

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
Научный журнал
№ 1(59)

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.

Выходит 4 раза в год

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге “Пресса России” 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко, С. В. Тихонов

Ответственные секретари: С. В. Матвеев, Е. В. Мурашкин

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, В. Г. Зубчанинов, Л. А. Игумнов, Р. А. Каюмов, И. Э. Келлер,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, Д. С. Лисовенко, Е. В. Ломакин,
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, Н. В. Минаева, Ю. В. Немировский,
Р. И. Непершин, В. Н. Орлов, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов,
А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

Международный совет: В. М. Мирсалимов (Азербайджан), А. В. Чигарев
(Белоруссия)

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, Президентский бульвар, 19А

Адрес издателя: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Тел.: (8352) 22-28-71, доб. 1182

E-mail: predel21@mail.ru

WWW: <https://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева, 2024

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

**VESTNIK
CHUVASHSKOGO GOSUDARSTVENNOGO PEDAGOGICHESKOGO
UNIVERSITETA IM. I. YA. YAKOVLEVA
SERIYA: MEKHANIKA PREDEL'NOGO SOSTOYANIYA**

**Scientific journal
№ 1(59)**

The Journal founder: I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University
Founders of the series: D. D. Ivlev, D. M. Klimov, L. A. Maksimova, A. V. Manzhirov,
B. G. Mironov, G. K. Mikhailov, Yu. N. Radaev, E. I. Shemyakin

Published since March 2007
Published four times a year

Registered in Federal Service for Supervision of Communications
Information Technology, and Mass Media "Roskomnadzor"
(Accreditation Certificate PI No. FS77-58094 d/d 20 May, 2014).

Hard copy of the Journal is available by subscription from the catalogue "Press of Russia"
(reg. No. 13109).

Editor-in-chief: B. G. Mironov

Executive Editor: Yu. N. Radayev

Associate Editor: N. M. Matchenko, S. V. Tikhonov

Executive Secretary: E. V. Murashkin, S. V. Matveev

Editorial Board: V. G. Bazhenov, A. A. Burenin, D. V. Georgievskiy,
V. V. Glagolev, V. G. Zubzhaninov, L. A. Igumnov, R. A. Kayumov, I. E. Keller,
D. M. Klimov, V. A. Kovalev, L. Yu. Kossovich, D. S. Lisovenko, E. V. Lomakin,
L. A. Maksimova, A. A. Markin, N. V. Minaeva, Yu. V. Nemorovskii, R. I. Nepershin,
V. N. Orlov, V. P. Radchenko, A. F. Revuzhenko, S. I. Senashov, A. N. Sporihin,
A. A. Treshev, A. D. Chernishov, A. I. Khromov, A. I. Shashkin

International Council: V. M. Mirsalimov (Azerbaijan), A. V. Chigarev
(Belorussia)

Postal address:: ul. K. Marksa 38, 428000 Cheboksary, Russia

Phone:: +7 352 22 28 71, ex.ph. 1182

E-mail:: predel21@mail.ru

Journal website:: <http://limit21.ru>

В. А. Ковалев¹, Е. В. Мурашкин², Н. Э. Стадник²

О МУЛЬТИВЕСОВЫХ ФОРМУЛИРОВКАХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ В ТЕОРИЯХ ПОВЕРХНОСТНОГО РОСТА

¹Московский городской университет управления Правительства Москвы
им. Ю.М. Лужкова, Москва, Россия

²Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Аннотация. В настоящей работе рассматривается способ построения мультивесовой теории поверхностного роста в терминах псевдотензоров. Предлагаемая к рассмотрению математическая теория существенным образом опирается на достижения современного псевдотензорного исчисления. Приводятся определения мультивесовых псевдотензорных элементов площади и объема. Выводится общая мультивесовая форма псевдотензорного соотношения на растущей поверхности, при учете дополнительного выделенного направления. Определяется необходимая система независимых мультивесовых псевдотензорных аргументов определяющей псевдотензорной функции на поверхности наращивания. Определяется полный мультивесовой набор совместных рациональных псевдоинвариантов псевдотензоров силовых и моментных напряжений. Дается псевдоинвариантно-полная формулировка определяющих соотношений на поверхности наращивания.

