 115-127
- [17] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: Encyclopedia of Physics. Vol. III / 1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960.226-902 pp. DOI: 10.1007 / 978-3-642-45943-6 \_2.
- [18] Gurevich GB Foundations of the theory of algebraic invariants. M., L .: OGIZ, GITTL, 1948.408 p. [Eng. Trans. G. B. Gurevich, Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen, Noordhoff, 1964. 429 pp.]
- [19] McConnell A.J. Introduction to tensor analysis: with applications to geometry, mechanics and physics. Moscow: Fizmatlit, 1963.411 p.
- [20] Schouten Ya. A. Tensor analysis for physicists. M .: Science. 1965 .– 456 s. [Eng. Trans. Schouten J. A., Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 434 pp.]
- [21] Sokolnikov I. S. Tensor analysis. Theory and applications in geometry and in continuum mechanics. Moscow: Nauka, 1971.376 p. [Eng. Trans. Sokolnikoff I. S. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 pp.]
- [22] Synge J. L. and Schild A. Tensor calculus. New York, Dover Publications Inc., 1978. xi + 324 pp.
- [23] Rosenfeld B.A. Multidimensional spaces. M .: Nauka. 1966.648 p.
- [24] Kopff A. Mathematical Theory of Relativity. Dutton: Dutton Press, 1921. 214 pp.
- [25] Radaev Yu. N. Spatial problem of the mathematical theory of plasticity. Samara: Samara University, 2006. 340 p.

Ю. Н. Радаев, Е. В. Мурашкин, Т. К. Нестеров

## ПСЕВДОТЕНЗОРНЫЙ ФОРМАЛИЗМ В МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НЕЙБЕРА

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** В настоящей работе рассматривается теория микрополярной упругости Нейбера в псевдотензорной формулировке. Приводятся минимально необходимые для понимания статьи сведения из алгебры и анализа псевдотензоров. Уравнения динамики микрополярного континуума представлены (наряду с абсолютной тензорной формой) в терминах псевдотензоров (относительных тензоров). Проведено сравнение динамических уравнений микрополярной теории упругости в псевдотензорной форме с абсолютной тензорной формой, предложенной Нейбером. То же самое сопоставление выполнено и для определяющих уравнений. Устранены недочеты в уравнениях динамики Нейбера и приведена их окончательная псевдотензорная форма.

**Ключевые слова:** микрополярность, упругость, континуум, микровращение, фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, относительный тензор, уравнения динамики

DOI: 10.37972/chgru.2021.50.4.006

УДК: 539.374

**1. Введение.** Классические теории механики сплошной среды в большинстве случаев неприменимы для математического моделирования поведения современных материалов (например, упругих метаматериалов [1, 2] или биоматериалов [3]: таких

---

© Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В., Нестеров Т.К. 2021

*Радаев Юрий Николаевич*

**e-mail:** radaev@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.

*Мурашкин Евгений Валерьевич*

**e-mail:** evmurashkin@google.com, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.

*Нестеров Тимофей Константинович*

**e-mail:** nesterovtim@gmail.com, аспирант, программист, лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 19-51-60001, № 20-01-00666.

Поступила 20.03.2021

как пески, грунты и другие зернистые среды, идеально-пластические среды, демонстрирующие необратимое изменение объема в процессе деформации (например, сыпучая среда Кулона–Мора), волокнистые среды, сотовые структуры, армированные композитные материалы, кости, сосуды, мышцы и другие биологические ткани). В указанных материалах наблюдаются волны микровращений, связанные с волнами перемещений, из-за эффектов микроструктуры. Простейшая (и исторически первая) континуальная теория твердых тел с микроструктурой – микрополярная теория упругости. Важным примером твердого тела с микроструктурой является гемитропный микрополярный континуум. В подобных средах могут наблюдаться одновременно прямые и зеркальные моды распространяющихся волн, которые возможно описать только такими уравнениями, которые будут чувствительны к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства.

Теория асимметричной упругости впервые была представлена Коссера (1909 г.) в работе [4]. Дальнейшее обобщение микрополярной теории на случай конечных деформаций было выполнено Трусделлом и Тупином [5]. В работе [6] Аэро и Кувшинским были получены линейные определяющие уравнения микрополярного континуума. Случай материальной анизотропии микрополярных сред был рассмотрен в исследованиях Миндлина (см., например, [7, 8]). Проблема концентрации напряжений в микрополярных упругих твердых телах исследована Нейбером в серии своих работ [9–11]. Обобщение микрополярной теории на гемитропный случай можно найти в работах [12, 13].

В общем случае микрополярной анизотропии упругий материал описывается 171 определяющей постоянной, что чрезвычайно усложняет анализ уравнений при решении прикладных задач. Полуизотропное (гемитропное) твердое тело описывается уже девятью определяющими константами, в ряду которых только три будут дополнять имеющиеся определяющие постоянные изотропной среды. Анализ литературных источников показывает, что в работах, посвященных микрополярной теории упругости, часто содержатся ошибки и опечатки в фундаментальных уравнениях (см., например, [10, 14]), что затрудняет их понимание и применение.

Отметим, что при построении математических моделей поведения микрополярных материалов необходимым является привлечение формализма и методов из алгебры и анализа относительных тензоров (псевдотензоров) [15–23], что позволяет глубже понять физическую и геометрическую природу рассматриваемых физических полей, поскольку ряд кинематических и динамических переменных в теории микрополярной упругости на самом деле являются псевдотензорными величинами. Однако, несмотря на очевидные преимущества применения подобной техники, она редко используется в механике сплошной среды. В работе [24] приводится актуальная псевдотензорная формулировка теории гемитропного микрополярного континуума в приложении к механике растущего твердого тела.

Вслед за *введением*, во *втором разделе* статьи затрагивается ряд фундаментальных определений из алгебры и анализа псевдотензоров, приведена формула, определяющая ковариантную производную произвольного относительного тензора веса  $W$ .

В *третьем разделе* выводятся уравнения динамики Нейбера в терминах псевдотензорного анализа. Веса относительных тензоров линейной изотропной микрополярной упругой среды рассчитаны и представлены в таблицах 1 и 2. Исправлены недочеты в уравнениях динамики Нейбера, предложенные в [10] для микрополярного изотропного упругого тела. Получена их окончательная форма в произвольной криволинейной

системе координат. Выполнено сравнение определяющих уравнений изотропной микрополярной теории упругости в абсолютной тензорной форме с их псевдотензорной формой.

**2. Основные сведения из алгебры и анализа псевдотензоров.** Символы перестановок и фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр являются фундаментальными объектами теории псевдотензорного анализа, изложение которой можно найти в учебных пособиях по многомерной геометрии и книгах по тензорному анализу [15–23].

Преобразование зеркального отражения системы координат (от левоориентированной к правоориентированной, или наоборот) может быть осуществлено путем перенумерации координатных осей, что позволяет ввести фундаментальный объект псевдотензорной алгебры и многомерной геометрии — символы перестановок Леви–Чивита [25]. Как известно, символы перестановок, определяемые согласно

$$\epsilon^{[-1]}_{ijk} = \epsilon^{[+1]}_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{для троек } (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2); \\ -1 & \text{для троек } (3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3); \\ 0 & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases}$$

не являются абсолютными тензорами. Фактически, символы Леви–Чивита  $\epsilon^{[-1]}_{ijk}$  и  $\epsilon^{[+1]}_{ijk}$  — относительные ковариантные тензоры (псевдотензоры) веса  $-1$  и одновременно относительные контравариантные тензоры веса  $+1$ . В дальнейшем позиция над корневым символом будет зарезервирована для веса (который дополнительно заключен в квадратные скобки) псевдотензора.

Фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр (относительный скаляр веса  $+1$ ) в трехмерном пространстве может быть определен с помощью смешанного произведения ковариантных базисных векторов:

$$e = e^{[+1]} = (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k}, \quad (1)$$

а псевдоскаляр отрицательного веса  $-1$  смешанным произведением контравариантных базисных векторов:

$$\frac{1}{e} = e^{[-1]}_{-1} = (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k}.$$

Отметим, что значение псевдоскаляра (1) равно ориентированному объему параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{i}$ . В физических теориях поля особую роль играют координатные системы, характеризующиеся условием  $|e| = 1$ .

С помощью фундаментального ориентирующего псевдоскаляра и символа перестановок может быть определен абсолютный тензор Леви–Чивита:

$$\begin{aligned} e^{ijk} &= \frac{1}{e} \epsilon^{[+1]}_{ijk}, \\ e_{ijk} &= e \epsilon^{[-1]}_{ijk}. \end{aligned} \quad (2)$$

В дальнейшем будем опускать указание веса для основных псевдотензоров, таких как  $e$ ,  $\epsilon_{ijk}$ ,  $\epsilon^{ijk}$ , а также для относительных тензоров нулевого веса (абсолютных тензоров). Еще раз подчеркнем, что  $e > 0$  для правоориентированной системы координат и  $e < 0$  для левоориентированной системы координат.

Рассмотрим в трехмерном пространстве две системы координат  $x^k$  и  $\bar{x}^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Закон преобразования псевдотензора веса  $W$  при переходе от системы координат  $x^k$  к новой системе координат  $\bar{x}^k$  имеет вид [19, 21]:

$$\overline{T}^{[W]lm\dots n}_{\dots ij\dots k} = \Delta^W (\partial_p \bar{x}^l) (\partial_q \bar{x}^m) \cdots (\partial_s \bar{x}^n) (\bar{\partial}_i x^a) (\bar{\partial}_j x^b) \cdots (\bar{\partial}_k x^c) T^{[W]pq\dots s}_{\dots ab\dots c},$$

где

$$\Delta = \det(\bar{\partial}_j x^i), \quad \partial_p = \frac{\partial}{\partial x^p}, \quad \bar{\partial}_p = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^p}, \quad (3)$$

и черта сверху указывает на то, что геометрический объект ассоциирован с новой системой координат  $\bar{x}^k$ ,  $\Delta$  — якобиан преобразования.

