

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

**ВЕСТНИК**  
**ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО**  
**УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**  
**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ**  
**Научный журнал**  
**№ 2(56)**

**Учредитель**

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”  
**Основатели серии:** Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,  
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.  
Выходит 4 раза в год

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных  
технологий и массовых коммуникаций  
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,  
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций  
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге “Пресса России” 13109

**Главный редактор:** Б. Г. Миронов

**Ответственный редактор:** Ю. Н. Радаев

**Заместитель ответственного редактора:** Н. М. Матченко, С. В. Тихонов

**Ответственные секретари:** С. В. Матвеев, Е. В. Мурашкин

**Редакционная коллегия:** В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,  
В. В. Глаголев, В. Г. Зубчанинов, Л. А. Игумнов, Р. А. Каюмов, И. Э. Келлер,  
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, Д. С. Лисовенко, Е. В. Ломакин,  
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, Н. В. Минаева, Ю. В. Немировский,  
Р. И. Непершин, В. Н. Орлов, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов,  
А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

**Международный совет:** В. М. Мирсалимов (Азербайджан), А. В. Чигарев (Бе-  
лоруссия)

**Адрес редакции:** 428000, г. Чебоксары, Президентский бульвар, 19А

**Адрес издателя:** 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

**Тел.:** (8352) 22-28-71, доб. 1182

**E-mail:** predel21@mail.ru

**WWW:** <https://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический  
университет им. И. Я. Яковлева, 2023

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

**VESTNIK  
CHUVASHSKOGO GOSUDARSTVENNOGO PEDAGOGICHESKOGO  
UNIVERSITETA IM. I. YA. YAKOVLEVA  
SERIYA: MEKHANIKA PREDEL'NOGO SOSTOYANIYA**

**Scientific journal  
№ 2(56)**

**The Journal founder:** I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University  
**Founders of the series:** D. D. Ivlev, D. M. Klimov, L. A. Maksimova, A. V. Manzhirov,  
B. G. Mironov, G. K. Mikhailov, Yu. N. Radaev, E. I. Shemyakin

Published since March 2007  
Published four times a year

Registered in Federal Service for Supervision of Communications  
Information Technology, and Mass Media "Roskomnadzor"  
(Accreditation Certificate PI No. FS77-58094 d/d 20 May, 2014).

Hard copy of the Journal is available by subscription from the catalogue "Press of Russia"  
(reg. No. 13109).

**Editor-in-chief:** B. G. Mironov

**Executive Editor:** Yu. N. Radayev

**Associate Editor:** N. M. Matchenko, S. V. Tikhonov

**Executive Secretary:** E. V. Murashkin, S. V. Matveev

**Editorial Board:** V. G. Bazhenov, A. A. Burenin, D. V. Georgievskiy,  
V. V. Glagolev, V. G. Zubzhaninov, L. A. Igumnov, R. A. Kayumov, I. E. Keller,  
D. M. Klimov, V. A. Kovalev, L. Yu. Kossovich, D. S. Lisovenko, E. V. Lomakin,  
L. A. Maksimova, A. A. Markin, N. V. Minaeva, Yu. V. Nemorovskii, R. I. Nepershin,  
V. N. Orlov, V. P. Radchenko, A. F. Revuzhenko, S. I. Senashov, A. N. Sporihin,  
A. A. Treshev, A. D. Chernishov, A. I. Khromov, A. I. Shashkin

**International Council:** V. M. Mirsalimov (Azerbaijan), A. V. Chigarev (Belorussia)

**Postal address::** ul. K. Marksa 38, 428000 Cheboksary, Russia

**Phone::** +7 352 22 28 71, ex.ph. 1182

**E-mail::** predel21@mail.ru

**Journal website::** <http://limit21.ru>

А. Н. Спорыхин<sup>1</sup>, Ю. Д. Щеглова<sup>1</sup>

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА ПРИ СЕЙСМИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ ЯДРА

<sup>1</sup>Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

**Аннотация.** В работе на основе реологических моделей сложных сред упруговязкопластической дилатирующей и несжимаемой упруговязкопластической, а также классической несжимаемой идеально пластической среды определено напряженно-деформированное состояние сферического тела при постоянной внешней и динамической внутренней нагрузках. Исследовано осесимметричное состояние тела. Определены поля перемещений и напряжений в упругих и пластических областях.

**Ключевые слова:** напряжение, перемещение, упругость, пластичность, вязкость, дилатансия, осесимметричное состояние.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.001

УДК: 539.3

### 1.

Согласно принятой точки зрения [1] Земля состоит из мантии и ядра (рис. 1), при этом структура ядра трехслойна.

Ниже в рамках предложенной структурной модели Земли, представленной в виде кусочно-неоднородного сферического тела (рис. 2), исследуется его поведение при воздействии динамических нагрузок. По внешнему контуру тела равномерно распределена нагрузка интенсивности  $q$ , по контуру полости радиуса  $a$  нагрузка  $P$ , выражение для которых имеет вид

$$P = P_0 e^{\hat{a}t}, \quad q = q_0, \quad t_* \leq t < t_0, \quad (1)$$

где  $q_0$  — атмосферное давление,  $\hat{a}$  — известная константа.

---

© Спорыхин А. Н., Щеглова Ю. Д., 2023

*Спорыхин Анатолий Николаевич*

**e-mail:** anatoli.sporuyhin@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия.

*Щеглова Юлия Дмитриевна*

**e-mail:** scheglova@gmail.com, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия.

Поступила 01.07.2023



Рис. 1. Строение Земли

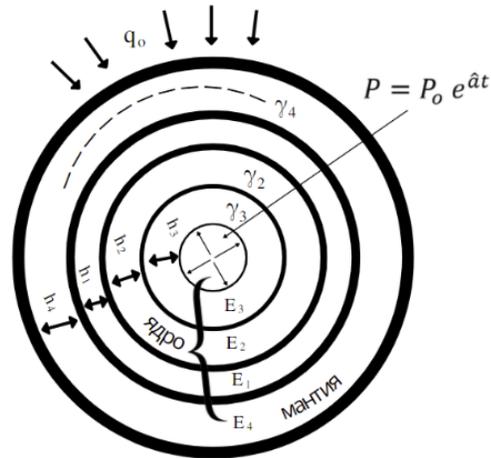


Рис. 2. Схематическое представление строения Земли

Заметим, что авторы не претендуют на общность модели, так как данная модель лишь приближена к внутренней структуре Земли и в рамках которой делается попытка анализа поведения (отказа) Земли при динамическом деформировании её ядра. Очевидно, что расчет поведения выбранного тела имеет большое значение при прогнозировании чрезвычайных ситуаций.

Будем полагать, что при действии динамической нагрузки (1) мантия и все слои ядра смыкаются, и после этого деформируются совместно без смещения относительно друг друга. При этом возникающие на линии сопряжения слоев ядра и мантии сжимающие усилия таковы, что образовавшиеся пластические области полностью охватывают внутренние контуры второго и третьего слоев ядра и мантии (четвертый слой). Так как для структуры мантии характерны рыхлые породы, для второго и третьего

слоев ядра скальные породы и для первого слоя ядра — жидкая металлическая среда, то будем использовать модели сложных сред, в которых учитываются такие свойства, обнаруживаемые у реальных физических тел, как упругость, пластичность, вязкость, упрочнение при динамическом процессе деформирования.

В качестве определяющих соотношений принимаются:

— в упругой зоне  $V^e$  связь между напряжениями и деформациями будем определять законом Гука

$$\sigma_j^\beta = \lambda \varepsilon_k^k g_j^\beta + 2\mu \varepsilon_j^\beta, \quad (2)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — параметры Ламе,  $g_j^\beta$  — компоненты метрического тензора

— пластическую область мантии  $V_4^p$  будем представлять соотношениями теории упрочняющегося упруговязкопластического тела модели Ивлева-Спорыхина [2,3], которая учитывает необратимую сжимаемость, с функцией нагружения в виде

$$F = \alpha \sigma_1 - \sqrt{\left(S_{ij} - c e_{ij}^p - \eta \dot{e}_{ij}^p\right) \left(S_{ij} - c e_{ij}^p - \eta \dot{e}_{ij}^p\right)} - k = 0, \quad (3)$$

где  $\alpha$  — скорость дилатансии,  $\eta$  — коэффициент вязкости,  $c$  — коэффициент упрочнения,  $k$  — предел текучести,  $\sigma_1 = \sigma_{kk}/3$  — первый инвариант тензора напряжений,  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}/3$ ,  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{kk}\delta_{ij}/3$  — девиаторы тензоров напряжений и деформаций, соответственно.

Такой выбор (3) обусловлен тем, что в общем случае, согласно экспериментам [4], горные породы при деформировании являются упруговязкопластическими (EVP) дилатирующими средами. Соотношения, определяющие зависимость между компонентами тензора скоростей пластических деформаций и напряжениями принимаются в форме [5]

$$\dot{\varepsilon}_j^{p\beta} = \xi \frac{\partial F}{\partial \sigma_j^\beta} + \psi(\sigma_1) \dot{\sigma}_1 \delta_j^\beta, \quad \psi(\sigma_1) = \frac{d\varphi_1}{d\sigma_1}, \quad (4)$$

где  $\varphi_1(\sigma_1) = \varepsilon_1^p$  — функция объемного нагружения, которая определяется из экспериментов,  $\varepsilon_1^p$  — первый инвариант тензора пластических деформаций,  $\psi(\sigma_1) = const$ . Это допустимо, если имеет место линейная зависимость, то есть  $\sigma_1 = k\varepsilon_1^p$ , тогда  $\phi(\sigma_1) = \frac{\sigma_1}{k}$  и, следовательно,  $\psi = \frac{d\phi}{d\sigma_1} = \frac{1}{k} = const$  ( $k$  — предел текучести).

Полная деформация в пластической зоне складывается из упругой  $\varepsilon_{ij}^e$  и пластической  $\varepsilon_{ij}^p$  составляющих

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad (5)$$

причем упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука (2).

Во втором и третьем слое ядра в пластической области будем использовать модель  $S_p$  [6] несжимаемого упруговязкопластического тела, к которой приходим, полагая в соотношениях (3), (4)  $\alpha = 0$ ,  $\psi = 0$ . Пластическая составляющая объемной деформации удовлетворяет условию несжимаемости

$$\varepsilon_{kk}^p = 0. \quad (6)$$

В упругих зонах слоев 2 и 3 связь между напряжениями и деформациями также будем определять законом Гука (2).

На границе  $S_\gamma$  ( $\gamma = 2, 3, 4$ ) раздела зон упругой и пластической областей слоев, а также на линии контакта слоев должны выполняться условия сплошности для перемещений

$$[u_j] = 0 \quad (7)$$

и поверхностных сил

$$\left[ N_j \sigma_\beta^j \right] = 0, \quad (8)$$

где  $N_j$  — орты нормали к поверхности  $S_\gamma$ .

И, наконец, жидкий металлический первый слой ядра охарактеризуем моделью несжимаемого идеально пластического тела Мизеса, к которой приходим, полагая в соотношениях (3), (4) наряду с указанным выше,  $\eta = 0$ ,  $c = 0$ .

Далее согласно [4] примем, что вязкость слоев горных пород ядра и мантии возрастает пропорционально времени процесса деформирования, то есть

$$\eta_n = \eta_{0n} t \quad (n = 2, 3, 4). \quad (9)$$

Значения модуля  $\eta_{0n}$  для различных пород приведены в [4].

Малые деформации слоев среды (горных пород) будем характеризовать соотношениями Коши

$$2\varepsilon_j^i = \nabla_j u^i + \nabla^i u_j, \quad (10)$$

где  $u_j$  — компоненты вектора перемещений, символ  $\nabla_j$  обозначает ковариантную производную по  $j$ -ой компоненте.

Присоединяя к уравнениям (2)-(10) уравнения движения

$$\nabla_i \sigma_j^i - \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = 0 \quad (\rho - \text{плотность материала}) \quad (11)$$

и граничные условия на внешней  $\Sigma_4$  и внутренней  $\Sigma_3$  поверхностях

$$N_j \sigma_\beta^j = P_\beta \quad (P_\beta - \text{составляющие вектора поверхностных сил}), \quad (12)$$

а также начальные условия, получим замкнутую математическую задачу для кусочно неоднородного сферического тела при нагружении.

Далее физико-механическим параметрам каждой из шести зон тела  $V_s^p$ ,  $V_s^e$  следует приписывать индексы  $s = 2, 3, 4$ , соответственно, а для металлического включения  $V^p$  индекс 1, то есть  $V_1^p$ . Аналогичную запись будем соблюдать для компонент тензора напряжений, деформаций и перемещений.

## 2.

Задача решается в сферической системе координат. С учетом осевой симметрии определяющие уравнения (2)-(10) рассматриваемой задачи имеют следующий вид:

— уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (13)$$

— закон Гука

$$\sigma_r = \lambda (\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta) + 2\mu \varepsilon_r, \quad \sigma_\theta = \lambda (\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta) + 2\mu \varepsilon_\theta, \quad (14)$$

— функция нагружения

$$\alpha \sigma_1 + \sqrt{\frac{3}{2}} (S_r - c \varepsilon_r^p - \eta \dot{\varepsilon}_r^p) - k = 0, \quad (15)$$

— ассоциированный закон пластического течения

$$\dot{\varepsilon}_r^p = \xi \left( \frac{\alpha}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}} \right) + \psi \dot{\sigma}_1, \quad \dot{\varepsilon}_\theta^p = \xi \left( \frac{\alpha}{3} - \sqrt{\frac{1}{6}} \right) + \psi \dot{\sigma}_1, \quad (\psi = \text{const}) \quad (16)$$

— условие несжимаемости

$$\varepsilon_r^p + 2\varepsilon_\theta^p = 0, \quad (17)$$

— соотношения Коши

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad (18)$$

— соотношения для полных деформаций в пластической области

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^p, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p. \quad (19)$$

Граничные условия (12) и условия сопряжения (7), (8) на упругопластических границах слоев принимают вид

$$\sigma_{r4}^e|_{r=b} = q_0, \quad \sigma_{r3}^p|_{r=a} = P, \quad [u]|_{r=\gamma_s} = 0, \quad [\sigma_r]|_{r=\gamma_s} = 0, \quad [\sigma_\theta]|_{r=\gamma_s} = 0 \quad (s = 2, 3, 4). \quad (20)$$

В предположении, что в момент начала пластического течения  $t = t_*$  зарождение пластической области начинается от границ внутренней полости шара (третий слой) и, соответственно, внутренних границ второго и четвертого слоев шара, начальные условия задаются в форме

$$\gamma_3|_{t=t_*} = a, \quad \gamma_2|_{t=t_*} = a + h_3, \quad \gamma_4|_{t=t_*} = a + h_1 + h_2 + h_3, \quad (21)$$

где  $h_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3, 4$ ) — толщина слоев.

Условия на поверхности контакта слоев таковы

$$\begin{aligned} \sigma_{r1}^p &= \sigma_{r4}^p, \quad u_1^p = u_4^p \quad \text{при } r = a + h_1 + h_2 + h_3, \\ \sigma_{r1}^p &= \sigma_{r2}^e, \quad u_1^p = u_2^e \quad \text{при } r = a + h_2 + h_3, \\ \sigma_{r2}^p &= \sigma_{r3}^e, \quad u_2^p = u_3^e \quad \text{при } r = a + h_3. \end{aligned} \quad (22)$$

Согласно (1) искомые функции принимают вид

$$\Phi(r, t) = \Phi(r)e^{\hat{a}t}. \quad (23)$$

Вследствие осевой симметрии имеем

$$S_\theta = S_\phi = -\frac{1}{2}S_r, \quad e_\theta = e_\phi = -\frac{1}{2}e_r.$$

Тогда функция нагружения (15) принимает вид

$$\left(\alpha - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \sigma_1 + \sqrt{\frac{3}{2}} [\sigma_r - (c_4 + \eta_4 \hat{a}) (\varepsilon_r^p - \varepsilon_1^p)] - k_{04}, \quad k_{04} = k_4 e^{-\hat{a}t}. \quad (24)$$

Из ассоциированного закона течения (16) следует соотношение

$$(\varepsilon_r^p - \psi \sigma_1) \left(\frac{\alpha}{3} - \sqrt{\frac{1}{6}}\right) = (\varepsilon_\theta^p + \psi \sigma_1) \left(\frac{\alpha}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \quad (25)$$

где  $\sigma_1 = \frac{1}{3}(\sigma_r + 2\sigma_\theta)$ ,  $\varepsilon_1^p = \frac{1}{3}(\varepsilon_r^p + 2\varepsilon_\theta^p)$ . Исключая из соотношений (24) и (25)  $\sigma_1$  и  $\varepsilon_1^p$ , привлекая при этом закон Гука (2) и (5), получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^p &= \beta_1 (\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta) + \beta_2 (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) + \beta_3 k_0, \\ \varepsilon_\theta^p &= \beta_4 (\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta) + \beta_5 (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) + \beta_6 k_0. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{3\lambda_4 + 2\mu_4}{\delta_3} \left[ \alpha \left( \frac{\alpha}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}} \right) + \psi\delta_2 \right], \quad \beta_2 = \frac{4\mu_4}{\delta_3} \sqrt{\frac{3}{2}} \left( \frac{\alpha}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_1 \right), \\ \beta_3 &= \frac{3}{\delta_3} \left( \frac{\alpha}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_1 \right), \quad \beta_4 = \frac{3\lambda_4 + 2\mu_4}{\delta_3} \left[ \alpha \left( \frac{\alpha}{3} - \sqrt{\frac{1}{6}} \right) + \psi\delta_2 \right], \\ \beta_5 &= \frac{4\mu_4}{\delta_3} \sqrt{\frac{3}{2}} \left( \frac{\alpha}{3} - \sqrt{\frac{1}{6}} \psi_1 \right), \quad \beta_6 = \frac{3}{\delta_3} \left( \frac{\alpha}{3} - \sqrt{\frac{1}{6}} \psi_1 \right),\end{aligned}\tag{27}$$

$$\delta_1 = c_4 + \eta_4 \hat{a}, \quad \delta_2 = 2\mu_4 + \delta_1, \quad \delta_3 = (3\lambda_4 + 2\mu_4)\alpha^2 + 3\delta_2\psi_1, \quad \psi_1 = 1 + (3\lambda_4 + 2\mu_4)\psi.$$

Используя уравнения движения (13), закон Гука (14), соотношения Коши (18), а также соотношения (19) и (26), для определения перемещений в пластической области мантии  $V_4^p$  получаем дифференциальное уравнение

$$\Delta_{11}u_{,rr} + \Delta_{12}\frac{1}{r}u_{,r} + \Delta_{13}\frac{u}{r^2} + \Delta_{14}\frac{1}{r} - \rho\hat{a}^2u = 0.\tag{28}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\Delta_{11} &= (\lambda_4 + 2\mu_4)(\beta_1 + \beta_2 - 1) + 2\lambda_4(\beta_4 + \beta_5), \\ \Delta_{12} &= -[2(\lambda_4 + 4\mu_4)\beta_1 - (\lambda_4 - 2\mu_4)\beta_2 + 4(\lambda_4 - \mu_4)\beta_4 - 2(\lambda_4 + 2\mu_4)(\beta_5 + 1)], \\ \Delta_{13} &= -[(\lambda_4 - 2\mu_4)(\beta_2 - 2) - 2(\lambda_4 + 2\mu_4)(1 - 2\beta_4 + \beta_5)], \\ \Delta_{14} &= -4k_{04}\mu_4(\beta_6 - \beta_3).\end{aligned}\tag{29}$$

Далее ограничимся квазистатической постановкой, тогда решение уравнения (28) имеет вид

$$u_4^p = A_4 r^{-(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\varkappa)} + B_4 r^{-(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varkappa)} + \frac{k_{04}\psi_1}{\alpha(3\lambda_4 + 2\mu_4)} r,\tag{30}$$

где

$$\varkappa = \frac{\sqrt{\delta_4^2 - \delta_5^2}}{\delta_4 - \delta_5}, \quad \delta_4 = 3(3\lambda_4 + 2\mu_4)\delta_2 - 4\mu_4(6\mu_4\psi_1 - \delta_3), \quad \delta_5 = \mu_4\alpha(3\lambda_4 + 2\mu_4)4\sqrt{6}.$$

Согласно закону Гука (14) и соотношениям (18), (19), (26) и (30) получаем отличные от нуля компоненты тензора напряжений в пластической области  $V_4^p$  мантии

$$\begin{aligned}\sigma_{r4}^p &= \Omega_1 A_4 r^{-\frac{3}{2}(\varkappa+1)} - \Omega_2 B_4 r^{\frac{3}{2}(\varkappa-1)} + \frac{k_{04}}{\alpha}, \\ \sigma_{\theta 4}^p &= \Omega_3 A_4 r^{-\frac{3}{2}(\varkappa+1)} - \Omega_4 B_4 r^{\frac{3}{2}(\varkappa-1)} + \frac{k_{04}}{\alpha}.\end{aligned}\tag{31}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \frac{3}{2}(\lambda_4 + 2\mu_4)\omega_1 + 3\lambda_4\omega_3 - \frac{3}{2}(\lambda_4 + 2\mu_4)(\varkappa - 1) - 4\mu_4, \\ \Omega_2 &= \frac{3}{2}(\lambda_4 + 2\mu_4)\omega_2 + 3\lambda_4\omega_4 - \frac{3}{2}(\lambda_4 + 2\mu_4)(\varkappa + 1) + 4\mu_4, \\ \Omega_3 &= \frac{3}{2}\lambda_4\omega_1 + 3(\lambda_4 + 2\mu_4)\omega_3 - \frac{3}{2}\lambda_4(\varkappa - 1) + 2\mu_4, \\ \Omega_4 &= \frac{3}{2}\lambda_4\omega_2 + 3(\lambda_4 + 2\mu_4)\omega_4 - \frac{3}{2}\lambda_4(\varkappa + 1) - 2\mu_4, \\ \omega_1 &= (\varkappa - 1)\beta_1 + (\varkappa + 1)\beta_2, \quad \omega_2 = (\varkappa + 1)\beta_1 + (\varkappa - 1)\beta_2,\end{aligned}$$

$$\omega_3 = (\varkappa - 1)\beta_3 + (\varkappa + 1)\beta_4, \quad \omega_4 = (\varkappa + 1)\beta_3 + (\varkappa - 1)\beta_4.$$

Используя уравнения равновесия (13), закон Гука (14) и соотношения Коши (18) для определения перемещений в упругих областях  $V_s^e$  ( $s = 2, 3, 4$ ) мантии и ядра, получаем дифференциальное уравнение

$$u_{,rr} + \frac{2}{r}u_{,r} - \frac{2u}{r^2} = 0,$$

из которого находим

$$u_s^e = \frac{C_s}{r^2} + D_s r \quad (s = 2, 3, 4). \quad (32)$$

В соответствии с законом Гука компоненты напряжений в упругой области  $V_s^e$  ( $s = 2, 3, 4$ ) мантии и ядра принимают вид

$$\sigma_{rs}^e = (3\lambda_s + 2\mu_s)D_s - \frac{4\mu_s}{r^3}C_s, \quad \sigma_{\theta s}^e = (3\lambda_s + 2\mu_s)D_s + \frac{2\mu_s}{r^3}C_s. \quad (33)$$

Здесь физико-механическим параметрам приписан индекс  $s = 2, 3, 4$ , соответственно.

В пластической области второго  $V_2^p$  и, соответственно, третьего слоя  $V_3^p$  ядра уравнение (28) для определения перемещений при  $\alpha = \psi = 0$  принимает вид

$$u_{,rr} + \frac{2}{r}u_{,r} - \frac{2}{r^2}u + \frac{6\sqrt{6}\mu}{\beta_7} \frac{k_0}{r} = 0.$$

Откуда

$$u_s^p = \frac{A_s}{r^2} + B_s r - \frac{2\sqrt{6}\mu_s}{3\beta_{7s}} k_{0s} r (3\ln r - 1). \quad (34)$$

Для компонент напряжений получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{rs}^p &= \frac{4\mu_s(c_s + \eta_s \hat{a})}{(2\mu_s + c_s + \eta_s \hat{a})} \frac{A_s}{r^3} + (3\lambda_s + 2\mu_s)B_s - \frac{2\sqrt{6}\mu_s(3\lambda_s + 2\mu_s)}{3\beta_{7s}} k_{0s}(3\ln r - 1), \\ \sigma_{\theta s}^p &= \frac{2\mu_s(c_s + \eta_s \hat{a})}{(2\mu_s + c_s + \eta_s \hat{a})} \frac{A_s}{r^3} + (3\lambda_s + 2\mu_s)B_s - \frac{2\sqrt{6}\mu_s(3\lambda_s + 2\mu_s)}{3\beta_{7s}} k_{0s}(3\ln r + 0, 5), \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{7s} &= 2\mu_s(3\lambda_s + 2\mu_s) + 3(c_s + \eta_s \hat{a})(\lambda_s + 2\mu_s), \quad s = 2, 3, \\ k_{0s} &= k_s(T)e^{\hat{a}t}, \quad T - \text{температура, } k_3(T) > k_2(T). \end{aligned}$$

Наконец, для металлической части ядра ( $\lambda = \psi = c_1 = \eta_1 = 0$ ) согласно (34) и (35) получаем

$$\begin{aligned} u_1^p &= \frac{A_1}{r^2} + B_1 r - \frac{\sqrt{6}}{3} k_{01} r (3\ln r - 1), \\ \sigma_{r1}^p &= (3\lambda_1 + 2\mu_1)B_1 - \frac{\sqrt{6}}{3} k_{01} r (3\ln r - 1), \\ \sigma_{\theta 1}^p &= (3\lambda_1 + 2\mu_1)B_1 - \frac{\sqrt{6}}{3} k_{01} r (3\ln r + 0, 5). \end{aligned} \quad (36)$$

Подчиняя полученные решения (30)-(36) граничным условиям и условиям сопряжения (20), условиями на контактах слоев (22) и начальным условиям (21) для констант интегрирования  $A_1, B_1, A_s, B_s, C_s, D_s$  ( $s = 2, 3, 4$ ) и упругопластических границ  $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  получаем систему уравнений

$$(3\lambda_4 + 2\mu_4)D_4 - \frac{4\mu_4}{b^3}C_4 = q_0,$$

$$\begin{aligned}
& \frac{4\mu_3(c_3 + \eta_3\hat{a})}{(2\mu_3 + c_3 + \eta_3\hat{a})} \frac{A_3}{a^3} + (3\lambda_3 + 2\mu_3)B_3 - \frac{2\sqrt{6}\mu_3(3\lambda_3 + 2\mu_3)}{3\beta_{73}} k_{03}(3\ln a - 1) = P_0, \\
& \frac{4\mu_2(c_2 + \eta_2\hat{a})}{(2\mu_2 + c_2 + \eta_2\hat{a})} \frac{A_2}{(a + h_3)^3} + (3\lambda_2 + 2\mu_2)B_2 - \frac{2\sqrt{6}\mu_2(3\lambda_2 + 2\mu_2)}{3\beta_{72}} k_{02}(3\ln(a + h_3) - 1) = \\
& \quad = (3\lambda_3 + 2\mu_3)D_3 + \frac{2\mu_3}{(a + h_3)^3} C_3, \\
& \frac{A_2}{(a + h_3)^2} + B_2(a + h_3) - \frac{2\sqrt{6}}{3\beta_{72}} k_{02}(a + h_3)(3\ln(a + h_3) - 1) = \\
& \quad = \frac{C_3}{(a + h_3)^2} + D_3(a + h_3), \\
& (3\lambda_1 + 2\mu_1)B_1 - \frac{\sqrt{6}}{3} k_{01}(a + h_2 + h_3)(3\ln(a + h_2 + h_3) - 1) = \\
& \quad = (3\lambda_2 + 2\mu_2)D_2 - \frac{4\mu_2}{(a + h_2 + h_3)^3} C_2, \\
& \quad \frac{A_1}{(a + h_2 + h_3)^2} + B_1(a + h_2 + h_3) - \\
& \quad - \frac{\sqrt{6}}{3} k_{01}(a + h_2 + h_3)(3\ln(a + h_2 + h_3) - 1) = \\
& \quad = \frac{C_2}{(a + h_2 + h_3)^2} + D_2(a + h_2 + h_3), \\
& \Omega_1 A_4(a + h_1 + h_2 + h_3)^{-\frac{3}{2}(\varkappa+1)} - \Omega_2 B_4(a + h_1 + h_2 + h_3)^{\frac{3}{2}(\varkappa-1)} + \frac{k_{04}}{\alpha} = \\
& = (3\lambda_1 + 2\mu_1)B_1 - \frac{\sqrt{6}}{3} k_{01}(a + h_1 + h_2 + h_3)(3\ln(a + h_1 + h_2 + h_3) - 1), \\
& \quad A_4(a + h_1 + h_2 + h_3)^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\varkappa\right)} + B_4(a + h_1 + h_2 + h_3)^{-\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varkappa\right)} + \\
& \quad + \frac{k_{04}\psi_1}{\alpha(3\lambda_4 + 2\mu_4)}(a + h_1 + h_2 + h_3) = \\
& \quad = \frac{A_1}{(a + h_1 + h_2 + h_3)^2} + B_1(a + h_1 + h_2 + h_3) - \\
& \quad - \frac{\sqrt{6}}{3} k_{01}(a + h_1 + h_2 + h_3)(3\ln(a + h_1 + h_2 + h_3) - 1), \\
& \quad \frac{4\mu_3(c_3 + \eta_3\hat{a})}{2\mu_3 + c_3 + \eta_3\hat{a}} \frac{A_3}{\gamma_3^3} + (3\lambda_3 + 2\mu_3)B_3 - \\
& \quad - \frac{2\sqrt{6}\mu_3(3\lambda_3 + 2\mu_3)}{3\beta_{73}} k_{03}(3\ln\gamma_3 - 1) = (3\lambda_3 + 2\mu_3)D_3 - \frac{4\mu_3}{\gamma_3^3}, \\
& \quad \frac{A_3}{\gamma_3^2} + B_3\gamma_3 - \frac{2\sqrt{6}}{3\beta_{73}} k_{03}\gamma_3(3\ln\gamma_3 - 1) = \frac{C_3}{\gamma_3^2} + D_3\gamma_3, \\
& \quad \frac{4\mu_2(c_2 + \eta_2\hat{a})}{(2\mu_2 + c_2 + \eta_2\hat{a})} \frac{A_2}{\gamma_2^3} + (3\lambda_2 + 2\mu_2)B_2 - \\
& \quad - \frac{2\sqrt{6}\mu_2(3\lambda_2 + 2\mu_2)}{3\beta_{72}} k_{02}(3\ln\gamma_2 - 1) = (3\lambda_2 + 2\mu_2)D_2 - \frac{4\mu_2}{\gamma_2^3} C_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{A_2}{\gamma_2^2} + B_2\gamma_2 - \frac{2\sqrt{6}}{3\beta_{\gamma_2}} k_{02}\gamma_2(3\ln\gamma_2 - 1) = \frac{C_2}{\gamma_2^2} + D_2\gamma_2, \\
& \Omega_1 A_4 \gamma_4^{-\frac{3}{2}(\varkappa+1)} - \Omega_2 B_4 \gamma_4^{\frac{3}{2}(\varkappa-1)} + \frac{k_{04}}{\alpha} = (3\lambda_4 + 2\mu_4)D_4 - \frac{4\mu_4}{\gamma_4^3}, \\
& A_4 \gamma_4^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\varkappa\right)} + B_4 \gamma_4^{-\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varkappa\right)} + \frac{k_{04}\psi_1}{\alpha(3\lambda_4 + 2\mu_4)} \gamma_4 = \frac{C_4}{\gamma_4^2} + D_4\gamma_4, \\
& \frac{2\mu_2(c_2 + \eta_2\hat{a})}{(2\mu_2 + c_2 + \eta_2\hat{a})} \frac{A_2}{\gamma_2^3} + (3\lambda_2 + 2\mu_2)B_2 - \frac{2\sqrt{6}\mu_2(3\lambda_2 + 2\mu_2)}{3\beta_{\gamma_2}} k_{02}(3\ln\gamma_2 + 0,5) = \\
& \quad = (3\lambda_2 + 2\mu_2)D_2 + \frac{2\mu_2}{\gamma_2^3} C_2, \\
& \frac{2\mu_3(c_3 + \eta_3\hat{a})}{(2\mu_3 + c_3 + \eta_3\hat{a})} \frac{A_3}{\gamma_3^3} + (3\lambda_3 + 2\mu_3)B_3 - \frac{2\sqrt{6}\mu_3(3\lambda_3 + 2\mu_3)}{3\beta_{\gamma_3}} k_{03}(3\ln\gamma_3 + 0,5) = \\
& \quad = (3\lambda_3 + 2\mu_3)D_3 + \frac{2\mu_3}{\gamma_3^3} C_3, \\
& \Omega_3 A_4 \gamma_4^{-\frac{3}{2}(\varkappa+1)} - \Omega_4 B_4 \gamma_4^{\frac{3}{2}(\varkappa-1)} + \frac{k_{04}}{\alpha} = (3\lambda_4 + 2\mu_4)D_4 + \frac{2\mu_4}{\gamma_4^3} C_4.
\end{aligned}$$

Данная система уравнений не имеет аналитического решения и требует численного счета. При условии нахождения соотношений для упругопластических границ  $\gamma_s$  ( $s = 1, 2, 3$ ) можно положить в этих выражениях верхние значения для  $\gamma_s$ , то есть  $\gamma_3 = a + h_3$ ,  $\gamma_2 = a + h_2 + h_3$ ,  $\gamma_4 = a + h_1 + h_2 + h_3 + h_4$ , и прийти к соотношениям, определяющим отказ (исчерпание несущей способности) сферического тела.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Наука и техника. URL: <https://lenta.ru/news/2015/02/10/earth/>.
- [2] Спорыхин А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: Воронежский Государственный Университет, 1997. 361 с.
- [3] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. Москва: Физматлит, 2001. 701 с.
- [4] Михайлюк А. В. Горные породы при неравномерных динамических нагрузках. Киев: Наук. думка, 1980. 153 с.
- [5] Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. Москва: Наука, 1971. 231 с.
- [6] Спорыхин А. Н. Об устойчивости деформирования упруговязкопластических тел // ПМТФ. 1967. № 4. С. 52–58.

A. N. Sporykhin<sup>1</sup>, Yu.D. Shcheglova<sup>1</sup>

## SIMULATION OF THE BEHAVIOR OF A SPHERICAL OBJECT DURING SEISMIC ACTIVITY OF THE CORE

<sup>1</sup> *Voronezh State University, Voronezh, Russia*

**Abstract.** Based on the rheological models of complex media of an elastoviscoplastic dilating and incompressible elastoviscoplastic, as well as a classical incompressible ideally plastic medium, the stress-strain state of a spherical body is determined under constant external and dynamic internal loads. The axisymmetric state of the body is studied. Displacement and stress fields in elastic and plastic regions are determined.

**Keywords:** stress, displacement, elasticity, plasticity, viscosity, dilatancy, axisymmetric state.

### REFERENCES

- [1] Science and technology. URL: <https://lenta.ru/news/2015/02/10/earth/>.
- [2] Sporykhin A. N. Perturbation method in problems of stability of complex media. Voronezh: Voronezh State University, 1997. 361 c.
- [3] Ishlinsky A. Yu., Ivlev D. D. Mathematical theory of plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2001. 701 c.
- [4] Mikhailiyuk A. V. Rocks under uneven dynamic loads. Kyiv: Sciences. thought, 1980. 153 c.
- [5] Ivlev D. D., Bykovtsev G. I. Theory of hardening plastic body. Moscow: The science, 1971. 231 c.
- [6] Sporykhin A. N. On the stability of deformation of elastoviscoplastic bodies // PMTF. 1967. № 4. C. 52–58.

---

*Sporykhin Anatoliy Nikolaevich*, Dr. Sci. Phys. and Math., Professor of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

*Shcheglova Yuliya Dmitrievna*, Candidate Sci. Phys. and Math., Ass. Professor of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Т. А. Патрина, С. К. Степанов

## МЕТОДИКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРОЧНОСТНОГО АНАЛИЗА МАТЕРИАЛОВ ДЕТАЛЕЙ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им.  
В. И. Ульянова (Ленина), г. Санкт-Петербург, Россия

**Аннотация.** Авторами предложена методика выявления оптимальной модификации механизма для создания высококачественных полупроводниковых приборов на основе выполнения проекторочных и проверочных расчетов передач, используя численные методы теории машин и механизмов и методы компьютерного моделирования в пакете Компас 3D и модуле АРМ FEM. Требуется разработать порядок действий для выбора оптимальных геометрических параметров деталей механизмов с допустимыми значениями контактных напряжений и напряжений при изгибе зубьев элементов кинематической пары, с соблюдением передаточного числа с заданным значением вращающего момента на выходе и частоты вращения выходного вала.

**Ключевые слова:** теория механизмов и машин, трехмерное проектирование в Компас 3D V.21, АРМ FEM, модификация механизма, прочностной анализ материалов по контактным напряжениям и напряжениям при изгибе зубьев

DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.002

УДК: 531: 004.942

### Введение

В технологических процессах изготовления полупроводниковых приборов используются самые разнообразные механизмы: передачи с цилиндрическими и коническими зубчатыми колесами, червячные редукторы, винтовые и мальтийские механизмы, вариаторы, шарнирно-рычажные, кулачковые и другие передачи. Для разработки кинематических схем промышленных и лабораторных установок, эффективных как с технической, так и экономической точек зрения, необходимо знать основные параметры, возможности, достоинства и слабые стороны используемых механизмов. Это

---

© Патрина Т. А., Степанов С. К., 2023

Патрина Татьяна Александровна

e-mail: nessionok@gmail.com, к.т.н., доцент, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), г. Санкт-Петербург, Россия.  
Степанов Сергей Константинович

e-mail: Stepser00@mail.ru, к.т.н., доцент, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), г. Санкт-Петербург, Россия.

Поступила 20.06.2023

особенно актуально сейчас, когда Россия, находясь под санкциями Запада, должна возрождать разрушенные и создавать новые производственные мощности.

Для создания высококачественных полупроводниковых приборов необходимо использовать материалы высокой степени чистоты. Для получения таких заготовок применяют установки зонной плавки и выращивания монокристаллических слитков. При этом получается совершенная структура кристаллической решетки монокристалла и происходит очистка полупроводниковых материалов. Технологический процесс зонной плавки предполагает многократное перемещение индуктора вдоль слитка, подвергающегося очистке, при этом скорость прямого и обратного хода может быть разной. Величина скорости может составлять от единиц до десятков мкм/сек и должна выдерживаться постоянной с заданной по технологии точностью. Одновременно для получения высокой однородности полупроводниковых кристаллов ампулу со слитком необходимо вращать вокруг своей оси. Использование названных выше механизмов позволяет сравнительно просто решать задачи преобразования параметров вращения вала двигателя в движение с требуемыми параметрами по технологическому процессу.

Поэтому необходимо выполнить весь комплекс проектировочных и проверочных расчетов передач, используя численные методы Теории машин и механизмов (ТММ) и методы компьютерного моделирования. Расчет механических передач требуется выполнить в соответствии с действующими в настоящее время ГОСТ Российской Федерации.

В качестве САПР авторами статьи была выбрана российская система трехмерного моделирования КОМПАС 3D V.21, подключаемые его модули АРМ FEM, АРМ Winmachine. Для поставленных целей данный пакет с выбранными модулями наиболее подходящий, так как он содержит в себе графические средства; расчеты типовых деталей, механизмов, их соединения; конечно-элементный анализ, базы данных со справочной информацией по параметрам материалов. Выбранный пакет позволяет проводить линейный статический расчет деталей машин, работающих в условиях упругих деформаций; расчет задач механики разрушения; усталостный расчет деталей и механизмов, работающих в условиях асимметричного и симметричного циклов; расчет устойчивости различных конструкций с оценкой коэффициента запаса; расчет контактного взаимодействия; нелинейный статический расчет; расчет свободных и вынужденных колебаний с учетом демпфирования. Этот пакет имеет бесплатный пробный период.

Поэтому перед авторами статьи встала задача — разработка методики исследования напряженно-деформированного состояния материалов деталей машин и механизма. На основе численных методов и методов компьютерного моделирования, требуется разработать порядок действий для выбора оптимальных геометрических параметров деталей механизмов с допустимыми значениями контактных напряжений и напряжений при изгибе зубьев элементов кинематической пары, с соблюдением передаточного числа с заданным значением вращающего момента на выходе и частоты вращения выходного вала.

#### **Теоретические сведения**

Привод установки получения полупроводниковых образцов объемных кристаллов высокой чистоты методом зонной плавки должен обеспечивать медленные и плавные перемещения и вращение запаянной кварцевой ампулы с полупроводниковым образцом через зону нагрева (рис. 1). Частота вращения ампулы от  $1/6$  до  $2/3$  об/сек.

Электродвигатель 1 через пальцевую муфту 2 приводит во вращение вал I с червяком 3, находящимся в зацеплении с червячным колесом 4. На валу II вместе с колесом 4 закреплено цилиндрическое зубчатое колесо 5, вращающее зубчатое колесо 6, закрепленное на валу III. С вала III через муфту 7 вращение передается на кварцевую ампулу 8 с полупроводниковым образцом. Вращающаяся ампула находится в нагревательной печи сопротивления и с помощью другого привода плавно перемещается в вертикальном направлении через питаемый от высокочастотного генератора индуктор 9, который создает расплавленную зону в полупроводниковом образце. Двигатель 1 и редуктор жестко крепятся к подвижной каретке и вместе с ампулой совершают вертикальное перемещение [1, с. 11].

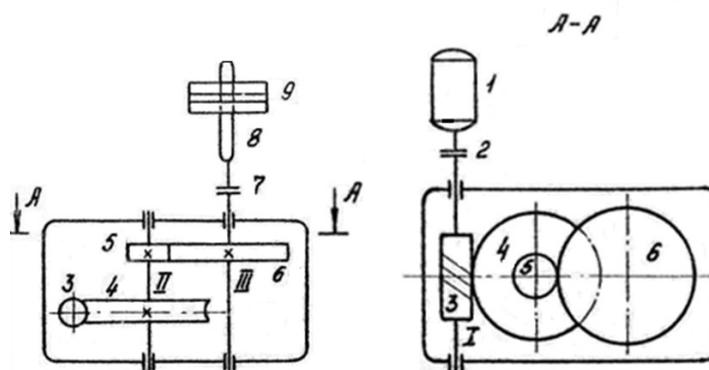


Рис. 1. Привод установки для бестигельной зонной плавки полупроводниковых кристаллов

Червячные передачи применяются в случаях, когда оси валов скрещиваются под углом  $90^\circ$ . Основными параметрами зубчатой передачи являются осевой модуль червяка, который приравнивается стандартному модулю  $m$  по ГОСТ 19672-74,  $z_1$  – число витков червяка,  $z_2$  – число зубьев червячного колеса,  $\gamma$  – угол подъема витка червяка, диаметры делительных окружностей червяка  $d_1$  и червячного колеса  $d_2$ , межосевое расстояние  $a_w$ .