Ключевые слова: алгебраический вес, псевдотензор, наномасштаб, микромасштаб, микрополярность, псевдотензорный элемент объема, мультивесовая формулировка, определяющая псевдотензорная функция, поверхность наращивания, рациональный псевдоинвариант.

Ковалев Владимир Александрович, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры финансового менеджмента и финансового права; e-mail: vlad_koval@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0003-2991-9531>; AuthorID: 782898

Мурашкин Евгений Валерьевич, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: murashkin@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Стадник Никита Эдуардович, младший научный сотрудник лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: nik-122@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0187-8048>; AuthorID: 961836

для цитирования: Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Стадник Н. Э. О мультивесовых формулировках краевых условий в теориях поверхностного роста // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 1(59). С. 5–20. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.013 EDN: ZIYJHT

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Стадник Н. Э. 2024

Поступила: 03.03.2024; принята в печать: 16.03.2024; опубликована: 05.07.2024.

V. A. Kovalev¹, E. V. Murashkin², N. E. Stadnik²

ON A MULTIWEIGHT FORMULATION OF BOUNDARY CONDITIONS FOR SURFACE GROWTH THEORIES

¹*Moscow Metropolitan Governance Yury Luzhkov University, Moscow, Russia*

²*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

Abstract. In this paper, we consider a method for constructing a multiweight theory of surface growth in terms of pseudotensors. The mathematical theory proposed for consideration is substantially based on the achievements of modern pseudotensor calculus. Definitions of multiweight pseudotensor elements of area and volume are given. The general multiweight form of the pseudotensor relation on a growing surface is derived, taking into account the additional selected direction. The necessary system of independent multiweight pseudotensor arguments of the defining pseudotensor function on the growing surface is determined. A complete multiweight set of joint rational pseudoinvariants of force and couple stress pseudotensors is determined. A pseudoinvariant complete formulation of the constitutive relations on the growing surface is given.

Keywords: algebraic weight, pseudotensor, nanoscale, microscale, micropolarity, pseudotensor volume element, multiweight formulation, constitutive pseudotensor function, growing surface, rational pseudoinvariant.

Kovalev Vladimir Alexandrovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Moscow City University of Management, Moscow, Russia; **e-mail:** vlad_koval@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0003-2991-9531>; AuthorID: 782898

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; **e-mail:** evmurashkin@gmail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Nikita E. Stadnik, MD, Minor Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; **e-mail:** nik-122@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0187-8048>; AuthorID: 961836

to cite this article: Kovalev V. A., Murashkin E. V., Stadnik N. E. On a multiweight formulation of boundary conditions for surface growth theories // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 1(59). p. 5–20. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.013 EDN: ZIYJHT

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Аддитивное производство материалов и конструкций сложной формы (ламинирование, фотополимеризация, стереолитография, экструзия, намотка, наплавка, замораживание, абляция, сегментация, фронтальное и послойное отверждение) требуют развития неклассических моделей механики деформируемого твердого тела [1]. Указанные технологические процессы являются синтезом изделий путем последовательного добавления материала на поверхность произвольной формы. При этом, механические характеристики, используемых материалов и итоговых изделий зачастую проявляют чувствительность к изменению ориентации внешнего пространства. Решение прикладных задач поверхностного наращивания твердого тела является сложной и трудоемкой процедурой [2–5]. Существенной особенностью постановки таких краевых задач в рамках механики роста является задание краевых условий на границе раздела между исходным материалом и добавляемой частью [4, 5]. Модели поверхностного наращивания [4, 5] могут быть обобщены на случай микрополярных тел в терминах псевдотензоров [6–9]. В настоящей работе обсуждается процедура получения мультивесовой псевдотензорной формулировки краевых условий на поверхности наращивания. Основы алгебры и анализа псевдотензорных полей изложены в руководствах по тензорному исчислению [10–18].