Операция ковариантного дифференцирования произвольного относительного тензора  $T^{[W]lm\dots n}_{\dots ij\dots k}$  выполняется по аналогии с соответствующей операцией для абсолютных тензоров<sup>1</sup> [15, 17, 19]:

$$\begin{aligned} \nabla_p [W] T^{lm\dots n}_{\dots ij\dots k} = & \partial_p [W] T^{lm\dots n}_{\dots ij\dots k} + \Gamma_{sp}^l [W] T^{sm\dots n}_{\dots ij\dots k} + \Gamma_{sp}^m [W] T^{ls\dots n}_{\dots ij\dots k} + \cdots + \Gamma_{sp}^n [W] T^{lm\dots s}_{\dots ij\dots k} - \\ & - \Gamma_{ip}^s [W] T^{lm\dots n}_{\dots sj\dots k} - \Gamma_{jp}^s [W] T^{lm\dots n}_{\dots is\dots k} - \cdots - \Gamma_{kp}^s [W] T^{lm\dots n}_{\dots ij\dots s} - W T^{lm\dots n}_{\dots ij\dots k} \Gamma_{sp}^s. \end{aligned} \quad (4)$$

**3. Теория микрополярной упругости Нейбера и ее уточнения.** Применение формализма псевдотензорного анализа к теории микрополярной упругости Нейбера позволяет несколько прояснить ее физический смысл. В противоположность уравнениям динамики:

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda t^{\lambda\mu} &= \rho \partial_{\cdot\cdot}^2 V^\mu, \\ \nabla_\lambda m^{\lambda\mu} + \varepsilon^{\mu\lambda\eta} t_{\lambda\eta} &= \theta \partial_{\cdot\cdot}^2 \omega^\mu, \end{aligned} \quad (5)$$

приведенным в работе [10], корректные уравнения в абсолютной тензорной форме есть:

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda t^{\lambda\mu} &= \rho \partial_{\cdot\cdot}^2 V^\mu, \\ \nabla_\lambda m^{\lambda\mu} + e^{\mu\lambda\eta} t_{\lambda\eta} &= \theta \partial_{\cdot\cdot}^2 \omega^\mu, \end{aligned} \quad (6)$$

а в терминах псевдотензоров их можно переформулировать в виде [24]:

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda t^{\lambda\mu} &= \rho \partial_{\cdot\cdot}^2 V^\mu, \\ \nabla_\lambda [m]^{-1\lambda\mu} + \frac{\epsilon^{\mu\lambda\eta}}{e^2} t_{\lambda\eta} &= \theta \partial_{\cdot\cdot}^{[-2]} [w]^{[+1]\mu}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$m^{\lambda\mu} = \frac{[+1]^{-1}\lambda\mu}{e}, \quad \omega^\mu = \frac{1}{[+1]} [w]^{[+1]\mu}, \quad \theta = \frac{[+2]^{[-2]}\theta}{e^2}.$$

Во втором из уравнений (5) в работе Нейбера [10] напечатан символ  $\varepsilon^{\mu\lambda\eta}$  ("относительный антисимметричный тензор"). По смыслу здесь на самом деле должен находиться абсолютный тензор  $e^{\mu\lambda\eta}$  (см. (2)). Для корректной балансировки весов в последнем уравнении (7), вопреки теории Нейбера, используется символ перестановок  $\epsilon^{\mu\lambda\eta}$  с множителем  $e^{-2}$ . В таблице 1 установлены соответствия между обозначениями, используемыми Нейбером в работе [10], и обозначениями, применяемыми в работе [24].

<sup>1</sup>Заметим, что  $\Gamma_{sp}^s = \frac{\partial_p e}{e}$ .

Таблица 1. Соответствие основных обозначений, принятых в [10] и [24]

Терминологическое обозначение	Обозначение применяемое в [24]	Обозначения Нейбера	Вес	Преобразование к абсолютному тензору
Вектор перемещений	$u^k$	$V^\mu$	0	
Асимметричный тензор деформаций	$\epsilon_{ij}$	$d^{\lambda\mu}$	0	
Тензор силовых напряжений	$\sigma^{ik}$	$t^{\lambda\mu}$	0	
Плотность массы	$\rho$	$\rho$	0	
Тензор моментных напряжений	$\mu^i_k$	$m^{\lambda\mu}$	-1	$m^{\lambda\mu} = e \frac{[-1]}{m} \lambda\mu$
Момент микроинерции	$\mathfrak{J}$	$\theta$	-2	$\theta = e^2 \frac{[-2]}{\theta}$
Вектор микроповорота	$\phi^i$	$\omega^\mu$	+1	$\omega^\mu = \frac{1}{e} \frac{[+1]}{\omega} \mu$
Тензор изгиба-кручения	$\kappa_i^s$	$k_{\lambda\mu}$	+1	$k_{\lambda\mu} = \frac{1}{e} \frac{[+1]}{k} \lambda\mu$

Уравнения (7) в криволинейной системе координат с помощью определения ковариантной производной (4) можно выписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial_\lambda t^{\lambda\mu} + t^{\eta\mu} \Gamma_{\eta\lambda}^\lambda + t^{\lambda\eta} \Gamma_{\eta\lambda}^\mu &= \rho \partial_\lambda V^\mu, \\ \partial_\lambda \frac{[-1]}{m} \lambda\mu + \frac{[-1]}{m} \eta\mu \Gamma_{\eta\lambda}^\lambda + \frac{[-1]}{m} \lambda\eta \Gamma_{\eta\lambda}^\mu + \frac{[-1]}{m} \lambda\mu \frac{\partial_\lambda e}{e} + \frac{e^{\mu\lambda\eta}}{e^2} t_{\lambda\eta} &= \frac{[-2]}{\theta} \partial_\lambda \frac{[+1]}{\omega} \mu. \end{aligned} \quad (8)$$

Определяющие уравнения линейной изотропной микрополярной теории упругости Нейбера в терминах относительных тензоров имеют форму:

$$\begin{aligned} t^{\lambda\mu} &= G[(1 + e^2 \frac{[-2]}{a}) \nabla^\lambda V^\mu + (1 - e^2 \frac{[-2]}{a}) \nabla^\mu V^\lambda + 2 \frac{[-2]}{a} e^{\mu\lambda\eta} \omega_\eta + \\ &\quad + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1} g^{\lambda\mu} \nabla_\eta V^\eta], \\ \frac{[-1]}{m} \lambda\mu &= 4G \frac{[-1]}{l} \frac{[-1]}{l} [\nabla^\lambda \frac{[+1]}{\omega} \mu + b \nabla^\mu \frac{[+1]}{\omega} \lambda + c g^{\lambda\mu} \nabla_\eta \frac{[+1]}{\omega} \eta]. \end{aligned} \quad (9)$$

Приведем ниже для сравнения определяющие уравнения из оригинальной работы Нейбера [10]:

$$\begin{aligned} t^{\lambda\mu} &= G[(1 + a) \nabla^\lambda V^\mu + (1 - a) \nabla^\mu V^\lambda + 2ae^{\mu\lambda\eta} \omega_\eta + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1} g^{\lambda\mu} \nabla_\eta V^\eta], \\ m^{\lambda\mu} &= 4Gl^2 [\nabla^\lambda \omega^\mu + b \nabla^\mu \omega^\lambda + c g^{\lambda\mu} \nabla_\eta \omega^\eta]. \end{aligned}$$

Определяющие постоянные в приведенных выше определяющих уравнениях, являющиеся скалярами и псевдоскалярами, представлены в таблице 2. После подстановки

Таблица 2. Микрополярные изотропные определяющие псевдоскаляры

Терминологическое обозначение	Корневое символьное обозначение	Вес	Преобразование к абсолютному тензору
Модуль сдвига	$G$	0	
Коэффициент Пуассона	$\nu$	0	
Характерная длина микрополярной теории	$l$	-1	$l = e \overset{[-1]}{l}$
Безразмерный микрополярный модуль (i)	$a$	-2	$a = e^2 \overset{[-2]}{a}$
Безразмерный микрополярный модуль (ii)	$b$	0	
Безразмерный микрополярный модуль (iii)	$c$	0	

определяющих уравнений (9) в уравнения (7) корректные уравнения динамики Нейбера в терминах относительных тензоров примут вид:

$$\begin{aligned}
& (1 + e^2 \overset{[-2]}{a}) \Delta V^\mu + ((1 - 2\nu)^{-1} - e^2 \overset{[-2]}{a}) \nabla^\mu \nabla_\lambda V^\lambda + \\
& \quad + 2 \overset{[-2]}{a} \epsilon^{\mu\lambda\eta} \nabla_\lambda \overset{[+1]}{\omega}_\eta = \rho G^{-1} \partial_{..}^2 V^\mu, \\
& \overset{[-2]}{a} - \overset{[-1]}{l} \overset{[-1]}{l} \Delta \overset{[+1]}{\omega}^\mu - \overset{[-1]}{l} \overset{[-1]}{l} (b + c) \nabla^\mu \nabla_\lambda \overset{[+1]}{\omega}^\lambda - \\
& \quad - \frac{\overset{[-2]}{a}}{2} \epsilon^{\mu\eta\sigma} \nabla_\eta V_\sigma = - \overset{[-2]}{\theta} (4G)^{-1} \partial_{..}^2 \overset{[+1]}{\omega}^\mu.
\end{aligned} \tag{10}$$

Отметим, что в оригинальной статье Нейбера [9] множитель  $l^2$  отсутствует во втором члене второго уравнения системы (10).