Исходными данными для расчета передачи являются: передаточное число  $u_{1k}$ , частоты вращения валов  $n_1$ ,  $n_k$  и вращающий момент  $M_k$  на выходном валике.

В случае, если механизм состоит из нескольких последовательно соединенных передач, то передаточное число всего механизма рассчитывается как произведение передаточных чисел каждой передачи:  $u_{1k} = u_{12} \cdot u_{34}$ , где  $u_{12}$  – передаточное число червячной передачи,  $u_{34}$  – передаточное число зубчатой передачи цилиндрического типа.

В начале расчета выбирается число витков червяка  $z_1 = 1, 2$  или  $4$ . Увеличение  $z_1$  повышает КПД червячной пары, но усложняет технологию ее изготовления и увеличивает габариты передачи. Число зубьев колеса  $z_2 = u \cdot z_1$ . Для малонагруженных передач задаются стандартными значениями модуля и коэффициентом  $q$ , после чего определяются геометрические параметры червяка и червячного колеса по известным формулам [1, с. 4-5].

Значения передаточных чисел и КПД различных типов передач представлены в табл.1

Наименование механизма		Передаточное число	КПД механизма
Передача цилиндрическими прямозубыми колёсами	Закрытая	1-4	0,98-0,97
	Открытая	1-6	0,97-0,95
Передача коническими зубчатыми колёсами		1-3,15	0,97-0,96
Червячные передачи при числе витков червяка	$z_1 = 1$	28-70	0,5-0,7
	$z_1 = 2$	13-30	0,7-0,75
	$z_1 = 4$	8-13	0,8-0,85

Таблица 1. КПД и передаточные числа

### Прочностной анализ по контактным напряжениям и напряжениям на изгиб зубьев элементов механизма

При такой модификации механизма зубчатая передача цилиндрического типа обладает большей нагрузочной способностью и значением КПД, чем червячная передача. Поэтому при прочностном анализе всего механизма выполним расчет контактных напряжений и напряжений на изгиб в зоне зацепления зубьев элементов при различных внешних воздействиях только для червячной передачи.

Для колеса, выполненного из бронзы при стальном червяке, контактные напряжения определяются по формуле:

$$\sigma_H = \frac{170 \cdot q}{z_2} \cdot \sqrt{M_2 \cdot K \frac{\left(\frac{z_2}{q} + 1\right)^3}{a_w^3}} \text{ (Па)}, \quad (1)$$

$\sigma_H \leq [\sigma_H]$  (Па), где  $M_2$  - крутящий момент на валу червячного колеса;  $a_w$  - межосевое расстояние;  $K$  - коэффициент нагрузки.

Напряжение изгиба находится:  $\sigma_F = \frac{1,2 \cdot M_2 \cdot K \cdot Y_F}{z_2 \cdot b_2 \cdot m^2}$  (Па), где  $Y_F$  - коэффициент формы зубы червячного колеса, определяется в зависимости от числа зубьев эквивалентного колеса  $z_{\nu 2} = \frac{z_2}{\cos^3 \gamma}$

При проектировочном расчете приблизительно значение межосевого расстояния может быть определено по формуле [2, с. 87]:

$$a_w = 31 \cdot \left(\frac{z_2}{q} + 1\right) \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{q}{z_2 \cdot [\sigma_H]}\right)^2 \cdot M_2 \cdot K} \text{ (мм)}. \quad (2)$$

Для определения  $a_w$  задаемся значениями коэффициента  $q$  и  $[\sigma_H]$  (для бронзы БрАЖ-9-4 можно предварительно принимать ( $\vartheta_{ск} = 4\text{м/сек}$ ). Предположительно  $K = 1,2$ . По полученному значению  $a_w$  определяем модуль зацепления:

$$m_x = \frac{2 \cdot a_w}{z_2 + q}. \quad (3)$$

Принимаем стандартное значение  $m_x = m$  по ГОСТ 19672-74, а затем определяем геометрические размеры червяка и червячного колеса, уточняем скорость скольжения  $\vartheta_{ск}$  и КПД передачи [3, с. 39].

### Начальные параметры механизма

Рассмотрим ниже численный расчет для механизма (рис.1) подбора оптимальных геометрических параметров деталей механизмов, расчет контактных напряжений и

напряжений при изгибе зубьев элементов механизма. Начальными данными являются частота вращения ампулы на выходе  $n_k = 7/20$  об/сек; вращающий момент на выходе  $M_k = 0,5$  Нм, частота вращения вала электродвигателя  $n_1 = 42$  об/сек, тип двигателя ДПР-52 с номинальной мощностью 6,15 Вт.

### Численный расчет на основе методов ТММ

Общий КПД механизма  $\eta_{\text{общ}}$  находится как произведение КПД всех передач, входящих в исследуемый механизм:  $\eta_{\text{общ}} = \eta_{\text{подшипн.}} \cdot \eta_{\text{черв.перед.}} \cdot \eta_{\text{цил.зуб.}}$ , где  $\eta_{\text{подшипн.}}$  - КПД пары подшипников ( $\eta_{\text{подшипн.}} = 0,99$ );

$\eta_{\text{черв.перед.}}$  - КПД червячной передачи ( $\eta_{\text{черв.перед.}} = 0,85$ );  $\eta_{\text{цил.зуб.}}$  - КПД цилиндрической прямозубой передачи ( $\eta_{\text{цил.зуб.}} = 0,97$ ).

На рисунке 1 видно, что в механизме 3 пары подшипников. Поэтому общий КПД механизма будет равен  $\eta_{\text{общ}} = 0,99^3 \cdot 0,9 \cdot 0,97 = 0,84$ .

Передаточное число механизма  $u_{1k} = 42 \cdot 20/7 = 120$ . Момент на входном валу находится следующим образом:  $M_1 = \frac{M_k}{u_{1k} \cdot \eta_{\text{общ}}}$ .  $M_1 = \frac{0,5}{120 \cdot 0,84} = 0,005$  Нм.

При заданной частоте вращения выходного вала  $n_k = 7/20$  об/сек мощность на выходе равна:  $N_{\text{вых}} = 2 \cdot \pi \cdot n_k \cdot M_k$ . Тогда  $N_{\text{вых}} = 2 \cdot 3,14 \cdot 7 \cdot 0,5/20 = 1,099$  Вт. Мощность на входном валу равна:  $N_1 = N_{\text{вых}}/\eta_{\text{общ}}$ . Значит  $N_1 = 1,099/0,84 = 1,31$  Вт.

Следовательно, двигатель ДПР-52 с номинальной мощностью 6,15 Вт обеспечивает медленные и плавные перемещения и вращение запаянной кварцевой ампулы с полупроводниковым образцом через зону нагрева.

Расчет контактных напряжений и напряжений на изгиб:

1. Выбор материалов. Червячное колесо изготовлено из безоловянной бронзы БрАЖ9-4Л (отливка в землю). При предположительной скорости скольжения допускаемое контактное напряжение  $[\sigma_H] = 160$  МПа, напряжение при изгибе  $[\sigma_F] = 75$  МПа. Червяк изготовлен из стали марки 45, закаленной твердости 45 HRC, витки шлифованные.

2. Передаточное число механизма  $u_{1k} = 42 \cdot 20/7 = 120$ .

3. Принимаем значение передаточного числа цилиндрической зубчатой передачи  $u_{34} = 4$  (табл.1). Тогда передаточное число червячной передачи находится  $u_{12} = u_{1k}/u_{34} = 120/4 = 30$ .

4. Число витков  $z_1 = 2$  находим по табл.1 на основе рассчитанного передаточного числа червячной передачи [4, с. 122-137].

5. Найдем количество зубьев червячного колеса  $z_2$ :  $u_{12} \cdot z_1 = 60$ .

6. Найдем момент на червячном колесе:  $M_2 = M_1 \cdot u_{12} \cdot \eta_{\text{черв.перед.}}$ . При числе витков  $z_1 = 2$  передаточное число  $\eta_{\text{черв.перед.}}$  примем 0,75.  $M_2 = 0,005 \cdot 30 \cdot 0,75 = 0,11$  Нм.

7. Межосевое расстояние вычисляется по формуле, представленной выше:  $a_w = 31 \cdot \left(\frac{60}{10} + 1\right) \sqrt[3]{\left(\frac{10}{60 \cdot 160}\right)^2 \cdot 0,11 \cdot 10^3 \cdot 1,2} = 12$  мм.

8. Модуль зацепления высчитывается следующим образом:  $m = \frac{2 \cdot 12}{10 + 60} = 0,35$ .

По ГОСТ 2144-76 принимаем  $m = 0,5$  мм, а коэффициент  $q$  равен 16 или 18, либо 20.

9. Окончательное межосевое расстояние не выравняется по стандарту, соответственно должно заканчиваться на 0 или 5 и быть целым числом:  $a_w = \frac{(20+60) \cdot 0,5}{2} = 20$  мм.

10. Основные параметры червяка и червячного колеса представлены в табл.2

11. Окружная скорость червяка равна:  $\nu_{ck} = \frac{(\pi \cdot d_1 \cdot n_1)}{\cos \gamma} = \frac{3,14 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 42}{0,995} = 1,33$  м/сек.

Параметр	Червяк	Червячное колесо
Модуль осевой	$m = 0,5$ мм	-
Коэффициент диаметра червяка	$q = 20$	-
Угол подъема витков червяка	$\gamma = \arctan \frac{z_1}{q} = 5^\circ 43'$	-
Диаметр делительной окружности	$d_1 = mq = 10$ мм	$d_2 = mz_2 = 30$ мм
Диаметр окружности выступов	$d_{a1} = m(q + 2) = 11$ мм	$d_{a1} = m(q + 2) = 11$ мм
Диаметр окружности впадин	$d_{a1} = m(q + 2) = 11$ мм	$d_{a2} = m(z_2 + 2) = 31$ мм
Межосевое расстояние	$a_w = 20$	
Длина червяка и ширина венца червячного колеса	$b_1 \geq (11 + 0,06z_2)m = 32,3$ мм	$b_2 \leq 0,75 \cdot d_{a1} = 8,25$ мм

Таблица 2. Геометрические параметры червячной передачи.

12. Допускаемое напряжение при данной скорости скольжения для БрАЖ9-4Л  $[\sigma_H] = 220$  МПа.

На основе ГОСТ 3675-81 выбираем степень точности 9. Коэффициент деформации червяка  $\theta = 190$ . Коэффициент динамичности нагрузки  $K_{дин} = 1,25$ . Коэффициент концентрации нагрузки  $K_{кц}$  равен:

$$K_{кц} = 1 + \left(\frac{Z_2}{\theta}\right)^3 (1 - 0,6) = 1,013 \quad (4)$$

Коэффициент нагрузки  $K = K_{кц} \cdot K_{дин} = 1,27$ .

13. Проверка контактных напряжений.

$$\sigma_H = \frac{170 \cdot 20}{60} \cdot \sqrt{0,11 \cdot 1,27 \cdot \frac{\left(\frac{60}{20} + 1\right)^3}{20^3 \cdot 10^{-9}}}, \quad (5)$$

$\sigma_H = 60$  МПа. Таким образом  $\sigma_H < [\sigma_H]$ , следовательно, передача значительно недогружена. Целесообразно изменить геометрические размеры деталей передачи или выполнить выбор другого материала для червячного колеса.

14. Проверка зубьев червячного колеса на изгиб:

Эквивалентное число зубьев (число зубьев эквивалентного колеса) червячного колеса равно  $z_{\nu 2} = \frac{60}{0,995^3} = 61$ . Коэффициент формы зуба  $Y_F = 3,62$  по ГОСТ 21354-75.

15.  $\sigma_F = \frac{1,2 \cdot 0,11 \cdot 10^9 \cdot 1,27 \cdot 3,62}{60 \cdot 8,25 \cdot 0,5^2} = 4,5$  МПа, что меньше  $[\sigma_F] = 75$  МПа.

Выполнение условий прочности по контактным напряжениям и напряжениям на изгиб зубьев говорит о том, что при заданной частоте вращения ампулы, вращающего момента на выходе и частоты электродвигателя червячная передача с подобранными геометрическими размерами выдержит нагрузку.

### Методика расчета значений напряжений на основе компьютерного моделирования

1. В первую очередь стоит задача построения *геометрических моделей* червяка и червячного колеса в среде трехмерного проектирования Компас 3D V.21. По рассчитанным ранее геометрическим параметрам построим эти геометрические модели.

Далее, необходимо создать сборку из данных моделей, чтобы верно провести в дальнейшем прочностной анализ с учетом контактных условий. В первую очередь, расположим модель червяка в точке  $(0;0;0)$ . Затем, используя размеры колеса и червяка, располагаем нижний зуб по середине червяка и с учетом делительного диаметра. Следует перепроверить, чтобы не было пересечений моделей. Для приведенного случая моделирования данная точка имеет координаты  $(x;y;z)$   $(16.075; -4.125; 20.47)$  (рис. 2) [5, с. 277-279], [6, с. 65-74], [7, с. 93-98], [8, с. 45-47].

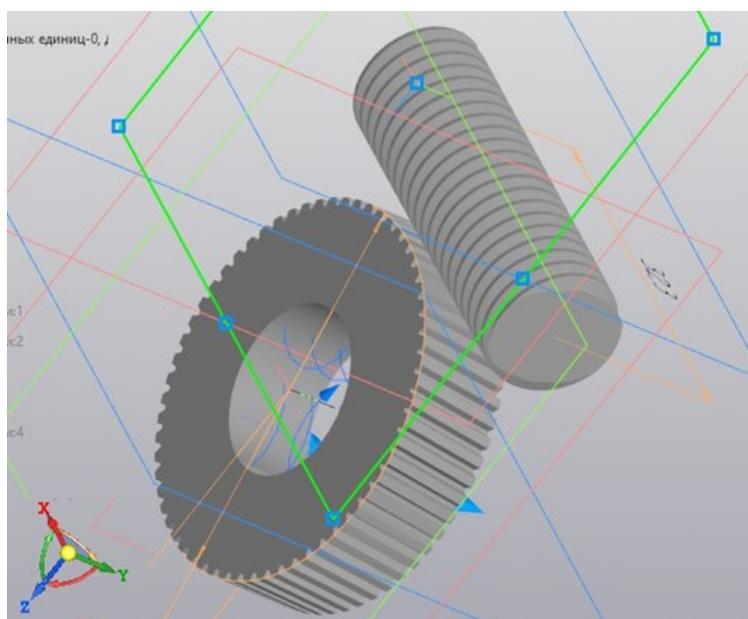


Рис. 2. Сборка двух моделей

2. Далее выполним прочностной анализ моделей червяка и червячной передачи. Следует обратить внимание, так как червячное колесо выполнено из безоловянной бронзы, то из-за возникшей упругой деформации проведем расчеты контактных напряжений и напряжений на изгиб зубьев только для червячного колеса. Возникающие контактные напряжения на головке зубьев непостоянны. Каждая точка зуба в зоне контакта нагружается лишь в период зацепления с червяком, а в остальное время оборота червяка свободна от напряжений.

Воспользуемся дополнением компьютерного моделирования инструментами модуля Gears пакета Компас 3D для подсчета контактных напряжений и напряжений на изгиб зубьев червячного колеса (рис. 3).

Следует заметить, что значения скорости скольжения, расчетное напряжение изгиба в модуле Gears совпадают со значениями численных методов ТММ.

Далее, построим *расчетную схему* для моделей червячной передачи в модуле прочностных расчетов АРМ FEM, который добавляется в конфигурацию КОМПАС 3D.

Расчёт на прочность и износостойкость ортогональной передачи  
"Цилиндрический червяк - Цилиндрическое косозубое колесо" при действии максимальной нагрузки

Наименование и обозначение параметра		Червяк *1	Зубчатое *2 колесо
<i>Исходные данные</i>			
Число витков (зубьев)	$z_1, z_2$	2	60
Модуль, мм	$m$	0,5	
Коэффициент диаметра червяка	$q$	20	
Вид червяка	—	Z1	
Угол профиля исходного контура	$\alpha_{n1}, \alpha_2$	19°11'58"	20°00'00"
Степень точности	—	9-E	9-E
Коэффициент смещения червяка (исходного контура зубчатого колеса)	$x_1, x_2$	0	-0,151
Межосевое расстояние, мм	$a_k$	20	
Передаточное число	$u$	30	
Твердость активных поверхностей витков червяка, HRC	—	45	
Шероховатость активных поверхностей витков червяка	—	Ra0,63	
Материал венца зубчатого колеса	—	БрАЖ9-4 ГОСТ 18175-78	
Притирка в паре	—	нормальная	
Расчетная нагрузка (крутящий момент на зубчатом колесе), Н*м	$T_{max}$	0,11	
Частота вращения червяка, об/мин	$n_{max}$	42	
<i>Определяемые параметры</i>			
Скорость скольжения, м/с	$v_s$	0,022	
<i>Расчёт на прочность при изгибе</i>			
Расчётное напряжение изгиба, МПа	$\sigma_{Fmax}$	4,484	
Допускаемое напряжение изгиба, МПа	$\sigma_{FFmax}$	163,212	
Коэффициент запаса по напряжениям изгиба	$n_F$	36,401	
<i>Расчёт на износостойкость</i>			
Коэффициент трения в паре	$f$	0,09	
Допускаемая нагрузка (крутящий момент на зубчатом колесе), Н*м	$T_{lim}$	8,548	
Коэффициент запаса по износостойкости	$n_H$	77,712	

Рис. 3. Расчет на прочность и износостойчивость ортогональной передачи  
"цилиндрический червяк - цилиндрическое косозубое колесо"

Первый этап — это задание граничных условий. Установим запрет перемещений по трем направлениям червяка. Для модели червячного колеса необходимо установить закрепление по нормали и цилиндрическое закрепление в осевом направлении, чтобы деталь "не теряла" ось вращения.

Обязательное действие — указание контактных условий для близких граней и граней, где планируется контакт. Следует назначить для моделей червячной передачи скользящий контакт.

Второй этап — назначение места и величины действий внешних сил. В данной сборке моделей момент будет приложен к валу, где колесо закреплено. Величина крутящего момента  $M_1 = 5$  Нмм для червяка, а для червячного колеса момент равен  $M_2 = 110$  Нмм. Направление действия крутящего момента на валу с червяком совпадает с направлением его вращения, а момент на валу с червячным колесом сопротивляется движению колеса, поэтому момент направлен в противоположную сторону, чем направление вращения колеса [9, с. 65-74]. Рассчитаем значение внешних сил, возникающих при зацеплении зубьев деталей. Нормальная сила приложена в полюсе зацепления и перпендикулярна направлению витков червяка. Разложим эту силу на взаимно перпендикулярные силы: окружная  $P_1$ , радиальная  $P_{r1}$  и осевая  $P_{a1}$ .

$$P_{a1} = (2 \cdot M_2) / d_2. \text{ Осевая сила для модели червяка равна } 7 \text{ Н.}$$

$$P_1 = (2 \cdot M_1) / d_1. \text{ Окружная сила равна } 1 \text{ Н.}$$

$$P_{r1} = P_{r2} = P_2 \cdot \tan 20^\circ. \text{ Радиальная сила для червяка равна } 2,548 \text{ Н [10, с. 199].}$$

По длине линии зацепления деталей угол действия нормальной силы к поверхности зубьев не изменяется. Поэтому выполним расчет напряжений в любой из точек делительной окружности червяка.

Действующие внешние силы можно представлять в виде моментов, либо в виде распределенной нормальной силы, которая сосредотачивается на малой площадке соприкосновения двух деталей. Компас 3D имеет функционал — нахождение зоны контакта. С помощью созданного эскиза на поверхности контактирующей грани зуба вырезаем область контакта. Действие нормальной силы на данной площадке можно представить в виде трех составляющих: окружная, радиальная, осевая, рассчитанные ранее численными методами (рис.4).

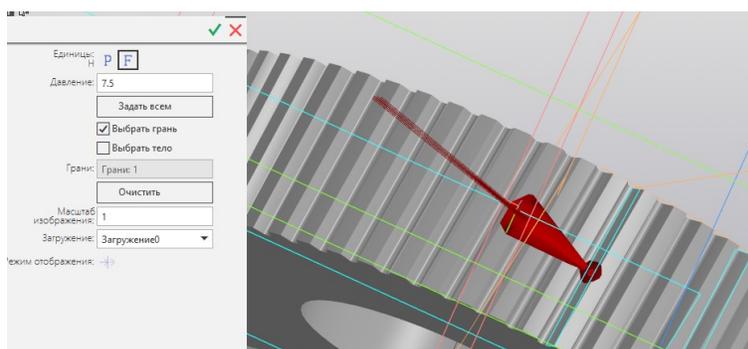


Рис. 4. Выделение области действия нормальной силы при зацеплении деталей

Третий этап — задание свойств материалов для моделей. Выберем в библиотеке материалов Компас 3D для червяка — сталь марки 45, а для червячного колеса — безоловянную бронзу БрАЖ9-4Л.

Четвертый этап — разбиение модели на конечные элементы, в узлах которых будет в пакете рассчитывать параметры напряженно-деформированного состояния. Выполним разбиение моделей на более мелкие элементы в местах концентраторов напряжений — места зацепления. Для остальной части моделей можно построить среднюю конечно-элементную сеть (рис. 5).

Пятый этап — назначение параметров для расчета. На рисунке 6 представлено графическое представление значений главных напряжений.

Также при проведении прочностного анализа червячной передачи довольно показательной характеристикой является коэффициент запаса прочности по пределу текучести.

В результате анализа результатов расчета можно отметить, что максимальные напряжения возникают в зоне контакта, где рабочие поверхности деталей червячной передачи прижаты к друг другу по площадке контакта [11, с. 212]. Также заметно, что напряжения в зоне контакта меняются по эллиптическому закону, что совпадает с теоремой контактных напряжений по Герцу. Концентратором напряжения являются места, где находятся радиусы скруглений поверхностей у оснований зубьев.

### Заключение

Численные методы ТММ позволяют рассчитать геометрические параметры деталей механизма с соблюдением передаточного числа механизма, выполнить расчет контактных и изгибных напряжений на поверхности деталей с учетом крутящего момента на выходном валу. Компьютерные методы позволяют по предложенной авторами

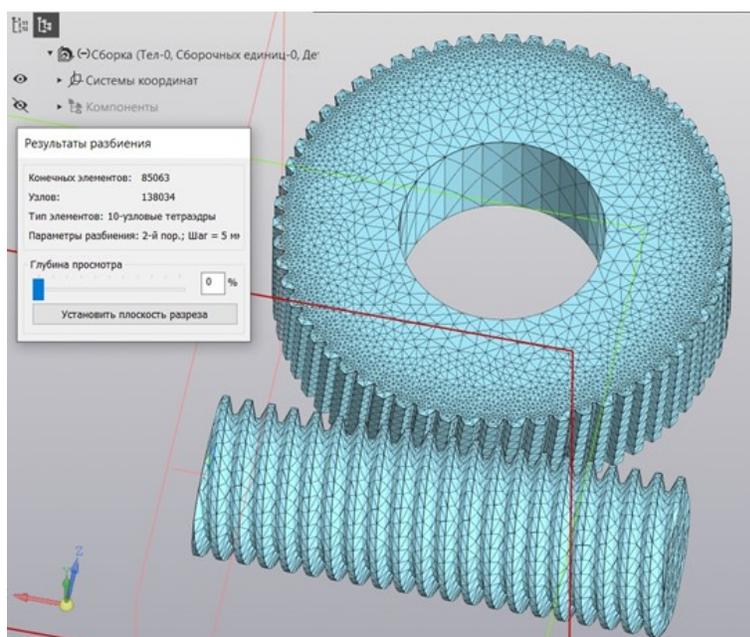


Рис. 5. Конечно-элементная сеть для сборки моделей червячной передачи

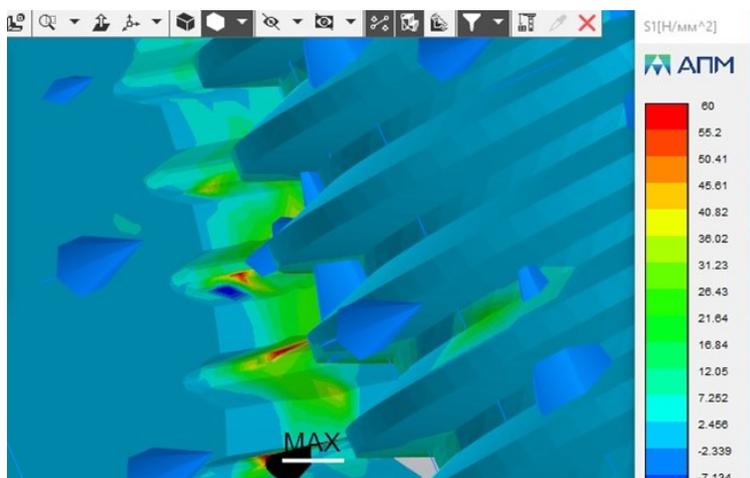


Рис. 6. Распределение главных напряжений по моделям

методике проанализировать различные модификации механизмов с различными геометрическими размерами деталей. Данные методы дополняют друг друга, так как в основу компьютерного моделирования заложены численные методы. Авторами показан порядок действий по выполнению статического расчета червячной передачи с предположительными геометрическими размерами, расчет их устойчивости с оценкой коэффициента запаса, расчета контактного взаимодействия. Благодаря возможностям Компас 3D V.21 стало визуально понятно взаимодействие деталей механизма

с учетом их сопряжений и кинематики движения. Предложенная методика исследований напряженно-деформированного состояния материалов с использованием компьютерных методов позволяет выявить оптимальную модификацию механизма, проделав путь от создания геометрических моделей деталей, задания граничных условий, значений внешних воздействий, далее, получения расчетных схем и заканчивая прочностным анализом по контактным напряжениям и напряжениям на изгиб. Результат такого рода исследований показал, что изменение формы зубьев, свойства материалов на прямую влияет на конструктивную прочность деталей. На основе распределения характеристик напряженно-деформированного состояния было выявлено, что максимальные контактные напряжения возникают на площадке контакта, где детали червячной передачи прижаты к друг другу и эта площадка сравнительно мала, чем поверхности контактирующих деталей. Также результаты компьютерного моделирования подтверждают результаты экспериментальных исследований, указанных в научных статьях, учебной литературе [12, с. 38-48]. Максимальные напряжения на изгиб возникают у ножки зуба и проявляются циклически.

### **Выводы**

Авторами статьи был предложен комплексный подход к выполнению анализа структуры механизма, устройства механизма и его функционирования. Совмещение численных методов и методов компьютерного моделирования по данной методике дает полное решение поставленных задач при многовариантных исследованиях, позволяет выявлять оптимальную модификацию механизма в кратчайшие сроки. В настоящее время нет похожей методики определения оптимальной модификации механизма для создания высококачественных материалов, используемых для изготовления полупроводниковых приборов, поэтому предложенная авторами методика обладает научной новизной.

### **ЛИТЕРАТУРА**

- [1] Мамаева Л. П., Федоров В. А. Методические указания к курсовому проекту по прикладной механике для студентов специальностей 0604, 0629 электрофизического факультета. Санкт-Петербург: СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 1980. 39 с.
- [2] Маньшин Ю. П., Маньшина Е. Ю. К проектированию червячных передач с цилиндрическими червяками // Вестник Донского государственного технического университета. 2016. № 4(87). С. 86–91.
- [3] Расчет основных кинематических параметров и проектирование приборных механизмов / С. В. Воробьев, О. П. Кормилицын, Д. А. Лобачева [и др.]. Санкт-Петербург: СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2020. 56 с.
- [4] Кутеева Г. А. Лабораторный практикум «Кинематический анализ механизмов» на примере исторических моделей из коллекций СПбГУ // Вторая межрегиональная научно-практическая конференция преподавателей математики и физики под девизом «Математика — это просто!» Санкт-Петербург: ООО «Издательство ВВМ 2020. С. 122–137.
- [5] Маньшин Ю. П., Маньшина Е. Ю. Рационализация алгоритма проектирования червячных передач для приводов машин // Состояние и перспективы развития сельскохозяйственного машиностроения: мат-лы 8-й междунар. науч.-практ. конф. в рамках 18-й междунар. агропром. выставки Интерагромаш-2015. Ростов-на-Дону: Машиностроение и машиноведение, 2015. С. 277–279.
- [6] Демидов А. В. Проектирование качества продукции // Проектирование механизмов и машин ПММ-2007 : тр. всерос. науч.-практ. конф. Воронеж: ВГТУ, 2007. С. 57–61.
- [7] Демидов А. В., А. В. Попов М. В. Руцков. Применение инструментов графической системы Компас 3D для решения задач теории механизмов и машин // Обеспечение качества продукции на этапах конструкторской и технологической подготовки производства. 2009. № 3. С. 93–98.

- [8] Демидов А. В. Проектирование механических передач с применением САПР // 52 научно-техническая конференция профессорско-преподавательского состава, научных работников, аспирантов и студентов. Секция “Детали машин”. 2012. С. 45–47.
- [9] Исследование кинематики механизмов посредством систем автоматизированного проектирования / М. В. Стрельников, Л. Р. Милованова, И. А. Чельшева [и др.] // Инженерные системы: тр. науч.-практ. конф. с междунар. участием. Москва: Российский университет дружбы народов (РУДН), 2019. С. 65–74.
- [10] Первицкий Ю. Д. Расчет и конструирование точных механизмов. Ленинград: Машиностроение, 1979. 456 с.
- [11] Прикладная механика. В 3 ч. Часть 3. Детали машин и основы конструирования механизмов / М. Ю. Карелина, Н. В. Атаманенко, И. В. Костюк [и др.]. Москва: МАДИ, 2020. 212 с.
- [12] Морозова Л. В., Орлов М. Р. Исследование причин разрушения зубчатых колес в процессе эксплуатации // Авиационные материалы и технологии. 2015. № S1. С. 37–48.

*T. A. Patrina, S. K. Stepanov*

## METHODS FOR SOLVING THE PROBLEMS OF STRENGTH ANALYSIS OF MATERIALS OF MACHINE AND MECHANISM PARTS UNDER VARIOUS EXTERNAL INFLUENCES

*St. Petersburg State Electrotechnical University “LETI” named after V.I. Ulyanov (Lenin),  
Saint-Petersburg, Russia*

**Abstract.** The authors proposed a method for identifying the optimal modification of the mechanism for creating high-quality semiconductor devices based on design and verification calculations of transmissions, using numerical methods of the theory of machines and mechanisms and methods of computer modeling in the Compass 3D package and the APM FEM module. It is necessary to develop a procedure for selecting the optimal geometric parameters of the parts of the mechanisms with permissible values of contact stresses and bending stresses of the teeth of the kinematic pair elements, in compliance with the gear ratio with the specified value of the output torque and the speed of rotation of the output shaft.

**Keywords:** mechanism and machine theory, 3D design in Compass 3D V.21, APM FEM, mechanism modification, strength analysis of teeth materials on contact stresses and bending stresses

## REFERENCES

- [1] Mamaeva L. P., Fedorov V. A. Methodological instructions for the course project on applied mechanics for students of specialties 0604, 0629 of the electrophysical faculty. Saint-Petersburg: Publishing House of St. Petersburg State Technical University “LETI”, 1980. 39 с.
- [2] Manshin Yu. P., Manshina E. Y. On design of worm gears with cylindrical worms // Vestnik of Don State Technical University. 2016. № 4(87). С. 86–91.
- [3] Calculation of basic kinematic parameters and instrument design / S. V. Vorobyov, O. P. Kormilitsyn, D. A. Lobacheva [и др.]. Saint-Petersburg: Publishing House of St. Petersburg State Technical University “LETI”, 2020. 56 с.
- [4] Kuteeva G. A. Laboratory workshop “Kinematic analysis of mechanisms” on the example of historical models from the collections of St. Petersburg State University // The second interregional scientific

---

*Patrina Tatiana Aleksandrovna*, PhD, Associate professor, St. Petersburg State Electrotechnical University “LETI” named after V.I. Ulyanov (Lenin), Russia, 197376, Saint-Petersburg, Russia.  
*Stepanov Sergey Konstantinovich*, PhD, Associate professor, St. Petersburg State Electrotechnical University “LETI” named after V.I. Ulyanov (Lenin), Russia, 197376, Saint-Petersburg, Russia.

- and practical conference of teachers of mathematics and physics under the motto "Mathematics is simple!". Saint-Petersburg: LLC "Publishing House VVM 2020. С. 122–137.
- [5] Manshin Y. P., Manshina E. Y. Rationalization of design algorithm of worm gear for machine drives // Current state and development trends of agricultural machinery: Proc. 8th Int. Sci.-Pract. Conf. within the framework of 18th Int. Agroindustrial Exhibition "Interagromash-2015". Rostov-on-Don: Mechanical engineering and machine science, 2015. С. 277–279.
- [6] Demidov A. V. Product Quality Design // Design of PMM Mechanisms and Machines. Voronezh: VGTU, 2007. С. 57–61.
- [7] Demidov A. V., Popov A. V., Rutskov M. V. Application of tools graphic system Compass 3D for solving the problems of the theory of mechanisms and machines // Product quality assurance at the stages of design and technological preparation of production. 2009. № 3. С. 93–98.
- [8] Demidov A. V. Mechanical gearing design using CAD // 52 scientific and technical conference of faculty, researchers, graduate students and students. Section "Machine Parts". 2012. С. 45–47.
- [9] Investigation of kinematics of mechanisms by means of computer-aided design systems / M. V. Stekolnikov, L. R. Milovanova, I. A. Chelysheva [и др.] // Engineering Systems: proceedings of the scientific and practical conference with international participation. Moscow: RUDN, 2019. С. 65–74.
- [10] Pervitsky Yu. D. Calculation and design of exact mechanisms. Leningrad: Mechanical engineering, 1979. 456 с.
- [11] Applied mechanics. Part 3. Machine parts and mechanism design basics / M. Yu. Karelina, N. V. Atamanenko, I. V. Kostyuk [и др.]. Moscow: MADI, 2020. 212 с.
- [12] Morozova L. V., Orlov M. R. Investigation of causes of gear failure during operation // Aviation materials and technologies. 2015. № S1. С. 37–48.

С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова

## УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ МНОГОСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ

*Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика  
М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия*

**Аннотация.** Исследуется упруго - пластическое кручение многослойного стержня. Стержень состоит из нескольких слоев. Упругие свойства слоев различны, но коэффициент пластичности у всех слоев одинаков. Для простоты в статье рассмотрен стержень, состоящий из трех слоев. Границы контакта слоев параллельны. Боковая граница стержня свободна от напряжений, на границах раздела слоев непрерывны напряжения и перемещения. В статье построены законы сохранения, которые позволили вычислить компоненты тензора напряжений с помощью контурных интегралов по границе слоев. Во всех точках второй инвариант тензора напряжений сравнивается с пределом текучести. В тех точках, где достигается предел текучести при чистом сдвиге, реализуется пластическое состояние, в остальных – упругое. В результате решения задачи можно построить границу между пластической и упругой областями. Этот метод позволяет построить упруго-пластические границы для стержней различных профилей. Авторы сделают это в последующих публикациях.

**Ключевые слова:** упруго-пластическое кручение, многослойный стержень, законы сохранения

DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.003

УДК: 539.374

**Введение.** В статье показано использование законов сохранения для решения граничных задач уравнений механики деформируемого твердого тела. В работах [2-11] законы сохранения применялись для решения краевых задач для двумерных уравнений идеальной пластичности. Из этих работ следует, что законы сохранения могут быть более успешно применены для решения краевых задач, чем инфинитезимальные симметрии, которым посвящено достаточное количество работ [1]. Авторы объясняют это тем, что точечные симметрии по своей природе являются локальными, в отличие

---

© Сенашов С. И., Савостьянова И. Л., 2022

*Сенашов Сергей Иванович*

**e-mail:** sen@sibsau.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия.

*Савостьянова Ирина Леонидовна*

**e-mail:** savostyanova@sibsau.ru, кандидат педагогических наук, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия.

Поступила 05.07.2022

от глобальных по своей сути законов сохранения. Авторы использовали законы сохранения для решения упругопластических задач о кручении однородных стержней и изгибе однородных консолей, а также решению упругопластических задач для пластин ограниченных размеров с отверстиями [12-17]. В настоящей работе показано, что законы сохранения можно успешно применять и для решения краевых задач для конструкций, изготовленных из слоистых материалов.

**Постановка задачи.** Дан прямолинейный стержень, поперечное сечение которого изображено на рисунке 1. Пусть  $S_1, S_2, \dots, S_n$  - области, состоящие из упруго-пластического изотропного материала, у которых предел пластичности при чистом сдвиге одинаковый и равен  $k$ , а упругие постоянные Ламе различны и равны  $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \dots, \lambda_n, \mu_n$  соответственно. Пусть линия раздела материалов прямолинейна. Выберем ось координат  $Ox$  вдоль линии раздела. Далее, для простоты вычислений, не теряя общности, будем считать  $n = 3$ . Предполагается, как обычно, что боковая поверхность стержня свободна от напряжений, а стержень скручивается парой сил с моментом

$$M = \iint (y\sigma_{13} - x\sigma_{23}) dx dy.$$

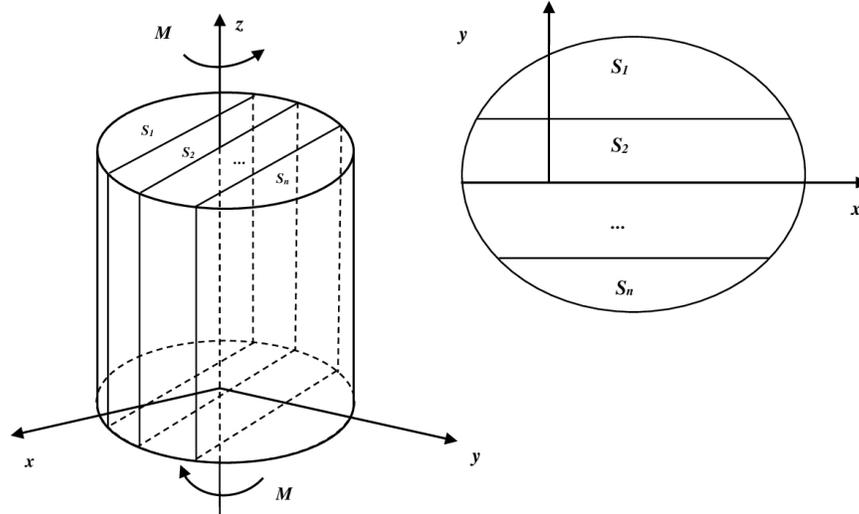


Рис. 1. Скручивание многослойного стержня

В этом случае уравнения, описывающие напряженное состояние в области  $S_i$   $i = 1, 2, 3$  имеют вид

$$F_1 = \partial_x \sigma_{13} + \partial_y \sigma_{23} = 0, F_2 = \partial_y \sigma_{13} - \partial_x \sigma_{23} + \mu_i \omega = 0, \quad \mu_i \omega = K_i, \quad (1)$$

где  $\sigma_{13}, \sigma_{23}$  - компоненты тензора напряжений,  $\omega$  - угол закручивания, он предполагается постоянным.

На боковой поверхности стержня граничные условия следующие

$$\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 = 0, \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 = k^2, \quad (2)$$

они означают, что боковая поверхность находится в пластическом состоянии и свободна от напряжений. Из (2) следует

$$\sigma_{13} = kn_1, \sigma_{23} = -kn_2. \quad (3)$$

Также предполагаем, что на линиях раздела  $MN$  и  $CD$  компоненты тензора напряжений непрерывны, это означает отсутствие разрыва напряжений для данного стержня вдоль линий контакта.

**Законы сохранения.** Законом сохранения назовем выражение вида

$$A_x + B_y = \rho_1 F_1 + \rho_2 F_2, \quad (4)$$

где  $\rho_1, \rho_2$  - некоторые функции, одновременно тождественно не равные нулю, буквенные индексы внизу означают производные по соответствующим переменным.

*Замечание.* Более подробно о законах сохранения, их вычислении для разных уравнений и систем и применении для решения краевых задач можно найти в [2-11]. Предположим, что

$$A = \alpha^1 u + \alpha^2 v + \alpha^3, B = \beta^1 u + \beta^2 v + \beta^3, \quad (5)$$

где для удобства обозначим  $\sigma_{13} = u, \sigma_{23} = v, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \beta^1, \beta^2, \beta^3$  - являются функциями только  $x, y$ .

Подставляя формулы (5) в выражение (4) получаем

$$\alpha^1 = \beta^2, \alpha^2 = -\beta^1, \alpha_x^1 - \alpha_y^2 = 0, \alpha_y^1 + \alpha_x^2 = 0, \alpha_x^3 + \beta_y^3 = -\alpha^2 K_i, \quad (6)$$

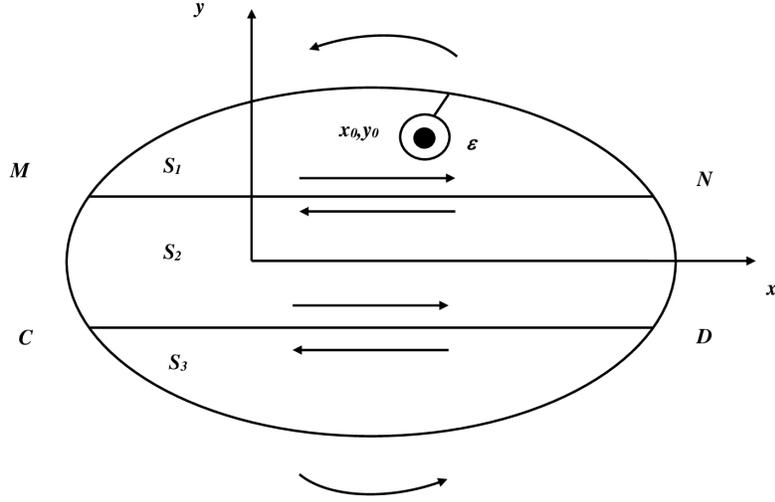
Пусть

$$\alpha_x^{1(i)} - \alpha_y^{2(i)} = 0, \alpha_y^{1(i)} + \alpha_x^{2(i)} = 0, \alpha_x^{3(i)} + \beta_y^{3(i)} = -\alpha^2 K_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (7)$$

Здесь индекс  $i$  в скобках соответствует области  $S_i$ .