1. Псевдотензорные элементы объема и площади в трехмерном пространстве. В настоящей статье будем использовать терминологию и понятия современной геометрии и тензорного анализа [13, 17, 19]. В дальнейшем изложении, где это не очевидно, сверху корневого символа псевдотензора в квадратных скобках будем отмечать его вес, а снизу в круглых скобках его ранг. Нулевой вес абсолютных тензоров и веса некоторых фундаментальных псевдотензоров в обозначениях отражаться не будут. Зададим функцию $w.g.t$ равную весу псевдотензора, на который действует эта функция, т.е. для псевдотензора $T_{(n)}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots k_r}$ алгебраического веса g ранга $n = s + r$ имеем

$$w.g.t \left(T_{(n)}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots k_r} \right) = g.$$

Псевдотензор $T_{(n)}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots k_r}$ алгебраического веса g ранга $n = s + r$ с помощью степеней псевдоскалярной единицы можно преобразовать к абсолютному тензору того же ранга согласно

$$T_{(n)}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots k_r} = 1^{[-g]} T_{(n)}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots k_r}. \quad (1)$$

В последнем равенстве выполняется правило баланса весов (the weights balance rule) [20–22]. Действительно, имеем

$$w.g.t \left(T_{(n)}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots k_r} \right) = w.g.t \left(1^{[-g]} T_{(n)}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots k_r} \right) = -g + g = 0.$$

Псевдоскалярные единицы и фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр определяются согласно следующим соотношениям [23]:

$$e = \mathbf{z}_1 \cdot (\mathbf{z}_2 \times \mathbf{z}_3), \quad \begin{matrix} [+1] \\ 1 \end{matrix} = e, \quad \begin{matrix} [-1] \\ 1 \end{matrix} = e^{-1}, \quad (2)$$

где $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ векторы ковариантного ортогонального базиса в трехмерном Евклидовом пространстве.

Целые степени псевдоскалярных единиц обладают свойством ковариантного постоянства, т. е.

$$\nabla_k \begin{matrix} [\pm g] \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [\pm g] \\ 0 \end{matrix},$$

где ∇_k — оператор ковариантного дифференцирования в метрике g_{js} .

Символы перестановок Леви–Чивита являются фундаментальными псевдотензорами, непосредственно связанными с ориентацией трехмерного пространства, позволяющими разделить правые и левые тройки базисных векторов согласно правилу

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{для троек } i, j, k = 123, 231, 312; \\ -1, & \text{для троек } i, j, k = 132, 213, 321; \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (3)$$

Отметим, символы перестановок обладают аномальными свойствами, нарушающими общепринятые в псевдотензорной алгебре соглашения. Во-первых они являются одновременно ковариантным псевдотензором третьего ранга нечетного алгебраического веса -1 и контравариантным псевдотензором третьего ранга нечетного алгебраического веса $+1$. Последнее, в силу (3), может быть выражено соотношением

$$\begin{matrix} [-1] \\ \epsilon \end{matrix}_{lsk} = \begin{matrix} [+1] \\ \epsilon \end{matrix}_{lsk}.$$

Во-вторых, для символов перестановок необходимы специальные правила, по которым следует поднимать/опускать индексы:

$$\begin{matrix} [-1] \\ \epsilon \end{matrix}_{ijk} = \begin{matrix} [-2] \\ 1 \end{matrix} g_{il} g_{js} g_{kr} \begin{matrix} [+1] \\ \epsilon \end{matrix}_{lsr}, \quad \begin{matrix} [+1] \\ \epsilon \end{matrix}_{ijk} = \begin{matrix} [+2] \\ 1 \end{matrix} g^{il} g^{js} g^{kr} \begin{matrix} [-1] \\ \epsilon \end{matrix}_{lsr}. \quad (4)$$

Символы перестановок позволяют ввести тензорные элементы объема наиболее простым и понятным способом, что соответствует подходу, предложенному Пуанкаре [24, 25], без привлечения теории внешних дифференциальных форм [26–29]. Заметим, что литературный поиск показывает ограниченное количество работ, обсуждающих указанное обстоятельство. Тензорный элемент объема в трехмерном пространстве можно принять в форме

$$d\tau^{mns} = d\tau^{123} \begin{matrix} [-1] \\ \epsilon \end{matrix}^{[+1]mns}, \quad (5)$$