Выпишем также для сравнения уравнения динамики линейной микрополярной теории упругости в псевдотензорных обозначениях, введенных в работах [13, 24]:

$$\begin{aligned}
& (1 + e^2 \overset{[-2]}{c_1}) \nabla^s \nabla_s u^i + (1 - e^2 \overset{[-2]}{c_1} + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1}) \nabla^i \nabla_k u^k + \\
& \quad + 2 \overset{[-2]}{c_1} \epsilon^{ikl} \nabla_k \overset{[+1]}{\phi}_l = \rho G^{-1} \partial_{..}^2 u^i, \\
& \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} [(1 + e^{-2} \overset{[+2]}{c_2}) \nabla^s \nabla_s \overset{[+1]}{\phi}_i + (1 - e^{-2} \overset{[+2]}{c_2} + 2c_3) \nabla_i \nabla_k \overset{[+1]}{\phi}^k] - \\
& \quad - \overset{[-2]}{c_1} (2 \overset{[+1]}{\phi}_i - \epsilon_{ikl} g^{ks} \nabla_s u^l) = \overset{[-2]}{\mathfrak{J}} G^{-1} \partial_{..}^2 \overset{[+1]}{\phi}_i.
\end{aligned} \tag{11}$$

Сопоставление уравнений (10) и (11) приводит к следующим соотношениям между определяющими постоянными:

$$\frac{^{[-1][-1]}L}{L} = 2 \frac{^{[-1][-1]}l}{l} (1 + b), \quad \frac{^{[-2]}c_1}{c_1} = \frac{^{[-2]}a}{a}, \quad \frac{^{[+2]}c_2}{c_2} = \frac{1 - b}{1 + b}, \quad c_3 = \frac{c}{1 + b}.$$

Веса определяющих скаляров и псевдоскаляров  $l, a, b, c$  приведены в таблице 2. Вес определяющего скаляра  $b$  в таблице 2 проверяется по формуле

$$b = \frac{e^2 - \frac{^{[+2]}c_2}{c_2}}{e^2 + \frac{^{[+2]}c_2}{c_2}}.$$

#### 4. Заключение

- (i) Приведены и рассматриваются уравнения динамики Нейбера линейного микрополярного изотропного континуума в терминах псевдотензоров (относительных тензоров) в произвольной криволинейной системе координат. Устранены неточности и опечатки в исходных уравнениях Нейбера .
- (ii) Определяющие уравнения линейного изотропного микрополярного континуума представлены в псевдотензорной форме и сравниваются с их абсолютной тензорной формой.
- (iii) Веса относительных тензоров линейной микрополярной упругой среды и микрополярных изотропных определяющих псевдоскаляров рассчитаны и сведены для удобства в таблицы.
- (iv) Получена окончательная корректная форма динамических уравнений изотропного микрополярного континуума в терминах перемещений и микровращений в псевдотензорной форме.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Maugin G. A. *Non-classical continuum mechanics*. Advanced Structured Materials, vol. 51. Singapore, Springer Verlag, 2017, xvii+259 pp. <https://doi.org/10.1007/978-981-10-2434-4>.
- [2] Чандрасекар С. *Жидкие кристаллы*. М.: Мир, 1980, 344 с.
- [3] Goriely A. *The mathematics and mechanics of biological growth*. New York, Springer, 2017, xxii+646 pp.
- [4] Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris, A. Hermann et fils, 1909, 126 pp.
- [5] Truesdell C., Toupin R. The classical field theories //In: *Principles of classical mechanics and field theory*/Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie. Berlin, Heidelberg, Springer, 1960, 226–858 pp.
- [6] Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц. *ФТТ*, 1960, Т. 2, № 7, С. 1399–1409.
- [7] Mindlin, R.D., Tiersten, H.F. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1962, vol. 11, no. 1 pp. 415–448. <https://doi.org/10.1007/BF00253946>
- [8] Mindlin, R.D. Influence of couple-stresses on stress concentrations. *Experimental Mechanics*, 1963, vol. 3, no. 1, pp. 1–7. <https://doi.org/10.1007/BF02327219>
- [9] Neuber, H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper. *Acta Mechanica*, 1966, vol. 2, no. 1, pp. 48–69 (1966). <https://doi.org/10.1007/BF01176729>
- [10] Neuber, H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua. *Applied Mechanics*, 1966, pp. 153–158. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_16)
- [11] Neuber, H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua. *Mechanics of Generalized Continua*, 1968, pp. 109–113. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-30257-6\\_13](https://doi.org/10.1007/978-3-662-30257-6_13)
- [12] Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, 2004, vol. 15. Berlin, Heidelberg, Springer, xv+345 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7>.

- [13] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума. *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 3, С. 504–517.
- [14] Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, Pergamon Press, 1986, viii+383 pp.
- [15] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1924, vol. 26, no. 3, 373–377 pp. <https://doi.org/10.2307/1989146>.
- [16] Veblen O., Thomas T. Y. The geometry of paths, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1923, vol. 25, no. 4, pp. 551–608. <https://doi.org/10.2307/1989307>.
- [17] Веблен О. *Инварианты дифференциальных квадратичных форм*. М: Гос. изд-во иностр. лит., 1948, 140 с.
- [18] Схоутен Я. А. *Тензорный анализ для физиков*. М.: Наука, 1965, 456 с.
- [19] Сокольников И. С. *Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред*. М.: Наука, 1971, 376 с.
- [20] Гуревич Г. Б. *Основы теории алгебраических инвариантов*. М.: Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948, 408 с.
- [21] Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus*, vol. 5. New York, Courier Corporation, 1978, 334 pp.
- [22] Розенфельд Б. А. *Многомерные пространства*. М.: Наука, 1966, 648 с.
- [23] Das A. *Tensors: The mathematics of Relativity Theory and Continuum Mechanics*. New York, Springer Science & Business Media, 2007, xii+290 pp. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-69469-6>.
- [24] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О микрополярной 3D-теории растущих тел. *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 3, С. 424–444. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>
- [25] Levi-Civita T. *The Absolute Differential Calculus (Calculus of Tensors)*. London, Glasgow, Blackie & Son Limited, 1927, 450 pp.

Yuri N. Radayev, Evgenii V. Murashkin, Timofei K. Nesterov

## PSEUDOTENSOR FORMALISM FOR NEUBER'S MICROPOLAR ELASTICITY THEORY

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** The paper deals with Neuber's theory of micropolar elasticity in a pseudotensor formulation. The minimum notes and requisite equations from algebra and analysis of pseudotensors are given. The micropolar dynamic equations are presented in terms of pseudotensors (relative tensors). The pseudotensor form of dynamic equations is compared with the absolute tensor form of the Neuber dynamic equations. The refinements of Neuber's dynamic equations are discussed.

**Keywords:** micropolarity, elasticity, continuum, microrotation, fundamental orienting pseudoscalar, relative tensor, dynamic equations

## REFERENCES

- [1] Maugin G. A. *Non-classical continuum mechanics*. Advanced Structured Materials, vol. 51. Singapore, Springer Verlag, 2017, xvii+259 pp. <https://doi.org/10.1007/978-981-10-2434-4>.
- [2] Chandrasekhar S. *Liquid Crystals*. Cambridge University Press, 1992, xvi+460.

Yuri N. Radayev, D.Sc. Phys. & Math. Sci., Ph.D., M.Sc., Professor; Leading Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Phys. & Math. Sci., Ph.D., M.D.; Senior Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS.

Timofei K. Nesterov, M.Sc., Programmer, Lab. of Modeling in Solid Mechanics; Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS.

- [3] Goriely A. *The mathematics and mechanics of biological growth*. New York, Springer, 2017, xxii+646 pp.
- [4] Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris, A. Hermann et fils, 1909, 126 pp.
- [5] Truesdell C., Toupin R. The classical field theories //In: *Principles of classical mechanics and field theory*/Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie. Berlin, Heidelberg, Springer, 1960, 226–858 pp.
- [6] Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles. *Soviet Physics-Solid State*, 1961, V. 2, № 7, C. 1272–1281.
- [7] Mindlin, R.D., Tiersten, H.F. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1962, vol. 11, no. 1 pp. 415–448. <https://doi.org/10.1007/BF00253946>
- [8] Mindlin, R.D. Influence of couple-stresses on stress concentrations. *Experimental Mechanics*, 1963, vol. 3, no. 1, pp. 1–7. <https://doi.org/10.1007/BF02327219>
- [9] Neuber, H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper. *Acta Mechanica*, 1966, vol. 2, no. 1, pp. 48–69 (1966). <https://doi.org/10.1007/BF01176729>
- [10] Neuber, H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua. *Applied Mechanics*, 1966, pp. 153–158. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_16)
- [11] Neuber, H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua. *Mechanics of Generalized Continua*, 1968, pp. 109–113. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-30257-6\\_13](https://doi.org/10.1007/978-3-662-30257-6_13)
- [12] Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, 2004, vol. 15. Berlin, Heidelberg, Springer, xv+345 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7>.
- [13] Radayev Yu. N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*, 2018. V. 22, № 3, C. 504–517.
- [14] Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, Pergamon Press, 1986, viii+383 pp.
- [15] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1924, vol. 26, no. 3, 373–377 pp. <https://doi.org/10.2307/1989146>.
- [16] Veblen O., Thomas T. Y. The geometry of paths, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1923, vol. 25, no. 4, pp. 551–608. <https://doi.org/10.2307/1989307>.
- [17] Veblen O. *Invariants of Quadratic Differential Forms*. Cambridge, Cambridge University, 1927, 102 p.
- [18] Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford, Clarendon Press, 1951, 434 p.
- [19] Sokolnikoff I. S. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*. New York, John Wiley & Sons Inc, 1971, 376 p.
- [20] Gurevich G. B. *Foundations of the theory of algebraic invariants*. Gröningen, Noordhoff, 1964, 408 p.
- [21] Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus*, vol. 5. New York, Courier Corporation, 1978, 334 pp.
- [22] Rosenfeld B. A. *Multidimensional Space*. Moscow, Nauka, 1966, 648 p.
- [23] Das A. *Tensors: The mathematics of Relativity Theory and Continuum Mechanics*. New York, Springer Science & Business Media, 2007, xii+290 pp. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-69469-6>.
- [24] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*, 2020. V. 24, № 3, C. 424–444. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>
- [25] Levi-Civita T. *The Absolute Differential Calculus (Calculus of Tensors)*. London, Glasgow, Blackie & Son Limited, 1927, 450 pp.