Если в точке  $x_0, y_0$  подынтегральные функции имеют особенность и эта точка находится в круге радиуса  $\varepsilon : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$ , то из (4) получаем

$$\begin{aligned} \iint_S (A_x + B_y) dx dy &= \iint_{S_1} (A^1_x + B^1_y) dx dy + \iint_{S_2} (A^2_x + B^2_y) dx dy + \iint_{S_3} (A^3_x + B^3_y) dx dy = \\ &= - \int_{\varepsilon} A^1 dy - B^1 dx + \int_{L_1} A^1 dy - B^1 dx + \int_{L_2} A^2 dy - B^2 dx + \int_{L_3} A^3 dy - B^3 dx + \\ &+ \int_{MN} A^1 dy - B^1 dx + \int_{NM} A^2 dy - B^2 dx + \int_{CD} A^2 dy - B^2 dx + \int_{DC} A^3 dy - B^3 dx = 0. \end{aligned}$$

Рис. 2. Вычисление  $\sigma_{13}, \sigma_{23}$  в точке  $x_0, y_0$ 

Имеем вдоль  $MN$  (рис. 2)

$$\int_{MN} A^1 dy - B^1 dx + \int_{NM} A^2 dy - B^2 dx = \int_{MN} (\alpha^{1(1)}u + \alpha^{2(1)}v + \alpha^{3(1)})dy - (-\alpha^{2(1)}u + \alpha^{1(1)}v + \beta^{3(1)})dx + \\ + \int_{NM} (\alpha^{1(2)}u + \alpha^{2(2)}v + \alpha^{3(2)})dy - (-\alpha^{2(2)}u + \alpha^{1(2)}v + \beta^{3(2)})dx = 0.$$

Так как вдоль  $MN$   $dy = 0$ , то для удобства полагаем  $\beta^{3(i)} = 0$ ,  $\alpha_x^{3(i)} = \alpha^{2(i)}K_i$ , поэтому  $\alpha^{1(1)} = \alpha^{1(2)}$ ,  $\alpha^{2(1)} = \alpha^{2(2)}$ .

Аналогичные выражения можно получить и вдоль отрезка  $CD$ . В результате имеем

$$\int_{\varepsilon} A^1 dy - B^1 dx = \int_{L_1} A^1 dy - B^1 dx + \int_{L_2} A^2 dy - B^2 dx + \int_{L_3} A^3 dy - B^3 dx. \quad (8)$$

Используем формулу (8) для нахождения функций  $u, v$  в точке.

Для этого рассмотрим решение уравнений (7) в виде

$$\alpha^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \alpha^2 = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \alpha^3 = \omega \mu_1 \operatorname{arctg} \frac{x - x_0}{y - y_0}. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8) получаем

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon} A^1 dy - B^1 dx &= \int_{\varepsilon} (\alpha^1 u + \alpha^2 v + \alpha^3) dy - (-\alpha^2 u + \alpha^1 v) dx = \\ &= \int_{\varepsilon} \left( \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} u - \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} v + \varpi \mu_1 \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{y-y_0} \right) dy - \\ &- \left( \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} u \right) dx + \int_{\varepsilon} \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} v dx. \end{aligned}$$

Пусть  $x-x_0 = \varepsilon \cos \phi$ ,  $y-y_0 = \varepsilon \sin \phi$ , тогда получаем

$$\int_{\varepsilon} A^1 dy - B^1 dx = \int_0^{2\pi} [(u \cos \phi + v \sin \phi) \cos \phi + (u \sin \phi + v \cos \phi) \sin \phi] d\phi = \int_0^{2\pi} u d\phi = 2\pi u(x_0, y_0).$$

В последнем равенстве использован предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$  и теорема о среднем.

$$\begin{aligned} 2\pi \sigma_{13}(x_0, y_0) &= \int_{L_1} \left( \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 + \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 + \omega \mu_1 \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{y-y_0} \right) dy - \\ &- \left( \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 - \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 \right) dx + \\ &+ \int_{L_2} \left( \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 + \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 + \omega \mu_2 \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{y-y_0} \right) dy - \\ &- \left( \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 - \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 \right) dx + \\ &+ \int_{L_3} \left( \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 + \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 + \omega \mu_2 \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{y-y_0} \right) dy - \\ &- \left( \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 - \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 \right) dx. \end{aligned} \tag{10}$$

Пусть решение уравнений (7) имеет вид

$$\alpha^1 = \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \alpha^2 = \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \alpha^3 = \frac{1}{2} \omega \mu_2 \ln((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2). \tag{11}$$

Подставим (11) в (8) и получим

$$\begin{aligned}
2\pi \sigma_{23}(x_0, y_0) = & \int_{L_1} \left( \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 - \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 + \frac{1}{2} \omega \mu_2 \ln((x - x_0)^2 + \right. \\
& \left. + (y - y_0)^2) dy - \left( -\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 + \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 \right) dx + \\
& + \int_{L_2} \left( -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 + \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 + \frac{1}{2} \omega \mu_2 \ln((x - x_0)^2 + \right. \\
& \left. + (y - y_0)^2) dy - \left( -\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 + \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 \right) dx + \\
& + \int_{L_3} \left( -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 + \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 + \frac{1}{2} \omega \mu_2 \ln((x - x_0)^2 + \right. \\
& \left. + (y - y_0)^2) dy - \left( -\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 + \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 \right) dx.
\end{aligned} \tag{12}$$

Формулы, аналогичные (10) и (12), без труда получаем и для точек  $x_0, y_0$ , принадлежащих областям  $S_2, S_3$ .

**Заключение.** Формулы (10), (12) позволяют вычислить значения компонент тензора напряжений во всех точках исследуемого сечения. Далее в каждой точке  $x_0, y_0$  проверяется условие пластичности  $\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 = k^2$ . В тех точках, где  $\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 < k^2$  имеется упругая зона, а где условие не выполняется - имеется пластическая область. Тем самым описанная методика позволяет выделить упругие и пластические зоны и построить упругопластическую границу, которая подлежала определению и заранее была неизвестна.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. Москва, Наука, 1978.
- [2] Сенашов С. И. О законах сохранения уравнений пластичности // Доклады АН СССР. 1991. Т. 320. № 3. С.606.
- [3] Сенашов С.И. Законы сохранения и точное решение задачи Коши для уравнений пластичности. // Доклады РАН. 1995. Т. 345. № 5. С. 619.
- [4] Кирыков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд-во Наука, 139 с.
- [5] Senashov S. I., Vinogradov A. M. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity // Proc. Edinburg Math.Soc. 1988. P. 415-439.
- [6] Senashov S. I., Yakchno A. N. Reproduction of solutions for bidimensional ideal plasticity // Journal of Non-Linear Mechanics. 2007. No 42. P. 500–503.
- [7] Senashov S. I., Yakchno A. N. Deformation of characteristic curves of the plane ideal plasticity equations by point symmetries // Nonlinear analysis. 2009. No 71. P. 1274–1284
- [8] Senashov S. I., Yakchno A. N. Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity // SIGMA. No 8. 2012. P. 16.
- [9] Senashov S. I., Yakchno A. N. Some symmetry group aspects of a perfect plane plasticity system // J. Phys. A: Math. Theor. 2013. No 46. P. 355202.
- [10] Senashov S. I., Yakchno A. N. Conservation Laws of Three-Dimensional Perfect Plasticity Equations under von Mises Yield Criterion // Abstract and Applied Analysis. 2013. Article ID 702132. 8 p.
- [11] Гомонова О. В., Сенашов С. И. Определение областей упругого и пластического деформирования в задаче об одноосном растяжении пластины, ослабленной отверстиями. // Журнал ПМТФ. 2021. Т. 62. №1.

- [12] Сенашов С. И., Филюшина Е. В. Законы сохранения уравнений плоской теории упругости // Вестник СибГАУ. 2014. 1(53). С. 79-81.
- [13] Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Об упругом кручении вокруг трех осей. Сибирский журнал индустриальной математики. 2021. Т.24. №1. С. 120-125.
- [14] Senashov S. I., Gomonova O. V. Construction of Elastoplastic Boundary in Problem of Tension of a Plate Weakened by Holes // Intern. J. Non. Lin. Mech. 2019. V. 108. P. 7–10.
- [15] Gomonova O. V., Senashov S. I. Determination of elastic and plastic deformation regions in the problem of uniaxial tension of a plate weakened by holes // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2021. Vol.62. No 1. P. 179–186.
- [16] Senashov S. I., Kondrin A. V., Cherepanova O. N. On Elastoplastic Torsion of a Rod with Multiply Connected Cross-Section // J. Siberian Federal Univ., Math. & Physics. 2015. 7(1). P.343-351.
- [17] Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A. V. Elastoplastic Bending of Beam // J. Siberian Federal Univ., Math. & Physics. 2014. 7(2). P.203-208.

*S. I. Senashov, I. L. Savostyanova*

## ELASTIC-PLASTIC TORSION OF A MULTILAYER ROD

*Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia*

**Abstract.** The authors investigate the elastic-plastic torsion of a multilayer rod in this article. According to the condition of the problem, the rod consists of several layers. The elastic properties of the layers are different, but the plasticity coefficient of all layers is the same. For simplicity, the article considers a rod consisting of three layers. The contact boundaries of the layers are parallel. The lateral boundary of the rod is stress-free, stresses and displacements are continuous at the interface of the layers. The authors constructed conservation laws that made it possible to calculate the components of the stress tensor using contour integrals along the boundary of the layers. At all points, the second invariant of the stress tensor is compared with the yield strength. At those points where the yield strength is reached with a pure shear, a plastic state is realized, in the rest – elastic. As a result of solving the problem, it is possible to construct a boundary between the plastic and elastic regions. This method makes it possible to construct elastic-plastic boundaries for rods of various profiles. The authors will do this in subsequent publications.

**Keywords:** elastic-plastic torsion, multilayer rod, conservation laws

## REFERENCES

- [1] Ovsyannikov L. V. Group analysis of differential equations. Moscow: Nauka, 1978. (in Russian)
- [2] Senashov S.I. On the laws of conservation of plasticity equations. // Reports of the USSR Academy of Sciences, 1991. Vol. 320. No. 3. P. 606.(in Russian)
- [3] Senashov S.I. Conservation laws and exact solution of the Cauchy problem for plasticity equations. // Reports of the Russian Academy of Sciences. 1995. Vol. 345. No. 5. P. 619. (in Russian)
- [4] Kiryakov P. P., Senashov S. I., Yakhno A. N. Application of symmetries and conservation laws to the solution of differential equations. Novosibirsk: Nauka Publishing House. 139 p.(in Russian)

---

*Senashov Sergei Ivanovich*

e-mail: sen@sibsau.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia.

*Savostyanova Irina Leonidovna*

e-mail: savostyanova@sibsau.ru, Ph.D. in Pedagogy, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia.

- [5] Senashov S. I., Vinogradov A. M. Symmetries and conservation laws of two-dimensional ideal plasticity // Trudy Edinburgh Mathematical Journal. 1988. P. 415-439.
- [6] Senashov S. I., Yakchenko A. N. Reproduction of solutions for two-dimensional ideal plasticity // Journal of Nonlinear Mechanics. 2007. No 42. P. 500-503.
- [7] Senashov S. I., Yakchenko A. N. Deformation of characteristic curves of plane equations of ideal plasticity by point symmetries // Nonlinear analysis. No 71. 2009. P. 1274-1284
- [8] Senashov S. I., Yakchenko A. N. Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity // SIGMA 8. 2012. No 071. P. 16.
- [9] Senashov S. I., Yakchenko A. N. Some aspects of the symmetry group of an ideal plane plasticity system // J. Phys. Answer: Mathematics. Theor. No 46. 2013. P. 355202.
- [10] Senashov S. I., Yakchenko A. N. Conservation laws of three-dimensional equations of ideal plasticity according to the von Mises fluidity criterion // Volume of Abstract and Applied Analysis. 2013. Article Id 702132. 8 p.
- [11] Gomonova O. V., Senashov S. I. Determination of elastic and plastic deformation regions in the problem of uniaxial stretching of a plate weakened by holes // PMTF Magazine. 2021. Vol. 62. No. 1. (in Russian)
- [12] Senashov S. I., Filyushina E. V. Conservation laws of the equations of the plane theory of elasticity // Bulletin of SibGAU. 2014. No 1(53). P. 79-81.(in Russian)
- [13] Senashov S. I., Savostyanova I. L. On elastic torsion around three axes // Siberian Journal of Industrial Mathematics. 2021. Vol. 24. No. 1. P. 120-125.(in Russian)
- [14] Senashov S. I., Gomonova O. V. Construction of an elastic-plastic boundary in the problem of stretching a plate weakened by holes // Journal. Lin. Mechanism. 2019. Vol. 108. P. 7-10.(in Russian)
- [15] Gomonova O.V., Senashov S.I. Determination of elastic and plastic deformation regions in the problem of uniaxial stretching of a plate weakened by holes // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2021. Vol.62. No 1. P. 179-186.
- [16] Senashov S. I., Kondrin A. V., Cherepanova O. N. On elastic-plastic torsion of a multi-connected cross-section rod // Siberian Federal University, matematika and physics. 2015. No 7(1). P. 343-351.
- [17] Senashov S. I., Cherepanova Yu. N., Kondrin Yu. V. Elastic-plastic bending of a beam // Siberian Federal University, Mathematics and physics. 2014. No 7(2). P. 203-208.

Б. Г. Миронов<sup>1</sup>, Ю. Б. Миронов<sup>2</sup>

## О КРУЧЕНИИ СЕКТОРА ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ

<sup>1</sup>Российский университет транспорта, г. Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

**Аннотация.** Данная работа посвящена исследованию напряженного и деформированного состояний сектора толстостенной трубы из идеального жесткопластического изотропного материала, в предположении, что он закручивается вокруг оси параллельной оси  $z$ . Кручение идеально пластических стержней из изотропного, а также анизотропного материалов рассмотрено в работах [1–6]. В [3] рассмотрено также кручение сектора кругового кольца из изотропного материала. В работах [8], [9] исследовано кручение сектора кругового кольца, находящегося под действием линейного давления.

**Ключевые слова:** кручение стержней, анизотропия, изотропия деформация, напряжение, ассоциированный закон течения, пластичность, упругость.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.004

УДК: 539.374

Пусть изотропный идеально пластический сектор толстостенной трубы с внутренним радиусом равным  $r$  и внешним радиусом  $R$ , ориентированный в цилиндрической системе координат  $\rho\theta z$  причем боковая поверхность сектора параллельна оси  $z$ . Сектор трубы закручивается вокруг оси, параллельной оси  $z$  и проходящей через точку пересечения средних линий сечения сектора плоскостью  $z = 0$ , противоположными и равными парами сил. Боковая поверхность сектора трубы свободна от нагрузок. Предполагается, что сектор трубы полностью находится в пластическом состоянии.

Пусть напряженное состояние, возникающее в секторе, характеризуется условием пластичности Мизеса

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2 + 6(\tau_{\rho\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2 + \tau_{\rho z}^2) = 6k^2, \quad (k - const) \quad (1)$$

---

© Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б., 2023

*Миронов Борис Гурьевич*

**e-mail:** mbg.chspru@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Российский университет транспорта, г. Москва, Россия.

*Миронов Юрий Борисович*

**e-mail:** i.b.mironov@mtuci.ru, кандидат технических наук, декан, Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия.

Поступила 20.09.2023

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} &= 0, \\
\frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} &= 0, \\
\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} &= 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

При условии, что

$$\sigma_\rho = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{\rho\theta} = 0,$$

из (1) и (2) следует

$$\tau_{\rho z} = \tau_{\rho z}(\rho, \theta), \quad \tau_{\theta z} = \tau_{\theta z}(\rho, \theta), \tag{3}$$

$$\tau_{\theta z}^2 + \tau_{\rho z}^2 = k^2, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0. \tag{5}$$

Продифференцируем соотношение (4) по переменной  $\theta$  и получим следующее уравнение

$$\tau_{\rho z} \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \theta} + \tau_{\theta z} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} = 0. \tag{6}$$

Умножим соотношение (5) на  $\rho\tau_{\theta z}$ . Тогда

$$\rho\tau_{\theta z} \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \tau_{\theta z} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} = -\tau_{\rho z}\tau_{\theta z}. \tag{7}$$

А из (6) и (7) имеем

$$\rho\tau_{\theta z} \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} - \tau_{\rho z} \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \theta} = -\tau_{\rho z}\tau_{\theta z}. \tag{8}$$

Соотношения вдоль характеристик и сами характеристики уравнения (8) определяются из следующей системы

$$\frac{d\rho}{\rho\tau_{\theta z}} = -\frac{d\theta}{\tau_{\rho z}} = \frac{d\tau_{\rho z}}{-\tau_{\rho z}\tau_{\theta z}}. \tag{9}$$

Согласно (9) получим уравнение для компоненты напряжения  $\tau_{\rho z}$

$$\frac{d\tau_{\rho z}}{d\rho} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0. \tag{10}$$

Из (10) определяем компоненту напряжения  $\tau_{\rho z}$

$$\tau_{\rho z} = \frac{c_1}{\rho} \tag{11}$$

где вдоль характеристики  $c_1 = const$ .

Согласно (4), из (11) получим

$$\tau_{\theta z} = \sqrt{k^2 - \frac{c_1^2}{4\rho^2}}. \tag{12}$$

Пусть поперечное сечение сектора трубы определяется следующими условиями  $r \leq \rho \leq R$ ,  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ .

На контуре поперечного сечения сектора трубы вектор касательного напряжения  $\tau = (\tau_{\rho z}, \tau_{\theta z})$  направлен по касательной к нему. Следовательно при  $\rho = R$  и в области, примыкающей к ней, имеем

$$\tau_{\rho z} = 0 \text{ и } \tau_{\theta z} = k \tag{13}$$

При  $\theta = \beta$  и в области, примыкающей к ней, имеем

$$\tau_{\rho z} = -k \text{ и } \tau_{\theta z} = 0. \quad (14)$$

Из (13) и (14) получим следующее уравнение линии разрыва напряжений, выходящей из вершины с координатами  $\rho = R$ ,  $\theta = \beta$  контура поперечного сечения сектора трубы

$$\rho = R + \theta - \beta \quad (15)$$

Линии разрыва напряжений, выходящие из других вершин контура поперечного сечения сектора трубы определяются аналогично. Компоненты скоростей деформации сектора трубы находятся из соотношений ассоциированного закона пластического течения. В соответствии с уравнением (4) они имеют вид

$$\varepsilon_\rho = \varepsilon_\theta = \varepsilon_z = \varepsilon_{\rho\theta} = 0, \quad \tau_{\rho z} \varepsilon_{\theta z} = \tau_{\theta z} \varepsilon_{\rho z} \quad (16)$$

где  $\varepsilon_\rho, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \varepsilon_{\rho\theta}, \varepsilon_{\theta z}, \varepsilon_{\rho z}$  – компоненты тензора скоростей деформации.

Положим, что в начальный момент деформирования все компоненты деформации равны нулю, Тогда из соотношений (16) имеем

$$e_\rho = e_\theta = e_z = e_{\rho\theta} = 0, \quad \tau_{\rho z} e_{\theta z} = \tau_{\theta z} e_{\rho z} \quad (17)$$

где  $e_\rho, e_\theta, e_z, e_{\rho\theta}, e_{\theta z}, e_{\rho z}$  – компоненты тензора деформации.

Связь между компонентами перемещений  $u, v, w$  и компонентами тензора деформации  $e_\rho, e_\theta, e_z, e_{\rho\theta}, e_{\theta z}, e_{\rho z}$  имеют вид

$$e_\rho = \frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad e_\theta = \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad e_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad e_{\rho\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \quad (18)$$

$$e_{\theta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \quad e_{\rho z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) \quad (19)$$

С учетом (18) из соотношений (17) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \left( \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (20)$$

Удовлетворим соотношениям (20), положив

$$u = 0, \quad v = \xi \rho z \quad (21)$$

где  $\xi = const.$

Из (19) и (21) следует, что

$$\frac{\partial e_{\theta z}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial e_{\rho z}}{\partial \theta} = \xi - \frac{e_{\theta z}}{\rho} \quad (22)$$

Продифференцируем по переменной  $\theta$  последнее соотношение из (17). Получим

$$\tau_{\rho z} \frac{\partial e_{\theta z}}{\partial \theta} - \tau_{\theta z} \frac{\partial e_{\rho z}}{\partial \theta} = e_{\rho z} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} - e_{\theta z} \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \theta} \quad (23)$$

Умножая (22) на  $\rho \tau_{\theta z}$ , и, вычитая из полученного соотношения уравнение (23), имеем

$$\rho \tau_{\theta z} \frac{\partial e_{\theta z}}{\partial \rho} - \tau_{\rho z} \frac{\partial e_{\theta z}}{\partial \theta} = \xi \rho \tau_{\theta z} - \tau_{\theta z} e_{\theta z} - e_{\rho z} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + e_{\theta z} \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \theta} \quad (24)$$

Характеристики уравнения (24) определяются из соотношений

$$\frac{d\rho}{\rho \tau_{\theta z}} = -\frac{d\theta}{\tau_{\rho z}} = \frac{de_{\rho\theta z}}{(\xi \rho - e_{\theta z}) \tau_{\theta z} - e_{\rho z} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + e_{\theta z} \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \theta}}. \quad (25)$$

Как видно из соотношений (10), (25), характеристики соотношений (9) и (24) совпадают. В соответствии с (11) и (12) из системы (25) имеем

$$\frac{d\rho}{\rho\tau_{\theta z}} = -\frac{d\theta}{\tau_{\rho z}} = \frac{de_{\theta z}}{(\xi\rho - e_{\theta z})\tau_{\theta z}}. \quad (26)$$

Следовательно, компонента тензора деформации  $e_{\theta z}$  определяется из уравнения

$$\frac{de_{\theta z}}{d\rho} + \frac{e_{\theta z}}{\rho} = \xi. \quad (27)$$

Компоненту тензора деформации  $e_{\theta z}$  находим из уравнения (27)

$$e_{\theta z} = \frac{\xi\rho^2 + c_2}{2\rho} \quad (28)$$

где вдоль характеристики  $c_2 = const$ .

В соответствии с (11), (12) и (28) из уравнения (17) определяем компоненту тензора деформации  $e_{\rho z}$  вдоль характеристик соотношения (24)

$$e_{\rho z} = \frac{\frac{c_1}{\rho}}{\sqrt{k^2 - \frac{c_1^2}{4\rho^2}}} \frac{\xi\rho^2 + c_2}{2\rho} \quad (29)$$

На линии разрыва напряжений компоненты тензора деформации  $e_{\tau z}$ ,  $e_{\rho z}$  можно принять равными нулю. Тогда в области, примыкающей к части контура  $\rho = R$ , получим

$$e_{\theta z} = \frac{\xi(\rho^2 - (R + \theta - \beta)^2)}{2\rho}, \quad e_{\rho z} = 0, \quad (30)$$

а в области, примыкающей к части контура  $\theta = \beta$ , имеем

$$e_{\theta z} = 0, \quad e_{\rho z} = 0. \quad (31)$$

Аналогично можно определить компоненты деформации и в других областях поперечного сечения сектора.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
- [2] Прагер В., Ходж Г. Ф. Теория идеально пластических тел. М.: ИЛ, 1956. 398 с.
- [3] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности // М. 1966. 232 с.
- [4] Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. Предельное состояние трансляционно анизотропных стержней при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. Т. 1, № 19. с. 132–139.
- [5] Козлова Л. С., Миронов Б. Г. Кручение призматических стержней при действии давления, линейно меняющегося вдоль образующей // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2014. № 3. с. 107–113.
- [6] Деревянных Е. А., Миронов Б. Г. К вопросу о кручении неоднородных призматических стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. Т. 3, № 21. с. 105–111.

*B. G. Mironov<sup>1</sup>, Yu. B. Mironov<sup>2</sup>*

## ABOUT TORSION OF THE SECTOR OF A THICK-WALL PIPE

<sup>1</sup>*Russian University of transport, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia*

**Abstract.** In this work, we study the stress-strain and state of the isotropic sector of a thick-walled pipe made of an ideal rigid-plastic material, under the assumption that it twists around an axis parallel to the z-axis. Torsion of ideally plastic rods made of isotropic and anisotropic material is considered in [1–7]. In [3], the torsion of a sector of a circular ring made of an isotropic material was also considered. In [8], [9], the torsion of a sector of a circular ring under the influence of linear pressure was studied.

**Keywords:** plasticity, rod, torsion, anisotropy, deformation, stress, associated flow law, isotropy.

## REFERENCES

- [1] Sokolovsky V.V. Plasticity Theory. M.: High School, 1969. 608 c.
- [2] Prager V., Hodge G.F. Theory of ideally plastic bodies. M.: IL, 1956. 398 c.
- [3] Ivlev D. D. Theory of ideal plasticity // M. 1966. 232 c.
- [4] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. Limit state of translationally anisotropic rods under torsion // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. AND I. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2014. T. 1, № 19. c. 132–139.
- [5] Kozlova L. S., Mironov B. G. Torsion of prismatic rods under pressure varying linearly along the generatrix // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of solids. 2014. № 3. c. 107–113.
- [6] Derevyannykh E. A., Mironov B. G. On the issue of torsion of inhomogeneous prismatic rods // Vestnik of the Chuvash State Pedagogical University named after. AND I. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2014. T. 3, № 21. c. 105–111.
- [7] Mironov B. G., Tikhonov S. V. About one type of torsional anisotropy // Vestnik of the Chuvash State Pedagogical University named after. AND I. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2012. T. 1, № 11. c. 36–38.
- [8] Mironov B. G., Kozlova L. S. Torsion of a sector of an anisotropic circular ring under the action of variable pressure // Vestnik of the Chuvash State Pedagogical University named after. AND I. Yakovleva. 2010. T. 4, № 68. c. 132–136.
- [9] Mironov B. G. Torsion of a sector of a circular ring under the action of variable pressure // Vestnik of the Chuvash State Pedagogical University named after. AND I. Yakovleva. 2009. T. 2, № 62. c. 23–26.

---

*Mironov Boris Gurjevich* , Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of department, Russian University of transport, Moscow, Russia.

*Mironov Yuri Borisovich* , Candidate of technical Sciences, Dean, Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia.

Ю. В. Немировский<sup>1,2</sup>, С. В. Тихонов<sup>3</sup>

## ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛОЖЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ В СЛУЧАЕ ПРЕДЕЛЬНО-УПРУГОГО ИЗГИБА МНОГОСЛОЙНЫХ ФИЗИЧЕСКИ-НЕЛИНЕЙНЫХ БЕТОННЫХ СТЕРЖНЕЙ

<sup>1</sup> *Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

<sup>2</sup> *Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия*

<sup>3</sup> *Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия*

**Аннотация.** В данной работе рассматривается задача изгиба многослойного стержня поперечными нагрузками при наличии зон упругого и нелинейно-неупругого деформирования, получены соотношения для определения границы раздела упругой и нелинейно-неупругой областей деформирования стержня, а также получены численные расчеты для случаев совпадения и не совпадения нейтральной линии с осью стержня. Приведены численные расчеты предельных нагрузок: первой (деформация достигает значения предельной неупругой) и второй (деформация достигает значения деформации предразрушения).

**Ключевые слова:** бетонные стержни, аналитические решения, физическая нелинейность, упругость, поперечные нагрузки, нейтральная линия

DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.005

УДК: 539.374

В задачах изгиба стержней поперечными нагрузками возникают области сжатия и растяжения. Если эти стержни состоят из упругих материалов с симметричным относительно оси координат поперечным сечением, распределение деформаций и напряжений будет также симметрично относительно оси координат. В таком случае, ввиду симметрии, нейтральная линия будет совпадать с осью координат. Если же материал является разномодульным при растяжении и сжатии, то предположение совпадения

---

© Немировский Ю. В., Тихонов С. В. 2023

*Немировский Юрий Владимирович*

**e-mail:** nemiyury@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия, профессор, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

*Тихонов Сергей Владимирович*

**e-mail:** strangcheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 15.08.2023

нейтральной линии с осью координат приводит к определенной погрешности расчетов. В данной работе будем рассматривать бетонные стержни, которые имеют существенное различие диаграмм при растяжении и сжатии [1–4]. Задача расчета бетонного стержня в предположении, что нейтральная линия располагается вдоль оси, была рассмотрена в работе [5], где были получены аналитические решения, описывающие положения границ раздела областей упругого и нелинейного деформирования. Далее будем следовать обозначениям и перейдем к безразмерным величинам, аналогично работе [5].

Рассмотрим случай, когда стержень шарнирно оперт и деформируется под действием равномерно-распределенной нагрузки  $q$ , направленной вертикально вниз. Тогда в стержне будут возникать области упругого деформирования и нелинейно-упругого. Все случаи взаимного расположения границ приведены в работе [5], в данной работе ограничимся случаем, когда указанная граница располагается во втором слое (рис. 1), остальные случаи рассматриваются аналогично.

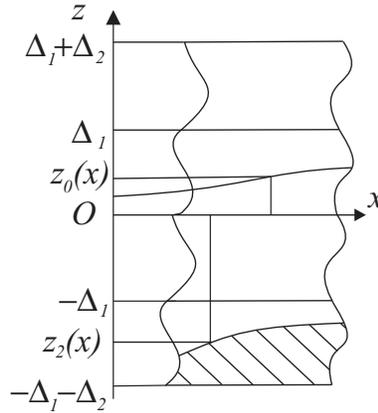


Рис. 1. Расположение зон упругого и нелинейно-упругого деформирования

В таком случае соотношения для изгибающего момента будут иметь вид

$$M_y(x) = -2 \int_{-\Delta_1}^{\Delta_1} dz \int_0^{b_1} \sigma_1^e z dy - 2 \int_{\Delta_1}^{\Delta_1+\Delta_2} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^e z dy - \\ - 2 \int_{z_2}^{-\Delta_1} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^e z dy - 2 \int_{-\Delta_1-\Delta_2}^{z_2} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^n z dy. \quad (1)$$

В случае, когда положение нейтральной линии не совпадает с центром симметрии стержня, имеем

$$\varepsilon(x, z) = e_0(x) - z \kappa_z(x), \quad \kappa_z(x) = \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2}, \quad (2)$$

где  $e_0(x)$  – деформация осевой линии стержня.

С учетом того, что  $z_0(x)$  разделяет область сжатия и растяжения, имеем

$$e_0(x) = z_0(x) \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2}, \quad (3)$$

тогда соотношения для деформации (2) примут вид

$$\varepsilon(x, z) = z_0(x) \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} - z \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2}. \quad (4)$$

При данных условиях закрепления и нагрузках продольное усилие должно равняться 0. В работе [5] значение продольного усилия в стержне, определяемое соотношениями

$$\begin{aligned} N = & 2 \int_{-\Delta_1}^{\Delta_1} dz \int_0^{b_1} \sigma_1^e dy + 2 \int_{\Delta_1}^{\Delta_1 + \Delta_2} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^e dy - \\ & + 2 \int_{z_2}^{-\Delta_1} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^e dy + 2 \int_{-\Delta_1 - \Delta_2}^{z_2} dz \int_0^{b_2} \sigma_2^n dy, \end{aligned} \quad (5)$$

будет равно 0 только при упругом деформировании стержня. В остальных случаях, ввиду наличия нелинейности в области растяжения, данное продольное усилие будет отлично от нуля. Данная разница в работе [5] обусловлена предположением, что нейтральная линия совпадает с осью стержня, что приводит к погрешности в приведенных расчетах.

Примем, что связь между напряжениями и деформациями в стержне в  $i$ -ом слое определяется зависимостями при  $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_{0i}^+$

$$\sigma_i^e = E_i \varepsilon, \quad (6)$$

а при  $\varepsilon_{0i}^+ \leq \varepsilon < \varepsilon_{*i}^+$ , равной

$$\sigma_i^n = A_{1i} \varepsilon + A_{2i} \varepsilon^2. \quad (7)$$

Из условия равенства изгибающего момента (1) значению, полученному из решения статически определимой задачи об изгибе шарнирно-закрепленного стержня [5], и равенства 0 продольного усилия (5) можно получить систему уравнений для решения данной задачи.

Из соотношений (2), (6), (7) получим

$$\begin{aligned} \sigma_1^e = E_1 \varepsilon = E_1 (z_0(x) - z) \frac{d^2 w_0}{dx^2}, \quad \sigma_2^e = E_2 \varepsilon = E_2 (z_0(x) - z) \frac{d^2 w_0}{dx^2}, \\ \sigma_2^n = A_{12} \varepsilon + A_{22} \varepsilon^2 = A_{12} (z_0(x) - z) \frac{d^2 w_0}{dx^2} + A_{22} (z_0(x) - z)^2 \left( \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда соотношения для продольного усилия и изгибающего момента примут вид

$$\begin{aligned} N = & 2b_1 E_1 \int_{-\Delta_1}^{\Delta_1} (z_0(x) - z) \frac{d^2 w_0}{dx^2} dz + 2b_2 E_2 \int_{\Delta_1}^{\Delta_1 + \Delta_2} (z_0(x) - z) \frac{d^2 w_0}{dx^2} dz + \\ & + 2b_2 E_2 \int_{z_2}^{-\Delta_1} (z_0(x) - z) \frac{d^2 w_0}{dx^2} dz + \\ & + 2b_2 \int_{-\Delta_1 - \Delta_2}^{z_2} \left( A_{12} (z_0(x) - z) \frac{d^2 w_0}{dx^2} + A_{22} (z_0(x) - z)^2 \left( \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 \right) dz = \\ & = (4b_1 E_1 z_0(x) \Delta_1 + 2b_2 E_2 z_0(x) \Delta_2 - b_2 E_2 ((\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + \Delta_1^2) + \\ & + 2b_2 E_2 z_0(x) (-\Delta_1 - z_2) - b_2 E_2 (\Delta_1^2 - z_2^2) + 2b_2 A_{12} z_0(x) (z_2 + \Delta_1 + \Delta_2) - \\ & - b_2 A_{12} (z_2^2 - (\Delta_1 + \Delta_2)^2)) \frac{d^2 w_0}{dx^2} - (-2b_2 A_{22} z_0^2 (z_2 + \Delta_1 + \Delta_2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2b_2 z_0 A_{22} (z_2^2 - (\Delta_1 + \Delta_2)^2) - \frac{2}{3} b_2 A_{22} (z_2^3 + (\Delta_1 + \Delta_2)^3) \left( \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2, \\
M = & -2b_1 E_1 \int_{-\Delta_1}^{\Delta_1} (z_0(x) - z) z \frac{d^2 w_0}{dx^2} dz - 2b_2 E_2 \int_{\Delta_1}^{\Delta_1 + \Delta_2} (z_0(x) - z) z \frac{d^2 w_0}{dx^2} dz - \\
& - 2b_2 E_2 \int_{z_2}^{-\Delta_1} (z_0(x) - z) z \frac{d^2 w_0}{dx^2} dz - \\
& - 2b_2 \int_{-\Delta_1 - \Delta_2}^{z_2} \left( A_{12} (z_0(x) - z) \frac{d^2 w_0}{dx^2} + A_{22} (z_0(x) - z)^2 \left( \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 \right) z dz = \\
= & \left\{ -4b_1 E_1 \left( -\frac{\Delta_1^3}{3} \right) - 2b_2 E_2 \left( z_0 \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)^2}{2} - \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)^3}{3} - z_0 \frac{\Delta_1^2}{2} + \frac{\Delta_1^3}{3} \right) - \right. \\
& - 2b_2 E_2 \left( z_0 \frac{\Delta_1^2}{2} + \frac{\Delta_1^3}{3} - z_0 \frac{z_2^2}{2} + \frac{z_2^3}{3} \right) - \\
& \left. - 2b_2 A_{12} \left( z_0 \frac{z_2^2}{2} - \frac{z_2^3}{3} - z_0 \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)^2}{2} - \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)^3}{3} \right) \right\} \frac{d^2 w_0}{dx^2} - \\
& - 2b_2 A_{22} \left( z_0^2 \frac{z_2^2}{2} - \frac{2}{3} z_2^3 z_0 + \frac{z_2^4}{4} - z_0^2 \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)^2}{2} - \frac{2}{3} (\Delta_1 + \Delta_2)^3 z_0 - \right. \\
& \left. - \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)^4}{4} \right) \left( \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2,
\end{aligned}$$

которые можем переписать в виде

$$\begin{aligned}
N = & \{ (-2b_2 E_2 (\Delta_1 - \Delta_2) + 2b_2 A_{12} (\Delta_1 + \Delta_2)) z_0(x) - \\
& - 2b_2 (E_2 - A_{12}) z_2 z_0(x) - b_2 (A_{12} - E_2) z_2^2 - 2b_1 E_1 \Delta_1^2 - b_2 E_2 (\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + \\
& + b_2 A_{12} (\Delta_1 + \Delta_2)^2 \} \frac{d^2 w_0}{dx^2} - \{ 2b_2 A_{22} z_0^2(x) z_2 - 2b_2 A_{22} (\Delta_1 + \Delta_2) z_0^2 + \\
& + 2b_2 A_{22} z_0 z_2^2 - 2b_2 A_{22} (\Delta_1 + \Delta_2)^2 z_0(x) - \frac{2}{3} b_2 A_{22} (z_2^2 + (\Delta_1 + \Delta_2)^3) \} \left( \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2, \\
M = & \{ (-b_2 (E_2 - A_{12}) (\Delta_1 + \Delta_2)^2) z_0(x) + b_2 (E_2 - A_{12}) z_2^2 z_0(x) - \\
& - \frac{2}{3} b_2 (E_2 - A_{12}) z_2^3 + \frac{4}{3} b_1 E_1 \Delta_1^3 - \frac{2}{3} b_2 E_2 \Delta_1^3 + \frac{2}{3} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^3 (E_2 + A_{12}) \} \frac{d^2 w_0}{dx^2} - \\
& - 2b_2 A_{22} \left( z_0^2(x) \frac{z_2^2}{2} - \frac{2}{3} z_2^3 z_0(x) + \frac{z_2^4}{4} - z_0^2(x) \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)^2}{2} - \frac{2}{3} (\Delta_1 + \Delta_2)^3 z_0 - \right. \\
& \left. - \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)^4}{4} \right) \left( \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
N = & (f_{1,1} z_0(x) + f_{1,2} z_2 z_0(x) + f_{1,3} z_2^2 + f_{1,4}) \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \\
& + (f_{1,5} z_0^2(x) z_2 + f_{1,6} z_0^2(x) + f_{1,5} z_0(x) z_2^2 + f_{1,7} z_0(x) + f_{1,8} z_2^2 + f_{1,9}) \left( \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 \quad (9)
\end{aligned}$$

$$M = (f_{2,1}z_0(x) + f_{2,2}z_2^2z_0(x) + f_{2,3}z_2^3 + f_{2,4}) \frac{d^2w_0}{dx^2} + (f_{2,5}z_0^2(x)z_2^2 + f_{2,6}z_2^3z_0(x) + f_{2,7}z_2^4 + f_{2,8}z_0^2(x) + f_{2,9}z_0(x) + f_{2,10}) \left( \frac{d^2w_0}{dx^2} \right)^2, \quad (10)$$

где постоянные определяются равенствами

$$\begin{aligned} f_{1,1} &= -2b_2E_2(\Delta_1 - \Delta_2) + 2b_2A_{12}(\Delta_1 + \Delta_2), & f_{1,2} &= -2b_2(E_2 - A_{12}), \\ f_{1,3} &= -b_2(A_{12} - E_2), & f_{1,4} &= -2b_1(E_1 - A_{12})\Delta_1^2 - b_2E_2(\Delta_1^2 + \Delta_2^2), \\ f_{1,5} &= -2b_2A_{22}, & f_{1,6} &= 2b_2A_{22}(\Delta_1 + \Delta_2), & f_{1,7} &= 2b_2A_{22}(\Delta_1 + \Delta_2)^2, \\ f_{1,8} &= \frac{2}{3}b_2A_{22}, & f_{1,9} &= \frac{2}{3}b_2A_{22}(\Delta_1 + \Delta_2)^3, \\ f_{2,1} &= -b_2(E_2 - A_{12})(\Delta_1 + \Delta_2)^2, & f_{2,2} &= b_2(E_2 - A_{12}), \\ f_{2,3} &= -\frac{2}{3}b_2(E_2 - A_{12}), & f_{2,4} &= \frac{4}{3}b_1E_1\Delta_1^3 - \frac{2}{3}b_2E_2\Delta_1^3 + \frac{2}{3}b_2(\Delta_1 + \Delta_2)^3(E_2 + A_{12}), \\ f_{2,5} &= -b_2A_{22}, & f_{2,6} &= \frac{4}{3}b_2A_{22}, & f_{2,7} &= -\frac{1}{2}b_2A_{22}, & f_{2,8} &= b_2A_{22}(\Delta_1 + \Delta_2)^2, \\ f_{2,9} &= \frac{4}{3}b_2A_{22}(\Delta_1 + \Delta_2)^3, & f_{2,10} &= \frac{1}{2}b_2A_{22}(\Delta_1 + \Delta_2)^4. \end{aligned}$$

Из соотношений для изгибающего момента

$$M = q \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right)$$

и равенства продольного усилия 0 получим систему

$$(f_{1,1}z_0(x) + f_{1,2}z_2z_0(x) + f_{1,3}z_2^2 + f_{1,4}) \frac{d^2w_0}{dx^2} + (f_{1,5}z_0^2(x)z_2 + f_{1,6}z_0^2(x) + f_{1,5}z_0(x)z_2^2 + f_{1,7}z_0(x) +$$

$$+ f_{1,8}z_2^2 + f_{1,9}) \left( \frac{d^2w_0}{dx^2} \right)^2 = 0, \quad (12)$$

$$(f_{2,1}z_0(x) + f_{2,2}z_2^2z_0(x) + f_{2,3}z_2^3 + f_{2,4}) \frac{d^2w_0}{dx^2} + (f_{2,5}z_0^2(x)z_2^2 + f_{2,6}z_2^3z_0(x) + f_{2,7}z_2^4 +$$

$$+ f_{2,8}z_0^2(x) + f_{2,9}z_0(x) + f_{2,10}) \left( \frac{d^2w_0}{dx^2} \right)^2 = q \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right). \quad (14)$$

Вторую производную прогиба можно получить из условия равенства деформации предельной упругой, тогда из (4) получим

$$\varepsilon_{02}^+ = (z_0(x) - z_2(x)) \frac{d^2w_0(x)}{dx^2}. \quad (15)$$

Из соотношений (12)-(15) получим

$$(f_{1,2} + \varepsilon_{02}^+ f_{1,5}) z_2(x) z_0^2(x) + (f_{1,3} - f_{1,2} + \varepsilon_{02}^+ f_{1,5}) z_2^2(x) z_0(x) - f_{1,3} z_2^3(x) - \quad (16)$$

$$- f_{1,1} z_0(x) z_2(x) + f_{1,8} \varepsilon_{02}^+ z_2^2(x) - f_{1,4} z_2(x) + (f_{1,4} + \varepsilon_{02}^+ f_{1,7}) z_0(x) + f_{1,9} \varepsilon_{02}^+ = 0,$$

$$(f_{2,7} (\varepsilon_{02}^+)^2 - f_{2,3} \varepsilon_{02}^+) z_2^4(x) + (f_{2,3} \varepsilon_{02}^+ - f_{2,2} \varepsilon_{02}^+ + f_{2,6} (\varepsilon_{02}^+)^2) z_2^3(x) z_0(x) + \quad (17)$$

$$(f_{2,2} \varepsilon_{02}^+ + f_{2,5} (\varepsilon_{02}^+)^2) z_2^2(x) z_0^2(x) + (f_{2,1} \varepsilon_{02}^+ + f_{2,8} (\varepsilon_{02}^+)^2) z_0^2(x) - f_{2,1} z_0(x) z_2(x) +$$

$$+ (f_{2,4} \varepsilon_{02}^+ + f_{2,9} \varepsilon_{02}^+) z_0(x) + f_{2,10} (\varepsilon_{02}^+)^2 -$$

$$- q \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right) (z_0^2(x) - 2z_0(x) z_2(x) + z_2^2(x)) = 0,$$

причем решения должны удовлетворять условию

$$-\Delta_1 \leq z_2(x) \leq -\Delta_1 - \Delta_2. \quad (18)$$

Для случая наличия в первом и втором слое неизвестных границ  $z_1(x)$  и  $z_2(x)$ , соответствующих случаю, рассмотренному в [5], соотношения между ними можно получить из равенств

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = -\frac{\varepsilon_{01}^+}{z_0(x) + z_1(x)}, \quad \frac{d^2 w_0}{dx^2} = -\frac{\varepsilon_{02}^+}{z_0(x) + z_2(x)},$$

откуда

$$z_2(x) = \frac{\varepsilon_{02}^+}{\varepsilon_{01}^+} (z_0(x) + z_1(x)) - z_0(x). \quad (19)$$

Далее, для данного случая решение идентично [5].