где $d\tau^{[-1]}_{123}$ — естественный элемент объема,¹ представляющий собой псевдоскаляр веса -1 , который определяется следующим образом

$$d\tau^{[-1]}_{123} = dx^1 dx^2 dx^3. \quad (6)$$

Опустив в формуле (5) индексы, т. е. применив правило жонглирования индексами для символов перестановок (4), определим ковариантный тензорный элемент объема в виде

$$d\tau_{mns} = \overset{[+2]}{1} \overset{[-1]}{d\tau}^{123} \overset{[-1]}{\epsilon}_{mns} = \overset{[+1]}{d\tau}_{123} \overset{[-1]}{\epsilon}_{mns}, \quad (7)$$

где $d\tau^{[+1]}_{123}$ — дублетный элемент объема [13], представляющий собой псевдоскаляр веса $+1$.

С помощью псевдоскаляров $d\tau^{[-1]}_{123}$, $d\tau^{[+1]}_{123}$ и псевдоскалярных единиц $\overset{[\mp 1]}{1}$ можно образовать абсолютный скаляр $d\tau$, являющийся инвариантным элементом объема

$$d\tau = \overset{[+1]}{1} \overset{[-1]}{d\tau}^{123} = \overset{[-1]}{1} \overset{[+1]}{d\tau}_{123}.$$

В дальнейшем изложении примем упрощенные обозначения для псевдоинвариантных элементов объема

$$\overset{[-1]}{d\tau} = \overset{[-1]}{d\tau}^{123}, \quad \overset{[+1]}{d\tau} = \overset{[+1]}{d\tau}_{123}.$$

Аналогичным способом, с тем различием, что рассуждения (5) должны быть проведены для двумерной поверхности, задаются псевдоинвариантные элементы площади

$$\overset{[-1]}{A} = \overset{[-1]}{A}^{12}, \quad \overset{[+1]}{A} = \overset{[+1]}{A}_{12}.$$

Введем в рассмотрение мультивесовые характеристики [32–34], принимающие дискретные значения в зависимости от используемого элемента объема, т.е.:

$$\boxtimes = \begin{cases} +1, & \text{для } \overset{[+1]}{d\tau}; \\ 0, & \text{для } d\tau; \\ -1, & \text{для } \overset{[-1]}{d\tau}; \end{cases} \quad \boxtimes = \begin{cases} +1, & \text{для } \overset{[+1]}{dA}; \\ 0, & \text{для } dA; \\ -1, & \text{для } \overset{[-1]}{dA}. \end{cases} \quad (8)$$

$$\square = \begin{cases} -1, & \text{для } \overset{[+1]}{d\tau}; \\ 0, & \text{для } d\tau; \\ +1, & \text{для } \overset{[-1]}{d\tau}. \end{cases} \quad \square = \begin{cases} -1, & \text{для } \overset{[+1]}{dA}; \\ 0, & \text{для } dA; \\ +1, & \text{для } \overset{[-1]}{dA}. \end{cases} \quad (9)$$

¹Еще раз заметим, важное значение естественных элементов объема при формулировке вариационных функционалов физических теорий поля [30, 31].

$$\Xi = \begin{cases} -2, & \text{для } d\tau^{[+1]}; \\ -1, & \text{для } d\tau; \\ 0, & \text{для } d\tau^{[-1]}, \end{cases} \quad \Xi = \begin{cases} -2, & \text{для } dA^{[+1]}; \\ -1, & \text{для } dA; \\ 0, & \text{для } dA^{[-1]}. \end{cases} \quad (10)$$

Анализируя определения (8)–(10), можно установить

$$\boxtimes = -\square = -\Xi - 1.$$

2. Мультивесовая формулировка краевых условий на поверхности наращивания. Ранее был предложен способ вывода краевых условий на поверхности наращивания [6–9], развивающий модели поверхностного роста, предложенные в работах академика Н.Х. Арутюняна [4] и профессора Г.И. Быковцева [5]. Определим распространяющуюся поверхность наращивания Σ в трехмерном евклидовом пространстве неявным уравнением

$$t = \tau(x^i)_*. \quad (11)$$

Отметим, что, в самом общем случае, поверхность наращивания Σ может определяться псевдоскалярной функцией $\tau^{[g]}_*(x^i)$. В этом случае, как было показано в работах [1], необходимо вести речь о псевдоскалярном времени $t^{[g]}$. Кроме того, нормаль к поверхности роста следует трактовать как псевдовектор алгебраического веса g . Указанный случай может быть сведен к случаю поверхности, задающейся абсолютным скалярным полем (11), с использованием преобразования (1).