Т. К. Нестеров, Е. В. Мурашкин

## ОБЪЕМНЫЙ РОСТ СОСТАВНОГО ТОЛСТОСТЕННОГО УПРУГОГО ЦИЛИНДРА

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** В данной работе представлено решение задачи наращивания тела цилиндрической формы. Рассмотрен процесс объемного роста в области наращивания. Решение задачи строится в рамках модели малых упругих деформаций. В рассмотрение введены три конфигурации деформируемого тела: естественная, виртуальная, актуальная. Вычислены распределения перемещений и напряжений возникающих в процессе роста.

**Ключевые слова:** объемный рост, 3D-материал, задача Ламе, виртуальная конфигурация, численное моделирование

DOI: 10.37972/chgpu.2021.50.4.010

УДК: 539.374

**1. Введение.** Современные методы проектирования и изготовления изделий и конструкций сложной формы основаны на различных технологических процессах обработки материалов (ламинирование, фотополимеризация, стереолитография, намотка, наплавка, замораживание, абляция, сегментация, фронтальное и послойное отверждение) [1–4]. Эти производственные процессы аддитивных технологий связаны с синтезом изделий путем последовательного добавления материала на поверхность произвольной формы. Процедура выбора корректных краевых условий на поверхности наращивания является актуальной фундаментальной проблемой современной деформируемого твердого тела и прикладной математики.

---

© Нестеров Т. К., Мурашкин Е. В. 2021

*Нестеров Тимофей Константинович*

e-mail: nesterovtim@gmail.com, программист, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

*Мурашкин Евгений Валерьевич*

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 19-51-60001, № 20-01-00666.

Поступила 20.03.2021

Решение прикладной задачи механики роста твердого тела зачастую является сложной и трудоемкой процедурой. [5–11]. Существенной особенностью постановки краевых задач в рамках механики роста является постановка граничных условий на границе раздела между исходным материалом и добавляемой частью [12–16].

В данной работе рассмотрена задача о объемном росте составного цилиндра. Предполагается, что рост происходит во внутреннем цилиндре, что в свою очередь вызывает упругие деформации как во внутреннем, так и во внешнем цилиндре. Данные упругие деформации отчасти компенсируют изменение геометрии вызванное ростом. В процессе решения рассматривается 3 конфигурации тела: естественная, виртуальная и актуальная. Виртуальная конфигурация введена рассматривает тело без нагрузок с напряжениями и деформациями, вызванными исключительно процессом роста. Полагаем, что в процессе роста плотность первого и второго цилиндра остается постоянной.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим составного цилиндр с круглым поперечным сечением, состоящий из двух вложенных цилиндров: внутреннего (I) и внешнего (II). В дальнейшем все величины принадлежащие первому цилиндру будем обозначать одним штрихом справа —  $\cdot'$ , а второму двумя штрихами —  $\cdot''$ . Предполагаем, что цилиндры состоят из упругого, изотропного материала. Используется линейный закон Гука, упругие деформации считаем малыми. Предполагаем, что внутренний цилиндр подвержен осесимметричному, заранее известному, процессу объемного роста  $\gamma(t)$ , где  $t$  — параметр времени. Материальные модули Юнга цилиндров обозначим  $E'$  и  $E''$ , а коэффициенты Пуассона  $\nu'$  и  $\nu''$ . Рассмотрим рост в отсутствии массовых сил.

**3. Идея и алгоритм решения задачи объемного роста.** Для решения поставленной задачи воспользуемся идеей мультипликативного разложения тензора деформации, изложенной в [4]. Для этого рассмотрим три последовательные конфигурации:

- (1) Естественная. Начальная конфигурация в до начала процесса роста в отсутствии внешних воздействий.
- (2) Виртуальная конфигурация. Во второй конфигурации предполагаем, что в результате роста тело I неким образом изменило свое положение в пространстве, но при этом, геометрические и внешние силовые условия не влияют на деформирование тела.
- (3) Актуальная конфигурация. Конечная конфигурация характеризуется наложением всех силовых и геометрических условий, в том числе условий непрерывности вектора перемещений на границе роста.

*3.1. Естественная конфигурация.* В данном состоянии геометрию тела можно задать следующим образом:  $A$  — радиус внешней границы внутреннего цилиндра, а  $B$  — радиус внешней границы, внешнего цилиндра. В рассматриваемой конфигурации, положение точек тела в пространстве с точностью до поворота описывается переменной  $R_0$ , т.е. каждая точка тела I занимает положение  $R_0' \in [0, A]$ . Положения точек внешнего цилиндра (II), принимают значения  $R_0'' : R_0'' \in [A, B]$ . Какие либо напряжения или внешние силы в данной конфигурации на тело не действуют.

*3.2. Виртуальная конфигурация.* Теперь рассмотрим виртуальную конфигурацию, в ней мы предполагаем, что процесс роста вызвал изменение геометрии тела, но при

этом еще отсутствует влияние внешних сил, внутренних и поверхностных напряжений, а также геометрических ограничений. В данной конфигурации значения радиуса для каждой точки обозначим, как  $R'$  для I тела и  $R''$  для II тела. В таком параметр роста можно записать, как отношение бесконечно малого участка тела I в начальной конфигурации к бесконечно малому участку тела I в виртуальной:

$$\frac{\partial R'}{\partial R_0} = \gamma'(R_0, t) = \gamma(t). \quad (1)$$

Для тела II это может быть записано, как

$$\frac{\partial R''}{\partial R_0} = \gamma''(R_0, t) = 1.$$

Если проинтегрировать соотношение (1)

$$R'(R_0, t) = \int_0^{R_0} \gamma'(\xi, t) d\xi = \gamma'(t) \int_0^{R_0} d\xi = \gamma'(t) R_0,$$

то несложно заметить, что тело I будет пересекаться с телом II, если  $\gamma'(t) R_0 > 1$ . В обратном случае  $\gamma'(t) R_0 < 1$ , будет возникать разрыв перемещений.

*3.3. Актуальная конфигурация.* Рассмотрим актуальную конфигурацию. Предположим, что на этом этапе изменение положения точек тела вызвано приложенными внешними силами и условием того, что тело остается сплошным. В данной конфигурации положения точек тела будем обозначать  $r'$  и  $r''$ , для первого и второго слоя, соответственно. В таком случае, введем в рассмотрение параметры:

$$\frac{\partial r'}{\partial R'} = \alpha', \quad \frac{\partial r''}{\partial R''} = \alpha''$$

Тогда, изменение положения точек тела I и II относительно естественной конфигурации, будет описываться, как

$$\frac{\partial r'}{\partial R_0} = \frac{\partial r'}{\partial R'} \frac{\partial R'}{\partial R_0} = \alpha' \gamma' = \alpha' \gamma(t), \quad \frac{\partial r''}{\partial R_0} = \frac{\partial r''}{\partial R''} \frac{\partial R''}{\partial R_0} = \alpha'' \gamma'' = \alpha''$$

Если мы определим вектор перемещения как  $u'_R(R', t) = r'(R'(t), t) - R'(t)$ , то

$$\frac{\partial r'}{\partial R'} = 1 + \frac{\partial u'_R(R', t)}{\partial R'} = \alpha'(R', t)$$

В общем же случае градиент упругих деформаций для первого тела примет вид:

$$\mathbf{F}'_e = \left(1 + \frac{\partial u'_R(R', t)}{\partial R'}\right) \mathbf{E}_{r'r'} \otimes \mathbf{E}_{R'R'} + \left(1 + \frac{u'(R', t)}{R'}\right) \mathbf{E}_{\varphi'\varphi'} \otimes \mathbf{E}_{\Phi'\Phi'} + \mathbf{E}_{z'z'} \otimes \mathbf{E}_{Z'Z'}$$

Вычислим компоненты тензора конечных деформаций Грина:

$$2L'_{r'R'} = \left( \left(1 + \frac{\partial u'_R(R', t)}{\partial R'}\right)^2 - 1 \right) = \left( 2 \frac{\partial u'_R(R', t)}{\partial R'} + \left( \frac{\partial u'_R(R', t)}{\partial R'} \right)^2 \right),$$

$$2L'_{\varphi'\Phi'} = \left( \left(1 + \frac{u'_R(R', t)}{R'}\right)^2 - 1 \right) = \left( 2 \frac{u'_R(R', t)}{R'} + \left( \frac{u'_R(R', t)}{R'} \right)^2 \right),$$

$$2L'_{z'Z'} = 1^2 - 1 = 0,$$

откуда с учетом о предположении бесконечной малости упругих деформаций получим, что

$$\varepsilon'_{r'R'}(R') = \frac{\partial u'_R(R', t)}{\partial R'}, \quad \varepsilon'_{\varphi'\Phi'}(R') = \frac{u'_R(R', t)}{R'}, \quad \varepsilon'_{z'Z'}(R') = 0, \quad (2)$$

где  $\varepsilon'_{ij}$  — соответствующая компонента тензора малых упругих деформаций для первого тела. То же самое верно и для второго тела.