Для численного расчета данной задачи рассмотрим случай сечения №1 с параметрами

$$b_1 = 0,03, \quad b_2 = 0,04, \quad \Delta_1 = 0,06, \quad \Delta_2 = 0,04. \quad (20)$$

В качестве материалов стержня будем рассматривать наиболее распространенные в строительстве бетоны марок В10, В30, В50 с параметрами, приведенными в таблице 1.

№	Марка бетона	$E^+$	$\varepsilon_0^+, 10^{-2}$	$\varepsilon_*^+, 10^{-2}$	$A_{1i}$	$A_{2i}, 10^6$
1	В10	1232,92	0,005	0,015	1479,50	-4,93167
2	В30	2629,23	0,005	0,015	3155,08	-10,517
3	В50	3312,54	0,00375	0,015	3975,04	-13,250

Таблица 1. Физические параметры бетонов

Определим предельные нагрузки [5,6] с учетом и без учета совпадения нейтральной линии с осью стержня. В дальнейшем, для краткости, численные решения уравнений без учета совпадения нейтральной линии с осью стержня будем называть численными решениями, а решения, полученные с учетом совпадения нейтральной линии с осью стержня по аналитическим зависимостям, полученным в [5], будем называть аналитическими решениями.

Численно полученную нагрузку  $q = q_{1,2}$  соответствующую появлению нелинейной области во втором слое стержня в середине пролета, определим из уравнений (16)-(17) при  $x = 1/2$  и равенства

$$z_2 = -\Delta_1 - \Delta_2, \quad (21)$$

тогда получим

$$z_0 = 0, \quad q_{1,2} = -0,000482. \quad (22)$$

Полученное решение полностью соответствует аналитическому решению, так как фактически весь стержень деформируется упруго и все еще обладает физической симметрией и все слои стержня деформируются упруго.

Нагрузка, соответствующая появлению нелинейной области в первом слое стержня, при отсутствии указанной области во втором слое будет равна, при условии численного решения,

$$z_0 = 0, \quad q_{1,1} = -0,0008039, \quad (23)$$

а также совпадать с аналогичной нагрузкой, полученной аналитически. Соответственно, в данном случае будут также справедливы соотношения [5] для определения слоя, в котором начнется нелинейное деформирование стержня. Предельная упругая деформация с повышением нагрузки впервые будет возникать в первом слое стержня при параметрах, удовлетворяющих соотношению

$$\frac{\varepsilon_{01}^+}{\Delta_1} < \frac{\varepsilon_{02}^+}{\Delta_1 + \Delta_2}.$$

Так как в данном примере используются бетоны марок В10 и В30, имеющие одинаковые предельные упругие деформации, то при достижении в середине пролета границы  $z_2 = -\Delta_1$  при той же самой нагрузке  $q = q_{1,3}$  в середине пролета в первом слое возникает область нелинейного деформирования, т.е.  $z_1 = -\Delta_1$ .

Указанная предельная нагрузка в случае численного решения будет равна

$$z_0 = 0,00187, \quad q_{1,3} = -0,0007523. \quad (24)$$

В случае аналитического решения указанная нагрузка  $q_{1,3} = -0,0007755$ , что отличается от численного решения (24) на 3%.

Таким образом, при  $|q_{1,2}| < |q| < |q_{1,3}|$  имеем деформирование, соответствующее рисунку 4б в работе [5].

Для примера возьмем нагрузку  $q = -0,0006$ . Значение границы области нелинейного деформирования для численного и аналитического решений одинаково и равно  $x_2 = 0,2786$ . График указанных границ изображен на рис. 2, соответствующее положение нейтральной линии изображено на рис. 3.

При  $q > q_{1,3}$  будут в середине пролета стержня сразу две области нелинейного деформирования, и при этом нагрузка не может быть больше нагрузки, соответствующей достижению деформацией значения предельной предразрушения для соответствующих слоев.

Нагрузка, при которой в середине пролета стержня весь второй слой будет в области нелинейного деформирования, а деформация достигает значения предельной предразрушения на верхней границе первого слоя, будет равна для численного решения

$$z_0 = 0,01811, \quad q_{2,1} = -0,0012577. \quad (25)$$

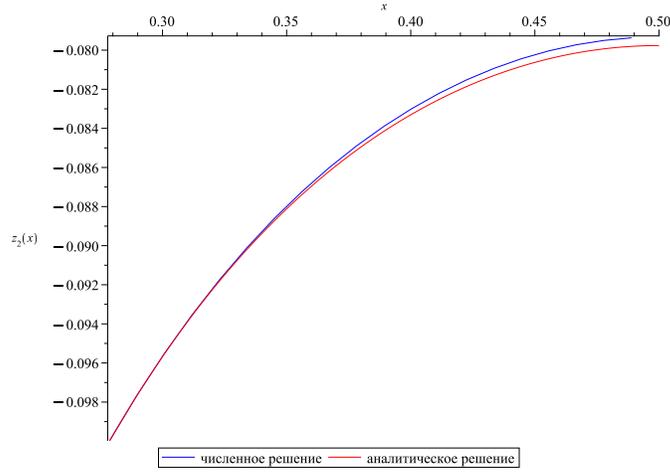


Рис. 2. Расположение границы  $z_2(x)$  на участке  $[x_2 \dots 0, 5]$  для стержня с сечением № 1 при нагрузке  $q = -0,0006$

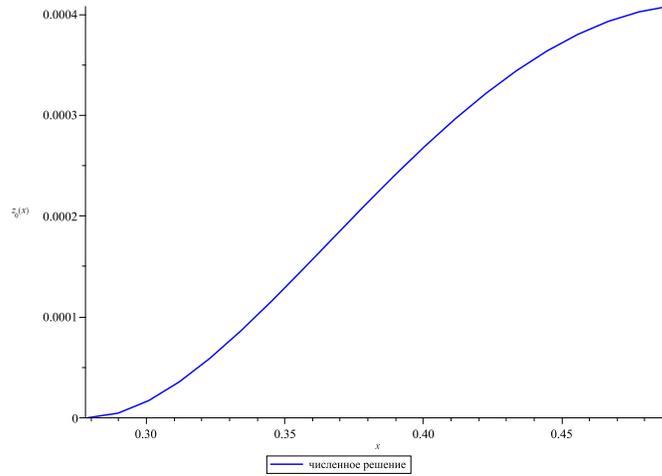


Рис. 3. Расположение нейтральной линии  $z_0(x)$  на участке  $[x_2 \dots 0, 5]$  при нагрузке  $q = -0,0006$

Как видно из соотношений (25), нейтральная линия достигает почти трети первого слоя и, по сравнению с аналитическим решением, где при аналогичных параметрах поперечного сечения было получено  $q_{2,1} = -0,001689$ , меньше на 25%.

Нагрузка, при которой деформация достигнет предельного значения предразрушения во втором слое, в случае численного решения будет равна

$$z_0 = -0,002562, \quad q_{2,2} = -0,001554. \quad (26)$$

Соответственно, максимальная нагрузка, которую способен выдержать стержень, будет равна в случае численного решения  $q_{2,1} = -0,0012577$ .

В качестве примера рассмотрим нагрузку  $q = -0,0009$ . Тогда для данной нагрузки имеем случай, изображенный на рис. 4а и указанный в работе [5]. Значение границ областей зон деформирования для данной нагрузки имеет вид в случае численного решения

$$x_2 = -0,1594, \quad x_{22} = 0,2974. \quad (27)$$

В случае аналитического решения значения  $x_2 = 0,1594$  и  $x_{22} = 0,314$ , соответственно, первая полностью совпадает, а вторая оказалась меньше на 5%.

График границы  $z_2(x)$  на отрезке  $[x_2, x_{22}]$ , полученном численным и аналитическим методами, приведен на рис. 4, положение нейтральной линии на данном отрезке изображено на рис. 5.

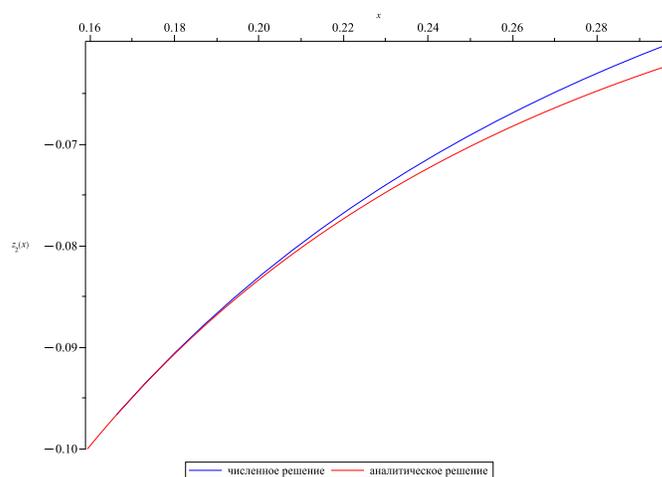


Рис. 4. Расположение границы  $z_2(x)$  на участке  $[x_2...x_{22}]$  для стержня с сечением № 1 при нагрузке  $q = -0,0009$

График границы  $z_1(x)$  на отрезке  $[x_2, 1/2]$ , полученном численным и аналитическим методами, приведен на рис. 6, положение нейтральной линии на данном отрезке изображено на рис. 7.

Как можно видеть из полученных решений, при нагрузках, существенно меньших нагрузок предразрушения, учет реального положения нейтральной линии не сильно влияет на точность расчетов. Погрешность будет расти при нагрузках, близких к предельным предразрушения, так как существенная часть стержня будет находиться в области нелинейного-упругого деформирования.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Несущая способность многослойных бетонных стержней. Чебоксары: Изд-во Чуваш-го ун-та, 2022. 180 с.
- [2] Немировский Ю. В., Болтаев А. И. Диаграммы деформирования бетонов и железобетонов // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2015. № 6. с. 125–129.
- [3] Мищенко А. В., Немировский Ю. В., Вохмянин И. Т. Рациональное и оптимальное проектирование слоистых стержневых систем. Новосибирск: НГАСУ, 2004. 488 с.

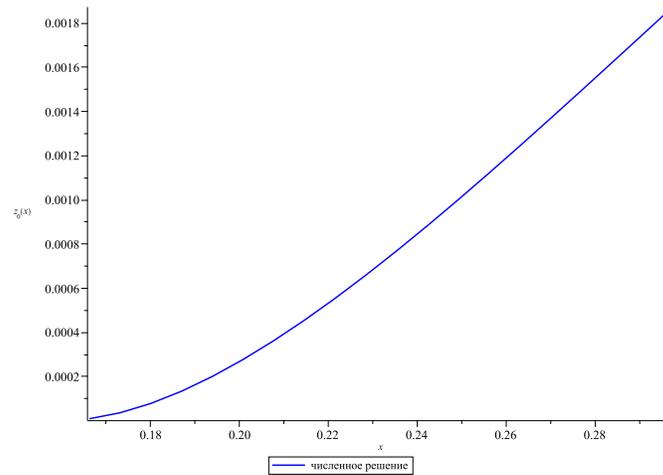


Рис. 5. Расположение нейтральной линии  $z_0(x)$  на участке  $[x_2...x_{22}]$  при нагрузке  $q = -0,0009$

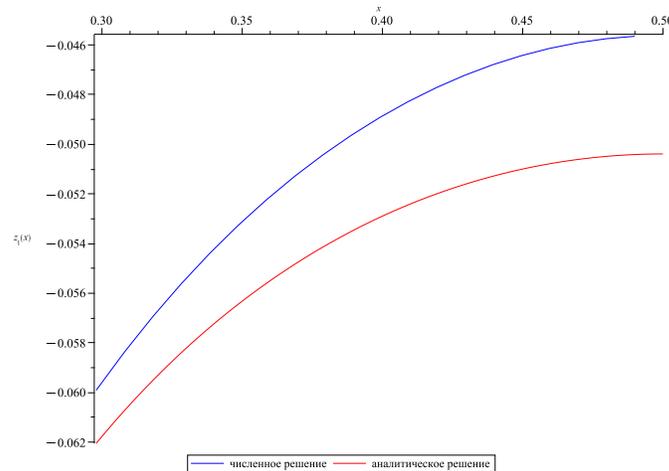


Рис. 6. Расположение границы  $z_1(x)$  на участке  $[x_{22}...0.5]$  для стержня с сечением № 1 при нагрузке  $q = -0,0009$

- [4] Немировский Ю. В., Батурин А. А. Метод расчета деформативности и прочности одноставровых и двуставровых железобетонных стержней // Известия вузов. Строительство. 2015. № 10. С. 82–93.
- [5] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Определение предельных нагрузок при поперечном изгибе многослойных предельно-упругих бетонных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 1(55). С. 86–101. DOI: 10.37972/chgru.2023.55.1.0010.
- [6] Немировский Ю. В. Допредельное деформирование гибридных армированных бетонных конструкций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3(37). С. 26–37.

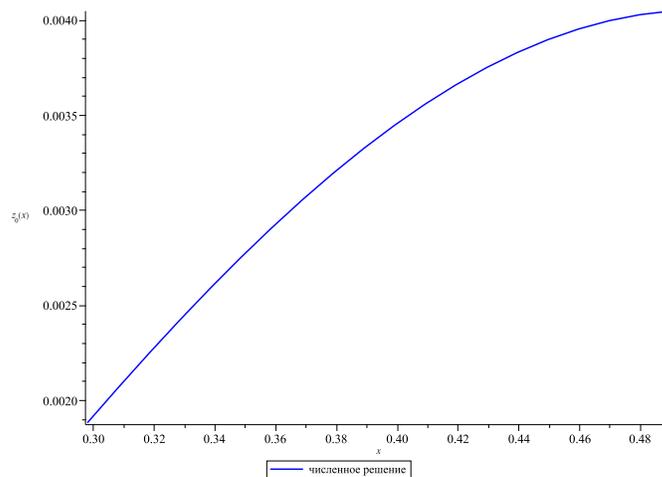


Рис. 7. Расположение нейтральной линии  $z_0(x)$  на участке  $[x_{22} \dots 0.5]$  при нагрузке  $q = -0,0009$

Yu. V. Nemirovskii<sup>1,2</sup>, S. V. Tikhonov<sup>3</sup>

**ON DETERMINING THE POSITION OF THE NEUTRAL LINE IN THE CASE OF EXTREMELY ELASTIC BENDING OF MULTILAYER PHYSICALLY NONLINEAR CONCRETE RODS**

<sup>1</sup>*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia*

<sup>2</sup>*Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia*

<sup>3</sup>*I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** This paper considers the problem of bending a multilayer rod under transverse loads in the presence of zones of elastic and nonlinear-inelastic deformation, and relations are obtained to determine the interface between the elastic and nonlinear-inelastic deformation regions of the rod. The resulting numerical calculations for cases of coincidence and non-coincidence of the neutral line with the axis of the rod. Numerical calculations of the limiting loads are presented: the first (the deformation reaches the limiting inelastic value) and the second (the deformation reaches the value of the pre-fracture strain).

**Keywords:** concrete rods, analytical solutions, physical nonlinearity, elasticity, transverse loads, neutral line

---

*Nemirovskii Yuri Vladimirovich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia, Professor, Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia.  
*Tikhonov Sergey Vladimirovich*, PHD, Assoc. Prof., I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

**REFERENCES**

- [1] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Load-bearing capacity of multilayer concrete bars. Cheboksary: Publishing house of Chuvash University, 2022. 180 p.
- [2] Nemirovsky Y. V., Boltaev A. I. Diagrams of deformation of concrete and reinforced concrete // Bulletin of Belgorod State Technological University named after. V.G. Shukhova. 2015. no. 6. p. 125–129.
- [3] Mishchenko A. V., Nemirovsky Y. V., Vokhmyanin I. T. Rational and optimal design of layered rod systems. Novosibirsk: NSASU, 2004. 488 p.
- [4] Nemirovsky Y. V., Baturin A. A. Method for calculating the deformability and strength of single-T and I-beam reinforced concrete rods // News of universities. Construction. 2015. no. 10. P. 82–93.
- [5] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Determination of ultimate loads during transverse bending of multilayer extremely elastic concrete rods // Vestnik of the Chuvash State Pedagogical University named after. I. Ya. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2023. no. 1(55). P. 86–101. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.0010.
- [6] Nemirovsky Y. V. Ultimate deformation of hybrid reinforced concrete structures // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. I. Ya. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2018. no. 3(37). P. 26–37.

В. И. Гультияев, А. Н. Булгаков

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ НА АВТОМАТИЗИРОВАННОМ ИСПЫТАТЕЛЬНОМ КОМПЛЕКСЕ СН-ЭВМ

*Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия*

**Аннотация.** В статье дано описание испытательного комплекса и методики проведения экспериментов для изучения сложного нагружения. Приведены некоторые вопросы исследования упругопластического деформирования материалов на автоматизированной комплексе СН-ЭВМ в лаборатории механических испытаний кафедры Сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета

**Ключевые слова:** упругопластические процессы, пластичность, испытательный комплекс СН-ЭВМ, упругость.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.006

УДК: 539.374

**1. Введение** В процессе эксплуатации некоторые элементы конструкций подвергаются сложному нагружению, при этом напряжения локально могут превышать предел текучести. Рост сложности форм современных конструкций и увеличение интенсивности нагрузок также приводят к неоднородности напряженно-деформированного состояния и появлению областей пластичности. Следовательно, практически важной задачей экспериментальной механики деформируемых твердых тел является исследование механических свойств конструкционных материалов и разработка математических моделей достоверно описывавших закономерности сложного неупругого поведения.

---

© Гультияев В. И., Булгаков А. Н., 2023

*Гультияев Вадим Иванович*

**e-mail:** vig0@mail.ru, доктор технических наук, заведующий кафедрой автомобильных дорог, оснований и фундаментов, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия,

*Булгаков Александр Николаевич*

**e-mail:** elstatik@bk.ru, ассистент кафедры автомобильных дорог, оснований и фундаментов, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Поступила 20.08.2023

**2. Постановка задачи** Современная механика материалов не может успешно развиваться без экспериментальной базы. Первые машины на сложное нагружение были созданы в середине XX века в Московском Государственном Университете, институте механики РАН, институте механики НАН, ЦНИИМАШ и ряде других научно-исследовательских центров. Разработка автоматизированного экспериментального комплекса [1], который позволил бы обосновать физическую достоверность теории процессов А. А. Ильюшина и проверить практически все частные теории пластичности для различных классов траекторий нагружения и деформирования, на кафедре Сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского Государственного технического университета началась в конце 70-х годов XX века. Руководил проектом Зубчанинов Владимир Георгиевич, а Алексей Антонович Ильюшин лично участвовал в испытаниях, детально анализировал работу комплекса и полученные результаты. Автоматизированный экспериментальный комплекс состоит из механической части, гидроприводов осевого усилия и внутреннего давления, автономного блока управления и компьютера. На рисунке 1 представлен общий вид механической части СН-ЭВМ, выполненной на базе универсальной испытательной машины ЦДМУ-30. В конструкцию был внесен ряд изменений, которые позволили полностью автоматизировать процесс испытаний [2]. Более подробно электромеханическая часть описана в [3].

Автоматизированный комплекс СН-ЭВМ функционирует следующим образом: оператор загружает программу с внешнего носителя или вносит изменения в существующую программу с клавиатуры, после чего эта информация сохраняется в оперативной памяти компьютера (рис.2). Программа эксперимента содержит информацию о режиме управления, количестве участков траектории нагружения или деформирования и их типе. Для написания программ используется интегрированная среда разработки и компилятор Microsoft QuickBASIC (QB) для объектно-ориентированного языка Basic.

Следующим этапом является настройка параметров эксперимента на блоке управления (рис.2, 1). Данный элемент комплекса позволяет устанавливать скорость нагружения либо деформирования, изменять дискретность регистрации информации с датчиков механической части, регулировать механизмы предотвращения обратного хода приводов и режимы стабилизации нагрузок. После проверки работоспособности всех систем дается команда о начале эксперимента.

В процессе эксперимента на блок измерительных преобразователей сигналов поступают различные по физической природе сигналы датчиков (таблица 1), которые преобразуются в унифицированные электрические уровни напряжения и передаются в компьютер.

Примечание: погрешность измерения, в основном, возникает вследствие линейной аппроксимации собственных характеристик тензометра.

Вся информация о реализуемом процессе в режиме реального времени отображается на мониторе компьютера (рис. 2, 3). Полученная информация автоматически записывается в постоянную память компьютера в виде файла данных с заданными оператором временными интервалами.

**3. Методы решения** Методика проведения экспериментальных исследований и обработка их результатов базируется на векторном представлении напряжений и деформаций по А.А. Ильюшину [4].

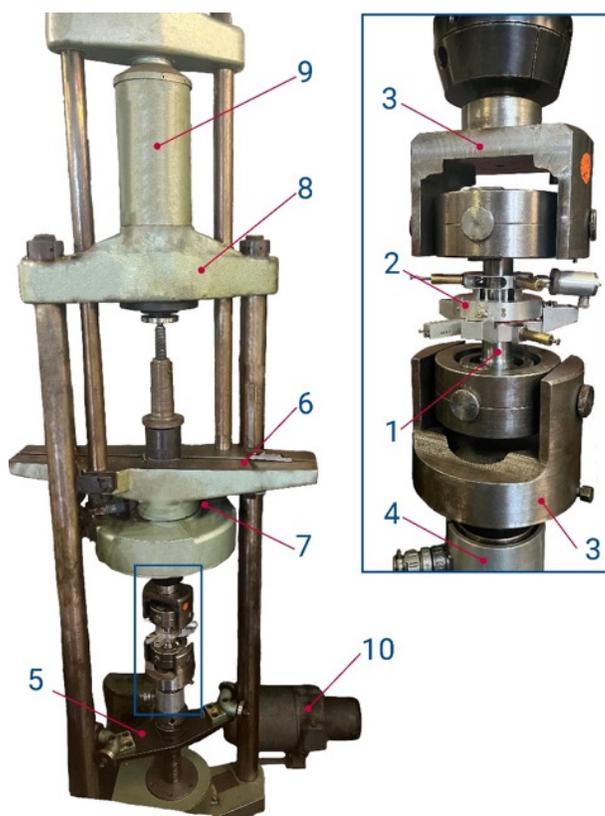


Рис. 1. Общий вид механической части испытательной машины СН-ЭВМ. 1 – образец для испытания; 2 – дифференциальный тензометр; 3 – захватные приспособления; 4 – двухкомпонентный силоизмеритель; 5 – нижняя траверса; 6 – верхняя траверса; 7 – двигатель привода кручения; 8 – неподвижная траверса гидроцилиндра; 9 – гидроцилиндр; 10 – двигатель механического привода осевого усилия.

Эксперименты проводят на тонкостенных трубчатых образцах из металлов и сплавов [5], с толщиной стенки 1 мм, диаметром срединной поверхности 31 мм и длиной рабочей части 110 мм (рис. 3). Отношение радиуса образца к толщине стенки 15. Испытательные образцы для серии экспериментов изготавливаются из одного прутка длиной 6м. Форма и размеры испытательных образцов показаны на рис.3

Для измерения осевых, окружных и сдвиговых перемещений оболочки применяется экстензометр (рис.4, 1) [6]. Для измерения поперечных деформаций применяется специальный датчик (рис.4., 2). Основная часть прибора состоит из двух колец в каждом из которых находится по три стальных втулки расположенный под углом 120°. Внутри втулок устанавливаются иглы, которые перемещаются без зазоров и люфтов. На наружной поверхности втулок сделана нарезка, на которую навинчивается колпачок. В полости каждой иглы размещается пружинка, которая, прижимает иглу к образцу (рис.4, 3) при закручивается колпачка. За счет этого достигается надежное крепление колец на образце и незначительное надавливание игл при увеличении диаметра образца. База прибора составляет 50+0,1 мм.

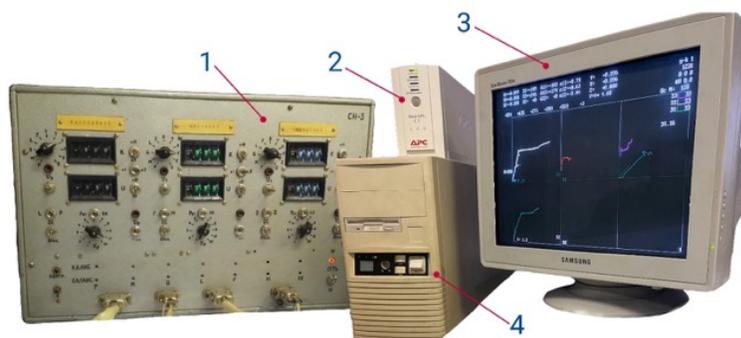


Рис. 2. Автономный блок управления и компьютер. 1 – блок управления; 2 – источник бесперебойного питания; 3 – монитор; 4 – системный блок

Регистрирующее устройство	Регистрируемый параметр	Диапазон работы	Погрешность измерения, не более
Двухкомпонентный силоизмеритель	Осевая нагрузка	60 кН	$\pm 0,12$ кН
	Крутящий момент	0,5 кН·м	$\pm 3$ нм
Датчик давления	Внутреннее давление	30 МПа	$\pm 0,2$ МПа
Дифференциальный тензометр	Осевое перемещение	2 мм	$\pm 6 \cdot 10^{-3}$ мм
	Угол поворота образца	0,25 рад	$\pm 7 \cdot 10^{-4}$ рад
	Радиальное перемещение	$\pm 0,6$ мм	$\pm 3 \cdot 10^{-3}$ мм

Таблица 1. Параметры автоматизированного комплекса СН-ЭВМ

Для предотвращения смещения и во избежание возможного перекоса колец при монтаже прибора на образец используется специальное приспособление (рис.4, 4). Оно представляет собой ступку, в которую вертикально устанавливается образец. Между образцом и стенками ступки устанавливаются специальные фиксирующие детали – сухари (рис.4, 5), внутренний диаметр которых выдержан по наружному диаметру образца. Верхние и нижние сухари имеют выступы, на которые, в период монтажа, опираются кольца с иглами. Высота колец подобрана таким образом, что, при отсутствии зазора между ними, оси игл лежат в параллельных плоскостях, отстоящих

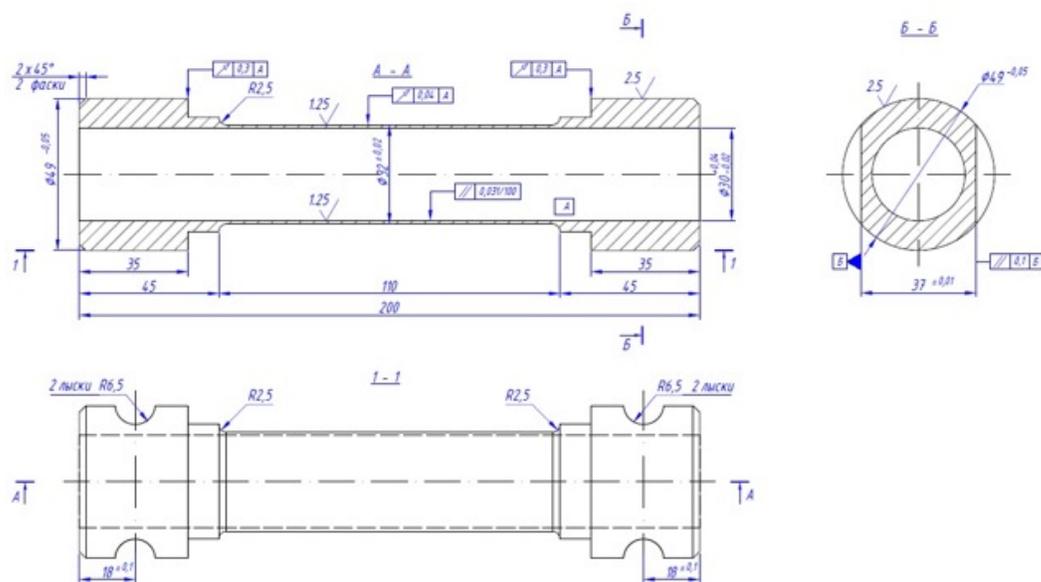


Рис. 3. Образец для испытания

друг от друга на расстоянии 50 мм. После того как иглы должным образом поджаты к образцу, сначала снимаются верхние сухари, а за ними нижние. Образец с прибором фиксируется на испытательной машине захватными приспособлениями (рис.1, 3). Удлинение образца измеряется тензорезисторами по взаимному смещению колец. Угловые деформации измеряются тензорезисторами наклеенными на упругий элемент, один конец которого жестко закреплен, другой может скользить по спицали Архимеда.

Как показывают многочисленные опыты, описанный прибор надежно определяет деформации как упругой, так и пластической областях – малых и средних деформаций. Благодаря наличию двух индикаторов, небольшое внецентренное растяжение или сжатие не искажало правильность замера продольной деформации. Прибор, определявший изменение наружного диаметра по мере нагружения образца, показан на рисунке (рис.4, 2).

Перед каждым экспериментом производятся обмерные работы. Контроль геометрических параметров образцов производится при помощи микрометров и специальных приспособления для измерения толщины стенки, шероховатость поверхности устанавливают визуально.

**4. Основные результаты** Перед выполнением основных программ, исследования закономерностей упругопластического деформирования материалов при сложном нагружении, проводится проверка начальной изотропии материала образцов. Она заключается в проведении базовых экспериментов и сопоставлении диаграмм деформирования при простых процессах нагружения: растяжении, сжатии, кручении, внутреннем (внешнем) давлении и пропорциональных процессах нагружения. Если для

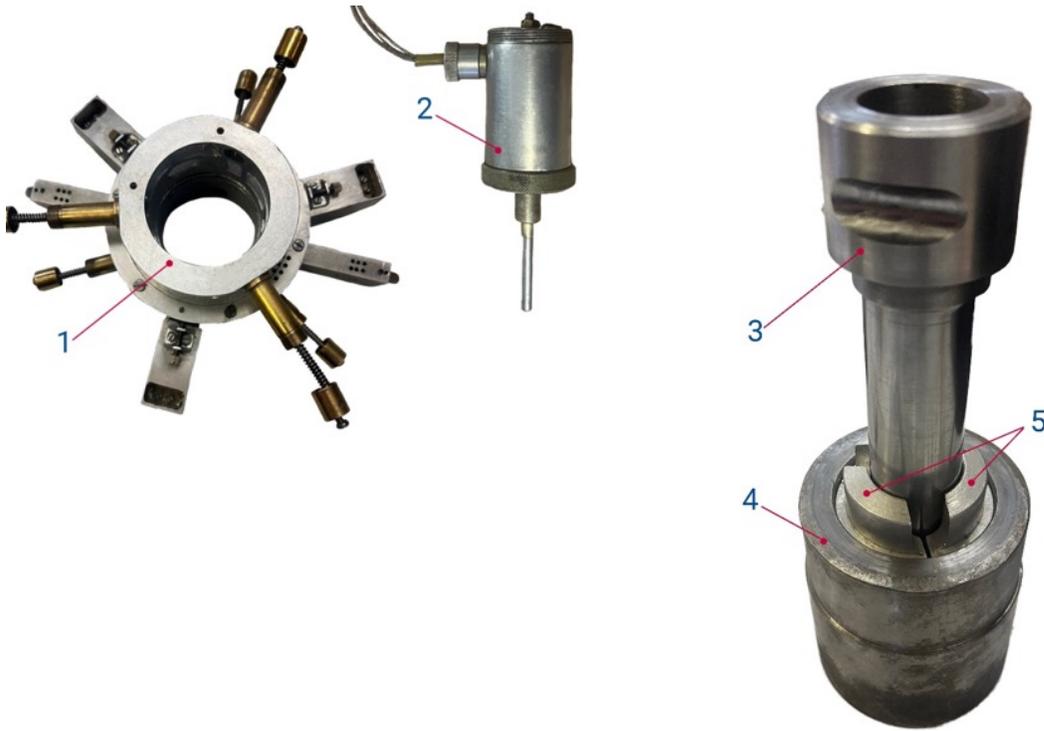


Рис. 4. Дифференциальный тензомер (1) и датчик поперечных деформаций (2)

данных траекторий разброс по напряжениям (различие величин модуля вектора напряжений) не превышает 5-10% (на уровне значения модуля вектора деформаций порядка  $\varepsilon \approx 2\%$ ), полагаем, что материал образцов является квазиизотропным, что позволяет использовать в расчетах процессов сложного нагружения и деформирования материалов общие определяющие соотношения теории упругопластических процессов.

Были проведены следующие простые нагружения: образец 1 подвергался растяжению, образец 2 – кручению, образец 3 – сжатию, образец 4 пропорциональному растяжению с кручением, образец 5 – пропорциональному сжатию с кручением. Программа испытаний реализовывалась в векторном подпространстве деформаций  $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$  (рис. 5, а). Для каждого нагружения использовался свой образец. Соответствующий ей отклик приведен в векторном подпространстве девиатора напряжений  $S_1 - S_3$  (рис. 5, б).

На рисунке 6 показаны образцы после испытаний.

Для расчета компонент тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) и тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) использовались следующие формулы:

$$\sigma_{11} = \frac{P}{2\pi R h}; \sigma_{22} = p \frac{R}{h}; \sigma_{12} = \frac{M_{кр}}{2\pi R^2 h}; \sigma_{33} \approx 0; \sigma_{13} = \sigma_{23} \approx 0$$

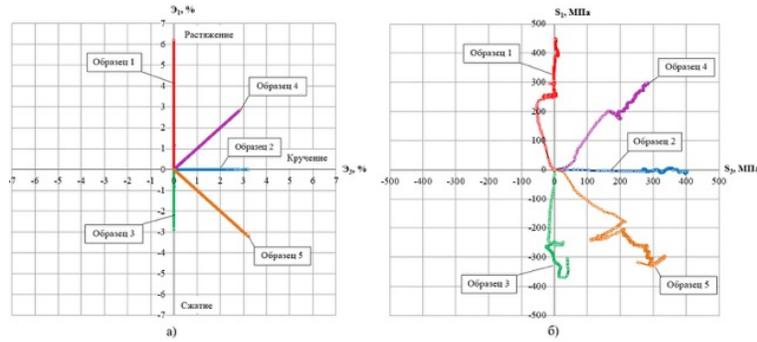


Рис. 5. Программа, а) и отклик на программу б). (1 – растяжение, 2 – кручение, 3 – сжатие, 4 – пропорциональное растяжение с кручением, образец 5 – пропорциональное сжатие с кручением).



Рис. 6. Образцы после испытаний (1 – растяжение, 2 – кручение, 3 – сжатие, 4 – пропорциональное растяжение с кручением, образец 5 – пропорциональному сжатию с кручением).

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22}); \varepsilon_{11} = \frac{\Delta l}{l}; \varepsilon_{22} = \frac{\Delta R}{R}$$

$$\varepsilon_{12} = \varphi \frac{R}{2l}; \varepsilon_{33} = -(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \frac{\sigma_0}{3K}; \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{3K}$$

где  $P$  – осевая нагрузка,  $p$  – внутреннее давление,  $M_{кр}$  – крутящий момент,  $K = E/[3(1 - 2\mu)]$  – объемный модуль упругости Эйлера–Юнга,  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $\Delta l$  – абсолютное удлинение рабочей части образца,  $\varphi$  – угол взаимного поворота сечений,  $\Delta R$  – изменение радиуса срединной поверхности образца,  $\sigma_0$  – среднее напряжение,  $\varepsilon_0$  – средняя деформация.

Напряжённое состояние образцов – плоское, связь между модулями шаровых тензоров  $\sigma_0$  и  $\varepsilon_0$  принята в виде зависимости:

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0$$

Из диаграммы растяжения были найдены модуль деформации  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа; удвоенный модуль сдвига  $2G = 1,54 \cdot 10^5$  МПа; коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ . С появлением пластических деформаций коэффициент  $\mu$  быстро возрастал и приближался к значению  $\mu_p = 0,5$  уже при  $\Theta \approx 1\%$ , что позволяет в расчетах при обработке экспериментальных данных использовать условие несжимаемости материала. Предполагая, что материал несжимаем ( $K \rightarrow \infty$ ) [7] компоненты тензора-девиатора напряжений и деформаций определялись по формулам:

$$\begin{cases} S_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left( \sigma_{11} - \frac{\sigma_{22}}{2} \right); S_2 = \frac{\sigma_{22}}{\sqrt{2}} = S_3 = \sqrt{2} \cdot \sigma_{12}; S_4 = S_5 = 0 \\ \Theta_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \varepsilon_{11}; \Theta_2 = \sqrt{2} \cdot \left( \varepsilon_{22} + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{11} \right); \Theta_3 = \sqrt{2} \cdot \varepsilon_{12}; \Theta_4 = \Theta_5 = 0 \end{cases}$$

В таблице 2 приведены некоторые численные значения, полученные в ходе эксперимента на растяжение.

№	$\sigma$ , МПа	$\Theta$ , %	S, %	Time	$\Theta_1$ , %	$S_1$ , МПа	$\varepsilon_{11}$ , %	$\sigma_{11}$ МПа
1	0,00	0,000	0,00	0	0,00	0,00	0,00	0,00
9	82,76	0,054	0,12	334	0,05	78,25	0,04	95,83
19	160,59	0,105	0,23	418	0,10	153,76	0,08	188,55
34	241,94	0,169	0,37	538	0,16	237,28	0,13	290,60
41	257,41	0,198	0,48	594	0,20	255,57	0,16	313,00
66	256,81	0,299	0,76	794	0,30	256,07	0,24	313,63
84	257,22	0,368	0,94	938	0,37	257,09	0,30	314,87
121	257,41	0,521	1,25	1234	0,51	257,41	0,42	315,49
138	256,65	0,590	1,36	1370	0,58	256,58	0,47	314,25
158	257,94	0,685	1,58	1530	0,67	257,92	0,54	316,12
200	270,30	0,873	1,98	1866	0,84	270,30	0,68	331,05
232	280,28	1,013	2,22	2122	0,96	280,27	0,78	343,50
302	300,79	1,328	2,89	2682	1,24	300,79	1,01	368,39
343	309,94	1,519	3,25	3010	1,41	309,93	1,15	379,59
385	320,61	1,707	3,63	3346	1,57	320,60	1,28	392,66
487	340,42	2,179	4,51	4162	1,98	340,42	1,62	416,92
593	360,23	2,690	5,47	5014	2,43	360,23	1,98	441,19
667	380,05	3,366	6,38	5606	3,01	380,05	2,46	465,46
716	400,51	4,064	7,21	6002	3,64	400,37	2,97	490,35
767	420,71	4,800	8,12	6410	4,45	420,69	3,64	515,24
836	440,01	5,857	9,34	6962	5,56	440,00	4,54	538,89

Таблица 2. Экспериментальные данные

Испытания по типу центрального веера являются базовыми и выполняться для каждой партии образцов с целью определения начальной изотропии или анизотропию

исследуемого материала. По результатам испытания выполняют построение диаграмм и оценивают точность выполнения постулата изотропии при простых нагружениях [7]. На рисунке 7 представлена общая диаграмма прослеживания процесса деформирования, на рисунке 8 график зависимости  $\sigma - \varepsilon$ .