Уравнения равновесия для первого и второго тела в актуальной конфигурации примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{r'R'}(R', t)}{\partial R'} + \frac{\sigma_{r'R'}(R', t) - \sigma_{\varphi'\varphi'}(R', t)}{R'} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r''R''}(R'', t)}{\partial R''} + \frac{\sigma_{r''R''}(R'', t) - \sigma_{\varphi''\varphi''}(R'', t)}{R''} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Закон Гука для I тела записывается в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{r'R'} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon'_{r'R'}(R', t) + \nu \varepsilon'_{\varphi'\Phi'}(R', t)) \\ \sigma_{\varphi'\varphi'} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon'_{\varphi'\Phi'}(R') + \nu \varepsilon'_{r',R'}(R', t)). \end{aligned}$$

Для тела II закон Гука запишется подобным образом, что и для I тела, в формуле (4) следует заменить один штрих на два.

Решение системы уравнений (3) в нашем случае примет вид

$$u'_R(R') = C'_1(t)R'(R_0, t) + \frac{C'_2}{R'(R_0, t)}, \quad u''_R(R'') = C''_1R''(R_0) + \frac{C''_2}{R''(R_0)}. \quad (4)$$

Для определения неизвестных интегрирования  $C'_1(t)$ ,  $C'_2(t)$ ,  $C''_1(t)$ ,  $C''_2(t)$  применим ряд условий.

Во-первых, для тела I потребуем, по аналогии с обычной задачей Ламе,  $u'_R(R', t) = 0$  при  $R' = 0$ . Откуда  $C'_2 = 0$ .

Во-вторых, исходя из требования неразрывности тела, условием на границе I и II тела потребуем:

$$r'(R'(A), t) = r''(R''(A), t)$$

или же

$$\begin{aligned} R'(A) + u'_{R'}(R'(A, t), t) &= R''(A) + u''_{R''}(R''(A), t) \\ \gamma(t)A + u'_{R'}(\gamma(t)A, t) &= A + u''_{R''}(A, t). \\ \gamma(t)A + C'_1(t)\gamma(t)A &= A + C''_1(t)A + \frac{C''_2(t)}{A} \end{aligned}$$

преобразуем и получим:

$$\gamma(t)(1 + C'_1(t)) = 1 + C''_1(t) + \frac{C''_2(t)}{A^2} \quad (5)$$

В-третьих, учтем граничные условия на внешней границе II тела

$$\sigma''_{r''R''}(R''(B), t) = p(t),$$

в терминах перемещений примет вид:

$$\frac{E''}{1 - (\nu'')^2} \left( C''_1(t)(1 + \nu'') + \frac{C''_2(t)(1 - \nu'')}{B^2} \right) = p(t).$$

В-четвертых, для вывода условия определения констант в зоне контакта рассмотрим тела по отдельности и запишем для каждого соответствующие граничное условие. Тело I вследствие роста подвергается сжимающим напряжениям, так что

$$\hat{\Sigma}' \cdot \bar{n}' = p' \bar{e}_r'. \quad (6)$$

Здесь  $\hat{\Sigma}'$  — тензор напряжений Коши для первого тела,  $\bar{n}'$  — вектор единичной нормали, направленный от границы первого тела,  $\bar{e}_r' = -\bar{e}_r$  — единичный вектор противоположный базисному вектору. Если преобразовать уравнение (6), то получим:

$$\sum_{i,j=1}^3 (\sigma'_{ij} \bar{e}_i' \otimes \bar{e}_j') \cdot \bar{e}_r' = p' \bar{e}_r',$$

$$\sum_{i,j=1}^3 \sigma'_{ij} \delta_{ir} \bar{e}_j' = -p' \bar{e}_r',$$

$$\sigma'_{rr} \bar{e}_r' = -p' \bar{e}_r',$$

т.к.  $\sigma'_{r1} := \sigma'_{r'R'}$ , а  $\sigma'_{r2} := \sigma'_{r'\varphi'} = 0$  и  $\sigma'_{r3} := \sigma'_{r'Z'} = 0$ .

Тело II, в свою очередь, подвергается растягивающим напряжениям из-за роста первого тела, поэтому

$$\hat{\Sigma}'' \cdot \bar{n}'' = p'' \bar{e}_r''.$$

Здесь  $\hat{\Sigma}''$  — тензор напряжений Коши для второго тела,  $\bar{n}'' = \bar{e}_r$  — вектор единичной нормали, направленный от границы второго тела.

$$\sum_{i,j=1}^3 (\sigma''_{ij} \bar{e}_i'' \otimes \bar{e}_j'') \cdot \bar{e}_r'' = p'' \bar{e}_r'',$$

$$\sum_{i,j=1}^3 (-\sigma''_{ij} \delta_{ir} \bar{e}_j'') = p'' \bar{e}_r'',$$

$$-\sigma''_{rr} \bar{e}_r'' = p'' \bar{e}_r'',$$

т.к.  $\sigma''_{r1} := \sigma''_{r''R''}$ , а  $\sigma''_{r2} := \sigma''_{r''\varphi''} = 0$  и  $\sigma''_{r3} := \sigma''_{r''Z''} = 0$ .

Далее предполагаем, что сила, с которой тело I давит на тело II, равна силе, с которой тело II давит на тело I, т.е.

$$p' = p'',$$

тогда,

$$\sigma'_{r'R''} \bar{e}_r'' = -(-\sigma''_{r''R''}) \bar{e}_r'' = \sigma''_{r''R''} \bar{e}_r'',$$

или же

$$\sigma'_{r'R'}(R'(A), t) = -\sigma''_{r''R''}(R''(A), t),$$

или же терминах вектора перемещений:

$$\frac{E'}{1 - (\nu')^2} (C_1'(t)(1 + \nu')) = \frac{E''}{1 - (\nu'')^2} \left( C_1''(t)(1 + \nu'') + \frac{C_2''(t)(1 - \nu'')}{A^2} \right).$$

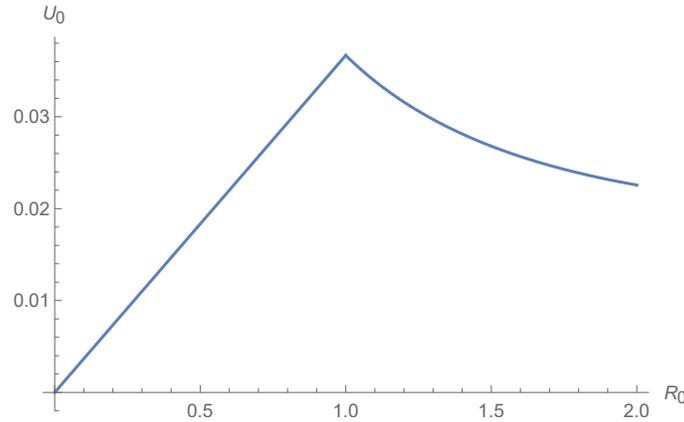


Рис. 1. Радиальное перемещение.

Теперь запишем все четыре условия для определения неизвестных  $C_1'(t)$ ,  $C_2'(t)$ ,  $C_1''(t)$ ,  $C_2''(t)$ :

$$C_2' = 0$$

$$\gamma(t)(1 + C_1') = 1 + C_1'' + \frac{C_2''}{A^2},$$

$$\frac{E''}{1 - (\nu'')^2} \left( C_1''(1 + \nu'') + \frac{C_2''(\nu'' - 1)}{B^2} \right) = p(t),$$

$$\frac{E'}{1 - (\nu')^2} (C_1'(1 + \nu')) = -\frac{E''}{1 - (\nu'')^2} \left( C_1''(1 + \nu'') + \frac{C_2''(\nu'' - 1)}{A^2} \right).$$

Решив последнюю систему, найдем неизвестные интегрирования как функции от  $\gamma(t), p(t), E', E'', \nu', \nu'', B, A$ , т.е. все материальные и физические параметры оказались учтены.

**Численные пример.** Рассмотрим численный пример, предположим, что функция роста имеет вид  $\gamma(t) = \gamma = 1.05$ .  $E' = E'' = 200$ ,  $\nu' = \nu'' = 0.25$ ,  $A = 1$ ,  $B = 2$ ,  $p(t) = 0$ . Данный случай можно сравнить с изготовлением составного цилиндра с натягом [9, 11].

Общие перемещения точек тела, заданные как  $U_0 = r(R(R_0)) - R_0$  изображены на рис. 1. Распределения радиальных и окружных напряжений изображены на рис. 2 и 3 соответственно.

Можно заметить, что несмотря на отрицательные упругие перемещения для тела I, оно все равно увеличилось за счет объемного роста. Так,  $r'(R'(A)) = r''(R''(A)) = 1.03667$ . При этом  $r''(R''(B)) - r''(R''(a)) = 0.985896$ , т.е. второе тело будет находиться в состоянии сжатия, как и первое, что можно увидеть на графике распределения радиальных напряжений (рис. 2).

Отметим, что несмотря на то, что на тело не действуют внешние силы, тело I и тело II все же испытывают как радиальные, так и окружные напряжения.

**4. Заключение.** В данной работе на примере модельной задачи Ламе рассмотрен алгоритм решения задачи объемного роста с использованием промежуточной

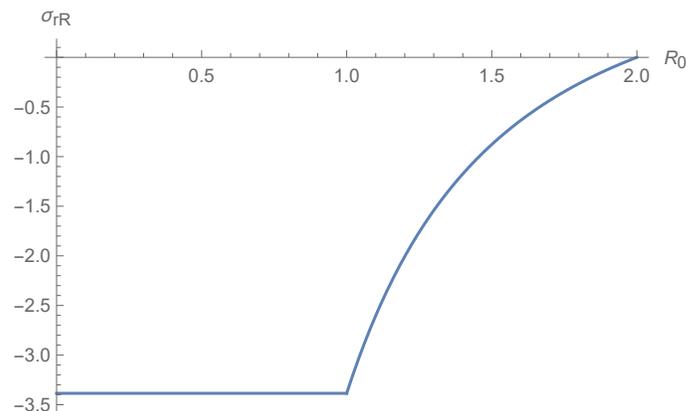


Рис. 2. Радиальное напряжение.

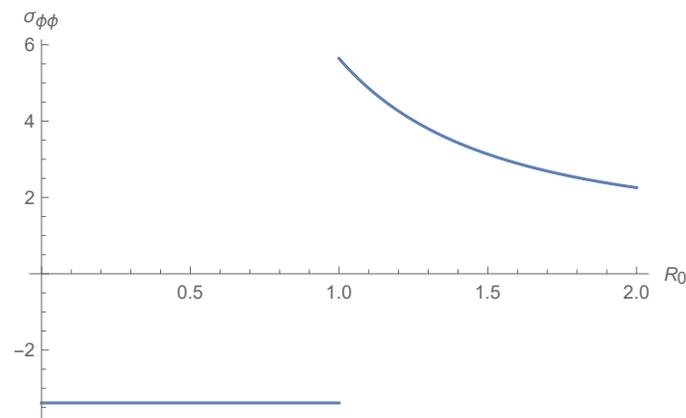


Рис. 3. Окружное напряжение.

(виртуальной) конфигурации. Получено аналитическое решение в предположении о малости упругих деформациях и линейно-упругом поведении материала. Представлены численные результаты расчета для случая объемного роста внутреннего цилиндра.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Berman B. 3-D printing: The new industrial revolution // *Business Horizons*. 2012. Т. 55. С. 155–162.
- [2] Epstein M., Maugin G. A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies // *International Journal of Plasticity*. 2000. Т. 16. С. 951–978.
- [3] Maugin G. A. On inhomogeneity, growth, ageing and the dynamics of materials // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2009. с. 731–741.
- [4] Goriely A. *The mathematics and mechanics of biological growth*. New York: Springer, 2017. xxii + 646 с.
- [5] Arutyunyan N. Kh. Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // *J. Appl. Math. Mech.* 1984. Т. 48. С. 1–10.
- [6] V. Southwell R. *An introduction to the theory of elasticity*. For engineers and physicists. London: Oxford Univ. Press, 1936.

- [7] Kovalev V. A. Radayev Yu. N. On a form of the first variation of the action integral over a varied domain // *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 2014. T. 14. С. 199–209.
- [8] Manzhairov A.V., Mikhin M.N., Murashkin E.V. Torsion of a growing shaft // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences.* 2017. T. 21, № 4. С. 684–698.
- [9] Murashkin E. V., Dats E. P., Stadnik N. E. Application of surface growth model for a pathological process in a blood vessel's wall // *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* 2020.
- [10] Manzhairov A.V., Murashkin E.V., Parshin D.A. Modeling of additive manufacturing and surface growth processes // *AIP Conference Proceedings / AIP Publishing LLC.* T. 2116. 2019. с. 380011.
- [11] Dats E., Murashkin E., Stadnik N. The simulation of atherosclerosis by the 3-layered growing cylinder // *Lecture Notes in Engineering and Computer Science.* 2019. С. 362–365.
- [12] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences.* 2020. T. 24, № 3. С. 424–444.
- [13] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences.* 2019. T. 23, № 4. С. 646–656.
- [14] Murashkin E.V., Radaev Yu. N. On a differential constraint in asymmetric theories of the mechanics of growing solids // *Mechanics of Solids.* 2019. T. 54. С. 1157–1164.
- [15] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. Об одном классе определяющих уравнений на растущей поверхности // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.* 2019. С. 11–29.
- [16] Мурашкин Е. В. О формулировках краевых условий в задачах синтеза тканых 3d материалов // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.* 2021. С. 114–121.

*T. K. Nesterov, E. V. Murashkin*

## VOLUMETRIC GROWTH OF A COMPOSITE THICK-WALLED ELASTIC CYLINDER

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** This paper presents a solution to the problem of growing a cylindrical solids. The process of volumetric growth in the extension area is considered. The solution of the problem is obtained within the framework of the model of small elastic deformations. Three configurations of a solid are introduced into consideration: natural, virtual, actual. The distributions of displacements and stresses during the process of growth are calculated.

**Keywords:** volumetric growth, 3D material, Lamé problem, virtual configuration, numerical simulation

### REFERENCES

- [1] Berman B. 3-D printing: The new industrial revolution // *Business Horizons.* 2012. T. 55. С. 155–162.
- [2] Epstein M., Maugin G. A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies // *International Journal of Plasticity.* 2000. T. 16. С. 951–978.
- [3] Maugin G. A. On inhomogeneity, growth, ageing and the dynamics of materials // *Journal of Mechanics of Materials and Structures.* 2009. с. 731–741.
- [4] Goriely A. *The mathematics and mechanics of biological growth.* New York: Springer, 2017. xxii + 646 с.

---

*Timofei K. Nesterov*, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

*Evgenii V. Murashkin*, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

- 
- [5] Arutyunyan N. Kh. Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // *J. Appl. Math. Mech.* 1984. T. 48. C. 1–10.
- [6] V. Southwell R. An introduction to the theory of elasticity. For engineers and physicists. London: Oxford Univ. Press, 1936.
- [7] Kovalev V. A. Radayev Yu. N. On a form of the first variation of the action integral over a varied domain // *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 2014. T. 14. C. 199–209.
- [8] Manzhairov A.V., Mikhin M.N., Murashkin E.V. Torsion of a growing shaft // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences.* 2017. T. 21, № 4. C. 684–698.
- [9] Murashkin E. V., Dats E. P., Stadnik N. E. Application of surface growth model for a pathological process in a blood vessel's wall // *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* 2020.
- [10] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences.* 2020. T. 24, № 3. C. 424–444.
- [11] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences.* 2019. T. 23, № 4. C. 646–656.
- [12] Murashkin E.V., Radaev Yu. N. On a differential constraint in asymmetric theories of the mechanics of growing solids // *Mechanics of Solids.* 2019. T. 54. C. 1157–1164.
- [13] Manzhairov A.V., Murashkin E.V., Parshin D.A. Modeling of additive manufacturing and surface growth processes // *AIP Conference Proceedings / AIP Publishing LLC.* T. 2116. 2019. c. 380011.
- [14] Dats E., Murashkin E., Stadnik N. The simulation of atherosclerosis by the 3-layered growing cylinder // *Lecture Notes in Engineering and Computer Science.* 2019. C. 362–365.
- [15] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a Class of Constitutive Equations on Propagating Growing Surface // *Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. I.Ya. Yakovlev. Ser.: Mekh. Pred. Sost.* 2019. C. 11–29.
- [16] Murashkin E. V. On the boundary conditions formulation in the problems of synthesis of woven 3d materials // *Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state.* 2021. C. 114–121.

Н. Э. Стадник

## О НАРАЩИВАНИИ 3D-МАТЕРИАЛА В УСЛОВИЯХ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** В статье приводится решение краевой задачи, моделирующей процессы синтеза 3D материала в условиях осевой симметрии. Разработан метод решения поставленной краевой задачи. Условие тонкостенности позволяет изучить конечные перемещения точек цилиндра при условии малых деформаций. Это, в частности, дает возможность решить задачу с точными краевыми условиями на движущейся поверхности. Обсуждаются особенности поведения основных характеристик, зависящие от давления на внутреннюю поверхность цилиндра, натяга на поверхности наращивания и скорости ее распространения. Получены распределения окружных и радиальных напряжений. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании процессов синтеза тканых 3D материалов.

**Ключевые слова:** поверхность наращивания, 3D материал, осевая симметрия, параметры Ламэ

DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.012

УДК: 539.374

**Вводные замечания.** Современные методы проектирования и изготовления изделий и конструкций сложной формы основаны на различных технологических процессах обработки материалов (ламинирование, фотополимеризация, стереолитография, намотка, наплавка, замораживание, абляция, сегментация, фронтальное и послойное отверждение) [1–4]. Эти производственные процессы аддитивных технологий связаны с синтезом изделий путем последовательного добавления материала на поверхность произвольной формы. Процедура выбора корректных краевых условий на поверхности наращивания является актуальной фундаментальной проблемой современной деформируемого твердого тела и прикладной математики.

---

© Стадник Н. Э. 2021

*Стадник Никита Эдуардович*

e-mail: nik-122@mail.ru, младший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 19-51-60001, № 20-01-00666.

Поступила 20.09.2021

Решение прикладной задачи механики роста твердого тела зачастую является сложной и трудоемкой процедурой. [5–11]. Существенной особенностью постановки краевых задач в рамках механики роста является постановка граничных условий на границе раздела между исходным материалом и добавляемой частью [12–16].