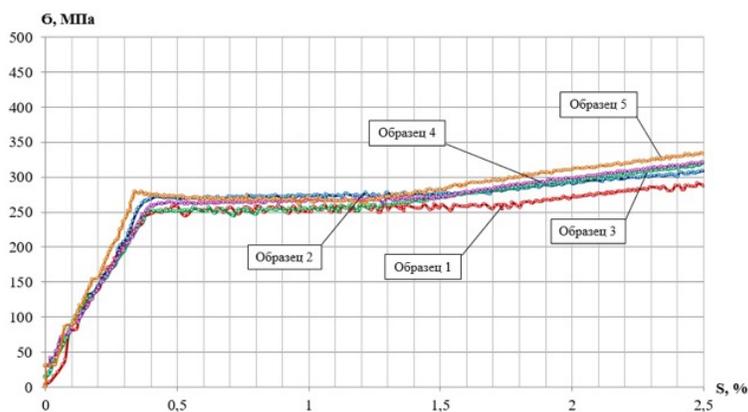


Рис. 7. Диаграммы материала

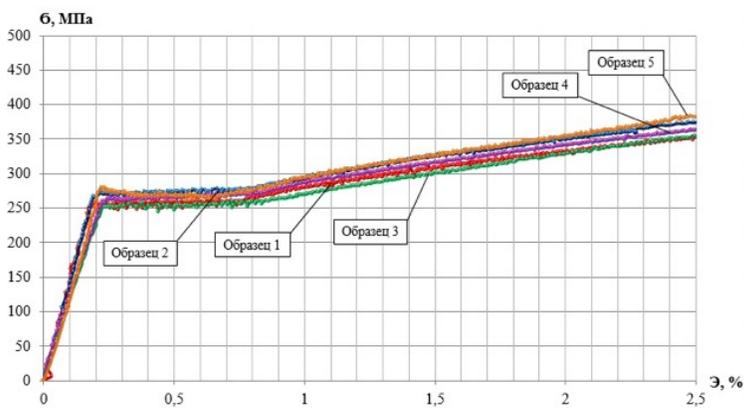


Рис. 8. Диаграммы деформирования

**5. Вывод** Испытания по типу центрального веера позволяют установить начальную анизотропию или изотропию путем построения диаграмм деформирования при растяжении-сжатии, кручении, внутреннем давлении и пропорциональном нагружении, определить модуль упругости, коэффициент Пуассона, предел текучести, оценить точность выполнения постулата изотропии при простых нагружениях, построить единую диаграмму упрочнения материала  $\sigma = \Phi(s)$ . Базовые этапы являются базисом дальнейших экспериментальных исследований. Следующим этапом является сравнение экспериментальных данных с результатами численных расчетов [8], [9], [10], [11],

[12], [13], [14], [15], [16], [17]. В результате такой верификации математических моделей теории упругопластических процессов делаются выводы о достоверности аппроксимаций при моделировании сложного упругопластического деформирования для рассматриваемого класса траекторий деформирования.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Патент на полезную модель RU 7202 U1, 16.07.1998. Заявка № 97108023/20 от 20.05.1997 Зубчанинов В. Г., Акимов А. В., Охлопков Н. Л. Автоматизированный комплекс для исследования упруговязкопластических свойств материалов при сложном нагружении.
- [2] Зубчанинов В. Г., Охлопков Н. Л., Гараников В. В. Экспериментальная пластичность: Монография. Книга 1. Процессы сложного деформирования. Тверь: ТГТУ, 2003. 172 с.
- [3] Саврасов И.А. Электромеханическая часть автоматизированного расчетно-испытательного комплекса сн-эвм // Вестник Тверского государственного технического университета. Серия: Строительство. Электротехника и химические технологии. 2022. № 1 (13). С. 56–60.
- [4] Гулятьев В. И., Зубчанинов В. Г., Саврасов И. А., Алексеев А. А. Методика экспериментального исследования пластичности поликристаллических материалов на испытательном комплексе сн-эвм // В сборнике: проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела. Материалы IX Международного научного симпозиума, посвященного 90-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники РФ профессора В.Г. Зубчанинова.
- [5] Саврасов И. А. Образцы для испытаний на автоматизированном испытательном комплексе сн-эвм: химический анализ, средства измерения и материалы // Вестник Тверского государственного технического университета. Серия: Строительство. Электротехника и химические технологии. 2021. № 1 (9). С. 86–90.
- [6] Гараников В. В., Зубчанинов В. Г., Охлопков Н. Л. Устройство для измерения деформаций при сложном нагружении Патент на полезную модель RU 13092 U1, 20.03.2000. Заявка № 99120485/20 от 27.09.1999.
- [7] Зубчанинов В. Г. Механика процессов пластических сред. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 352 с. ISBN 978-5-9221-1235-2.
- [8] Зубчанинов В. Г., Гулятьев В. И., Двужилов А. С. Исследование латуни л63 по гладкой криволинейной траектории типа “веер смещенных окружностей” // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 1 (55). С. 26–32. DOI: 10.37972/chgrpu.2023.55.1.004
- [9] Зубчанинов В. Г., Гулятьев В. И., Алексеев А. А., Двужилов А. С. Экспериментальные исследования сложного нагружения латуни л63 на двузвенных ломаных траекториях типа “смещенный веер” // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 1 (55). С. 18–25. DOI: 10.37972/chgrpu.2023.55.1.003
- [10] Зубчанинов В. Г., Гулятьев В. И., Алексеев А. А., Двужилов А.С. Экспериментальное исследование латуни л63 при сложном нагружении по двузвенным ломаным // Авиационные двигатели. 2023. № 1 (18). С. 99–103.
- [11] Алексеев А. А., Гулятьев В. И., Зубчанинов В. Г. Численный расчет упругопластического деформирования конструкционной стали по траектории типа архимедова спираль // В книге: Тезисы докладов 55-й Международной научно-технической конференции преподавателей и студентов. Тезисы докладов. Витебск, 2022. С. 245–246.
- [12] Саврасов И. А., Гулятьев В. И., Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А. Проверка постулата изотропии в экспериментах по ортогональным траекториям деформирования в виде полукружностей // В книге: Тезисы докладов 55-й Международной научно-технической конференции преподавателей и студентов. Тезисы докладов. Витебск, 2022. С. 246–247.
- [13] Гулятьев В. И., Саврасов И. А., Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А. Экспериментальное исследование стали 45 по траектории деформирования типа «змейка» // В книге: Тезисы докладов 55-й Международной научно-технической конференции преподавателей и студентов. Тезисы докладов. Витебск, 2022. С. 247–248.

- [14] Гультаев В. И., Алексеев А. А., Саврасов И. А., Гараников В. В. Экспериментальная проверка постулата изотропии при деформировании стали 45 по ортогональным криволинейным траекториям постоянной кривизны // Вестник Чувашиского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 1 (47). С. 86–94. DOI: 10.37972/chgru.2021.1.47.008
- [15] Черемных С. В. Теоретико-экспериментальное моделирование деформирования цилиндрической оболочки из стали 45 при сложном нагружении // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 2. С. 150–160.
- [16] Субботин С. Л., Алексеев А. А. Реализация метода СН-ЭВМ в расчетах упругопластических процессов на винтовых траекториях деформирования постоянной кривизны // Вестник Чувашиского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 3 (53). С. 20–26. DOI: 10.37972/chgru.2022.53.3.003
- [17] Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Гультаев В. И. Математическое моделирование процессов сложного нагружения стали по многозвенным ломаными траекториями деформирования // В сборнике: Математическое моделирование и экспериментальная механика деформируемого твердого тела. Межвузовский сборник научных трудов. Под редакцией В.Г. Зубчанинова, А.А. Алексеева. Тверь, 2020. С. 42–47.

*V. I. Gultyayev, A. N. Bulgakov*

**EXPERIMENTAL STUDY OF ELASTOPLASTIC DEFORMATION  
STRUCTURAL MATERIALS ON AN AUTOMATED TESTING COMPLEX  
SN-EVM**

*Tver State Technical University, Tver, Russia*

**Abstract.** The article provides a description of the testing complex and experimental techniques for studying complex loading. Some questions of the study of elastoplastic deformation of materials on an automated SN-EVM complex in the mechanical testing laboratory of the Department of Strength of Materials, Theory of Elasticity and Plasticity of Tver State Technical University are presented.

**Keywords:** elastoplastic processes, plasticity, SN-EVM testing complex, elasticity.

**REFERENCES**

- [1] Patent for utility model RU 7202 U1, 07/16/1998. Application No. 97108023/20 dated May 20, 1997 Zubchaninov V. G., Akimov A. V., Okhlopkov N. L. Automated complex for studying the elastic-viscoplastic properties of materials under complex loading.
- [2] Zubchaninov V. G., Okhlopkov N. L., Garanikov V. V. Experimental plasticity: Monograph. Book 1. Processes of complex deformation. Tver: TSTU, 2003. 172 p.
- [3] Savrasov I.A. Electromechanical part of the automated calculation and testing complex of the computer // Bulletin of the Tver State Technical University. Series: Construction. Electrical engineering and chemical technology. 2022. No. 1 (13). pp. 56–60.
- [4] Gultyayev V. I., Zubchaninov V. G., Savrasov I. A., Alekseev A. A. Methodology for experimental study of the plasticity of polycrystalline materials on a test complex of a low-voltage computer // In the collection: problems of strength, plasticity and stability in the mechanics of deformable solids. Materials of the IX International Scientific Symposium dedicated to the 90th anniversary of the

---

*Gultyayev Vadim Ivanovich*, Doctor of Technical Sciences, Head of the Department, Tver State Technical University, Tver, Russia,  
*Bulgakov Alexander Nikolaevich*, Assistant, Tver State Technical University, Tver, Russia.

- birth of the Honored Worker of Science and Technology of the Russian Federation, Professor V.G. Zubchaninova.
- [5] Savrasov I. A. Samples for testing on the automated testing complex of the SN-computer: chemical analysis, measuring instruments and materials // Bulletin of the Tver State Technical University. Series: Construction. Electrical engineering and chemical technology. 2021. No. 1 (9). pp. 86–90.
  - [6] Garanikov V.V., Zubchaninov V.G., Okhlopkov N.L. Device for measuring deformations under complex loading Patent for utility model RU 13092 U1, 03.20.2000. Application No. 99120485/20 dated 09/27/1999.
  - [7] Zubchaninov V. G. Mechanics of plastic media processes. M.: FIZMATLIT, 2010. 352 p. ISBN 978-5-9221-1235-2.
  - [8] Zubchaninov V. G., Gulyaev V. I., Dvuzhilov A. S. Study of brass L63 along a smooth curvilinear trajectory of the “fan of displaced circles” type // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. AND I. Yakovleva. Series: Limit state mechanics. 2023. No. 1 (55). pp. 26–32. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.004
  - [9] Zubchaninov V. G., Gulyaev V. I., Alekseev A. A., Dvuzhilov A. S. Experimental studies of complex loading of brass L63 on two-link broken trajectories of the “displaced fan” type // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University them. AND I. Yakovleva. Series: Limit state mechanics. 2023. No. 1 (55). pp. 18–25. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.003
  - [10] Zubchaninov V. G., Gulyaev V. I., Alekseev A. A., Dvuzhilov A. S. Experimental study of L63 brass under complex loading along two-link broken lines // Aviation engines. 2023. No. 1 (18). pp. 99–103.
  - [11] Alekseev A. A., Gulyaev V. I., Zubchaninov V. G. Numerical calculation of elastoplastic deformation of structural steel along an Archimedean spiral type trajectory // In the book: Abstracts of the 55th International Scientific and Technical Conference of Teachers and students. Abstracts of reports. Vitebsk, 2022. pp. 245–246.
  - [12] Savrasov I. A., Gulyaev V. I., Zubchaninov V. G., Alekseev A. A. Verification of the isotropy postulate in experiments on orthogonal deformation trajectories in the form of semicircles // In the book: Abstracts of the 55th International scientific and technical conference of teachers and students. Abstracts of reports. Vitebsk, 2022. pp. 246–247.
  - [13] Gulyaev V.I., Savrasov I.A., Zubchaninov V.G., Alekseev A.A. Experimental study of steel 45 along a “snake” type deformation trajectory // In the book: Abstracts of the 55th International scientific and technical conference of teachers and students. Abstracts of reports. Vitebsk, 2022. pp. 247–248.
  - [14] Gulyaev V.I., Alekseev A.A., Savrasov I.A., Garanikov V.V. Experimental verification of the isotropy postulate during deformation of steel 45 along orthogonal curvilinear trajectories of constant curvature // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University AND I. Yakovleva. Series: Limit state mechanics. 2021. No. 1 (47). pp. 86–94. DOI: 10.37972/chgpu.2021.1.47.008
  - [15] Cheremnykh S.V. Theoretical and experimental modeling of deformation of a cylindrical shell made of steel 45 under complex loading // Structural mechanics of engineering structures and structures. 2022. T. 18. No. 2. P. 150–160.
  - [16] Subbotin S. L., Alekseev A. A. Implementation of the CH-computer method in the calculation of elastoplastic processes on helical deformation trajectories of constant curvature // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. AND I. Yakovleva. Series: Limit state mechanics. 2022. No. 3 (53). pp. 20–26. DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.003
  - [17] Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gulyaev V.I. Mathematical modeling of processes of complex loading of steel along multi-link broken deformation trajectories // In the collection: Mathematical modeling and experimental mechanics of a deformable solid. Interuniversity collection of scientific papers. Edited by V.G. Zubchaninova, A.A. Alekseeva. Tver, 2020. pp. 42–47.

А. П. Кержаев<sup>1</sup>, И. В. Меньшова<sup>1,2</sup>, А. В. Никитин<sup>3</sup>

## НЕОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛОСЫ С РАЗНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

<sup>1</sup>Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН,  
г. Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,  
г. Москва, Россия

<sup>3</sup>Чебоксарский кооперативный институт (филиал) Российского университета кооперации,  
г. Чебоксары, Россия

**Аннотация.** В статье построено точное решение неоднородной задачи теории упругости для бесконечной полосы, нижняя сторона которой жестко закреплена, а верхняя свободна. Внешняя нагрузка действует вдоль вертикальной оси полосы. Метод решения основан на использовании соотношения ортогональности Папковича. Решение представляется в виде рядов по собственным функциям Папковича–Фадля, коэффициенты которых определяются в явном виде. Приведены примеры решения задачи.

**Ключевые слова:** неоднородная задача, полоса, собственные функции Папковича–Фадля, соотношение ортогональности Папковича, точные решения.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.007

УДК: 539.3

---

© Кержаев А. П., Меньшова И. В., Никитин А. В., 2023

*Кержаев Александр Петрович*

**e-mail:** alex\_kerg@mail.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва, Россия.

*Меньшова Ирина Владимировна*

**e-mail:** menshovairina@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва, Россия; доцент, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия.

*Никитин Андрей Витальевич*

**e-mail:** ligalas5@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой, Чебоксарский кооперативный институт (филиал) Российского университета кооперации, г. Чебоксары, Россия

Исследование А.П. Кержаева и И.В. Меньшовой выполнено в рамках государственного задания ИТПЗ РАН.

Поступила 20.09.2023

**1. Введение** Неоднородным задачам теории упругости (уравнения равновесия с правой частью) посвящено значительно меньше публикаций, чем однородным. Как правило, эти задачи сложнее однородных и более трудоемки. В учебниках по теории упругости обычно можно найти только решение неоднородной задачи для бесконечной плоскости, внутри которой действует сосредоточенная сила. Решений для областей с разными граничными условиями на их сторонах, полученных на основе приближенно-аналитических и численных методов, тоже крайне мало. В то же время эти задачи очень важны в инженерном деле.

В предлагаемой статье получено точное решение неоднородной задачи для бесконечной полосы, нижняя сторона которой жестко закреплена, а верхняя свободна. Внутри полосы приложена внешняя нагрузка, действующая вдоль ее вертикальной оси.

Решение задачи строится с использованием соотношения ортогональности Папковича. Это позволяет существенно упростить процесс решения, а окончательные формулы представить в виде рядов по собственным функциям Папковича–Фадля, коэффициенты которых записываются в простом явном виде.

В 1940 году П. Ф. Папковичем в статье [1] было получено соотношение ортогональности для собственных функций, возникающих при решении краевой задачи в упругой полуполосе со свободными длинными сторонами. Эта статья послужила толчком к изучению различных краевых задач теории упругости [2–6] с использованием соотношения ортогональности Папковича в надежде построить, наконец, точное решение краевой задачи в полуполосе. В работе [7] было показано, что это невозможно, а соотношение ортогональности Папковича решает совсем другие задачи, а именно задачи для бесконечной полосы с разрывами перемещений или скачками напряжений. Известно [8–11], что задачи с разрывами эквивалентны неоднородным задачам теории упругости. Основываясь на этом, с помощью соотношения ортогональности Папковича можно легко строить решения неоднородных задач в бесконечной полосе.

**2. Постановка задачи и ее решение** Рассмотрим неоднородную задачу теории упругости для бесконечной полосы  $\{\Pi : |x| < \infty, 0 \leq y \leq h\}$ , в которой нижняя сторона жестко закреплена, а верхняя свободна, т.е.

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad \sigma_y(x, h) = \tau_{xy}(x, h) = 0. \quad (1)$$

Предположим, что внутри полосы приложена внешняя нагрузка  $Y(y)$ , действующая вдоль вертикальной оси  $y$  на отрезке  $[\alpha_1, \alpha_2]$  (рис. 1).

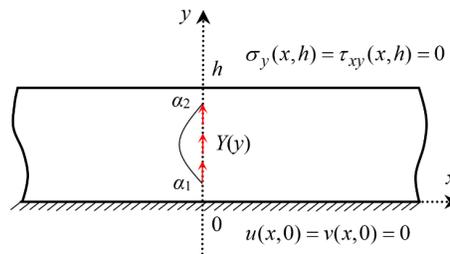


Рис. 1. Схема неоднородной задачи для бесконечной полосы

Будем рассматривать полосу  $\Pi$  как стык двух полуполос  $\{\Pi^+ : x \geq 0, 0 \leq y \leq h\}$  и  $\{\Pi^- : x \leq 0, 0 \leq y \leq h\}$ .

Пусть на торце правой полуполосы  $\Pi^+$  известны касательные напряжения, равные  $\tau(y)$ , и продольные перемещения, равные  $U(y)$ . Решение будем искать в виде рядов

$$\sigma_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[ A_k s_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} \right], \quad \sigma_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[ A_k s_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} \right],$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[ A_k t_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} \right], \quad (2)$$

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[ A_k \xi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} \right], \quad V(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[ A_k \chi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} \right]$$

по собственным функциям Папковича–Фадля, удовлетворяющим граничным условиям (1):

$$s_x(\lambda_k, y) = -\frac{1}{2} [2 \cos \lambda_k h - (\nu + 1) \lambda_k h \sin \lambda_k h] \left( \frac{\nu+1}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k y - \nu \cos \lambda_k y \right) + \frac{1}{2} [(\nu + 1) \lambda_k h \cos \lambda_k h + (\nu - 1) \sin \lambda_k h] \left( \frac{\nu+1}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k y + \frac{\nu+3}{2} \sin \lambda_k y \right),$$

$$s_y(\lambda_k, y) = \frac{1}{2} [2 \cos \lambda_k h - (\nu + 1) \lambda_k h \sin \lambda_k h] \left( \frac{\nu+1}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k y + \cos \lambda_k y \right) + \frac{1}{2} [(\nu + 1) \lambda_k h \cos \lambda_k h + (\nu - 1) \sin \lambda_k h] \left( -\frac{\nu+1}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k y + \frac{\nu-1}{2} \sin \lambda_k y \right),$$

$$t_{xy}(\lambda_k, y) = \frac{1}{2} [(\nu + 1) \lambda_k h \cos \lambda_k h + (\nu - 1) \sin \lambda_k h] \left( -\frac{\nu+1}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k y + \cos \lambda_k y \right) - \frac{1}{2} [2 \cos \lambda_k h - (\nu + 1) \lambda_k h \sin \lambda_k h] \left( \frac{\nu+1}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k y + \frac{\nu-1}{2} \sin \lambda_k y \right), \quad (3)$$

$$\xi(\lambda_k, y) = -\frac{1}{2} [2 \cos \lambda_k h - (\nu + 1) \lambda_k h \sin \lambda_k h] \left( \frac{\nu+1}{4} y \sin \lambda_k y \right) + \frac{1}{2} [(\nu + 1) \lambda_k h \cos \lambda_k h + (\nu - 1) \sin \lambda_k h] \left( \frac{\nu+1}{4} y \cos \lambda_k y - \frac{\nu-3}{4\lambda_k} \sin \lambda_k y \right),$$

$$\chi(\lambda_k, y) = -\frac{1}{2} [(\nu + 1) \lambda_k h \cos \lambda_k h + (\nu - 1) \sin \lambda_k h] \left( \frac{\nu+1}{4} y \sin \lambda_k y \right) - \frac{1}{2} [2 \cos \lambda_k h - (\nu + 1) \lambda_k h \sin \lambda_k h] \left( \frac{\nu+1}{4} y \cos \lambda_k y + \frac{\nu-3}{4\lambda_k} \sin \lambda_k y \right).$$

В формулах (1)–(3) введены следующие обозначения:  $U(x, y) = Gu(x, y)$ ,  $V(x, y) = Gv(x, y)$ , где  $G$  – модуль сдвига, а  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  – продольное и поперечное перемещения соответственно;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $A_k$  – неизвестные коэффициенты разложений;  $\lambda_k$  – бесконечный набор комплексных корней характеристического уравнения

$$L(\lambda) = \frac{1}{4}(\nu + 1)(\nu - 3) \sin^2 \lambda h - \frac{1}{4}(\nu + 1)^2 (\lambda h)^2 + 1 = 0, \quad (4)$$

соответствующего краевой задаче для полосы  $\Pi$  с граничными условиями (1). Числа  $\lambda_k$  расположены попарно-симметрично относительно начала координат комплексной плоскости. Через  $2\operatorname{Re}$  для краткости обозначены суммы соответствующих выражений при  $\lambda_k$  и при  $\bar{\lambda}_k$ , им сопряженных. Для затухающего на бесконечности решения считаем, что  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ , когда  $x \geq 0$ , и  $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ , когда  $x \leq 0$ .

Помимо комплексных корней, уравнение (4) имеет также два вещественных корня  $\pm \lambda_1$ . В дальнейшем в окончательных формулах вынесем выражения, отвечающие вещественным корням, за знаки суммирования.

Следуя [7, 12], определим коэффициенты  $A_k$  с помощью соотношения ортогональности Папковича

$$\int_0^h [s_x(\lambda_k, y)\xi(\lambda_m, y) - \chi(\lambda_k, y)t_{xy}(\lambda_m, y)] dy = \begin{cases} B_k & (k = m), \\ 0 & (k \neq m), \end{cases} \quad (5)$$

где

$$B_k = \frac{h [(\nu + 1)^2 h^2 \lambda_k^2 + 2(\nu - 1)]^2}{16(\nu + 1)\lambda_k}.$$

В этой формуле числа  $\lambda_k$  и сопряженные с ними  $\bar{\lambda}_k$  считаются различными. Поэтому при  $\lambda_m = \bar{\lambda}_k$  интегралы в (5) будут равны нулю. Умножим левую и правую части (5) последовательно на  $A_m$  и  $\bar{A}_m$ , затем сложим получившиеся выражения и просуммируем их по индексу  $m = 1, 2, \dots$ . Обозначив через

$$U(y) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \xi(\lambda_m, y) + \bar{A}_m \xi(\bar{\lambda}_m, y)], \quad \tau(y) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m t_{xy}(\lambda_m, y) + \bar{A}_m t_{xy}(\bar{\lambda}_m, y)], \quad (6)$$

на основании соотношения ортогональности (5) найдем

$$A_k = \frac{1}{B_k} \int_0^h [s_x(\lambda_k, y)U(y) - \chi(\lambda_k, y)\tau(y)] dy. \quad (7)$$

Формулы для комплексно сопряженных чисел  $\bar{A}_k$  получаются из (7) при замене  $\lambda_k$  на  $\bar{\lambda}_k$ . Полагая теперь в (7)  $U(y) = 0$ , получим

$$A_k = -\frac{1}{B_k} \int_0^h \chi(\lambda_k, y)\tau(y) dy. \quad (8)$$

Подставим коэффициенты (8) в формулы (2) и аналитически продолжим решение (2) из правой полуполосы в левую как четно-симметричное. В результате, учитывая вещественность первого корня, вместо (2) получим ( $\text{Re}\lambda_k < 0$ )

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= A_1 s_x(\lambda_1, y)e^{\lambda_1|x|} + \sum_{k=2}^{\infty} 2\text{Re} [A_k s_x(\lambda_k, y)e^{\lambda_k|x|}], \\ \sigma_y(x, y) &= A_1 s_y(\lambda_1, y)e^{\lambda_1|x|} + \sum_{k=2}^{\infty} 2\text{Re} [A_k s_y(\lambda_k, y)e^{\lambda_k|x|}], \\ \tau_{xy}(x, y) &= \text{sign}x A_1 t_{xy}(\lambda_1, y)e^{\lambda_1|x|} + \text{sign}x \sum_{k=2}^{\infty} 2\text{Re} [A_k t_{xy}(\lambda_k, y)e^{\lambda_k|x|}], \\ U(x, y) &= \text{sign}x A_1 \xi(\lambda_1, y)e^{\lambda_1|x|} + \text{sign}x \sum_{k=2}^{\infty} 2\text{Re} [A_k \xi(\lambda_k, y)e^{\lambda_k|x|}], \\ V(x, y) &= A_1 \chi(\lambda_1, y)e^{\lambda_1|x|} + \sum_{k=2}^{\infty} 2\text{Re} [A_k \chi(\lambda_k, y)e^{\lambda_k|x|}]. \end{aligned} \quad (9)$$

Покажем, что формулами (9) описывается решение неоднородной задачи, схема которой показана на рис. 1. Для этого подставим их в основные уравнения теории упругости.

Здесь понадобятся следующие формулы для обобщенных функций, в которых  $\delta(x)$  – дельта функция Дирака, а  $\delta'(x)$  – ее производная ( $\lambda$  – параметр, принимающий значения  $\lambda_k$  или  $\bar{\lambda}_k$ ):

$$\begin{aligned} \text{sign}^2 x &= 1, \quad x \text{sign} x = |x|, \quad |x| \text{sign} x = x, \quad \delta(x) \text{sign} x = 0, \\ \frac{d}{dx} \text{sign} x &= 2\delta(x), \quad \frac{d}{dx} e^{\lambda|x|} = \lambda \text{sign} x e^{\lambda|x|}, \quad \frac{d}{dx} (\text{sign} x e^{\lambda|x|}) = [\lambda + 2\delta(x)] e^{\lambda|x|}, \\ \frac{d}{dx} (|x| e^{\lambda|x|}) &= (1 + \lambda|x|) \text{sign} x e^{\lambda|x|}, \quad \frac{d^2}{dx^2} e^{\lambda|x|} = [\lambda + 2\delta(x)] \lambda e^{\lambda|x|}, \\ \frac{d^2}{dx^2} (\text{sign} x e^{\lambda|x|}) &= [2\delta'(x) + \lambda^2 \text{sign} x + 6\lambda\delta(x) \text{sign} x] e^{\lambda|x|}. \end{aligned} \quad (10)$$

Проверим выполнение уравнений равновесия в напряжениях [13]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sigma_x(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy}(x, y) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \sigma_y(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy}(x, y) &= -\delta(x) Y(y). \end{aligned} \quad (11)$$

Следующие равенства являются следствиями однородных уравнений (11):

$$s_x(\lambda_k, y) \lambda_k + \frac{d}{dy} t_{xy}(\lambda_k, y) = 0, \quad \frac{d}{dy} s_y(\lambda_k, y) + \lambda_k t_{xy}(\lambda_k, y) = 0. \quad (12)$$

Далее для краткости в формулах (9), (11) и (12) отбросим знаки суммирования, коэффициенты  $A_k$ , индексы суммирования при  $\lambda_k$  и символ  $2\text{Re}$ . Тогда учитывая первое равенство (12), из первого уравнения (11) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sigma_x(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy}(x, y) &= \text{sign} x \lambda s_x(\lambda, y) e^{\lambda|x|} + \text{sign} x \frac{dt_{xy}(\lambda, y)}{dy} e^{\lambda|x|} = \\ &= \text{sign} x \left[ \lambda s_x(\lambda, y) + \frac{dt_{xy}(\lambda, y)}{dy} \right] e^{\lambda|x|} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставим формулы (9) в левую часть второго уравнения (11). Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \sigma_y(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy}(x, y) &= \frac{ds_y(\lambda, y)}{dy} e^{\lambda|x|} + [\lambda + 2\delta(x)] t_{xy}(\lambda, y) e^{\lambda|x|} = \\ &= \left[ \frac{ds_y(\lambda, y)}{dy} + \lambda t_{xy}(\lambda, y) \right] e^{\lambda|x|} + 2\delta(x) t_{xy}(\lambda, y) e^{\lambda|x|}. \end{aligned} \quad (14)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках в предпоследней сумме в (14), согласно второму равенству (12), равно нулю. Поэтому, в соответствии со вторым уравнением (11), возвращая суммирование, получим

$$Y(y) = -2 \left\{ A_1 t_{xy}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2\text{Re} [A_k t_{xy}(\lambda_k, y)] \right\} = -2\tau(y). \quad (15)$$

Проверим выполнение уравнений равновесия в перемещениях [14]:

$$\begin{aligned} \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y} &= -\delta(x) Y(y). \end{aligned} \quad (16)$$

Воспользуемся следующими равенствами для собственных функций, вытекающими из однородных уравнений (16):

$$\begin{aligned} \frac{2}{1-\nu} \lambda_k^2 \xi(\lambda_k, y) + \frac{\partial^2 \xi(\lambda_k, y)}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \lambda_k \frac{\partial \chi(\lambda_k, y)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2 \chi(\lambda_k, y)}{\partial y^2} + \lambda_k^2 \chi(\lambda_k, y) + \frac{1+\nu}{1-\nu} \lambda_k \frac{\partial \xi(\lambda_k, y)}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставим (9) в формулы (16) и выполним дифференцирование, учитывая (10). Как и в случае с уравнениями равновесия в напряжениях, используя на этот раз (17) вместо (12), получим ноль в первом уравнении, а во втором –

$$\delta(x)Y(y) = -2\delta(x) \left\{ A_1 \lambda_1 \chi(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 |x|} + \sum_{k=2}^{\infty} 2\text{Re} \left[ A_k \lambda_k \chi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|} \right] \right\}. \quad (18)$$

Выражение для  $Y(y)$ , вытекающее из (18), фактически совпадает с (15), если учесть, что

$$\tau_{xy}(0, y) = \frac{\partial}{\partial x} V(x, y) \Big|_{x=0}, \quad (19)$$

т.к.  $U(0, y) = 0$ .

Таким образом, формулы (9) действительно дают решение неоднородной задачи, показанной на рис. 1. Причем функция  $Y(y)$ , согласно (15), равна взятому с обратным знаком скачку касательных напряжений на стыке  $x = 0$  правой и левой полуполос.

**3. Примеры решения задачи** Проиллюстрируем полученное решение, рассмотрим два примера для внешней нагрузки  $Y(y)$ .

*Пример 1.* Пусть

$$Y(y) = \begin{cases} -2y, & \alpha_1 \leq y \leq \alpha_2; \\ 0, & 0 \leq y < \alpha_1 \text{ и } \alpha_2 < y \leq h. \end{cases} \quad (20)$$

По формулам (20), (15), (9) и (8) найдем решение задачи. Ниже приведены графики, иллюстрирующие решение. На рис. 2 показан график сходимости касательных напряжений в сечении  $x = 0.001$  к раскладываемой функции. Как видно из рисунка, при  $y = 2$  имеется скачок касательных напряжений в полученном решении. Это связано с тем, что касательные напряжения на верхней стороне полосы равны нулю согласно граничным условиям (1). На рис. 3 показано распределение нормальных напряжений при  $x = 0$ . Здесь нормальные напряжения  $\sigma_x(0, y)$  имеют логарифмическую особенность при  $y = 2$ . На рис. 4 приведены графики напряжений в заделке. На рис. 5 показано распределение перемещений на верхней стороне полосы. При вычислениях считалось, что  $\nu = 1/3$ ,  $h = 2$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = h$ .

*Пример 2.* Пусть

$$Y(y) = \begin{cases} -2[y^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)y + \alpha_1 \alpha_2], & \alpha_1 \leq y \leq \alpha_2; \\ 0, & 0 \leq y < \alpha_1 \text{ и } \alpha_2 < y \leq h. \end{cases} \quad (21)$$

Аналогично найдем решение задачи по формулам (20), (15), (9) и (8). На рис. 6–9 приведены аналогичные графики, иллюстрирующие решение. Как и в предыдущем примере, считалось, что  $\nu = 1/3$ ,  $h = 2$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = h$ .

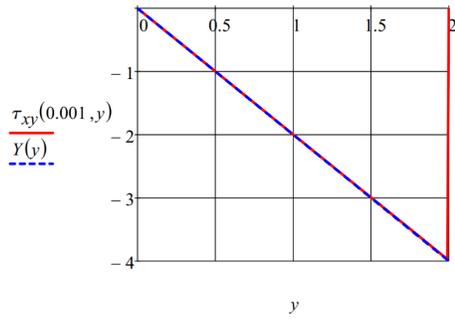


Рис. 2. График сходимости касательных напряжений в сечении  $x = 0.001$  к раскладываемой функции

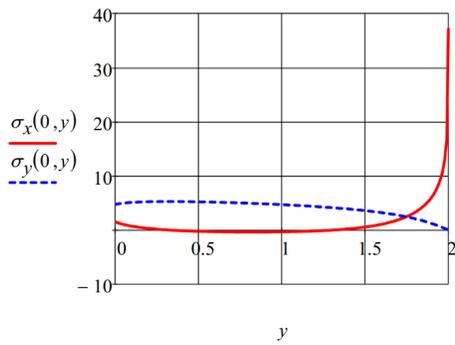


Рис. 3. Распределение нормальных напряжений при  $x = 0$

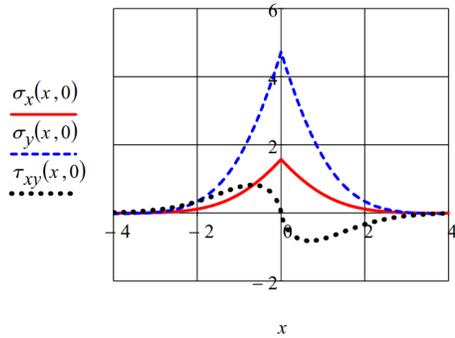
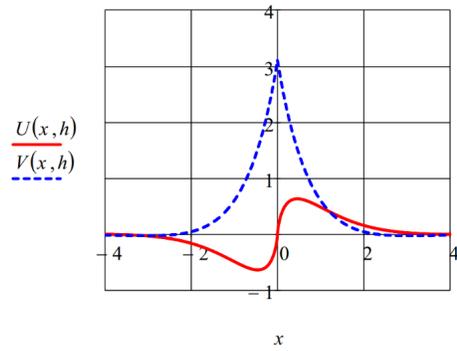
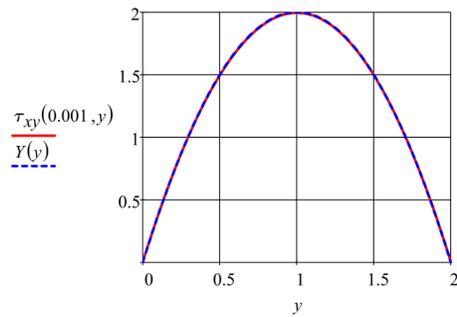
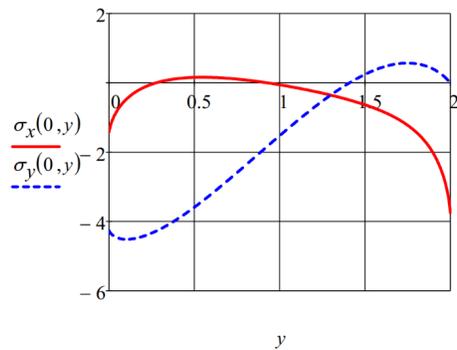


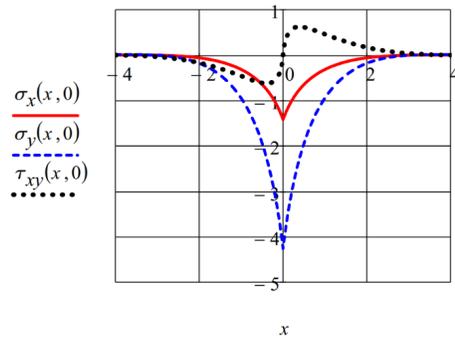
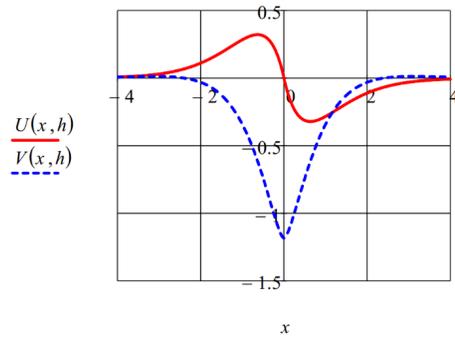
Рис. 4. Распределение напряжений при  $y = 0$

#### 4. Выводы

- В тех точках, где внешняя нагрузка  $Y(y)$  имеет конечные разрывы, напряжения  $\sigma_x(0, y)$  и  $\sigma_y(0, y)$  имеют логарифмическую особенность (рис. 3). Она исчезает для напряжений  $\sigma_y(0, y)$  при  $\alpha_2 = h$  из-за того, что  $\sigma_y(0, h) = 0$ .

Рис. 5. Распределение перемещений при  $y = h$ Рис. 6. График сходимости касательных напряжений в сечении  $x = 0.001$  к раскладываемой функцииРис. 7. Распределение нормальных напряжений при  $x = 0$ 

- Напряжения и перемещения быстро затухают вдоль полосы так, что на расстоянии, приблизительно равном ширине пластины, ими практически можно пренебречь.

Рис. 8. Распределение напряжений при  $y = 0$ Рис. 9. Распределение перемещений при  $y = h$ 

- Нагрузку, действующую вдоль оси  $y$ , можно сместить вправо или влево на некоторую величину  $a$ . В этом случае в формулах (9) надо заменить  $x$  на  $x - a$ , если смещение выполнено вправо, и на  $x + a$ , если — влево. Так можно построить, например, решение с периодической нагрузкой  $Y(y)$ .
- Функцию  $Y(y)$  можно рассматривать как контактные напряжения между ребром жесткости и пластиной. Тогда  $Y(y)$  может быть определена из условия равновесия элементарного участка ребра. Так можно получить решения различных задач о передаче нагрузки от ребра (ребер) жесткости к упругой полосе.
- Накладывая на решение для бесконечной полосы решение для прямоугольника [15], можно получить решение неоднородной задачи для прямоугольника со свободными (или какими-либо другими) торцами, в том числе для прямоугольника с ребром (ребрами) жесткости, расположенным внутри прямоугольника.
- В том случае, когда одна из сторон полосы подкреплена ребром жесткости, нужно использовать соотношение ортогональности Папковича, записанное в другом виде.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Папкович П. Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы // Докл. АН СССР. 1940. Т. 27. № 4. С. 335–339.
- [2] Гринберг Г. А. О методе, предложенном П. Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками, и о некоторых его обобщениях // ПММ. 1953. Т. 17. № 2. С. 211–228.
- [3] Gregory R. D. A note on bi-orthogonality relations for elastic cylinders of general cross section // Journal of Elasticity. 1983. Vol. 13. No. 3. P. 351–355.
- [4] Нуллер Б. М. О соотношении обобщенной ортогональности П. А. Шиффа // ПММ. 1969. Т. 33. № 2. С. 376–383.
- [5] Patra B. On a generalised orthogonality relation and its use in the problem of elasticity of a truncated cylindrical wedge // Journal of the Indian Institute of Science. 1981. Vol. 63. No. 2. P. 25–33.
- [6] Prakash B. G. Generalised orthogonality relation for rectangular strips in elastodynamics // Mechanics Research Communications. 1978. Vol. 5. No. 5. P. 251–255.
- [7] Коваленко М. Д., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича в полосе. Основы теории // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 5. С. 78–98.
- [8] Steketee J. A. On Volterra's dislocations in a semi-infinite elastic medium // Canadian Journal of Physics. 1958. Vol. 36. No. 2. P. 192–205.
- [9] Касахара К. Механика землетрясений. М.: Мир, 1985. 265 с.
- [10] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. VII. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
- [11] Слепян Л. И. Механика трещин. Ленинград: Судостроение, 1990. 296 с.
- [12] Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P., Yu G. An inhomogeneous problem for an elastic half-strip: an exact solution // Mathematics and Mechanics of Solids. 2021. Vol. 26, No. 11. P. 1565–1580.
- [13] Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
- [14] Власов В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. Москва: Стройиздат, 1975. 224 с.
- [15] Коваленко М. Д., Меньшова И. В., Кержаев А. П., Шуляковская Т. Д. Некоторые решения теории упругости для прямоугольника // ПММ. 2021. Т. 85. № 3. С. 370–382.

А. П. Kerzhaev<sup>1</sup>, И. В. Menshova<sup>1,2</sup>, А. В. Nikitin<sup>3</sup>

### INHOMOGENEOUS PROBLEM FOR A STRIP WITH DIFFERENT BOUNDARY CONDITIONS

<sup>1</sup>*Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

<sup>3</sup>*Cheboksary Cooperative Institute (Branch) of the Russian University of Cooperation, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** In this paper, an exact solution to an inhomogeneous problem of elasticity theory is constructed for an infinite strip, the lower side of which is rigidly clamped, while the upper side is free. An external load acts along the vertical axis of the strip. The solution method is based on the use of the Papkovich orthogonality relation. The solution is represented in the form of series in Papkovich–Fadle eigenfunctions, the coefficients of which are determined explicitly. Examples of solving the problem are given.

**Keywords:** inhomogeneous problem, strip, Papkovich–Fadle eigenfunctions, Papkovich orthogonality relation, exact solutions.

## REFERENCES

- [1] Papkovich P. F. On one form of solution of the plane problem of the theory of elasticity for a rectangular strip // Doklady AN SSSR. 1940. Vol. 27. No. 4. P. 335–339. (in Russian).
- [2] Grinberg G. A. On a method applied by P. F. Papkovich for the solution of the plane problem of the theory of elasticity for a rectangular region and of problem of bending of a rectangular thin plate with two clamped edges, and on some of its generalizations // PMM. 1953. Vol. 17. No. 2. P. 211–228. (in Russian).
- [3] Gregory R. D. A note on bi-orthogonality relations for elastic cylinders of general cross section // Journal of Elasticity. 1983. Vol. 13. No. 3. P. 351–355.
- [4] Nuller B. M. On the generalized orthogonality relation of P. A. Schiff // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1969. Vol. 33, No. 2. P. 364–372.
- [5] Patra B. On a generalised orthogonality relation and its use in the problem of elasticity of a truncated cylindrical wedge // Journal of the Indian Institute of Science. 1981. Vol. 63. No. 2. P. 25–33.
- [6] Prakash B. G. Generalised orthogonality relation for rectangular strips in elastodynamics // Mechanics Research Communications. 1978. Vol. 5, No. 5. P. 251–255.
- [7] Kovalenko M. D., Shulyakovskaya T. D. Expansions in Fadde–Papkovich functions in a strip. Theory foundations // Mechanics of Solids. 2011. Vol. 46, No. 5. P. 721–738.
- [8] Steketee J. A. On Volterra’s dislocations in a semi-infinite elastic medium // Canadian Journal of Physics. 1958. Vol. 36. No. 2. P. 192–205.
- [9] Kasahara K. Earthquake mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
- [10] Landau L. D., Lifshitz E. M. Theory of elasticity. Course of theoretical physics. Vol. 7. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1986.
- [11] Slepyan L. I. Mechanics of cracks. Leningrad: Sudostroenie, 1990. 296 p. (in Russian).
- [12] Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P., Yu G. An inhomogeneous problem for an elastic half-strip: an exact solution // Mathematics and Mechanics of Solids. 2021. Vol. 26. No. 11. P. 1565–1580.
- [13] Timoshenko S. P., Goodier J. N. Theory of elasticity. New York: McGraw-Hill, 1951.
- [14] Vlasov V. V. Method of initial functions in problems of the theory of elasticity and structural mechanics. Moscow: Stroiizdat, 1975. 224 p. (in Russian).
- [15] Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P., Shulyakovskaya T. D. Some solutions of the theory of elasticity for a rectangle // Mechanics of Solids. 2021. Vol. 56. No. 7. P. 1232–1242.

---

*Kerzhaev Alexander Petrovich*, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.  
*Menshova Irina Vladimirovna*, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia.  
*Nikitin Andrey Vitalievich*, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Associate Professor, Cheboksary Cooperative Institute (Branch) of the Russian University of Cooperation, Cheboksary, Russia.

А. А. Адамов<sup>1</sup>, А. В. Торопицина<sup>2</sup>

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ СОТОВЫХ ПАНЕЛЕЙ ПРИ ИСПЫТАНИИ НА СДВИГ

<sup>1</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия

<sup>2</sup>АО «ОДК-Авиадвигатель», г. Пермь, Россия

**Аннотация.** В работе выполнено экспериментальное определение эффективных модулей сдвига и пределов прочности при испытаниях на сдвиг плоских многослойных сотовых панелей с тонкими обшивками из углепластиков и заполнителем из стеклопластиковой ленты. Выявлено статистически значимое различие эффективных модулей сдвига вдоль и поперек плоскостей склейки ленты в ячейках сот, их обратная корреляция с общей высотой сотового заполнителя. Эффективные пределы прочности на сдвиг статистически не различаются и не зависят от общей высоты сот. На конечно-элементных моделях выполнен численный анализ факторов, влияющих на занижение расчетных значений эффективных модулей сдвига.

**Ключевые слова:** многослойные сотовые панели, упругие и прочностные характеристики, сдвиг, конечно-элементная модель

DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.008

УДК: 620.178.6+629.7.023

### Введение

Многослойные конструкции с чередующимися слоями силовых обшивок и слоями сотового композиционного или металлического заполнителя различной конфигурации широко применяются в различных отраслях промышленности: в самолетостроении,

---

© Адамов А. А., Торопицина А. В., 2023

Адамов Анатолий Арсангалеевич

e-mail: adamov@icmm.ru, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

Торопицина Анна Владимировна

e-mail: togoritcina@avid.ru, заместитель начальника отдела, АО «ОДК-Авиадвигатель», г. Пермь, Россия.

Поступила 16.11.2023

двигателестроении, судостроении, аэрокосмической технике, строительстве и т.д. благодаря сочетанию высокой изгибной жесткости и низкой удельной плотности. Использование сотовых полимерных композиционных материалов в конструкции мотогондолы авиадвигателя позволяет также значительно снизить уровень его шума. Простейшими из сотовых конструкций являются трехслойные элементы с двумя наружными тонкими силовыми обшивками (в виде пластинок или оболочек) и внутренним слоем сотового заполнителя. За счет разнесенных обшивок такой пакет дает более высокие характеристики жесткости и прочности при относительно малом весе. Элементы конструкций с сотовым заполнителем в основном работают на изгиб, сдвиг, сжатие по нормали к обшивкам и растяжение-сжатие в плоскости обшивок.

Широкое применение ответственных конструкций с заполнителем шестигранной сотовой структуры вызывает необходимость отработки и верификации методов численного анализа разнообразных элементов конструкций с сотовыми заполнителями, отличающимися параметрами обшивок, рядностью и высотой сот, их материалом и т.д. При расчетах таких конструкций обычно используют эффективные (усредненные) характеристики жесткости и прочности реальной сотовой структуры, заменяемой сплошной однородной анизотропной средой. Многими авторами предложены различные структурные подходы для определения эффективных характеристик [1], [2], [3], которые в основном сводятся к расчету взаимных смещений под нагрузкой методами строительной механики, энергетическими методами в предположении упругой работы конструкции. В [4] получены аналитические формулы для определения усредненных упругих и прочностных характеристик сотового заполнителя, основанные на введении предположения о безмоментной работе пластинок сот в процессе нагружения и на поэтапном их исключении из работы после потери устойчивости в условиях или двухстороннего сжатия, или чистого сдвига. В формулах введены безразмерные коэффициенты, которые определяются из данных экспериментов на растяжение, сжатие и чистый сдвиг в двух плоскостях. Детальный анализ по определению эффективных характеристик заполнителей содержится, например, в работах [5], [6], [7], [8].

Комплекс экспериментально определяемых механических параметров многослойных конструкций с сотовыми заполнителями получают чаще всего при испытаниях плоских образцов-панелей, минимальные размеры которых определяются стандартами на испытания из соображений представительности образца с эффективными свойствами, усредненными по его объему:

– эффективные модули сдвига упругого ортотропного тела  $G_{xz}, G_{yz}$  (в декартовой системе координат  $x, y, z$ , ось  $z$  направлена по нормали к плоскости обшивок), которые зависят от жесткости на сдвиг пластинок-элементов сот (испытания образцов на сдвиг сотового заполнителя по стандарту ASTM C273 [9]);

– эффективный модуль упругости заполнителя  $E_z$ , который зависит от геометрических особенностей сотового заполнителя.

Модуль сдвига  $G_{xy}$  и модули  $E_x, E_y$  сотового заполнителя с тонкими стенками обычно пренебрежимо малы и определяются только для специальных задач.

Стандартные способы оценки характеристик сдвига и сжатия заполнителя позволяют получить экспериментальные данные, которые необходимы для разработки технических условий на материал, проектирования конструкций с сотовым заполнителем, научных исследований и разработок, контроля качества.

Представленная работа посвящена экспериментальному определению эффективных модулей сдвига  $G_{xz}, G_{yz}$  упругого ортотропного тела и соответствующих пределов прочности для многослойных сотовых панелей с тонкими обшивками из углепластиков и наполнителем в виде шестигранных сот из стеклопластиковой ленты, статистической интерпретации полученных результатов, численному анализу различных значимых факторов, определяющих достоверность и точность экспериментальных данных.

#### **Методика экспериментального определения основных эффективных характеристик сотового заполнителя при сдвиге**

Метод испытаний образцов на сдвиг сотового заполнителя ASTM C273 позволяет определять предел прочности при сдвиге параллельно плоскости обшивок образца с сотовым заполнителем и модуль сдвига в плоскости действия нагрузки. При выборе длины нагружающих пластин испытательной оснастки и назначении областей приклейки к ним образцов сотового заполнителя разной высоты учитывалось существенное требование методики — линия действия продольной нагрузки растяжения проходит через диагонально противоположные углы образца с сотовым заполнителем.

Испытания проводились на универсальной испытательной машине Zwick Z100SN5A, оснащенной штатным длинноходовым датчиком Multisens для измерения осевой деформации и штатным ручным датчиком DMS для измерения поперечной деформации при растяжении-сжатии образцов. Для проведения экспериментальных работ по определению модулей сдвига сотового заполнителя использовалась типовая оснастка WTF-TS-35 (фирмы Wyoming Test Fixtures, Inc) для испытаний по ASTM C 273 (рис. 1).

Определение модуля сдвига обуславливает необходимость измерения малого относительного смещения (сдвига) нагружающих приклеенных пластин относительно друг друга. Большая нелинейная податливость нагруженных элементов оснастки не позволяет надежно определять величину сдвига по измерению относительного смещения цилиндрических шарниров оснастки с помощью экстензометра Multisens. Поэтому для измерения величины сдвига был использован датчик поперечных деформаций DMS с диапазоном измерения 4 мм, крепившийся специально разработанными и изготовленными крепежными элементами на нагружающих стальных пластинах в средней части образца. Контрольные бесконтактные измерения величин относительных смещений нагружающих пластин оснастки выполнены с помощью оптической системы Strain-Master 5 методом корреляции цифровых изображений в режиме визуального датчика 2D. При нагружении образца с сотовым заполнителем относительное расстояние между нагружающими пластинами изменялось до 0,02% на уровне погрешностей измерения, а сдвиговые деформации достигали 2,5%. Максимальное отличие относительного сдвига пластин оснастки, измеренного датчиком DMS и оптической системой, не превышало 5%.

Существенным фактором, повлиявшим на статистическую вариативность полученных результатов испытаний, оказалось несовершенство процедур приклейки сотовых образцов к стальным пластинам оснастки. Необходим специальный многоместный кондуктор, обеспечивающий реализацию допусков стандарта ASTM D5687 [10] по взаимной смещенности, соосности и параллельности образца с приклеенными пластинами. Испытание образца с не соосно приклеенными пластинами в испытательную

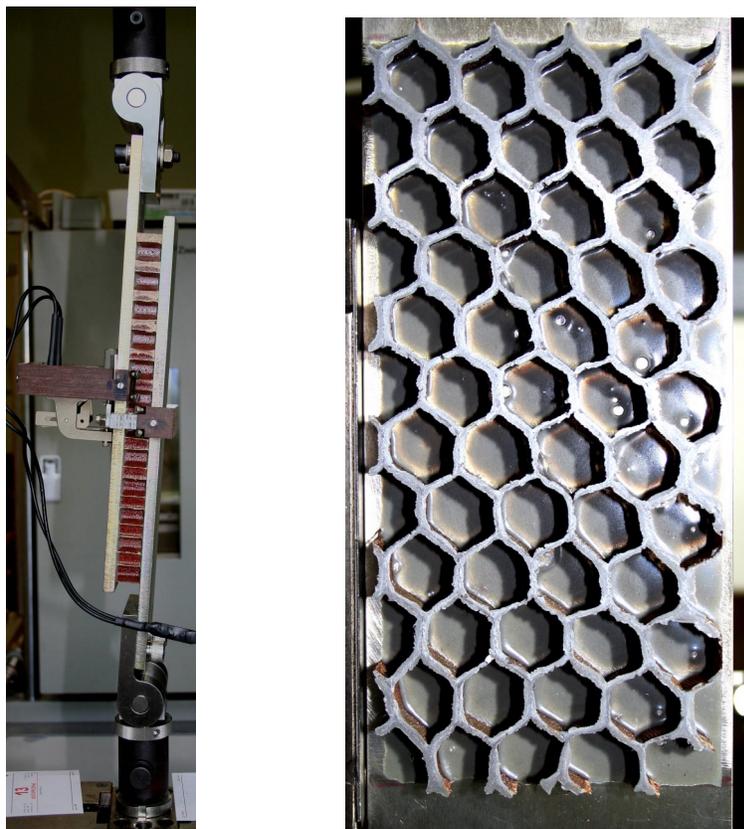


Рис. 1. Образец однорядного сотового заполнителя с оснасткой WTF-TS-35, датчиком DMS на испытательной машине Zwick Z100SN5A (слева), поверхность разрушения (справа).

оснастку приводит к внецентренному нагружению образца, а при не параллельности осей — к сложному продольно-поперечному сдвигу.

#### **Результаты экспериментальных исследований эффективных характеристик сотового заполнителя**

Проведены испытания на сдвиг 18 партий образцов с 1, 2 и 3 рядами сотового заполнителя различной высоты и общей высотой  $t$  заполнителя от 7,5 до 31 мм при нагружении вдоль и поперек плоскостей склейки (ПС). Они образуются в процессе изготовления заполнителя с шестигранными сотовыми ячейками при склеивании периодически гофрированных тонких лент стеклопластика. Выбрав ось  $x$  вдоль ПС, введем обозначения эффективных модулей сдвига заполнителя: вдоль плоскости склейки —  $G_{xz}$ , поперек плоскости склейки —  $G_{yz}$ . Соответственно обозначим пределы прочности на сдвиг:  $\tau_{xz}^e$ ,  $\tau_{yz}^e$ .

Ниже приведены совмещенные гистограммы значений относительных (к среднему значению  $G_{xz}$ ) модулей сдвига и относительных (к среднему значению  $\tau_{xz}^e$ ) пределов прочности при сдвиге заполнителя (рис. 2). На гистограммах значений относительного модуля сдвига (см. рис. 2) видно статистически значимое различие экспериментально найденных эффективных модулей сдвига вдоль и поперек плоскости склейки

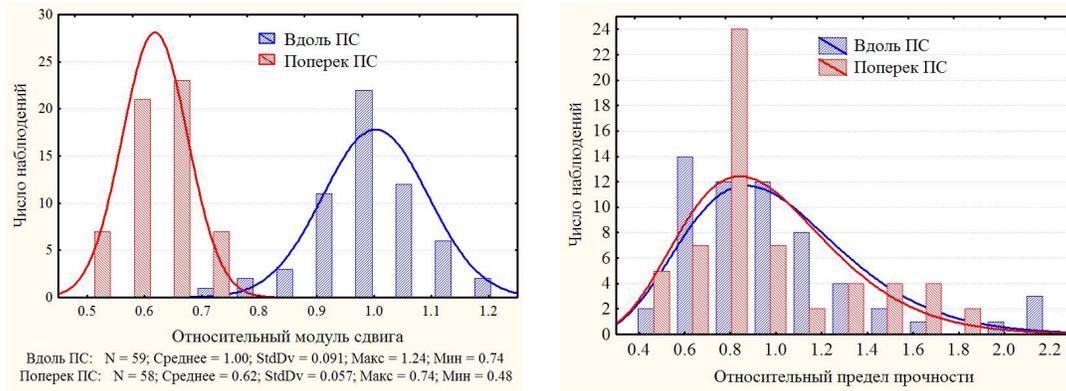


Рис. 2. Гистограммы значений относительных модулей сдвига заполнителя  $G_{xz}$ ,  $G_{yz}$  (слева) и относительных пределов прочности при сдвиге  $\tau_{xz}^e$ ,  $\tau_{yz}^e$  (справа).

заполнителя, в среднем их отношение

$$\frac{G_{xz}}{G_{yz}} = \frac{1,00}{0,62} = 1,61.$$

Пределы прочности на сдвиг в этих направлениях нагружения (см. рис. 2) статистически значимо не различаются.

Аналитически эффективные модули сдвига сотового заполнителя находят по формулам [11]:

$$G_{xz} = G_{c3} \frac{\delta_3}{l} \zeta, \quad G_{yz} = 0,576 G_{c3} \frac{\delta_3}{l}, \quad (1)$$

где  $G_{c3}$  — модуль упругости стенки соты заполнителя,  $l$  — толщина стенки соты заполнителя,  $\delta_3$  — длина стороны ячейки сотового заполнителя,  $\zeta$  — коэффициент, который определяют по графику [11] (стр. 257, рис. 5), для испытанных образцов  $\zeta = 0,877$ .

Отношение модулей из (1) определяется величиной

$$\frac{G_{xz}}{G_{yz}} = \frac{\zeta}{0,576} = \frac{0,877}{0,576} = 1,523,$$

что отличается от найденного экспериментального соотношения по средним значениям модулей менее, чем на 6%.

В табл. 1 при доверительной вероятности  $P_d = 0,95$  приведены линейные коэффициенты корреляции  $r$  значений относительных эффективных модулей сдвига заполнителя  $G_{xz}$ ,  $G_{yz}$  относительных пределов прочности при сдвиге  $\tau_{xz}^e$ ,  $G_{yz}^e$  и общей высоты сотового заполнителя  $t$ .

Таблица 1. Коэффициенты корреляции  $r$  относительных эффективных модулей сдвига сотового заполнителя, пределов прочности при сдвиге и общей высоты сотового заполнителя

Величина	$G_{xz}$	$G_{yz}$	$\tau_{xz}^e$	$\tau_{yz}^e$
$r$	0,17	0,14	-0,77	-0,87

Отсутствие значимых корреляций эффективных модулей сдвига в обоих направлениях и общей высоты разнорядных сот оправдывает отсутствие таковой зависимости в формулах (1).

Пределы прочности уменьшаются с ростом общей высоты сотовых рядов, их корреляции существенно значимы. Эта статистическая зависимость объясняется характерным механизмом разрушения сотового заполнителя путем предварительной потерей устойчивости элементарных пластинок сотовой структуры при сжимающих и сдвиговых нагрузках [1], [2], [3], [4], [5] для всех высот сотового заполнителя с расположением плоскостей склейки заполнителя вдоль и поперек плоскости нагружения образца.

#### **Численное определение эффективных характеристик однорядного сотового заполнителя**

*Явное конечно-элементное моделирование оснастки и всех сотовых ячеек с учетом одной оси симметрии рассматриваемой конструкции*

При построении конечно-элементной модели (КЭМ) сотового заполнителя использовались 8-ми узловые оболочечные элементы SHELL281, которые позволяют моделировать слоистую структуру композиционных материалов. Для моделирования нагружающих пластин и нагружающих элементов оснастки использовались конечные элементы SOLID186, при этом шарниры смоделированы как жесткие цилиндрические контактные элементы со стандартными параметрами. При задании слоев сотового заполнителя учитывались двойные слои в плоскости склейки сотового заполнителя, стеклопластиковые соты соединены со стальными пластинами оснастки при помощи контактных элементов, тип контакта bonded (always). Моделирование выполнено для образцов на сдвиг с расположением плоскостей склейки вдоль и поперек плоскости нагружения образца.

Расчетные относительные перемещения нагружающих пластин друг относительно друга определялись в тех же местах, где снимались экспериментальные данные перемещений при испытании образцов на сдвиг. В условиях испытаний датчик смещения установлен таким образом, чтобы он измерял относительное смещение между двумя стальными нагружающими пластинами. Точка контакта, в которой измерялось относительное перемещение между нагружающими пластинами, расположена в центре по длине материала заполнителя.

При растяжении образца в оснастке происходит сдвиг нагружающих пластин относительно друг друга и объект испытаний, сохраняя силовую линию, по которой идет нагружение, подвержен изгибу по менее жестким местам. Такими местами являются свободные части нагружающих пластин, которые не находятся в контакте с заполнителем и соединительными элементами (рис. 3). Деформация нагружающих пластин в ходе проведения испытаний была ожидаема и подтвердилась экспериментальным и расчетным способами. На поверхностях приклейки сотового заполнителя к нагружающим пластинам возникают усилия сдвига и отрыва, распределенные неравномерно. Максимальные нормальные напряжения отрыва достигают 10% от напряжений сдвига в торцевых зонах.

Модуль сдвига согласно ASTM C273 определяется для каждого образца по экспериментальной диаграмме «сила сдвига – относительный сдвиг между пластинами оснастки» ( $P-u$ ):

$$G^{exp} = \frac{\Delta P}{\Delta u} \frac{t}{Lb}, \quad (2)$$

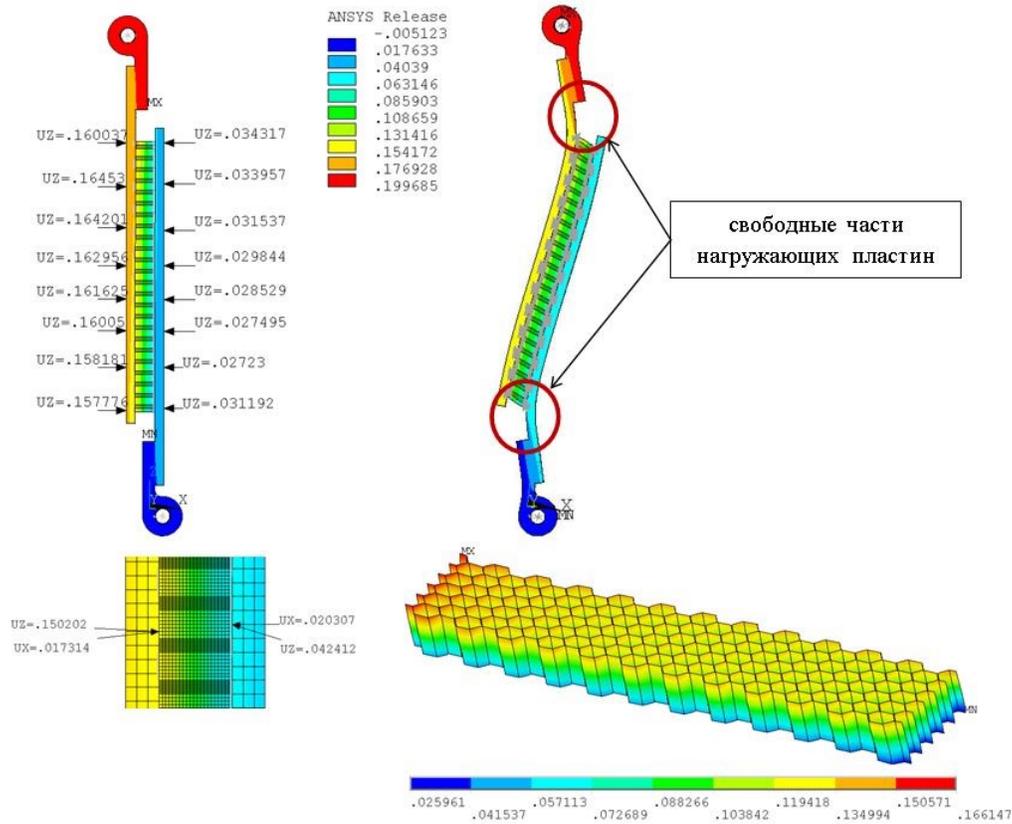


Рис. 3. Напряженно-деформированное состояние образца с расположением плоскостей склейки заполнителя вдоль плоскости нагружения образца.

где  $\Delta P$  — приращение нагрузки на участке, где определяется модуль,  $\Delta u$  — приращение относительное перемещение на участке, где определяется модуль;  $t$  — высота заполнителя,  $L$  — длина образца,  $b$  — ширина образца. По результатам испытаний 10 образцов из двух партий ( $L = 288$  мм,  $b = 76,2$  мм,  $t = 21,03 \pm 0,08$  мм) в каждой был определен относительный модуль сдвига

$$G_{xz}^{exp} = 1,00 \pm 0,09.$$

При численном анализе такого образца определена расчетная диаграмма «сила сдвига – относительный сдвиг» и по (2) вычислен расчетный относительный эффективный модуль сдвига для сотового заполнителя с расположением плоскостей склейки вдоль плоскости нагружения образца

$$G_{xz}^{sol} = \frac{\Delta P}{\Delta u} \frac{21,0}{288 \cdot 76,2} \approx 0,67.$$

Получено неудовлетворительное согласование с экспериментом, отличие по среднему значению составляет 33%.

Моделирование этого же образца без учета податливости нагружающих пластин и других металлических деталей оснастки позволило получить более точную оценку

$G_{xz}^{sol} = 0,83$ , что на 17% отличается от экспериментального значения и свидетельствует о возможных погрешностях численной модели образца с податливой металлической оснасткой.

*Определение эффективных характеристик сотового заполнителя с использованием ячейки периодичности*

Подход к определению эффективных характеристик сотового заполнителя был рассмотрен многими авторами на основе различных структурных подходов [1], [4], [5] и др. Например, в работе [12] проведен анализ определяемых эффективных характеристик сотового заполнителя с использованием различных способов моделирования в сравнении с экспериментальными данными. Рассмотрены структурные модели сотового заполнителя на основе упрощающих гипотез и модель на основе конечных элементов (КЭ). В [12] получено приемлемое совпадение расчетных значений модуля сдвига для всех применяемых методик расчета. При этом наиболее близкие значения получены при использовании КЭМ, но они выше экспериментальных данных. Высказано предположение: в расчетах используется идеально правильная форма соты, а в реальности (в эксперименте) наблюдается наличие начальной погиби ребристых элементов сот, что сказывается на понижении жесткости реального сотового заполнителя.

В [13] выполнено сравнение результатов с использованием метода прямого конечно – элементного моделирования в пакете ANSYS и по аналитическим зависимостям. При этом отмечено, что структурные модели сотового заполнителя на основе упрощающих гипотез, в отличие от КЭМ, дают существенно завышенные результаты для  $E_x, E_y, G_{xy}$ .

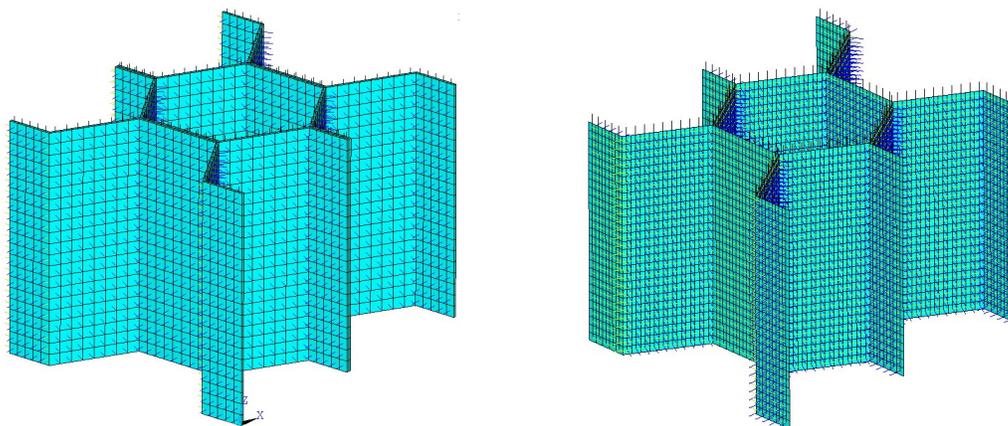


Рис. 4. КЭМ структурной ячейки сотового заполнителя высотой 21 мм: объемные элементы SOLID186 (слева), оболочечные элементы SHELL281 (справа).

В настоящей работе для определения эффективных характеристик сотового заполнителя выбрана ячейка периодичности, квадратной (в плане) формы (минимальный объем материала, в котором содержится достаточное для описания состояния тела число «носителей» механизмов процесса деформирования), показанная на рис. 1 с

двумя вариантами сетки использованных КЭ. При расчетах выполнен анализ сходимости от параметров сетки, а также анализ влияния способа закрепления по местам торцевого контакта (обшивки не моделировались).

Для определения эффективных характеристик применялся метод прямого конечно-элементного моделирования в пакете ANSYS. Проводились численные эксперименты на растяжения вдоль осей  $x, y, z$  и сдвиг в плоскостях  $xy, xz, yz$  (расчетная модель состоит из нескольких ячеек периодичности). Из численных экспериментов находились средние напряжения и деформации, а затем вычислялись эффективные характеристики с использованием закона Гука. Полученные значения относительных эффективных модулей сдвига для сотового заполнителя по результатам расчета структурных ячеек приведены в табл. 2.

Результаты расчета эффективных характеристик сотового заполнителя для структурной ячейки при различном способе моделирования показали хорошую сходимость результатов между собой и с результатами расчета образца при абсолютно жестких нагружающих пластинах, но все они дают заниженные значения искомых модулей.

Для выяснения факторов, влияющих на заниженную численную оценку жёсткостных характеристик сот, рассмотрено наличие клеевых наплывов (рис. 1) по торцевым поверхностям сотового заполнителя.

На КЭМ структурной ячейки с КЭ SOLID186 выполнен численный анализ влияния клеевых наплывов и модуля упругости клея на значение эффективного модуля сдвига сотового заполнителя вдоль плоскости склейки. При оценке влияния высоты клеевого наплыва на значение эффективного модуля сдвига сотового заполнителя клей моделировался в виде параллелепипеда с квадратным сечением. Результаты анализа приведены на рис. 5, из них следует, что незначительное изменение высоты клеевых наплывов может привести к значительному изменению эффективного модуля сдвига сотового заполнителя.

Дополнительными выявленными факторами, приводящими к увеличению статистических разбросов экспериментальных данных, являются:

- клеевые наплывы различной высоты;
- отклонения технологических процессов изготовления, хранения и отверждения клея.

Использованные при расчетах деформации структурных ячеек характеристики стеклопластиковой тонкой ленты сот нами экспериментально не определялись, поэтому на КЭМ структурной ячейки с КЭ SHELL281 выполнена численная оценка

Таблица 2. Результаты различного численного моделирования относительных эффективных модулей сдвига сотового заполнителя

Модуль сдвига	Расчет, КЭМ ячейки SOLID186	Расчет, КЭМ ячейки SHELL281	Расчет, КЭМ ячейки - жесткие пластины	Эксперимент
$G_{xz}$ (вдоль ПС)	0,827	0,850	0,830	1,00
$G_{yz}$ (поперек ПС)	0,543	0,544	0,543	0,62

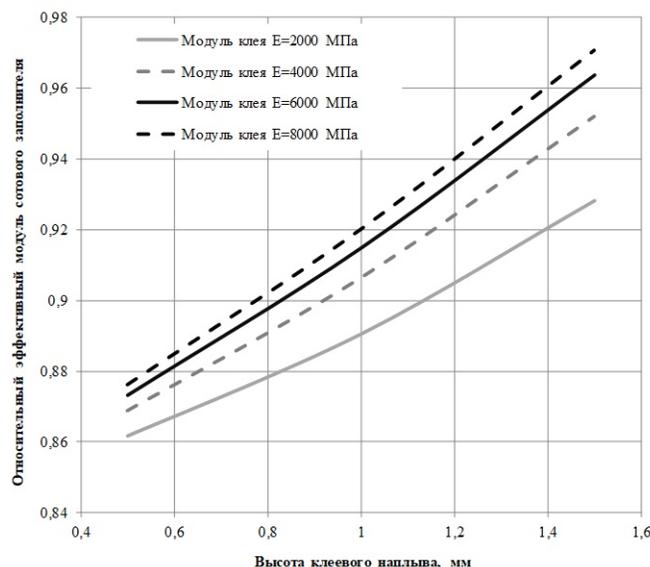


Рис. 5. Анализ влияния клеевых наплывов и модуля упругости клея на значение эффективного модуля сдвига сотового заполнителя.

влияния свойств материала сот на эффективный модуль сдвига сотового заполнителя. Она показала ожидаемое линейное влияние вариаций модуля сдвига в плоскости ленты стеклопластика на вариации эффективного модуля сотового заполнителя.

### Заключение

При испытании на сдвиг образцов с разной высотой сотового заполнителя получены две четко выделенные группы образцов, которые делятся по способу расположения плоскостей склейки заполнителя вдоль или поперек плоскости нагружения. Результаты эксперимента хорошо согласуются с данными, приведенными в [1], [11]. Полученные модули сдвига заполнителя статистически значимо не зависят от высоты сотового заполнителя.

По результатам эксперимента получены большие статистические разбросы данных, обусловленных, в основном, несовершенством различных этапов процедур приклейки сотовых образцов к стальным пластинам оснастки.

При нагружении образца сотового заполнителя сдвиговой нагрузкой в штатной оснастке по ASTM C 273 на поверхностях приклейки заполнителя к нагружающим пластинам кроме усилий сдвига возникают также усилия отрыва, распределенные неравномерно. Максимальные нормальные напряжения отрыва достигают 10% от напряжений сдвига в торцевых зонах.

Расчетное определение эффективных модулей сдвига сотового заполнителя путем численного анализа в пакете ANSYS конечно-элементных модели образца на сдвиг с явным моделированием сотовых ячеек и двух типов КЭ-моделей ячейки периодичности дает заниженные на 17 – 33% значения модулей сдвига по отношению к экспериментально определенным усредненным величинам.

Численный анализ учета клеевых наплывов разной высоты и модуля упругости клея для приклейки сотового заполнителя к обшивкам панелей, вариации модуля

сдвига стекло-пластиковой ленты сот на значение эффективного модуля сдвига сотового заполнителя показал значимость этих факторов на занижение расчетных значений эффективных модулей сдвига сотового заполнителя.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Расчет трехслойных панелей / А.Я. Александров, Л.Э. Брюккер, Л.М. Куршин [и др.]. Москва: Оборонгиз, 1960. 271 с.
- [2] Берсудский В.Е., Крысин В.Н., Лесных С.И. Технология изготовления сотовых авиационных конструкций. Москва: Машиностроение, 1975. 296 с.
- [3] Noor A., Burton W., Bert C. Computational models for sandwich panels and shells // Applied Mechanics Reviews. 1996. no. 3 (49). P. 155–199.
- [4] Брюккер Л.Э., Ракин А.С. Испытания трехслойных стержней при нормальных и повышенных температурах // Динамика и прочность авиационных конструкций: Межвуз. сб. научн. трудов. Новосибирск, 1978. № 4. С. 73–79.
- [5] Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. Москва: Машиностроение, 1980. 375 с.
- [6] Ендогур А.И., abd К.М. Иерусалимский М.В. Вайнберг. Сотовые конструкции. Москва: Машиностроение, 1986. 200 с.
- [7] Теоретико-экспериментальный метод определения усредненных упругих и про-странственных характеристик сотового заполнителя трехслойных конструкций / Н.И. Акишев, И.И. Закиров, В.Н. Паймушин [и др.] // Механика композитных материалов. 2011. № 4 (47). с. 543–556.
- [8] Усредненные упругие и прочностные характеристики сотового заполнителя и теоретико-экспериментальный метод их определения / В.Н. Паймушин, И.И. Закиров, С.А. Луканкин [и др.] // Механика композитных материалов. 2012. № 5 (48). с. 745–764.
- [9] ASTM C273/C273M - 11. Standard Test Method for Shear Properties of Sandwich Core Materials. ASTM International. 2017. 7.
- [10] ASTM D5687/D5687M - 95. Standard Guide for Preparation of Flat Composite Panels with Processing Guide-lines for Specimen Preparation. ASTM International. 2017. 15.
- [11] Прочность, устойчивость, колебания. Справочник. Т.2. Москва: Машиностроение, 1968. 464 с.
- [12] Щербатюк Д.А., Янковский А.П. Верификация структурных моделей пространственно-армированных пенопластмасс и сотовых заполнителей сэндвич-панелей на основе проведения численных экспериментов // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28 / под ред. А.В. Чигарев. Минск: БНТУ, 1968. С. 322–327.
- [13] Карпинский Д.М. Композитные материалы: справочник. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.

A. A. Adamov<sup>1</sup>, A. V. Toropitsina<sup>2</sup>

## EXPERIMENTAL AND THEORETICAL STUDY OF DEFORMATION OF MULTILAYER HONEYCOMB PANELS DURING SHEAR TEST

<sup>1</sup> *Institute of Continuous Media Mechanics of UB RAS, Perm, Russia*

<sup>2</sup> *JSC "ODK-Aviadvigatel", Perm, Russia .*

**Abstract.** The paper presents an experimental determination of effective shear modulus and strength limits during shear tests of flat multilayer honeycomb panels with thin carbon fiber sheaths and fiberglass tape filler. A statistically significant difference in the effective shear modules along and across the tape bonding planes in the cells of the honeycomb, their inverse correlation with the total height of the honeycomb filler, was revealed. The effective shear strength limits do not differ statistically and do not depend on the total height of the honeycomb. Numerical analysis of the factors influencing the underestimation of the calculated values of the effective shear modules is performed on finite element models.

**Keywords:** multilayered honeycomb panels, elastic and strength characteristics, finite element model

### REFERENCES

- [1] Calculation of sandwich panels / A. Aleksandrov, L. Brucker, L. Kurshin et al. Moscow: Oborongiz, 1960. 271 p. (in Russian).
- [2] Bersudsky V., Krysin V., Lesnykh S. Manufacturing technology of cellular aircraft structures. Moscow: Mashinostroenie, 1975. 296 p. (in Russian).
- [3] Noor A., Burton W., Bert C. Computational models for sandwich panels and shells // Applied Mechanics Reviews. 1996. no. 3 (49). P. 155–199.
- [4] Brucker L., Rakin A. Testing of three-layer rods under normal and elevated temperatures // Dynamics and Strength of Aircraft Structures. Novosibirsk, 1978. no. 4. P. 73–79. (in Russian).
- [5] Bolotin V., Novichkov Y. Mechanics of multilayer structures. Moscow: Mashinostroenie, 1980. 375 p. (in Russian).
- [6] Endogur A., Wainberg M., Jerusalimskiy K. Cell structures. Moscow: Mashinostroenie, 1986. 200 p. (in Russian).
- [7] Theoretical and experimental method for determination of averaged elastic and spatial characteristics of honeycomb filler of three-layer structures / N. Akishev, I. Zakirov, V. Paymushin et al. // Mechanics of Composite Materials. 2011. no. 4 (47). p. 543–556.
- [8] Theoretical and experimental method for determination of averaged elastic and spatial characteristics of honeycomb filler of three-layer structures / V. Paimushin, I. Zakirov, S. Lukankin et al. // Mechanics of Composite Materials. 2012. no. 5 (48). p. 745–764.
- [9] ASTM C273/C273M - 11. Standard Test Method for Shear Properties of Sandwich Core Materials. ASTM International. 2017. 7.
- [10] ASTM D5687/D5687M - 95. Standard Guide for Preparation of Flat Composite Panels with Processing Guidelines for Specimen Preparation. ASTM International. 2017. 15.
- [11] Strength, stability, oscillations. Handbook. Vol. 2. Moscow: Mashinostroenie, 1968. 464 p. (in Russian).
- [12] Shcherbatyuk D., Yankovsky A. Verification of structural models of spatially reinforced foam plastics and honeycomb sandwich panels based on numerical experiments // Theoretical and Applied Mechanics. Issue 28 / Ed. by A. Chigarev. Minsk: BNTU, 1968. P. 322–327. (in Russian).
- [13] Karpinsky D. Composite materials: Handbook. Kiev: Naukova Dumka, 1985. 592 p. (in Russian).

---

*Adamov Anatoliy Arsangaleevich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Senior Researcher, Leading Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics of UB RAS, Perm, Russia.

*Toropitsina Anna Vladimirovna*, Deputy Head of the Department, JSC "ODK-Aviadvigatel", Perm, Russia.

В. И. Гультияев, А. А. Алексеев, А. Н. Широков, А. Н. Булгаков

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕРИАЛА СТАЛЬ 45 ПРИ ДЕФОРМИРОВАНИИ ПО ПРОГРАММАМ СМЕЩЁННОГО ВЕЕРА

*Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия*

**Аннотация.** В статье приведены результаты экспериментального исследования напряженно деформированного состояния цилиндрических оболочек при реализации программ по типу смещенного веера в пространстве деформаций и описана необходимость их проведения. Показано, как величина угла излома траектории деформирования влияет на глубину “нырка” пассивной деформации при частичном упругом разгрузении материала. Статья направлена на расширение знаний о напряженно-деформируемом состоянии материалов, используемых в гражданской, машиностроительной, аэрокосмической, ядерной, биомедицинской и многих других отраслях.

**Ключевые слова:** экспериментальные исследования, двухзвенные траектории, постулат изотропии, испытания и нагружения, напряжено-деформированное состояние оболочек.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.009

УДК: 539.374

---

© Гультияев В. И., Алексеев А. А., Широков А. Н., Булгаков А. Н., 2023

*Гультияев Вадим Иванович*

**e-mail:** vig0@mail.ru, доктор технических наук, заведующий кафедрой автомобильных дорог, оснований и фундаментов, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия,

*Алексеев Андрей Алексеевич*

**e-mail:** alexeew@bk.ru, кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия,

*Широков Александр Николаевич*

**e-mail:** kafedra\_adof@mail.ru, аспирант очной формы обучения кафедры автомобильных дорог, оснований и фундаментов, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия,

*Булгаков Александр Николаевич*

**e-mail:** elstatik@bk.ru, ассистент кафедры автомобильных дорог, оснований и фундаментов, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Поступила 20.08.2023

**1. Введение** В Тверском государственном техническом университете систематически проводятся экспериментальные исследования на сложное нагружение с использованием автоматизированного испытательного оборудования. К настоящему моменту накоплено большое количество экспериментального материала по различным видам траекторий: двухзвенным и многозвенным, плоским и пространственным, ломанным и криволинейным, открытым и замкнутым [1–8]. Однако всё ещё существует ряд не полностью исследованных траекторий, среди которых была выбрана программа испытаний по типу пропорционально смещенного однопроцентного веера.

**2. Постановка задачи** Данная статья является первой частью из серии экспериментов, посвященных изучению смещенных вееров. Чтобы исследовать данный набор траекторий, необходима разработка и реализация экспериментальных программ деформирования по типу смещенного веера с проведением измерений напряжений и деформаций. Обработка полученных данных и анализ результатов, с целью выявления закономерностей в напряженно-деформированном состоянии оболочек в зависимости от угла, под которым происходит излом траектории, а также исследовании глубины, достигаемой “нырком”, когда материал частично разгружается.

**3. Методика и программы эксперимента** Эксперименты осуществлялись в Тверском государственном техническом университете с использованием автоматизированного испытательного комплекса им. А.А. Ильюшина СН-ЭВМ, расположенного в лаборатории механических испытаний на кафедре сопротивления материалов теории упругости и пластичности [9, 10].

В качестве образцов использовались тонкостенные ( $h = 1,0$  мм) цилиндрические оболочки, имеющие отношение диаметра срединной поверхности к толщине стенки  $D/h = 31,0$ . Оболочки изготовлены из материала сталь 45 с площадкой текучести (рис. 1) в состоянии поставки, химический состав подтвержден спектральным анализом. Материал считается в достаточной степени начально-изотропным на основании проведенной серии базовых экспериментов по типу центрального веера. Серия включала пять экспериментов: первый – растяжение; второй – кручение; третий – сжатие; четвертый – пропорциональное растяжение с кручением; пятый – пропорциональное сжатие с кручением.

Компоненты тензоров напряжений  $\sigma_{ij}$  ( $ij = 1, 2, 3$ ) и деформаций  $\varepsilon_{ij}$  ( $ij = 1, 2, 3$ ) вычислялись по данным двухкомпонентного силоизмерителя и дифференциального тензометра (база 50 мм) с датчиком поперечных деформаций, закрепленного на рабочей части образца длиной  $l = 110$  мм.

Значения компонент векторов напряжений, деформаций и их модулей в девиаторном пространстве напряжений  $\Sigma_3$  и деформаций  $E_3$  вычислялись по формулам:

$$\begin{cases} S_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left( \sigma_{11} - \frac{\sigma_{22}}{2} \right); S_2 = \frac{\sigma_{22}}{\sqrt{2}} = S_3 = \sqrt{2} \cdot \sigma_{12} \\ \Theta_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \varepsilon_{11}; \Theta_2 = \sqrt{2} \cdot \left( \varepsilon_{22} + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{11} \right); \Theta_3 = \sqrt{2} \cdot \varepsilon_{12}; \\ \sigma = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \quad \Theta = \sqrt{\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2} \end{cases}$$

где  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  ( $ij = 1, 2, 3$ ) – компоненты тензоров напряжений и деформаций.

Эксперименты были осуществлены при нормальной температуре. Напряженное состояние оболочек рассматривалось как плоское, а материал считался несжимаемым, приближенно имеющим значение коэффициента Пуассона  $\mu \rightarrow 0,5$ .

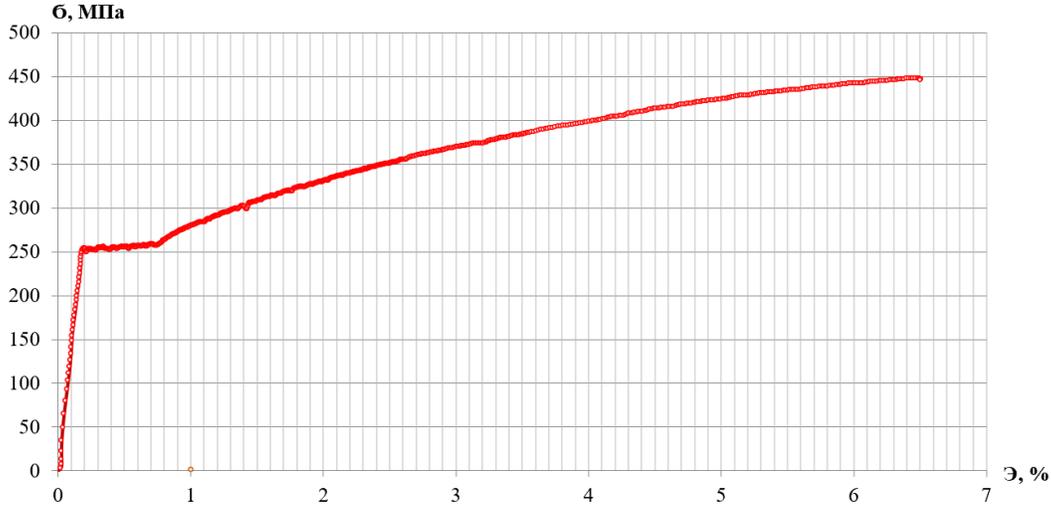


Рис. 1. Диаграмма растяжения исследуемого материала

Аппроксимация диаграммы материала с площадкой текучести, представленной на (рис. 1), может быть выполнена, согласно [10], выражениями (1):

$$\sigma = \begin{cases} 2G\varepsilon, & \text{при } \varepsilon \leq \varepsilon^T \\ \sigma^T, & \text{при } \varepsilon^T \leq \varepsilon \leq \varepsilon_*^T \\ \sigma^T + 2G_* \cdot (\varepsilon - \varepsilon_*^T) + \sigma_a \cdot \left(1 - e^{-\beta \cdot (\varepsilon - \varepsilon_*^T)}\right), & \text{при } \varepsilon > \varepsilon_*^T \end{cases} \quad (1)$$

На рисунке 2 показаны результаты: красным цветом представлена экспериментальная диаграмма деформирования, синим – соответствующая ей аппроксимационная кривая, построенная на основе формулы (1) при значениях параметров  $2G = 1,45 \cdot 10^5$  МПа,  $\varepsilon^T = 0,178$ ,  $\varepsilon_*^T = 0,748$ ,  $\sigma^T = 255$  МПа,  $2G_* = 2200$  МПа,  $\sigma_a = 70$  МПа,  $\beta = 0,8$ . Погрешность данной аппроксимации не превосходит 2%.