В статье рассматриваются модельные задачи для упругого тонкостенного поверхностно растущего цилиндра. Условие тонкостенности позволяет изучить конечные перемещения точек цилиндра при условии малых деформаций. Это, в частности, дает возможность решить задачу с точными краевыми условиями на движущейся поверхности. Обсуждаются особенности поведения основных характеристик, зависящие от давления на внутреннюю поверхность цилиндра, натяга на поверхности наращивания и скорости ее распространения.

**5. Основные модельные соотношения** Рассмотрим бесконечно-длинный полый упругий цилиндр с внутренним и внешним радиусом  $R_1$  и  $R_2$  соответственно, что соответствует постановке классической задачи Ламэ. Соотношения между тензором напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $e_{ij}$  в изотропном упругом материале цилиндра подчинены закону Гука:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu)e_{rr} + \lambda(e_{\varphi\varphi} + e_{zz}), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= (\lambda + 2\mu)e_{\varphi\varphi} + \lambda(e_{rr} + e_{zz}), \\ \sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu)e_{zz} + \lambda(e_{\varphi\varphi} + e_{rr}),\end{aligned}\quad (1)$$

где  $\lambda, \mu$  — параметры Ламе.

Приняв гипотезу о плоском напряженном состоянии, для малых деформаций будем иметь:

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad e_{zz} = 0, \quad (2)$$

где  $u_r$  — радиальная компонента вектора перемещений.

Компоненты тензора напряжений удовлетворяют уравнению равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0. \quad (3)$$

Выразив компоненты деформаций (1) через напряжения, и, используя соотношения (2–3), получим дифференциальное уравнение для определения радиального напряжения:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( 2\sigma_{rr} + r \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} \right) = 0. \quad (4)$$

Проинтегрировав уравнение (4), получим общее решение для радиального напряжения:

$$\sigma_{rr} = A + \frac{B}{r^2}. \quad (5)$$

Для функций  $\sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}, u_r$ , согласно (1–5), будем иметь:

$$\sigma_{\varphi\varphi} = A - \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_{zz} = \frac{\lambda A}{(\lambda + \mu)}, \quad u_r = \frac{Ar}{2(\lambda + \mu)} - \frac{B}{2\mu r}. \quad (6)$$

На боковые поверхности цилиндра действует стационарная нагрузка

$$\sigma_{rr}(R_1) = p_1, \quad \sigma_{rr}(R_2) = -p_2. \quad (7)$$

Из решения системы (7) получим выражения для констант интегрирования:

$$A = -\frac{p_1 R_1^2 + p_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad B = \frac{R_1^2 R_2^2 (p_1 + p_2)}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (8)$$

Соотношения (5)–(8) определяют напряженно-деформированное состояние перед началом процесса наращивания. Пусть в некоторый момент времени  $t = 0$  на внутренней поверхности цилиндра начинается наращивание материала со скоростью  $v = v(t)$ , тогда условия на поверхности наращивания [12–16] могут быть записаны в виде:

$$\dot{\sigma}_{rr}(R_1(t)) = -\frac{v(t)\tau(t)}{R_1(t)}, \quad R_1(t) = R_1 - v(t)t, \quad \dot{\sigma}_{rr}(R_2) = 0. \quad (9)$$

В (9) точкой обозначена скорость рассматриваемой величины, которая в рамках модели малых деформаций может определяться, как частная производная функции по времени;  $\tau(t)$  — окружное напряжение (натяг) наращиваемого слоя в момент присоединения к цилиндру. Данная величина определяет формирующийся натяг в присоединяемом материале. Для корректного описания напряженно-деформированного состояния материала в условиях непрерывного наращивания  $t > 0$ , необходимо перейти к постановке в скоростях рассматриваемых функций напряжений и перемещений (5–6):

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{rr} &= X(t) + \frac{Y(t)}{r^2}, & \dot{\sigma}_{\varphi\varphi} &= X(t) - \frac{Y(t)}{r^2}, \\ \dot{\sigma}_{zz} &= \frac{\lambda X(t)}{(\lambda + \mu)}, & \dot{u}_r &= \frac{X(t)r}{2(\lambda + \mu)} - \frac{Y(t)}{2\mu r}. \end{aligned} \quad (10)$$

Неизвестные функции времени  $X(t)$ ,  $Y(t)$  несложно определить из решения системы (9)

$$X(t) = \frac{R_1(t)v(t)\tau(t)}{R_2^2 - R_1^2(t)}, \quad Y(t) = -\frac{R_1(t)v(t)\tau(t)R_2^2}{R_2^2 - R_1^2(t)}. \quad (11)$$

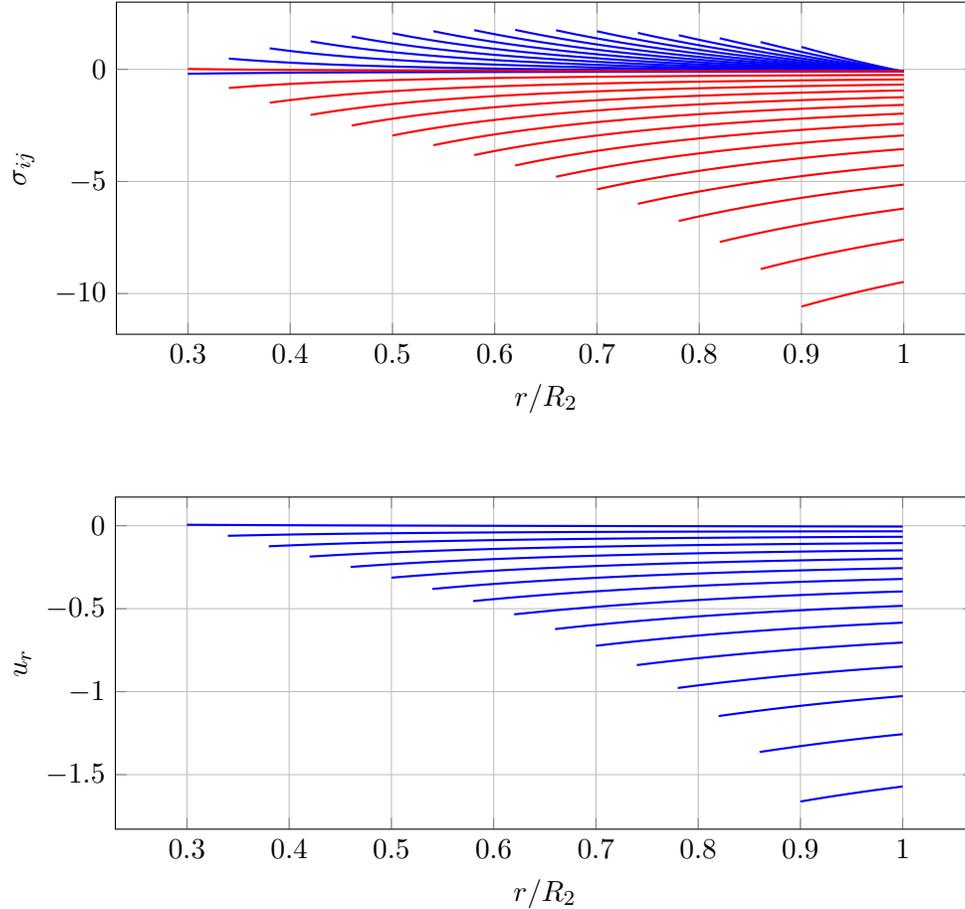
Соотношения для напряжений и перемещений в процессе наращивания определим, проинтегрировав (10) по времени с учетом начальных условий (5–6):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= A + \frac{B}{r^2} + \int_0^t \left( X(s) + \frac{Y(s)}{r^2} \right) dt, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= A - \frac{B}{r^2} + \int_0^t \left( X(s) - \frac{Y(s)}{r^2} \right) dt, \\ \sigma_{zz} &= \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)} \left( A + \int_0^t X(s) dt \right), \\ u_r &= \frac{Ar}{2(\lambda + \mu)} - \frac{B}{2\mu r} + \left( \int_0^t \frac{X(s)r}{2(\lambda + \mu)} - \frac{Y(s)}{2\mu r} \right) dt. \end{aligned} \quad (12)$$

**6. Численные результаты.** В численных экспериментах использовались различные значения размеров наращиваемого слоя  $R_1(t)$  и уровня натяга  $\tau(t)$ . Для случая  $v(t) = const$ ,  $\tau(t) = const$  установлено, что в зависимости от заранее выбранной толщины наращиваемого слоя  $R_1(t) - R_1$  уровень  $\tau$  оказывает ключевое влияние на формирование итогового напряженно-деформированного состояния материала. На рис. 6 показано распределение радиальных (синие линии) и окружных (красные линии) напряжений в процессе роста. При выборе определенного значения

$\tau$ , в процессе роста внутренней стенки на внутренней поверхности  $R_1(t)$  напряжения уменьшаются до нулевого значения. На рис. 6 изображено радиальное перемещение в процессе роста. Расчеты проводились при следующих безразмерных параметрах материала:

$$\begin{aligned} \tau = 6, \quad \lambda = 4, \quad \mu = 2, \quad \nu = 0.1, \\ p_1 = 1, \quad p_2 = 0.1, \quad R_1 = 0.9, \quad R_2 = 1. \end{aligned} \quad (13)$$



**7. Заключение.** В статье решена краевая задача, моделирующая процессы синтеза 3D материала в условиях осевой симметрии. Разработан метод решения поставленной краевой задачи. Условие тонкостенности позволяет изучить конечные перемещения точек цилиндра при условии малых деформаций. Это, в частности, дает возможность решить задачу с точными краевыми условиями на движущейся поверхности. Обсуждаются особенности поведения основных характеристик, зависящие от давления на внутреннюю поверхность цилиндра, натяга на поверхности наращивания и скорости ее распространения. Получены распределения окружных и радиальных напряжений. Многочисленные расчеты показали, что при отсутствии начального натяга в присоединяемом слое установлена концентрация напряжений, вызванная влиянием внутреннего давления. При высоких значениях начального натяга в присоединяемом