Для реализации программы испытаний была выбрана плоскость  $\varepsilon_1\varepsilon_3$  в векторном пространстве деформаций (рис. 3). Программа представляет собой пропорционально смещенный веер из двухзвенных ломанных траекторий. В данной серии испытаний было использовано 7 образцов, прошедших проверку геометрических параметров (толщины стенки, радиуса срединной поверхности, параллельности, биения и т.д.). Излом каждой траектории осуществлялся при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1\%$ , значения углов излома представлены таблице 1.

Отклик на реализуемую программу в плоскости  $S_1S_3$ , соответствующий программе, реализовывался векторного пространства девиатора напряжений.

**4. Результаты** По результатам обработки полученных данных построены диаграммы  $\sigma - S$  и  $\sigma - \varepsilon$  (рис. 5, 6). Видно, что после излома траектории в точке К,

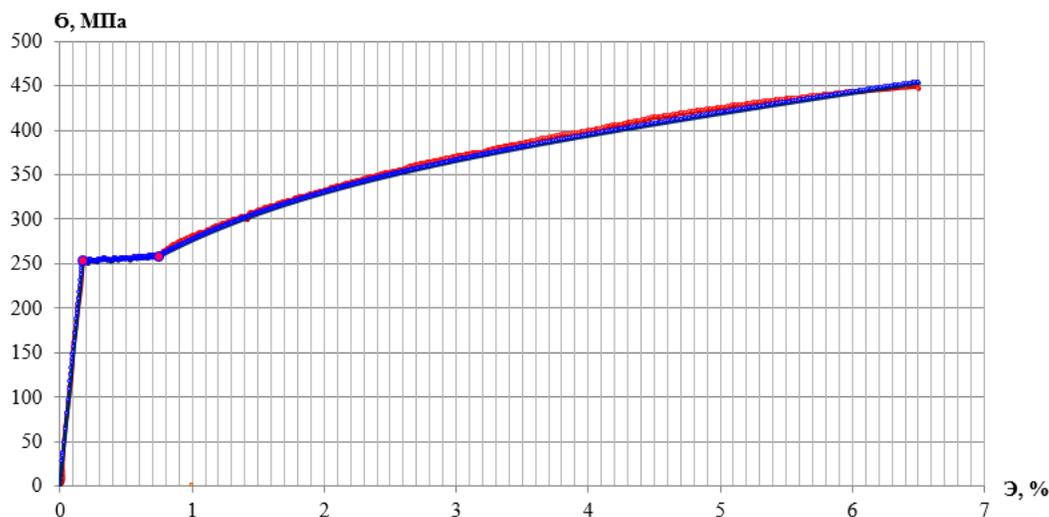


Рис. 2. Аппроксимационная диаграмма растяжения

Номер образца	Угол излома траектории	Вид нагружения после излома
4	0	Растяжение с кручением
6	45	Растяжение
7	-45	Кручение
11	90	Растяжение со знакопеременным кручением
9	-90	Сжатие с кручением
10	135	Знакопеременное кручение
8	-135	Сжатие

Таблица 1. Параметры эксперимента

соответствующей некоторому значению напряжения  $\sigma_k^T$ , имеют место “нырки”. Глубина, достигаемая “нырком”, когда материал частично разгружается, тем больше, чем больше угол излома траектории деформирования в точке К. Ниспадающая ветвь соответствует участку частичной сложной упругой разгрузки. Возникновение вторичных пластических деформаций происходит при достижении вторичного предела текучести  $\sigma_{вТ}^T$ , наблюдается “протыкание” предельной поверхности.

На рисунках 7 и 8 представлены локальные диаграммы деформирования  $S_n - \mathcal{E}_n$  ( $n = 1, 3$ ). На ниспадающем участке “нырка” в плоскости  $S_1 - \mathcal{E}_1$  происходит упругая разгрузка для образцов подверженных сжатию и сжатию с кручением и упругое нагружение при растяжении со знакопеременным кручением, на диаграмме  $S_3 - \mathcal{E}_3$  упругая разгрузка происходит при растяжении со знакопеременным кручением. На восходящей ветви “нырка” упругая разгрузка по растяжению-сжатию продолжается, но происходит активное пластическое деформирование от кручения, что и является причиной прекращения частичной упругой разгрузки материала.

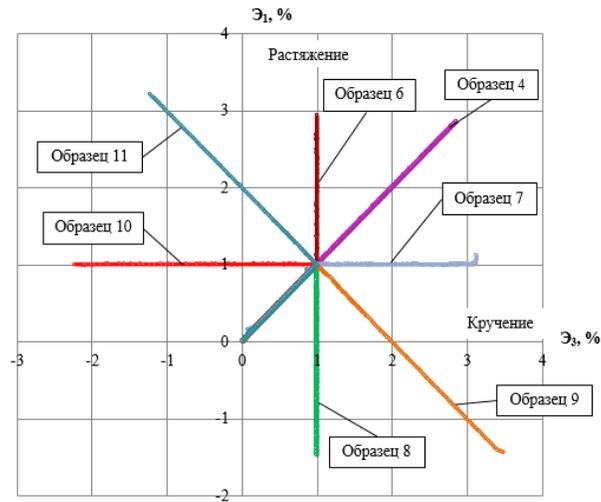


Рис. 3. Программы испытания оболочек с изломом при  $\Theta_1 = \Theta_3 = 1\%$

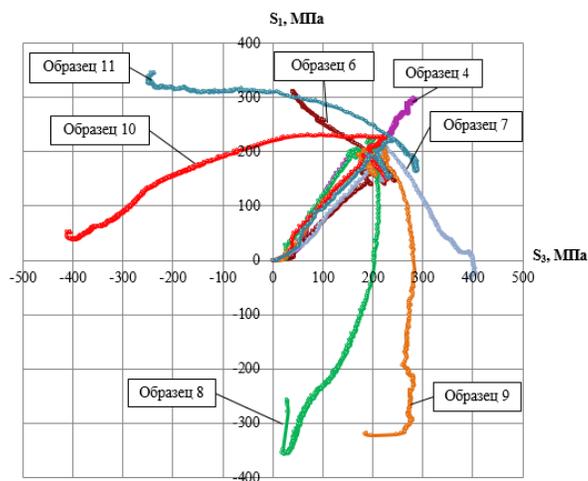


Рис. 4. Отклик на программу испытаний

Закон сложной частичной упругой разгрузки, на ниспадающем участке “нырка”, по предложению В.Г. Зубчанинова [10], может быть принят линейным (2):

$$\Delta\sigma = 2G \cdot (S - S_0) = 2G \cdot (\Theta - \Theta_0) \quad (2)$$

где  $S_0$  и  $\Theta_0$  – значения компонент векторов напряжений и деформаций в точке излома траектории  $K$ .

На участке восходящей ветви имеет место локально простой процесс. Закон вторичного пластического деформирования, после завершения частичной упругой разгрузки согласно гипотезе В.Г.Зубчанинова [11, 12], можно приближенно представить в виде

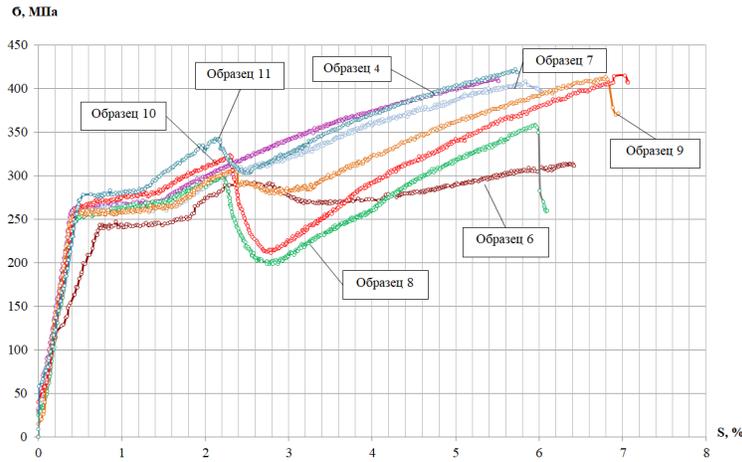


Рис. 5. Диаграмма  $\sigma - S$

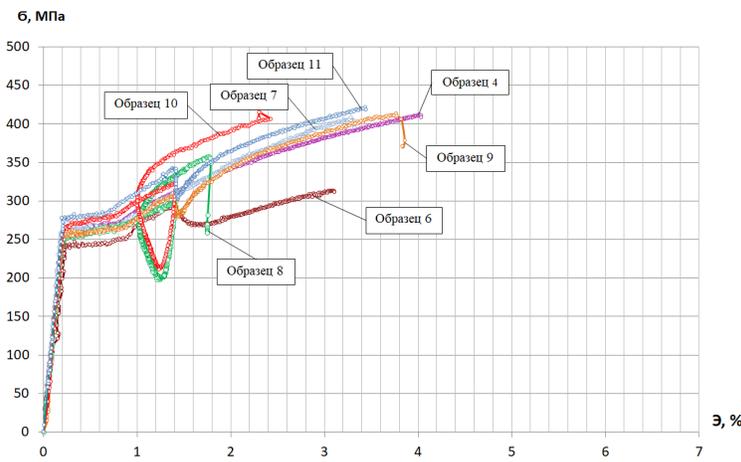


Рис. 6. Диаграмма  $\sigma - \epsilon$

выражения (3):

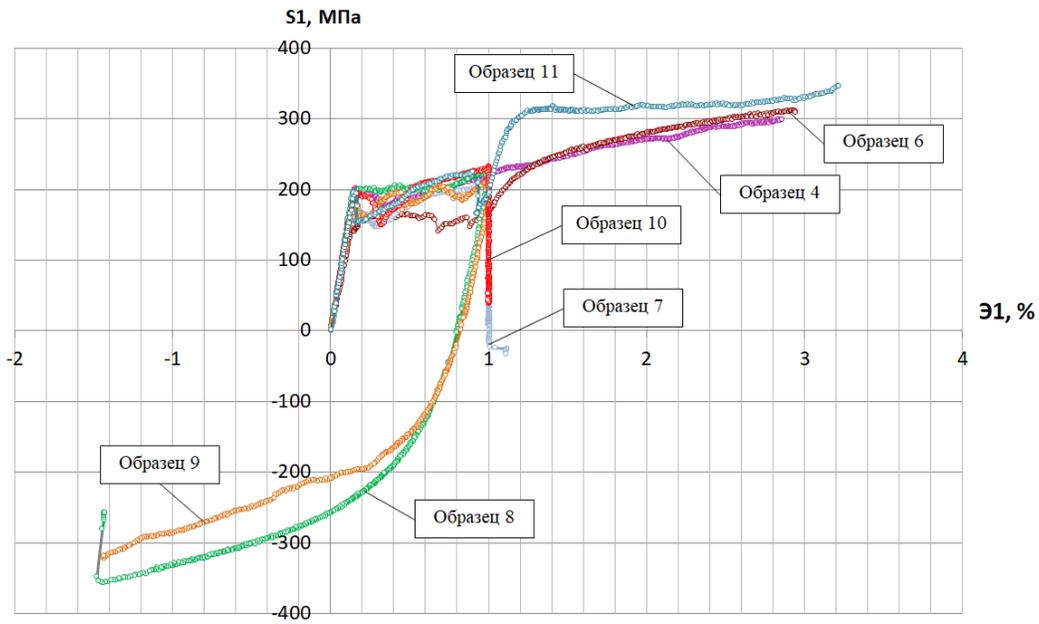
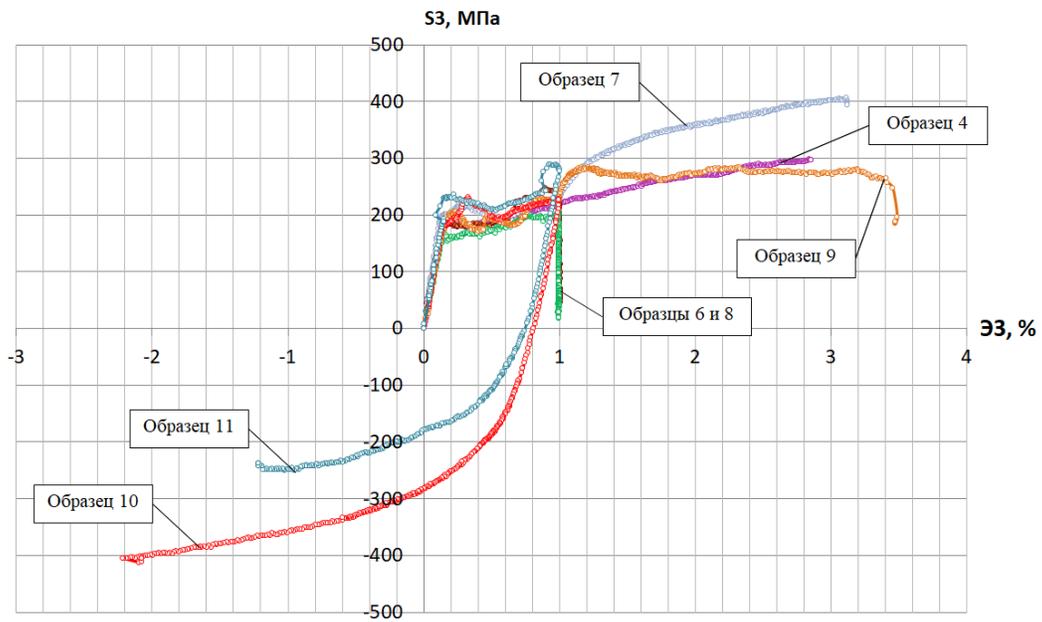
$$\sigma = \Phi(S) = \sigma_{\text{BT}}^T + 2G_* \cdot (S - S_0^{\text{BT}}) + \sigma_a \cdot \left(1 - e^{-\beta \cdot (S - S_0^{\text{BT}})}\right), \quad (3)$$

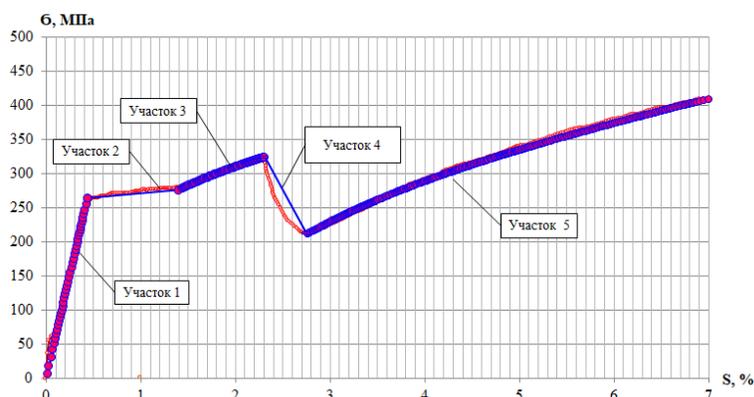
где  $S_0^{\text{BT}}$  – длина дуги в начале участка восходящей ветви при  $\sigma = \sigma_{\text{BT}}^T$

На изображении 9 показаны: красным – экспериментальная диаграмма деформирования для образца №10 (угол излома  $135^\circ$ ), синим – её теоретическая аппроксимация согласно (3). Погрешность аппроксимации при  $2G_* = 3250$  МПа,  $\sigma_a = 63,5$  МПа,  $\beta = 0,7$  не превосходит 3%.

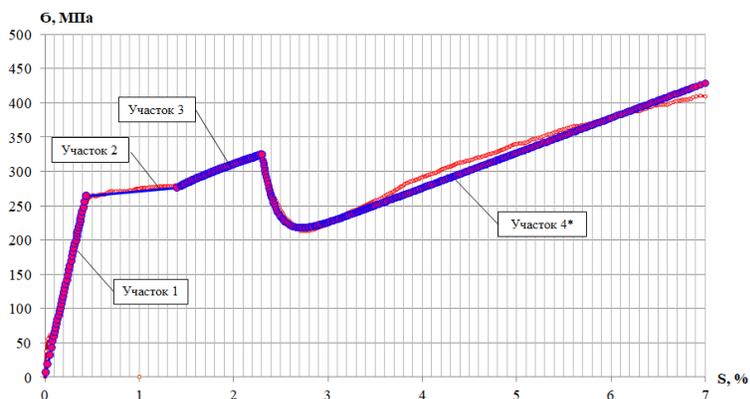
Прямолинейный участок (рис.9, участок 4) можно заменить участком 4\* по формуле (4):

$$\sigma = \sigma_{\text{BT}}^T + 2G_* \cdot (S - S_0^{\text{BT}}) + \sigma_a \cdot e^{-\beta \cdot (S - S_0^{\text{BT}})} \quad (4)$$

Рис. 7. Локальная диаграмма  $S_1 - \epsilon_1$ Рис. 8. Локальная диаграмма  $S_3 - \epsilon_3$

Рис. 9. Диаграмма  $\sigma - S$  с участком линейной аппроксимацией

Тогда при параметрах  $2G_* = 5100$  МПа,  $\sigma_a = 6$  МПа,  $\beta = 7$  (рис. 10, участок 4\*) погрешность данной аппроксимации не превосходит 6%.

Рис. 10. Диаграмма  $\sigma - S$  с линейной аппроксимацией

**5. Вывод** Серия экспериментов по траекториям в виде смещенных вееров является продолжением и развитием работ выполненных в ТвГТУ за прошедшие годы. На основе анализа полученных результатов можно заключить, что используемые модели поведения материала для траектории с углом излома  $135^\circ$  демонстрируют достаточно точно соответствие с экспериментальными данными. В будущих статьях необходимо провести более широкий анализ и сравнение результатов для различных углов излома траектории и при различном начальном смещении веера.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Гульятев В. И. Численное моделирование процессов сложного упругопластического деформирования стали по двузвенным ломаным траекториям // Проблемы прочности и пластичности. 2014. Т. 76, № 1. с. 18–25.

- [2] Экспериментальные исследования сложного нагружения латуни л63 на двузвенных ломаных траекториях типа “смещенный веер” / В. Г. Зубчанинов, В. И. Гулятьев, А. А. Алексеев [и др.] // Вестник Чувашиского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. Т. 1, № 55. с. 18–25. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.003.
- [3] Экспериментальное исследование латуни л63 при сложном нагружении по двузвенным ломаным / В. Г. Зубчанинов, В. И. Гулятьев, А. А. Алексеев [и др.] // Авиационные двигатели. 2023. Т. 1, № 18. с. 99–103.
- [4] Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Гулятьев В. И. Моделирование процессов упругопластического деформирования материалов по многозвенным кусочно-ломаным прямолинейным траекториям // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2017. № 3. с. 203–215.
- [5] Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Гулятьев В. И. Численное моделирование процессов пластического деформирования стали по многозвенным кусочно-ломаным траекториям // В сборнике: Материалы докладов 51-й международной научно-технической конференции преподавателей и студентов в двух томах. 2018. с. 291–293.
- [6] Алексеев А. А., Зубчанинов В. Г., Гулятьев В. И. Моделирование процессов сложного упругопластического деформирования материалов по плоским траекториям // В сборнике: Упругость и неупругость. материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 110-летию со дня рождения А. А. Ильюшин. Москва, 2021. с. 171–176.
- [7] Алексеев А. А., Зубчанинов В. Г., Гулятьев В. И. Экспериментальное и теоретическое исследование процессов сложного упругопластического деформирования материалов по некоторым многозвенным траекториям // Вестник Чувашиского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. Т. 3, № 45. с. 64–71. DOI: 10.37972/chgpu.2020.65.81.006.
- [8] Процессы сложного нагружения конструкционной стали по пятизвенной кусочно-ломаной траектории деформирования / В. Г. Зубчанинов, А. А. Алексеев, В. И. Гулятьев [и др.] // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 61. с. 32–44.
- [9] Методика экспериментального исследования пластичности поликристаллических материалов на испытательном комплексе сн-эвм / В. И. Гулятьев, В. Г. Зубчанинов, И. А. Саврасов [и др.] // Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела. Материалы IX Международного научного симпозиума, посвященного 90-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники РФ профессора В. Г. Зубчанинова / под ред. В. Г. Зубчанинова, А. А. Алексеева, В. И. Гулятьева. Тверь, 2021. с. 34–36.
- [10] Черемных С. В., Скудалов П. О. Установка сн-эвм для экспериментальных исследований устойчивости круговых цилиндрических оболочек при комбинированном нагружении // Техника и технология транспорта. 2019. Т. 8, № 13. с. 45.
- [11] Зубчанинов В. Г. Механика процессов пластических сред. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
- [12] Зубчанинов В. Г. Определяющие соотношения общей теории пластичности // Устойчивость и пластичность при сложном нагружении. Тверь: ТГТУ, 1994. с. 14–37.

V. I. Gulyaev, A. A. Alekseev, A. N. Shirokov, A. N. Bulgakov

## EXPERIMENTAL STUDY OF STEEL 45 MATERIAL DURING DEFORMATION ACCORDING TO DISPLACED FAN PROGRAMS

*Tver State Technical University, Tver, Russia*

**Abstract.** The article presents the results experimental study of the stress-strain state cylindrical shells when implementing programs like a displaced fan in space of deformations and the need for their implementation is described. Shown how the magnitude of the bend angle of the deformation trajectory affects the depth of the “dive” passive deformation during partial elastic unloading of the material. Article aimed at expanding knowledge about the stress-strain state materials used in civil, mechanical engineering, aerospace, nuclear, biomedical and many other industries.

**Keywords:** experimental studies, two-link trajectories, isotropy postulate, testing and loading, stress-strain state of shells.

### REFERENCES

- [1] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Gulyaev V. I. Numerical modeling of processes of complex elastoplastic deformation of steel along two-link broken trajectories // Problems of strength and ductility. 2014. Vol. 76, no. 1. p. 18–25.
- [2] Experimental studies of complex loading of brass L63 on two-link broken trajectories of the “displaced fan” type / V. G. Zubchaninov, V. I. Gulyaev, A. A. Alekseev et al. // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. AND I. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2023. Vol. 1, no. 55. p. 18–25. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.003.
- [3] Experimental study of brass L63 under complex loading along two-link broken lines / V. G. Zubchaninov, V. I. Gulyaev, A. A. Alekseev et al. // Aircraft engines. 2023. Vol. 1, no. 18. p. 99–103.
- [4] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Gulyaev V. I. Modeling of processes of elastoplastic deformation of materials along multi-link piecewise broken rectilinear trajectories // Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics. 2017. no. 3. p. 203–215.
- [5] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Gulyaev V. I. Numerical modeling of the processes of plastic deformation of steel along multi-link piecewise broken trajectories // In the collection: Materials of reports of the 51st international scientific and technical conference of teachers and students in two volumes. 2018. p. 291–293.
- [6] Alekseev A. A., Zubchaninov V. G., Gulyaev V. I. Modeling of processes of complex elastoplastic deformation of materials along flat trajectories // In the collection: Elasticity and inelasticity. materials of the International Scientific Symposium on the Problems of Mechanics of Deformable Bodies, dedicated to the 110th anniversary of the birth of A. A. Ilyushin. Moscow, 2021. p. 171–176.
- [7] Alekseev A. A., Zubchaninov V. G., Gulyaev V. I. Experimental and theoretical study of processes of complex elastoplastic deformation of materials along some multi-link trajectories // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. AND I. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2020. Vol. 3, no. 45. p. 64–71. DOI: 10.37972/chgpu.2020.65.81.006.

---

*Gulyaev Vadim Ivanovich*, Doctor of Technical Sciences, Head of the Department, Tver State Technical University, Tver, Russia,

*Alekseev Andrey Alekseevich*, Cand. Tech. Sci., Tver State Technical University, Tver, Russia.

*Shirokov Aleksandr Nikolaevich*, Post Graduate Student, Tver State Technical University, Tver, Russia.

*Bulgakov Alexander Nikolaevich*, Assistant, Tver State Technical University, Tver, Russia.

- [8] Processes of complex loading of structural steel along a five-link piecewise broken deformation path / V. G. Zubchaninov, A. A. Alekseev, V. I. Gulyaev et al. // Bulletin of Tomsk State University. Mathematics and mechanics. 2019. no. 61. p. 32–44.
- [9] Method of experimental study of the plasticity of polycrystalline materials on the SN-computer testing complex / V. I. Gulyaev, V. G. Zubchaninov, I. A. Savrasov et al. // Problems of strength, plasticity and stability in the mechanics of deformable solids. Materials of the IX International Scientific Symposium dedicated to the 90th anniversary of the birth of the Honored Worker of Science and Technology of the Russian Federation Professor V. G. Zubchaninov / Ed. by V. G. Zubchaninov, A. A. Alekseev, V. I. Gulyaev. Tver, 2021. p. 34–36.
- [10] Cheremnykh S. V., Skudalov P. O. Installation of SN-computers for experimental studies of the stability of circular cylindrical shells under combined loading // Engineering and technology of transport. 2019. Vol. 8, no. 13. p. 45.
- [11] Zubchaninov V. G. Mechanics of plastic processes. M.: FIZMATLIT, 2010.
- [12] Zubchaninov V. G. Constitutive relations of the general theory of plasticity // Stability and ductility under complex loading. Tver: TSTU, 1994. p. 14–37.

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

## ТЕРМИЧЕСКИЕ И АТЕРМИЧЕСКИЕ ПЛОСКИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В АЦЕНТРИЧЕСКОМ ИЗОТРОПНОМ ТЕЛЕ

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** Настоящая статья посвящена вопросам распространения плоских термоупругих гармонических волн в ацентрическом изотропном микрополярном теле. С этой целью сначала рассматриваются динамические уравнения ацентрического изотропного тела. Определяются пространственные поляризации плоских волн трансляционных и спиновых перемещений. Обсуждается качественный характер возможных волновых решений уравнений связанной микрополярной термоупругости. Отдельно рассматривается случай атермической волны.

**Ключевые слова:** волна, поляризация, волновой вектор, трансляционное перемещение, спиновое перемещение, микрополярность, ацентрическое изотропное тело, волновое число, термоупругость, атермическая волна

DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.010

УДК: 539.374

**1. Вводные замечания.** Развитие современных методов производства материалов и метаматериалов в значительной степени определяется развитием инновационных технологических приемов их термомеханической обработки. Получаемые изделия обладают специфическими микроструктурными особенностями, проявляющими гиротропные (гемитропные) свойства. Для описания термомеханического поведения таких материалов требуется привлечение неклассических моделей современной механики сплошных сред. К таким моделям относятся ацентрические изотропные микрополярные тела. Основной особенностью таких тел является чувствительность их определяющих псевдоскаларов к преобразованиям, изменяющим ориентацию трехмерного пространства (зеркальным отражениям и инверсиям пространства). Практическая значимость исследований в этой области механики континуума связана с

---

© Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н., 2023

*Мурашкин Евгений Валерьевич*

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

*Радаев Юрий Николаевич*

e-mail: radaev@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМех РАН (№ госрегистрации 123021700050-1).

Поступила 20.06.2023

моделированием поведения биоматериалов, используемых в медицине, сотовых конструкций, керамик, гранулированных материалов. Биологические ткани животного происхождения (мышечная ткань, длинные кости, стенки кровеносных сосудов) проявляют выраженные гиротропные свойства, что подтверждается публикациями [1–3].

Термомеханика микрополярных континуумов — бурно развивающаяся область механики сплошных сред, о чем свидетельствуют многочисленные монографии, посвященные этому вопросу [1–8]. Литературный поиск позволяет заключить, что подавляющее большинство из них посвящено вопросам моделирования линейных изотропных микрополярных сред, и лишь скудные источники посвящены ацентрическим изотропным телам. В случае общей анизотропии, микрополярное упругое тело характеризуется 171-ой определяющей постоянной, что существенно усложняет анализ систем дифференциальных уравнений, возникающих при решении конкретных прикладных задач. Ацентрическое изотропное тело задается девятью определяющими константами, что всего на три больше, чем в изотропном случае. В конвенциональных микрополярных теориях механики деформируемых сред [2] оперируют с двумя независимыми кинематическими полями: трансляционными и спинорными перемещения (микророторы), которые наиболее естественно задаются псевдовекторами (в частности, контравариантным псевдовектором веса +1 [9] или ковариантным псевдовектором веса –1 [10]). Использование алгебры и анализа псевдотензоров [11] позволяет получить геометрически и физически непротиворечивые формулировки теорий микрополярных тел, которые могут быть легко трансформированы к формулировкам в терминах абсолютных тензоров с помощью степеней псевдоскалярных единиц.

Волновые задачи механики микрополярных континуумов возникают при моделировании процессов медицинской диагностики, таких как, ультразвуковое исследование, сонография, спектральная доплерография. Теоретической основой для указанных методов диагностики могут служить задачи о распространении гармонических волн в сплошной среде [12–14]. Волновым задачам термомеханики микрополярных континуумов посвящена обширная литература [4–8]. В настоящей работе рассматривается задача о распространении плоской гармонической волны в ацентрическом изотропном термоупругом микрополярном континууме.

**2. Трансляционные и спинорные перемещения.** Рассмотрим Евклидово трехмерное пространство [15]. Введем понятие фундаментального ориентирующего псевдоскаляра (веса +1) и двух псевдоскалярных единиц в соответствии со следующими зависимостями [16]:

$$e = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$$

$$\overset{[+1]}{1} = e, \quad \overset{[-1]}{1} = e^{-1}. \quad (1)$$

Отметим, что знак псевдоскалярной единицы (1) определяет ориентации координатных реперов, т.е. для правоориентированных троек векторов —  $\overset{[+1]}{1} > 0$ , для левоориентированных —  $\overset{[+1]}{1} < 0$ .

Кроме того, целые степени псевдоскалярных единиц ковариантно постоянны, т.е.

$$\nabla_k \overset{[\pm g]}{1} = 0,$$

где  $\nabla_k$  — оператор ковариантного дифференцирования в метрике  $g_{js}$ .

В конвенциональных микрополярных теориях термомеханики [2] оперируют с двумя независимыми полями трансляционных и спинорных перемещений (микроповоротами), которые наиболее естественно задаются абсолютными векторами (контравариантным  $u^s$  или ковариантным  $u_s$ ) и псевдовекторами (в частности, контравариантным псевдовектором  $\overset{[+1]}{\phi}^s$  веса +1 [9] или ковариантным псевдовектором  $\overset{[-1]}{\phi}_s$  веса -1 [10]). Псевдотензорная формулировка микрополярной теории может быть преобразована к ковариантной, представленной в работе [4], согласно правилу баланса весов [17, 18].

**3. Динамические уравнения гемитропной микрополярной среды.** В работе [19] рассматривалась псевдотензорная формулировка связанного термоупругого ацентрического изотропного тела в терминах абсолютного ковариантного вектора трансляционных перемещений  $u_s$  и контравариантного псевдовектора спинорных перемещений положительного веса  $\overset{[+1]}{\phi}^s$ . В этом случае, динамические уравнения можно принять в следующей форме

$$\begin{aligned} & G[(1 + e^2 \overset{[-2]}{c}_1) \nabla^s \nabla_s u^i + (1 - e^2 \overset{[-2]}{c}_1 + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1}) \nabla^i \nabla_k u^k + 2 \overset{[-2]}{c}_1 \epsilon^{ikl} \nabla_k \overset{[+1]}{\phi}_l + \\ & + L \overset{[-1]}{c}'_4 \nabla^i \nabla_k \overset{[+1]}{\phi}^k + L \overset{[-1]}{c}'_5 \nabla^k \nabla_k \overset{[+1]}{\phi}^i] - 2G\alpha \frac{1 + \nu}{*1 - 2\nu} \nabla_i \theta = -\rho(f^i - \partial..u^i), \\ & G L \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} [(1 + \frac{1}{e^2} \overset{[+2]}{c}_2) \nabla^s \nabla_s \overset{[+1]}{\phi}_i + (1 - \frac{1}{e^2} \overset{[+2]}{c}_2 + 2c_3) \nabla_i \nabla_k \overset{[+1]}{\phi}^k + \\ & + L \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} c'_4 \nabla_i \nabla^k u_k + L \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} c'_5 \nabla^k \nabla_k u_i + L \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} c'_6 \epsilon_{isl} \nabla^s \overset{[+1]}{\phi}^l] - \\ & - 2eG \overset{[-2]}{c}_1 (2 \overset{[+1]}{\phi}_i - e^2 \epsilon_{ikl} g^{ks} \nabla_s u^l) - 2G L \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} \overset{[+1]}{L} \beta \nabla_i \theta = -\rho(\overset{[-1]}{l}_i - \overset{[-2]}{\mathcal{I}} \partial.. \overset{[+1]}{\phi}_i), \\ & \nabla_s \nabla^s \theta - \frac{c\rho}{\lambda} \partial.. \theta - 2G\alpha \frac{1 + \nu}{*1 - 2\nu} \frac{\theta_0}{\lambda} \nabla_s \partial.. u^s - 2G L \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} \overset{[+1]}{L} \beta \frac{\theta_0}{* \lambda} \nabla_s \partial.. \overset{[+1]}{\phi}^s + \frac{\rho q}{\lambda} = 0, \end{aligned}$$

где  $f_i$  — вектор массовых сил,  $\overset{[-1]}{l}_i$  — псевдовектор массовых моментов,  $G$  — модуль сдвига;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $L$  — характерная микродлина;  $\overset{[-2]}{c}_1$ ,  $\overset{[+2]}{c}_2$ ,  $c_3$ ,  $c_4$ ,  $c_5$ ,  $c_6$  — не имеющие физической размерности псевдоскаляры;  $\alpha$  — коэффициент линейного теплового расширения;  $\overset{[+1]}{\beta}$  — коэффициент теплового изгиба-кручения;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $c$  — теплоемкость на единицу массы при нулевой деформации (см. [4, 9]).  $\theta$  — превышение температуры над отсчетной температурой  $\theta_0$ . Кроме того, введены обозначения

$$c'_4 = 2c_6 + c_4 - c_5, \quad c'_5 = c_4 + c_5, \quad c'_6 = 4c_5. \quad (2)$$

Для получения системы динамических дифференциальных уравнений в терминах абсолютных векторов достаточно воспользоваться правилом баланса весов [17, 18]. В частности

$$\overset{[+1]}{\phi}^s = \overset{[-1]}{1} \overset{[+1]}{\phi}^s. \quad (3)$$

В итоге, в отсутствии массовых сил и массовых моментов получим

$$\begin{aligned}
& G[(1 + \mathbf{c}_1) \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + (1 - \mathbf{c}_1 + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1}) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \\
& \quad + 2\mathbf{c}_1 \nabla \times \phi + Lc'_4 \nabla \nabla \cdot \phi + Lc'_5 \nabla \cdot \nabla \phi] - 2G\alpha \frac{1 + \nu}{*1 - 2\nu} \nabla \theta = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\
& GL^2[(1 + \mathbf{c}_2) \nabla \cdot \nabla \phi + (1 - \mathbf{c}_2 + 2\mathbf{c}_3) \nabla \nabla \cdot \phi + L^{-1}c'_4 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \\
& \quad + L^{-1}c'_5 \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + L^{-1}c'_6 \nabla \times \phi] - 2G\mathbf{c}_1(2\phi - \nabla \times \mathbf{u}) - 2GL^2\beta \nabla \theta = \mathfrak{I} \ddot{\phi}, \\
& \nabla \cdot \nabla \theta - \frac{c\rho}{\lambda} \dot{\theta} - 2G\alpha \frac{1 + \nu}{*1 - 2\nu} \frac{\theta_0}{\lambda} \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} - 2GL^2\beta \frac{\theta_0}{* \lambda} \nabla \cdot \dot{\phi} + \frac{\rho q}{\lambda} = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

В дальнейшем изложении мы будем рассматривать упрощенный вариант связанных уравнений ацентрического изотропного термоупругого тела, когда из полного набора определяющих констант остаются только связанные с температурным градиентом  $\zeta \nabla \theta$ . Тогда, система динамических уравнений при переходе от материальных определяющих констант к конвенциональным примет вид

$$\left\{ \begin{array}{l}
(\mu + \alpha) \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + (\mu - \alpha + \lambda) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\alpha \nabla \times \phi - \eta \nabla \theta = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\
(\gamma + \varepsilon) \nabla \cdot \nabla \phi + (\gamma - \varepsilon + \beta) \nabla \nabla \cdot \phi + 2\alpha \nabla \times \mathbf{u} - 4\alpha \phi - \zeta \nabla \theta = \mathfrak{I} \ddot{\phi}, \\
\frac{\zeta}{\kappa} \dot{\theta} = \nabla \cdot \nabla \theta - \frac{1}{\kappa} (\eta \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} + \zeta \nabla \cdot \dot{\phi}).
\end{array} \right. \tag{5}$$

**4. Плоская гармоническая термоупругая волна.** Исследуем решения системы (5) в форме плоских волн температуры, трансляционных и спинорных перемещений:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \phi = \mathbf{S} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \theta = B e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \tag{6}$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор;  $\mathbf{k}$  — (комплексный) волновой вектор;  $\omega$  — циклическая частота;  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{S}$  — (комплексные) векторы пространственной поляризации волны;  $B$  — (комплексная) амплитуда температурного инкремента.

В результате подстановки векторов (6) в динамические уравнения (5) получим уравнения для волнового вектора  $\mathbf{k}$  и векторов поляризации плоской волны  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{S}$  ( $k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$ )

$$\begin{aligned}
& -(\mu - \alpha + \lambda)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A})\mathbf{k} - [(\mu + \alpha)k^2 - \rho\omega^2]\mathbf{A} + 2\alpha i\mathbf{k} \times \mathbf{S} - \eta i\mathbf{k}B = \mathbf{0}, \\
& -(\gamma - \varepsilon + \beta)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S})\mathbf{k} - [(\gamma + \varepsilon)k^2 + 4\alpha - \mathfrak{I}\omega^2]\mathbf{A} + 2\alpha i\mathbf{k} \times \mathbf{A} - \zeta i\mathbf{k}B = \mathbf{0}, \\
& -k^2 B + \frac{\zeta}{\kappa} i\omega B - \frac{\eta}{\kappa} \omega(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) - \frac{\zeta}{\kappa} \omega(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}) = 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

Из системы уравнений (7) легко получить выражения для проекций векторов поляризации  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{S}$  на волновой вектор  $\mathbf{k}$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \cdot \mathbf{k} &= \frac{\eta i k^2 B}{-(\lambda + \mu - \alpha)k^2 - (\mu + \alpha)k^2 + \rho\omega^2}, \\
\mathbf{S} \cdot \mathbf{k} &= \frac{\zeta i k^2 B}{-(\beta + \gamma - \varepsilon)k^2 - (\gamma + \varepsilon)k^2 - 4\alpha + \mathfrak{I}\omega^2}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Из соотношений (8) видно, что в связанной термоупругой волне ( $B \neq 0$ ) оба вектора поляризации  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{S}$  имеют ненулевые проекции на волновой вектор  $\mathbf{k}$ , т.е. указанная волна всегда содержит продольные составляющие трансляционных перемещений и микроповоротов. Более того, можно показать, что она является чисто поперечной, т.е.

поперечные составляющие перемещений и микровращений равны нулю. Упомянутые проекции легко исключаются из системы уравнений (7), поскольку достаточно просто выражаются через комплексную амплитуду инкремента температуры  $B$ . В частности, их исключение возможно в третьем уравнении рассматриваемой системы [20].

**3. Атермическая плоская гармоническая волна.** В случае атермической волны комплексная амплитуда  $B = 0$  и можно вести речь о гиперболической модели распространения волн [13]. Векторы поляризации атермической волны  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{S}$  в силу (8) имеют нулевые проекции на волновой вектор  $\mathbf{k}$ , поэтому рассматриваемая волна является чисто поперечной, т.е.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\perp, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_\perp.$$

Система уравнений (7) в случае атермической волны упрощается:

$$\begin{aligned} -((\mu + \alpha)k^2 - \rho\omega^2)\mathbf{A} + 2\alpha i\mathbf{k} \times \mathbf{S} &= \mathbf{0}, \\ -((\gamma + \varepsilon)k^2 + 4\alpha - \mathfrak{I}\omega^2)\mathbf{S} + 2\alpha i\mathbf{k} \times \mathbf{A} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из второго уравнения системы (9) следует, что векторы поляризации  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{S}$  ортогональны друг другу, поскольку

$$2\mathbf{S} = i\Omega^2 \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{A}}{\mu c_\perp^2 k^2 + \Omega^2 - \omega^2}, \quad (10)$$

где

$$\mu c_\perp^2 = \frac{\gamma + \varepsilon}{\mathfrak{I}}.$$

Подставляя выражение для  $\mathbf{S}$  из (10) в первое уравнение системы (9), находим

$$\left[ -\rho(\mu c_\perp^2 k^2 - \omega^2) + \frac{\alpha\Omega^2 k^2}{\mu c_\perp^2 k^2 + \Omega^2 - \omega^2} \right] \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (11)$$

откуда получаем уравнение для определения волновых чисел

$$-\rho(\mu c_\perp^2 k^2 - \omega^2) + \frac{\alpha\Omega^2 k^2}{\mu c_\perp^2 k^2 + \Omega^2 - \omega^2} = 0,$$

или, вводя безразмерное значение волнового числа

$$\tilde{k} = \frac{k}{\mu c_\perp},$$

где

$$\mu c_\perp^2 = \frac{\omega^2}{\mu c_\perp^2}, \quad \mu c_\perp^2 = \frac{\mu + \alpha}{\rho},$$

и опуская тильду над  $k$ , в итоге приходим к следующему уравнению:

$$[k^2 - 1][\mu d_\perp^2 k^2 - (1 - (i\tau)^2)] = (i\tau)^2 d_\perp^2 k^2, \quad (12)$$

где введены следующие обозначения:

$$d_\perp^2 = \frac{\mu c_\perp^2}{\mu c_\perp^2}, \quad \mu c_\perp^2 = \frac{\alpha}{\rho}, \quad \mu d_\perp^2 = \frac{\mu c_\perp^2}{\mu c_\perp^2}.$$

Волновые числа  $k$ , соответствующие атермической волне, находятся как корни биквадратного уравнения (12) и могут быть представлены в форме

$$2_\mu d_\perp^2 k_{1,2}^2 = (i\tau)^2 d_\perp^2 + \mu d_\perp^2 + 1 - (i\tau)^2 \pm \sqrt{\Delta}, \quad (13)$$

где для дискриминанта имеем

$$\Delta = [(i\tau)^2 d_{\perp}^2 - {}_{\mu}d_{\perp}^2 + (1 - (i\tau)^2)]^2 + 4(i\tau)^2 {}_{\mu}d_{\perp}^2 d_{\perp}^2.$$

Дискриминант  $\Delta$  как нетрудно заметить положителен:

$$\Delta > 0,$$

поэтому оба значения для квадрата волнового числа  $k$ , данные (13), вещественны.