слое так же выявлена концентрация напряжений, которая обусловлена существенным влиянием величины натяга в процессе уменьшения радиуса стенки. Таким образом, можно сделать вывод: с одной стороны при правильно выбранных начальных параметрах процесса наращивания, можно добиться минимального влияния внутреннего давления, если таковое имеется, на деформирование стенок цилиндры, с другой стороны определенный режим наращивания способен вызвать процессы необратимого деформирования и разрушения вместе с наращиваемым слоем.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Berman B. 3-D printing: The new industrial revolution // *Business Horizons*. 2012. Т. 55. С. 155–162.
- [2] Epstein M., Maugin G. A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies // *International Journal of Plasticity*. 2000. Т. 16. С. 951–978.
- [3] Maugin G. A. On inhomogeneity, growth, ageing and the dynamics of materials // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2009. с. 731–741.
- [4] Goriely A. *The mathematics and mechanics of biological growth*. New York: Springer, 2017. xxii + 646 с.
- [5] Arutyunyan N. Kh. Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // *J. Appl. Math. Mech.* 1984. Т. 48. С. 1–10.
- [6] V. Southwell R. *An introduction to the theory of elasticity*. For engineers and physicists. London: Oxford Univ. Press, 1936.
- [7] Kovalev V. A. Radayev Yu. N. On a form of the first variation of the action integral over a varied domain // *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 2014. Т. 14. С. 199–209.
- [8] Manzhairov A.V., Mikhin M.N., Murashkin E.V. Torsion of a growing shaft // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2017. Т. 21, № 4. С. 684–698.
- [9] Murashkin E. V., Dats E. P., Stadnik N. E. Application of surface growth model for a pathological process in a blood vessel's wall // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2020.
- [10] Manzhairov A.V., Murashkin E.V., Parshin D.A. Modeling of additive manufacturing and surface growth processes // *AIP Conference Proceedings / AIP Publishing LLC*. Т. 2116. 2019. с. 380011.
- [11] Dats E., Murashkin E., Stadnik N. The simulation of atherosclerosis by the 3-layered growing cylinder // *Lecture Notes in Engineering and Computer Science*. 2019. С. 362–365.
- [12] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Т. 24, № 3. С. 424–444.
- [13] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2019. Т. 23, № 4. С. 646–656.
- [14] Murashkin E.V., Radaev Yu. N. On a differential constraint in asymmetric theories of the mechanics of growing solids // *Mechanics of Solids*. 2019. Т. 54. С. 1157–1164.
- [15] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. Об одном классе определяющих уравнений на растущей поверхности // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2019. С. 11–29.
- [16] Мурашкин Е. В. О формулировках краевых условий в задачах синтеза тканых 3d материалов // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2021. С. 114–121.

N. E. Stadnik

## ON A GROWING PROCESS OF A 3D MATERIAL UNDER AXIAL SYMMETRY CONDITIONS

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** The article provides a solution to a boundary value problem that simulates the processes of synthesis of a 3D material under conditions of axial symmetry. A method for solving the stated boundary value problem has been developed. The condition of thin-walledness allows us to study the finite displacements of the cylinder points under the condition of small deformations. This, in particular, makes it possible to solve the problem with exact boundary conditions on a moving surface. The features of the behavior of the main characteristics, which depend on the pressure on the inner surface of the cylinder, the interference on the build-up surface, and the speed of its propagation, are discussed. The distributions of circumferential and radial stresses are obtained. The results obtained can be used in modeling the processes of synthesis of 3D woven materials.

**Keywords:** growing surface, 3D material, axial symmetry, Lamé parameters

### REFERENCES

- [1] Berman B. 3-D printing: The new industrial revolution // *Business Horizons*. 2012. T. 55. C. 155–162.
- [2] Epstein M., Maugin G. A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies // *International Journal of Plasticity*. 2000. T. 16. C. 951–978.
- [3] Maugin G. A. On inhomogeneity, growth, ageing and the dynamics of materials // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2009. c. 731–741.
- [4] Goriely A. *The mathematics and mechanics of biological growth*. New York: Springer, 2017. xxii + 646 c.
- [5] Arutyunyan N. Kh. Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // *J. Appl. Math. Mech.* 1984. T. 48. C. 1–10.
- [6] V. Southwell R. *An introduction to the theory of elasticity*. For engineers and physicists. London: Oxford Univ. Press, 1936.
- [7] Kovalev V. A. Radayev Yu. N. On a form of the first variation of the action integral over a varied domain // *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 2014. T. 14. C. 199–209.
- [8] Manzhirov A.V., Mikhin M.N., Murashkin E.V. Torsion of a growing shaft // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2017. T. 21, № 4. C. 684–698.
- [9] Murashkin E. V., Dats E. P., Stadnik N. E. Application of surface growth model for a pathological process in a blood vessel's wall // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2020.
- [10] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. T. 24, № 3. C. 424–444.
- [11] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2019. T. 23, № 4. C. 646–656.
- [12] Murashkin E.V., Radaev Yu. N. On a differential constraint in asymmetric theories of the mechanics of growing solids // *Mechanics of Solids*. 2019. T. 54. C. 1157–1164.
- [13] Manzhirov A.V., Murashkin E.V., Parshin D.A. Modeling of additive manufacturing and surface growth processes // *AIP Conference Proceedings / AIP Publishing LLC*. T. 2116. 2019. c. 380011.
- [14] Dats E., Murashkin E., Stadnik N. The simulation of atherosclerosis by the 3-layered growing cylinder // *Lecture Notes in Engineering and Computer Science*. 2019. C. 362–365.

---

*Stadnik Nikita Eduardovich*, Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,  
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

- 
- [15] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a Class of Constitutive Equations on Propagating Growing Surface // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. I.Ya. Yakovlev. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2019. С. 11–29.
- [16] Murashkin E. V. On the boundary conditions formulation in the problems of synthesis of woven 3d materials // Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2021. С. 114–121.

---

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research projects nos. 19-51-60001, 20-01-00666.

## УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

**Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

**Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru)** – член-корреспондент РАН, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

**Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru)** – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

**Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

**Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

**Келлер Илья Эрнстович (kie@icmm.ru)** – доктор физико-математических наук, доцент, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

**Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru)** – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ковалев Владимир Александрович (vlad\_koval@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

**Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

**Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su)** – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Максимова Людмила Анатольевна (maximova\_ng@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Матвеев Сергей Владимирович (sergio2100@mail.ru)** – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Матченко Николай Михайлович (ekc\_05@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Минаева Надежда Витальевна (nminaeva@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

**Миронов Борис Гурьевич (mbg.chspu@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

**Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

**Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com)** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Немировский Юрий Владимирович (nemiryury@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

**Непершин Ростислав Иванович (nepershin\_ri@rambler.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

**Орлов Виктор Николаевич (orlowvn@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

**Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

**Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

**Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

**Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

**Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru)** – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru)** – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

**Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

**Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

**Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должна быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала [predel21@mail.ru](mailto:predel21@mail.ru) и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки**

**на русском и английском языках; сведения о всех авторах на русском и английском языках:** должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы LaTeX 2 $\epsilon$  с использованием стиля `predel.sty`. Стиль `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки BibTeX. Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Володин Г. Т., Кочергин Д. С.</i> Разрушение взрывом балочных конструкций в воде.....	3
<i>Миронов Б. Г., Никитин А. В.</i> Об определение упругопластического состояния плоскости из анизотропного материала с эллиптическим отверстием .....	10
<i>Гультяев В. И., Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Саврасов И. А.</i> Проверка постулата изотропии при сложном кинематическом нагружении материала сталь 45 по траекториям деформирования в виде полуокружностей.....	16
<i>Нгуен Ш. Т.</i> Нелинейные модели упругости ортотропного материала .....	25
<i>Володин Г. Т., Кочергин Д. С.</i> О проблеме гарантированного разрушения взрывом элементов конструкций в воде .....	33
<i>Локтев А. А., Илларионова Л. А., Баракат А.</i> Возможности вибродиагностики низководных мостовых переходов .....	41
<i>Прокопьев В. И., Стурник П. Э.</i> Оценка точности решения краевой задачи для дифференциального уравнения прогиба балки методом конечных разностей .....	53
<i>Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.</i> Псевдовекторные гиперболические дифференциальные операторы гемитропной микрополярной упругости .....	59
<i>Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В., Нестеров Т.К.</i> Псевдотензорный формализм в микрополярной теории упругости Нейбера.....	73
<i>Нестеров Т. К., Мурашкин Е. В.</i> Объемный рост составного толстостенного упругого цилиндра .....	82
<i>Стадник Н. Э.</i> О наращивании 3D-материала в условиях осевой симметрии .....	91
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	98
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ .....	101
СОДЕРЖАНИЕ .....	103

**ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2021. № 4 (50)**

**Отв. за выпуск:** С. В. Тихонов

**Технические редакторы:** С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

**Компьютерная верстка:** С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

**Макет:** С. В. Тихонов

---

Подписано в печать 23.12.2021. Выход в свет 30.12.2021.  
Формат 70x100/8. Бумага писчая.  
Печать оперативная. Typeset by L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>. Усл. печ. л. 12,9.  
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ № 1981

---

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском центре Чувашского государственного  
педагогического университета им. И. Я. Яковлева  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38