Поскольку

$$k_1^2 k_2^2 = \frac{1 - (i\tau)^2}{{}_{\mu}d_{\perp}^2},$$

то тогда в случае  $1 > (i\tau)^2$  оба значения  $k_1^2$  and  $k_2^2$  положительны, в противном случае (когда  $1 < (i\tau)^2$ ) первое значение  $k_1^2$  положительно, а второе  $k_2^2$  отрицательно.

Рассмотрим сначала первый случай, полагая  $1 > (i\tau)^2$ . Возможные волновые числа атермической волны определяются четырьмя вещественными значениями

$$\sqrt{2} {}_{\mu}d_{\perp} k_{1;2;3;4} = \pm \sqrt{(i\tau)^2 d_{\perp}^2 + {}_{\mu}d_{\perp}^2 + 1 - (i\tau)^2} \pm \sqrt{\Delta},$$

среди которых лишь два являются нормальными:  $k_{1;3}$  and  $k_{1;4}$ .

Во втором случае, когда выполняется неравенство  $1 < (i\tau)^2$ , имеется очевидно единственное вещественное нормальное волновое число, которое может быть вычислено по формуле

$$\sqrt{2} {}_{\mu}d_{\perp} k_{1;3} = \sqrt{(i\tau)^2 d_{\perp}^2 + {}_{\mu}d_{\perp}^2 + 1 - (i\tau)^2} + \sqrt{\Delta}.$$

Таким образом, приходим к выводу о том, что в случае  $(i\tau)^2 < 1$  имеется два вещественных нормальных волновых числа, а в случае  $(i\tau)^2 > 1$  — лишь одно.

**5. Заключение.** В работе рассматриваются задачи о распространении плоских термоупругих гармонических волн в ацентрическом изотропном микрополярном теле.

- (1) Трансляционные и спинорные перемещения характеризующиеся псевдовекторами использовались для построения модели ацентрического изотропного термоупругого микрополярного тела.
- (2) Псевдотензорные веса в формулировке динамических уравнений устранены с помощью правила балансировки весов.
- (3) Динамическая модель распространения связанной гармонической волны сформулирована в терминах абсолютных тензоров.
- (4) Рассмотрено решение задачи о распространении плоской термоупругой гармонической волны в ацентрическом изотропном микрополярном теле.
- (5) Динамические уравнения ацентрического изотропного микрополярного континуума приводятся к конвенциональному виду.
- (6) Определены пространственные поляризации волн трансляционных и спинорных перемещений относительно волнового вектора плоской гармонической волны.
- (7) Обсуждается качественный характер возможных волновых решений динамических уравнений связанной микрополярной термоупругости.
- (8) Рассмотрен случай распространения атермической гармонической волны по ацентрическому изотропному термоупругому микрополярному телу.

**ЛИТЕРАТУРА**

- [1] Maugin G. Non-Classical Continuum Mechanics. A Dictionary. Singapore: Springer, 2017. xvii+259 p.
- [2] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [3] Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345 p.
- [4] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума. 2018. Т. 22. с. 504–517.
- [5] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1986. 872 с.
- [6] Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд-во Акад. наук СССР, 1962. 364 с.
- [7] Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
- [8] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2010. 328 с.
- [9] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. URL: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
- [10] Murashkin E., Radaev Y. A Negative Weight Pseudotensor Formulation of Coupled Hemitropic Thermoelasticity // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, no. 6. P. 2440–2449. URL: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060392>.
- [11] Гуревич Г.Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. 408 с.
- [12] Уизем Дж. Б. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
- [13] Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982. 336 с.
- [14] Весоловский З. Динамические задачи нелинейной теории упругости. Киев: Наук. думка, 1981. 216 с.
- [15] Б.А. Розенфельд. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 648 с.
- [16] Radaev Y. Tensors with Constant Components in the Constitutive Equations of Hemitropic Micropolar Solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58. P. 1517–1527. URL: <https://doi.org/10.3103/S0025654423700206>.
- [17] Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. № 1. с. 51. URL: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002>.
- [18] Murashkin E., Radaev Y. An Algebraic Algorithm of Pseudotensors Weights Eliminating and Recovering // Mechanics of Solids. 2022. Vol. 57, no. 6. P. 1416–1423. URL: <https://doi.org/10.3103/s0025654422060085>.
- [19] Murashkin E., Radaev Y. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. URL: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060392>.
- [20] Сушкевич А.К. Основы высшей алгебры. М.: ОНТИ, 1937. 476 с.

*E. V. Murashkin, Yu. N. Radaev*

## THERMIC AND ATHERMIC PLANE HARMONIC WAVES IN ACENTRIC ISOTROPIC SOLID

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** The present paper is devoted to the propagation of plane thermoelastic harmonic waves in an acentric isotropic micropolar solid. For this aim, the dynamic equations of an acentric isotropic solid are considered. The spatial polarizations of plane waves of translational and spinor displacements are determined. The qualitative nature of possible wave solutions to the equations of coupled micropolar thermoelasticity is discussed. The case of an athermic wave is considered separately.

**Keywords:** wave, polarization, wave vector, translational displacement, spinor displacement, micropolarity, acentric isotropic solid, wave number, thermoelasticity, athermal wave

### REFERENCES

- [1] Maugin G. Non-Classical Continuum Mechanics. A Dictionary. Singapore: Springer, 2017. xvii+259 p.
- [2] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [3] Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345 p.
- [4] Radaev Y. N. Rule of multipliers in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics. 2018. Vol. 22. p. 504–517.
- [5] Novatsky V. Theory of elasticity. M.: World, 1986. 872 p.
- [6] Novatsky V. Issues of thermoelasticity. M.: Publishing house Acad. Sciences of the USSR, 1962. 364 p.
- [7] Novatsky V. Dynamic problems of thermoelasticity. M.: World, 1970. 256 p.
- [8] Kovalev V. A., Radaev Y. N. Wave problems of field theory and thermomechanics. Saratov: Publishing House of Saratov University, 2010. 328 p.
- [9] Whitham J. Linear and nonlinear waves. M.: World, 1977. 622 p.
- [10] Brehovskikh L. M., Goncharov V. V. Introduction to continuum mechanics (with application to wave theory). M.: Science, 1982. 336 p.
- [11] Vesolovsky Z. Dynamic problems of nonlinear elasticity theory. Kyiv: Science. thought, 1981. 216 p.
- [12] Radaev Y. N., Kovalev V. A. On plane thermoelastic waves in hemitropic micropolar continua // Vestn. Samar. Gos. Techn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki. 2019. Vol. 23. p. 464–474. URL: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1689>.
- [13] B.A. R. Multidimensional spaces. M.: Science, 1966. 648 p.
- [14] Radaev Y. Tensors with Constant Components in the Constitutive Equations of Hemitropic Micropolar Solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58. P. 1517–1527. URL: <https://doi.org/10.3103/S0025654423700206>.
- [15] Murashkin E.V., Radaev Yu.N. Algebraic algorithm for systematically reducing one-point pseudotensors to absolute tensors // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. IYA Yakovleva. Limit state mechanics series. 2022. № 1. c. 51. URL: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002>.

---

*Evgenii V. Murashkin*, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.  
*Yuri N. Radaev*, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

- 
- [16] Murashkin E.V., Radayev Y.N. An Algebraic Algorithm of Pseudotensors Weights Eliminating and Recovering // *Mechanics of Solids*. 2022. T. 57, № 6. С. 1416–1423. URL: <https://doi.org/10.3103/s0025654422060085>.
- [17] Radaev Yu.N., Murashkin E.V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // *Problems of strength and ductility*. 2020. T. 82, № 4. С. 399–412. URL: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
- [18] Murashkin E.V., Radayev Y.N. A Negative Weight Pseudotensor Formulation of Coupled Hemitropic Thermoelasticity // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023. T. 44, № 6. С. 2440–2449. URL: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060392>.
- [19] Murashkin E., Radayev Y. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. URL: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060392>.
- [20] Sushkevich A. *Fundamentals of Higher Algebra*. M.: ONTI, 1937. 476 p.

Т. К. Нестеров

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЛАБЫХ РАЗРЫВОВ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И МИКРОВАРАЩЕНИЙ В ПОЛУИЗОТРОПНОМ МИКРОПОЛЯРНОМ ТЕЛЕ

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** В настоящей работе рассматривается распространение поверхности слабых разрывов вектора перемещений и псевдовектора микроращения в полуизотропном микрополярном теле. Определяется скорость поверхности слабых разрывов, при которой возможно распространение поверхностей связанных слабых разрывов перемещений и микроращений. Найдена зависимость слабых разрывов вектора перемещений от вектора микроращений и наоборот в касательном и нормальном направлении относительно поверхности слабого разрыва.

**Ключевые слова:** микрополярный континуум, анизотропность, полуизотропность, слабые разрывы, условия совместности, перемещение, микроращение

DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.011

УДК: 539.374

**Введение.** Модель микрополярного тела исторически является первой моделью среды с микроструктурой, была предложена братьями Коссера в 1909 году [1]. Изначальным мотивом использования модели тела с микроструктурой была неудовлетворительность применения классической линейной теории упругости при расчете оболочек и пластин, поскольку она не позволяла учесть моменты, возникающие в теле, которые могут быть критически важны. В дальнейшем, работа [2] дополнила оригинальное исследование братьев Коссера и вернула интерес к средам с микроструктурой.

Позже выходят работы [3, 4] посвященные модели микроморфной среды, в которой учитывается не только ориентация малого элемента тела, но и его сдвиги с растяжениями. Таким образом модель микроморфной среды является обобщением модели микрополярного тела. Заметим, что среды с микроструктурой могут быть использованы для моделирования процессов объемного роста [5] без необходимости введения

---

© Нестеров Т. К., 2023

*Нестеров Тимофей Константинович*

e-mail: Nesterovtim4@gmail.com, программист, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262 “Связанная термомеханика микрополярных полуизотропных сред”).

Поступила 20.06.2023

дополнительной (виртуальной) конфигурации тела, поскольку объемный рост может быть задан как изменение объема малого элемента тела.

Особенностью всех сред с микроструктурой является наличие тензора микродеформаций, который может быть истолкован двумя способами:

- (1) как тензор описывающий преобразование директоров, на которых строится малый элемент тела [6];
- (2) как линейный член ряда разложения вектора микроперемещения, описывающего изменение малого элемента тела [7, 8]. Отметим, что допустимо говорить о микроморфных средах (и как частный случай микрополярных средах), как о средах с микроструктурой первого порядка [9].

В работе [10] на основе полярного разложения тензора микродеформации проводится классификация подобных сред. Для сред Коссера тензор микродеформации обладает свойством ортогонального тензора, что и приводит к отсутствию растяжения и сдвигов в малом элементе тела.

В работе [11] было предложено явное выражение для тензора микродеформации (микроращения) в микрополярном теле. За основу была взята формула Гибса [12, стр. 338, ур. (6)], описывающая поворот в трехмерном пространстве. При переходе к геометрически линейной теории микрополярного тела, тензор микроповорота полностью описывается ассоциированным с вектором микроращения антисимметричным тензором. Однако, при наличии анизотропии в микрополярном теле (простейшим случаем которой является полуизотропность), вектор микроращения, вообще говоря, является псевдовектором, а следовательно, для корректных результатов требуется привлекать аппарат псевдотензоров [13, 14], что было отмечено и подробно изложено в работах [15, 16].

**Основные соотношения линейной полуизотропной микрополярной теории упругости.** Кинематика геометрически линейного микрополярного тела описывается вектором макроперемещений  $u^i$  (в дальнейшем просто вектор перемещений) и аксиальным вектором микроращения  $\overset{[+1]}{\phi}^s$ , в дальнейшем в квадратных скобках над корневым символом указывается вес псевдотензора. Связывающие между собой меры деформации с вектором перемещений и аксиальным вектором микроращения, кинематические соотношения линейной теории упругости микрополярного тела имеют вид:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \epsilon_{(ij)} + \epsilon_{[ij]} = \nabla_{(i} u_{j)} - \overset{[-1]}{\epsilon}_{ijk} \overset{[+1]}{\varphi}^k = \nabla_i u_j - \overset{[-1]}{\epsilon}_{ijk} \overset{[+1]}{\phi}^k, \\ \epsilon_{(ij)} &= \nabla_{(i} u_{j)}, \quad \epsilon_{[ij]} = -\overset{[-1]}{\epsilon}_{ijk} \overset{[+1]}{\varphi}^k, \quad \overset{[+1]}{\varphi}^k = \overset{[+1]}{\phi}^k - \frac{1}{2} \overset{[+1]}{\epsilon}^{kij} \nabla_i u_j, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\overset{[+1]}{\varphi}^k$  — относительный вектор микроращения,  $\epsilon_{ij}$  — полный тензор малых деформаций,  $\epsilon_{(ij)}$  — тензор малых деформаций, известный из механики линейного упругого тела,  $\epsilon_{[ij]}$  — асимметричный тензор малых деформаций. К индексам заключенным в круглые или квадратные скобки применяется операция симметрирования или альтернирования, соответственно. Отметим, что в дальнейшем, не будем указывать положительный или отрицательный вес символа Леви-Чивита  $\overset{[-1]}{\epsilon}_{ijk}$ ,  $\overset{[+1]}{\epsilon}^{ijk}$  и фундаментального ориентирующего псевдоскаляра  $\overset{[+1]}{e}$ ,  $\overset{[-1]}{e}$ .

Уравнения динамики микрополярного тела имеют вид [17]:

$$X^j + \nabla_i t^{ij} = \rho \ddot{u}^j, \quad Y_k - 2\tau_k + \nabla_i \mu_{.k}^{[1]i} = \rho J \ddot{\phi}_k, \quad (2)$$

где  $X^j$ ,  $Y_k$  — вектор объемных сил и псевдовектор объемных моментов, соответственно;  $t^{ij}$ ,  $\mu_{.k}^{[1]i}$  — полный тензор напряжений Коши и псевдотензор моментных напряжений;  $\tau_k = -\frac{1}{2}\epsilon_{kij}t^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{kij}t^{[ij]}$  псевдовектор ассоциированный с кососимметрической частью тензора напряжений;  $\rho$ ,  $J$  — плотность и коэффициент микроинерции. Силовые граничные условия на поверхности тела с вектором внешней нормали  $n_i$  задаются следующими соотношениями:

$$t^j = n_i t^{ij}, \quad Y_k = n_i \mu_{.k}^{[1]i}.$$

Для линейно упругого полуизотропного микрополярного тела потенциал внутренней энергии представим в четырех формах: первой основной энергетической, конвенциональной энергетической, основной энергетической, материальной. В данной работе потенциал выберем в виде основной энергетической формы

$$2U = 2U(\epsilon_{ij}, \kappa_{ij}^{[+1]}) = H_1^{ijklm} \epsilon_{ij} \epsilon_{lm} + H_2^{[-2]ijklm} \kappa_{ij}^{[+1]} \kappa_{ij}^{[+1]} + H_3^{[-1]ijklm} \epsilon_{ij} \kappa_{ij}^{[+1]},$$

где  $H_p^{ijklm} = \frac{[W_p]}{a_p} g^{ij} g^{lm} + \frac{[W_p]}{b_p} g^{il} g^{jm} + \frac{[W_p]}{c_p} g^{im} g^{jl}$  есть тензор 4 ранга, инвариантный к ортогональным преобразованиям пространства, но чувствительный к зеркальным преобразованиям, за счет псевдоскаляров  $\frac{[W_p]}{a_p}$ ,  $\frac{[W_p]}{b_p}$ ,  $\frac{[W_p]}{c_p}$ .

Определяющие соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} t^{ij} &= \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} = H_1^{ijklm} \epsilon_{lm} + \frac{1}{2} H_3^{[-1]ijklm} \kappa_{lm}^{[+1]} \\ \mu_{.k}^{[1]ij} &= \frac{\partial U}{\partial \kappa_{ij}^{[+1]}} = H_2^{[-2]ijklm} \kappa_{lm}^{[+1]} + \frac{1}{2} H_3^{[-1]ijklm} \epsilon_{lm} \end{aligned} \quad (3)$$

Подставив определяющие соотношения (3) в уравнения динамики (2) и, воспользовавшись видом тензора  $H_p^{ijklm}$  и кинематическими соотношениями (1), получим

систему уравнений в терминах перемещений и микроращений для линейного полужотропного микрополяного тела:

$$\begin{aligned}
 & (a + c) \nabla^j \nabla_i u^i + b \nabla^i \nabla_i u^j + \frac{1}{e^2} (b - c) \epsilon^{jik} \nabla_i \phi^k + \\
 & \quad + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{3} + \frac{c}{3} \right) \nabla^j \nabla_i \phi^i + \frac{1}{2} \frac{b}{3} \nabla^i \nabla_i \phi^j = -\rho(f^j - \ddot{u}^j); \\
 & \left( \frac{a}{2} + \frac{c}{2} \right) \nabla_j \nabla_i \phi^i + \frac{b}{2} \nabla^i \nabla_i \phi^j + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{3} + \frac{c}{3} \right) \nabla_j \nabla_i u^i + \\
 & \quad + \frac{1}{2} \frac{b}{3} \nabla^i \nabla_i u_j - \frac{2}{e^2} (b - c) g_{jk} \phi^k + \frac{1}{e^2} (b - c) g_{jk} \epsilon^{kpq} \nabla_p u_q \\
 & \quad + \left( \frac{b}{3} - \frac{c}{3} \right) \epsilon_{jpr} \nabla^p \phi^q = -\rho(Y_j - J \phi_j).
 \end{aligned} \tag{4}$$

В системе уравнений (4) удобно перейти от относительных тензоров к абсолютным тензорам посредством умножения на ориентирующий псевдоскаляр  $e$ , таким образом чтобы итоговый вес полученного произведения был равен нулю [18]:

$$\begin{aligned}
 & (a + c) \nabla^j \nabla_i u^i + b \nabla^i \nabla_i u^j + (b - c) \epsilon^{jik} \nabla_i \phi_k + \\
 & \quad + \frac{1}{2} (a + c) \nabla^j \nabla_i \phi^i + \frac{1}{2} b \nabla^i \nabla_i \phi^j + \rho(f^j - \ddot{u}^j) = 0, \\
 & \frac{1}{e} \left[ (a + c) \nabla_j \nabla_i \phi^i + b \nabla^i \nabla_i \phi_j + \frac{1}{2} (a + c) \nabla_j \nabla_i u^i + \right. \\
 & \quad + \frac{1}{2} b \nabla^i \nabla_i u_j - 2(b - c) g_{jk} \phi^k + (b - c) g_{jk} \epsilon^{kpq} \nabla_p u_q \\
 & \quad \left. + (b - c) e_{jpr} \nabla^p \phi^q + \rho(Y_j - J \phi_j) \right] = 0^{[-1]}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

В дальнейшем будем предполагать, что выбрана правая, и не ограничивая общности, декартова система координат, т.е.  $\frac{1}{e} = 1$ .

Коэффициенты при слагаемых в системе уравнений (5) могут быть пересчитаны [19] для иных материальных констант.

**Условия совместности на поверхности слабых разрывов.** Геометрические и кинематические условия совместности разрывов Адамара – Томаса производных второго и более порядков перемещений и микроращений могут быть представлены в виде [20]<sup>1 2</sup>:

$$\begin{aligned}
 [\nabla_i \nabla_j u^k] &= n_i n_j U^k, & [\nabla_i \nabla_j \phi^k] &= n_i n_j \Phi^k, \\
 [\partial_t \partial_t u^k] &= G^2 U^k, & [\partial_t \partial_t \phi^k] &= G^2 \Phi^k,
 \end{aligned} \tag{6}$$

<sup>1</sup>Здесь предполагаем, что поля перемещений и микроращений непрерывны до первой производной включительно

<sup>2</sup>Отметим, что кинематические и геометрические условия совместности на поверхностях слабых разрывов, распространяющихся в сплошных полужотропных термоупругих средах в терминах псевдотензоров были рассмотрены в работе [21].

где в квадратных скобках указан скачок соответствующей величины при переходе через поверхность разрыва,  $G$  — скорость распространения поверхности слабых разрывов,  $U_i$ ,  $\Phi_i$  — некоторые поля, определенные на поверхности разрыва.

Подставив (6) в систему уравнений (5), получаем систему из двух соотношений, связывающую между собой скачки вторых производных от векторов перемещений и микровращений при переходе через волновую поверхность:

$$\begin{aligned} (a + c)_{11} n^j n_i U^i + b_{11} U^j + \frac{1}{2} (a + c)_{33} n^j n_i \Phi^i + \frac{1}{23} b_{33} \Phi^j - \rho G^2 U^j &= 0, \\ (a + c)_{22} n_j n_i \Phi^i + b_{22} \Phi_j + \frac{1}{2} (a + c)_{33} n_j n_i U^i + \frac{1}{23} b_{33} U_j - \rho J G^2 \Phi_j &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Разложим векторы поляризации слабых разрывов перемещений  $U^i$  и микровращений  $\Phi_i$  на сумму проекций на нормальное  $n^i$  и касательное  $\tau^i$  направление к поверхности разрыва:

$$U^i = U_{\parallel} n^i + U_{\perp} \tau^i, \quad \Phi_i = \Phi_{\parallel} n_i + \Phi_{\perp} \tau_i;$$

что позволяет преобразовать систему уравнений (7) к виду:

$$\begin{aligned} ((a + b + c)_{11} - \rho G^2) n^j U_{\parallel} + (b_{11} - \rho G^2) \tau^j U_{\perp} + \frac{1}{2} (a + b + c)_{33} n^j \Phi_{\parallel} + \frac{1}{23} b_{33} \tau^j \Phi_{\perp} &= 0, \\ ((a + b + c)_{22} - \rho J G^2) n_j \Phi_{\parallel} + (b_{22} - \rho J G^2) \tau_j \Phi_{\perp} + \frac{1}{2} (a + b + c)_{33} n_j U_{\parallel} + \frac{1}{23} b_{33} \tau_j U_{\perp} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

и, приводя подобные при проекциях на касательное и нормальное направление к поверхности слабого разрыва, получим следующие две системы уравнений. Отметим, что здесь произведен переход к объемной плотности момента инерции, а именно к  $\bar{J} = \rho J$  (В дальнейшем черту над символом  $J$  будем опускать):

$$\begin{pmatrix} (a + b + c)_{11} - \rho G^2 & \frac{1}{2} (a + b + c)_{33} \\ \frac{1}{2} (a + b + c)_{33} & (a + b + c)_{22} - J G^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{\parallel} \\ \Phi_{\parallel} \end{pmatrix} = 0, \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} - \rho G^2 & \frac{1}{23} b_{33} \\ \frac{1}{23} b_{33} & b_{22} - J G^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{\perp} \\ \Phi_{\perp} \end{pmatrix} = 0. \quad (10)$$

Очевидно, что согласно системе (9), (10) в полуизотропном микрополярном теле невозможно несвязанное распространение только упругой волны или только волны кручения, поскольку это требовало бы равенства нулю  $(a + b + c)_{33}$  или  $b_{33}$  для продольной или поперечной волны, соответственно. Подобное ограничение означало бы, что рассматривается изотропный микрополярный континуум, а не полуизотропный.

**Скорость распространения поверхности разрыва и связанные слабые разрывы вектора перемещений и микроращения.** Для удобства дальнейшего изложения перейдем к следующим обозначениям:

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{\rho} &= v_{u\parallel}^2, & \frac{b}{\rho} &= v_{u\perp}^2, \\ \frac{a+b+c}{J} &= v_{\phi\parallel}^2, & \frac{b}{J} &= v_{\phi\perp}^2, \\ \frac{a+b+c}{2\rho J} &= v_{s\parallel}^2, & \frac{b}{2\rho J} &= v_{s\perp}^2, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $v_{u\parallel}^2, v_{\phi\parallel}^2, v_{s\parallel}^2$  — скорости распространения продольной волны перемещений, микроращений и связанной волны, соответственно;  $v_{u\perp}^2, v_{\phi\perp}^2, v_{s\perp}^2$  — скорости распространения поперечной волны перемещений, микроращений и связанной волны, соответственно. Приведем формулы пересчета скоростей (11) продольных и поперечных связанных волн перемещений, согласно соотношениям приведенным в работе [19], микроращений для различных наборов материальных констант, сведенные для удобства в таблицу (2).

Произведя замену (11), системы уравнений (9), (10) примут следующий вид:

$$\begin{pmatrix} v_{u\parallel}^2 - G^2 & Jv_{s\parallel}^2 \\ \rho v_{s\parallel}^2 & v_{\phi\parallel}^2 - G^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{\parallel} \\ \Phi_{\parallel} \end{pmatrix} = 0; \quad \begin{pmatrix} v_{u\perp}^2 - G^2 & Jv_{s\perp}^2 \\ \rho v_{s\perp}^2 & v_{\phi\perp}^2 - G^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{\perp} \\ \Phi_{\perp} \end{pmatrix} = 0. \quad (12)$$

Условием нетривиальной разрешимости систем (12) будет равенство нулю определителя, что приведет к двум биквадратным уравнениям:

$$\begin{aligned} G^4 - (v_{u\parallel}^2 + v_{\phi\parallel}^2)G^2 + v_{u\parallel}^2 v_{\phi\parallel}^2 - \rho J v_{s\parallel}^4 &= 0, \\ G^4 - (v_{u\perp}^2 + v_{\phi\perp}^2)G^2 + v_{u\perp}^2 v_{\phi\perp}^2 - \rho J v_{s\perp}^4 &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Из уравнений (13) можно найти квадраты скоростей распространения поверхности разрыва, при которых существуют нетривиальные решения систем (12). Это означает, что для определенной скорости  $G$  могут существовать связанные разрывы в нормальном или касательном направлении. Квадраты таких скоростей распространения поверхности слабых разрывов, при которых возможно наличие связанных разрывов в нормальном направлении  $G_{\parallel 1,2}^2$  или в касательном направлении  $G_{\perp 1,2}^2$  будут иметь вид:

$$\begin{aligned} G_{\parallel 1,2}^2 &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1}{2}[(v_{u\parallel}^2 + v_{\phi\parallel}^2) \pm \sqrt{(v_{u\parallel}^2 - v_{\phi\parallel}^2)^2 + 4\rho J v_{s\parallel}^4}] \\ G_{\perp 1,2}^2 &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1}{2}[(v_{u\perp}^2 + v_{\phi\perp}^2) \pm \sqrt{(v_{u\perp}^2 - v_{\phi\perp}^2)^2 + 4\rho J v_{s\perp}^4}] \end{aligned}$$

Отметим, что найденные скорости распространения поверхности разрыва, при которых возможно наличие связанных слабых разрывов вектора перемещений и микроращений в касательном направлении к поверхности разрыва, не гарантируют существование связанных слабых разрывов вектора перемещений и микроращений в нормальном направлении к поверхности разрыва и наоборот.

Таблица 1. Скорости распространения продольной и поперечной волны перемещений и микровращений

	Скаляры первой основной энергетической формы	Скаляры конвенциональной энергетической формы	Скаляры основной энергетической формы	Материальные скаляры
$v_{u\parallel}^2$	$\frac{2(A_1 + A_3)}{\rho}$	$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$	$\frac{a + b + c}{\rho}$	$2G(1 + \nu(1 - 2\nu)^{-1})$
$v_{\phi\parallel}^2$	$\frac{2(A_2 + A_4)}{J}$	$\frac{\beta + 2\gamma}{J}$	$\frac{a + b + c}{J}$	$GL^2c_3$
$v_{s\parallel}^2$	$\frac{2(A_7 + A_8)}{\rho J}$	$\frac{2(\varkappa + 2\chi)}{\rho J}$	$\frac{a + b + c}{2\rho J}$	$2GL(c_4 + c_5)$
$v_{u\perp}^2$	$\frac{A_5 + 2A_3}{2\rho}$	$\frac{\mu + \alpha}{\rho}$	$\frac{b}{\rho}$	$G(1 + c_1)$
$v_{\phi\perp}^2$	$\frac{A_6 + 2A_4}{2J}$	$\frac{\gamma + \epsilon}{J}$	$\frac{b}{J}$	$GL^2(1 + c_2)$
$v_{s\perp}^2$	$\frac{2A_8 - A_9}{2\rho J}$	$\frac{2(\chi + \nu)}{\rho J}$	$\frac{b}{2\rho J}$	$\frac{GL}{2}(2c_5 - c_6)$

После того как найдены скорости  $G_{\parallel 1,2}^2$ ,  $G_{\perp 1,2}^2$  возможно определение связанных векторов поляризации перемещений и микровращений. Для этого выразим касательную компоненту вектора поляризации микровращений через касательную компоненту вектора поляризации перемещений  $\Phi_{\parallel} = C_{\parallel}U_{\parallel}$  и сделаем то же с нормальными компонентами векторов поляризации перемещений и микровращений  $\Phi_{\perp} = C_{\perp}U_{\perp}$ . Выразим константы  $C_{\parallel}$ ,  $C_{\perp}$  с учетом выполнения соотношений (13):

$$C_{1\parallel} = -\frac{v_{u\parallel} - G_{1,2}^2}{Jv_{s\parallel}}, \quad C_{2\parallel} = -\frac{\rho v_{s\parallel}}{v_{\phi\parallel} - G_{1,2}^2};$$

$$C_{1\perp} = -\frac{v_{u\perp} - G_{1,2}^2}{Jv_{s\perp}}, \quad C_{2\perp} = -\frac{\rho v_{s\perp}}{v_{\phi\perp} - G_{1,2}^2}.$$

Обратную зависимость касательных и нормальных компонент вектора перемещений от вектора микровращений  $U_{\parallel} = K_{\parallel}\Phi_{\parallel}$  и  $U_{\perp} = K_{\perp}\Phi_{\perp}$  можно найти с помощью следующих выражений для констант  $K_{1,2\parallel} = \frac{1}{C_{1,2\parallel}}$ ,  $K_{1,2\perp} = \frac{1}{C_{1,2\perp}}$ .

Выразим зависимость между слабыми разрывами перемещений и микроращений с учетом ранее полученных соотношений:

$$U_{\parallel} = \Phi_{\parallel} \frac{G_{\parallel 1,2}^2 - v_{\phi\parallel}^2}{\rho v_{s\parallel}^2}; \quad \Phi_{\parallel} = U_{\parallel} \frac{G_{\parallel 1,2}^2 - v_{u\parallel}^2}{J v_{s\parallel}^2};$$

$$U_{\perp} = \Phi_{\perp} \frac{G_{\perp 1,2}^2 - v_{\phi\perp}^2}{\rho v_{s\perp}^2}, \quad \Phi_{\perp} = U_{\perp} \frac{G_{\perp 1,2}^2 - v_{u\perp}^2}{J v_{s\perp}^2}.$$

**Заключение.** В настоящей работе были получены следующие результаты:

- Показано, что в полужизотропном микрополярном теле невозможно распространение несвязанных слабых разрывов вектора перемещения и микроращений. Обратное противоречило бы предположению, что рассматривается полужизотропное микрополярное тело.
- Найдены скорости распространения поверхности разрывов при которых возможно наличие связанных слабых разрывов вектора перемещений и микроращений в касательном или нормальном направлении относительно поверхности разрыва.
- С учетом найденной скорости распространения поверхности разрывов определена зависимость между слабыми разрывами перемещений от микроращений, и наоборот, в касательном и нормальном направлении относительно поверхности слабого разрыва.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Cosserat E., Cosserat F. Theory of deformable solid. (Translated by D.H. Delphenich). A. Hermann et sons, 1909.
- [2] Ericksen J. L., Truesdell C. Exact theory of stress and strain in rods and shells // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1957. Vol. 1, no. 1. p. 295–323. URL: <http://link.springer.com/10.1007/BF00298012>.
- [3] Eringen A., Suhubi E. Nonlinear theory of simple micro-elastic solids—I // International Journal of Engineering Science. 1964. Vol. 2, no. 2. p. 189–203. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020722564900047>.
- [4] Suhubi E., Eringen A. Nonlinear theory of micro-elastic solids—II // International Journal of Engineering Science. 1964. Vol. 2, no. 4. p. 389–404. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020722564900175>.
- [5] Javadi M., Epstein M., Asghari M. Thermomechanics of material growth and remodeling in uniform bodies based on the micromorphic theory // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2020. Vol. 138. p. 103904. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S002250962030140X>.
- [6] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flugge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. Vol. 2 / 3 / 1 of *Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik*. p. 226–858.
- [7] Mindlin R. D. Micro-structure in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1964. Vol. 16, no. 1. p. 51–78. URL: <http://link.springer.com/10.1007/BF00248490>.
- [8] Germain P. The Method of Virtual Power in Continuum Mechanics. Part 2: Microstructure // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1973. Vol. 25, no. 3. P. 556–575.
- [9] Forest S., Sab K. Finite-deformation second-order micromorphic theory and its relations to strain and stress gradient models // Mathematics and Mechanics of Solids. 2020. Vol. 25, no. 7. p. 1429–1449.
- [10] Forest S., Sievert R. Nonlinear microstrain theories // International Journal of Solids and Structures. 2006. Vol. 43, no. 24. p. 7224–7245. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0020768306001703>.

- [11] Kafadar C., Eringen A. Micropolar media—I the classical theory // International Journal of Engineering Science. 1971. Vol. 9, no. 3. p. 271–305. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020722571900401>.
- [12] Gibbs W. Vector analysis. Yale University Press, New Haven (redacted by E.B. Wilson), 1901.
- [13] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of relative tensors // Transactions of the American Mathematical Society. 1924. Vol. 26, no. 3. p. 373–377. URL: <https://www.ams.org/tran/1924-026-03/S0002-9947-1924-1501284-6/>.
- [14] Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М., 1971. с. 376.
- [15] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об определяющих псевдоскалярах гемитропных микрополярных сред в инверсных координатных системах // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2021. Т. 25, № 3. с. 457–474. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1870>.
- [16] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории гемитропных тензоров четвертого ранга в трехмерных пространствах Евклида // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2022. Т. 26, № 3. с. 592–602. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1941>.
- [17] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2018. Т. 22, № 3. с. 504–517. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635>.
- [18] Murashkin E. V., Radayev Y. N. An Algebraic Algorithm of Pseudotensors Weights Eliminating and Recovering // Mechanics of Solids. 2022. Vol. 57, no. 6. p. 1416–1423. URL: <https://link.springer.com/10.3103/S0025654422060085>.
- [19] Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 1 (55). с. 110–121. URL: <https://limit21.ru/upload/articles/825.pdf>.
- [20] Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. Мир, 1964. с. 308.
- [21] Е. В. Мурашкин Т. К. Нестеров Н. Э. Стадник. Условия совместности в моделях полуизотропных термоупругих тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 1 (55). с. 102–109. URL: <https://limit21.ru/upload/articles/825.pdf>.

*T. K. Nesterov*

## WEAK DISCONTINUITIES PROPAGATION OF DISPLACEMENTS AND MICROROTATIONS IN A SEMI-ISOTROPIC MICROPOLAR BODY

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** The present paper deals with weak discontinuities propagation of the displacement and microrotation vector in a semi-isotropic micropolar body. The speed of the surface of weak discontinuities is determined, at which the presence of associated weak discontinuities of displacements and microrotations is possible. The dependence of weak discontinuities is found displacement vector from the microrotation vector and vice versa in the tangential and normal direction relative to the weak discontinuities surface.

**Keywords:** Micropolar continuum, anisotropy, semi-isotropy, weak discontinuities, compatibility conditions, translation, microrotation

## REFERENCES

- [1] Cosserat E., Cosserat F. Theory of deformable solid. (Translated by D.H. Delphenich). A. Hermann et sons, 1909.
- [2] Ericksen J. L., Truesdell C. Exact theory of stress and strain in rods and shells // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1957. Vol. 1, no. 1. p. 295–323. URL: <http://link.springer.com/10.1007/BF00298012>.
- [3] Eringen A., Suhubi E. Nonlinear theory of simple micro-elastic solids—I // International Journal of Engineering Science. 1964. Vol. 2, no. 2. p. 189–203. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020722564900047>.
- [4] Suhubi E., Eringen A. Nonlinear theory of micro-elastic solids—II // International Journal of Engineering Science. 1964. Vol. 2, no. 4. p. 389–404. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020722564900175>.
- [5] Javadi M., Epstein M., Asghari M. Thermomechanics of material growth and remodeling in uniform bodies based on the micromorphic theory // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2020. Vol. 138. p. 103904. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S002250962030140X>.
- [6] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flugge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. Vol. 2 / 3 / 1 of *Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik*. p. 226–858.
- [7] Mindlin R. D. Micro-structure in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1964. Vol. 16, no. 1. p. 51–78. URL: <http://link.springer.com/10.1007/BF00248490>.
- [8] Germain P. The Method of Virtual Power in Continuum Mechanics. Part 2: Microstructure // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1973. Vol. 25, no. 3. P. 556–575.
- [9] Forest S., Sab K. Finite-deformation second-order micromorphic theory and its relations to strain and stress gradient models // Mathematics and Mechanics of Solids. 2020. Vol. 25, no. 7. p. 1429–1449.
- [10] Forest S., Sievert R. Nonlinear microstrain theories // International Journal of Solids and Structures. 2006. Vol. 43, no. 24. p. 7224–7245. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0020768306001703>.
- [11] Kafadar C., Eringen A. Micropolar media—I the classical theory // International Journal of Engineering Science. 1971. Vol. 9, no. 3. p. 271–305. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020722571900401>.
- [12] Gibbs W. Vector analysis. Yale University Press, New Haven (redacted by E.B. Wilson)., 1901.
- [13] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of relative tensors // Transactions of the American Mathematical Society. 1924. Vol. 26, no. 3. p. 373–377. (in Russian). URL: <https://www.ams.org/tran/1924-026-03/S0002-9947-1924-1501284-6/>.
- [14] Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. Applied mathematics series. New York, John Wiley and Sons, 1964. P. xii+361.
- [15] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the constitutive pseudoscalars of hemitropic micropolar media in inverse coordinate frames // Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2021. Vol. 25, no. 3. p. 457–474. (in Russian). URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1870>.
- [16] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the theory of fourth-rank hemitropic tensors in three-dimensional Euclidean spaces // Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2022. Vol. 26, no. 3. p. 592–602. (in Russian). URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1941>.
- [17] Radayev Yuri Nikolaevich. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2018. T. 22, № 3. c. 504–517. (in Russian). URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635>.

---

*Nesterov Timopheyy Konstantinovich*, M.Sc (Applied Mathematics), Programmer, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia.

The work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00262 “Coupled thermomechanics of micropolar semi-isotropic media”).

- 
- [18] Murashkin E. V., Radayev Y. N. An Algebraic Algorithm of Pseudotensors Weights Eliminating and Recovering // *Mechanics of Solids*. 2022. Vol. 57, no. 6. p. 1416–1423. URL: <https://link.springer.com/10.3103/S0025654422060085>.
- [19] Murashkin E. V. On the relationship of micropolar constitutive parameters of thermodynamic state potentials // *Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state*. 2023. no. 1 (55). p. 110–121. (In Russian). URL: <https://limit21.ru/upload/articles/825.pdf>.
- [20] Thomas T. *Plastic flow and fracture in solids*. New York, Academic Press, 1961. p. 267.
- [21] E. V. Murashkin T. K. Nesterov N. E. S. Compatibility conditions in models of semi-isotropic thermoelastic solids // *Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state*. 2023. no. 1 (55). p. 102–109. (In Russian). URL: <https://limit21.ru/upload/articles/825.pdf>.

## УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

**Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

**Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru)** – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

**Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Зубчанинов Владимир Георгиевич (vlgzub@gmail.com)** – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

**Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

**Каюмов Рашид Абдулхакович (kayumov@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

**Келлер Илья Эрнстович (kie@icmm.ru)** – доктор физико-математических наук, доцент, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

**Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru)** – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ковалев Владимир Александрович (vlad\_koval@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

**Коссович Леонид Юрьевич (president@sgu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

**Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su)** – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Максимова Людмила Анатольевна (maximova\_ng@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Матвеев Сергей Владимирович (sergio2100@mail.ru)** – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Матченко Николай Михайлович (екс\_05@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Минаева Надежда Витальевна (nminaeva@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

**Миронов Борис Гурьевич (mbg.chspu@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

**Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

**Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com)** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Немировский Юрий Владимирович (nemiryury@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

**Непершин Ростислав Иванович (nepershin\_ri@rambler.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

**Орлов Виктор Николаевич (orlowvn@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

**Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

**Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

**Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

**Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

**Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru)** – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru)** – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

**Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

**Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

**Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должна быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала [predel21@mail.ru](mailto:predel21@mail.ru) и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки**

**на русском и английском языках; сведения о всех авторах на русском и английском языках:** должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 $\epsilon$  с использованием стиля `prede1.sty`. Стиль `prede1.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки BibTeX. Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Спорыгин А. Н., Щеглова Ю. Д.</i> Моделирование поведения сферического объекта при сейсмической активности ядра .....	5
<i>Патрина Т. А., Степанов С. К.</i> Методики решения задач прочностного анализа материалов деталей машин и механизмов при различных внешних воздействиях .....	15
<i>Сенашов С. И., Савостьянова И. Л.</i> Упруго-пластическое кручение многослойного стержня .....	28
<i>Мионов Б. Г., Мионов Ю. Б.</i> О кручении сектора толстостенной трубы .....	36
<i>Немировский Ю. В., Тихонов С. В.</i> Об определении положения нейтральной линии в случае предельно-упругого изгиба многослойных физически-нелинейных бетонных стержней .....	41
<i>Гультяев В. И., Булгаков А. Н.</i> Экспериментальное изучение упругопластического деформирования конструкционных материалов на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ .....	53
<i>Кержаев А. П., Меньшова И. В., Никитин А. В.</i> Неоднородная задача для полосы с разными граничными условиями .....	65
<i>Адамов А. А., Торопщина А. В.</i> Экспериментально-теоретическое исследование деформирования многослойных сотовых панелей при испытании на сдвиг .....	76
<i>Гультяев В. И., Алексеев А. А., Широков А. Н., Булгаков А. Н.</i> Экспериментальное исследование материала сталь 45 при деформировании по программам смещённого веера .....	88
<i>Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.</i> Термические и атермические плоские гармонические волны в ацентрическом изотропном теле .....	99
<i>Нестеров Т. К.</i> Распространение слабых разрывов перемещений и микровращений в полуйзотропном микрополярном теле .....	108
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА .....	119
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ .....	122
СОДЕРЖАНИЕ .....	124