В дальнейшем, без ограничения общности, будем рассматривать поверхности Σ , заданные согласно (11). На мультивесовой псевдоинвариантный элемент площади $\boxtimes A$ такой поверхности с вектором единичной нормали n_i действуют псевдовекторы поверхностных сил $\square \mathbf{t}$ и моментов $\Xi \mathbf{m}$, определяемые через псевдотензоры актуальных силовых $\square \boldsymbol{\sigma}$ и моментных $\Xi \boldsymbol{\mu}$ напряжений в соответствии с мультивесовыми формулами

$$\square \mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \square \boldsymbol{\sigma}, \quad \Xi \mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot \Xi \boldsymbol{\mu}. \quad (12)$$

Единичный вектор нормали n_i к поверхности наращивания Σ , заданной абсолютным скалярным полем (11) направленный в сторону ее распространения, как отмечалось выше, является абсолютным вектором выселяющимся по формуле

$$n_i = c \partial_i \tau_*, \quad c = |\nabla \tau_*|^{-1} \quad (t = \tau), \quad (13)$$

где c — линейная скорость распространения поверхности наращивания Σ в нормальном направлении n_k .

Мультивесовая формулировка краевых условий на поверхности наращивания, подробный вывод тензорных и псевдотензорных формулировок которых

можно найти в работах [6–9], записывается в виде:

$$c[\nabla_j \overset{\square}{\sigma}^{ji}(x^s) + \nabla_j \overset{\square}{S}^{ji} + \overset{\square}{X}^i(x^s)] - n_j \partial_t \overset{\square}{\sigma}^{ji}(x^s, t) = \overset{\square}{0} \quad (t = \tau + 0); \quad (14)$$

$$c[\nabla_i \overset{\boxminus}{\mu}_{\cdot k}^{i\cdot}(x^s) + \nabla_i \overset{\boxminus}{M}_{\cdot k}^{i\cdot} - 2\overset{\boxminus}{\tau}_k + \overset{\boxminus}{Y}_k] - n_i \partial_t \overset{\boxminus}{\mu}_{\cdot k}^{i\cdot}(x^s, t) = \overset{\boxminus}{0} \quad (t = \tau + 0); \quad (15)$$

$$\overset{\square}{\sigma}^{ij} = \int_{\tau+0}^t [\partial_t \overset{\square}{\sigma}^{ij}(x^s, t')] dt' + \overset{\square}{S}^{ji} + \overset{\square}{\sigma}^{ij}(x^s); \quad (16)$$

$$\overset{\boxminus}{\mu}_{\cdot k}^{i\cdot} = \int_{\tau+0}^t [\partial_t \overset{\boxminus}{\mu}_{\cdot k}^{i\cdot}(x^s, t')] dt' + \overset{\boxminus}{M}_{\cdot k}^{i\cdot} + \overset{\boxminus}{\mu}_{\cdot k}^{i\cdot}(x^s); \quad (17)$$

$$\overset{\square}{S}^{ij} = \int_{\tau-0}^{\tau+0} [\partial_t \overset{\square}{\sigma}^{ij}(x^s, t')] dt'; \quad (18)$$

$$\overset{\boxminus}{M}_{\cdot k}^{i\cdot} = \int_{\tau-0}^{\tau+0} [\partial_t \overset{\boxminus}{\mu}_{\cdot k}^{i\cdot}(x^s, t')] dt'. \quad (19)$$

В приведенных выше уравнениях (14)–(19) введены следующие обозначения: $\overset{\square}{S}^{ji}$ — мультивесовой интеграл, связанный со скачком силовых напряжений; $\overset{\square}{\sigma}^{ij}(x^s) = \overset{\square}{\sigma}^{ij}(x^s, t)|_{t=\tau(x^s)-0}$ — компоненты тензора напряжений; соответственно, вычисленные в момент $t = \tau(x^s) - 0$ прямо перед включением элемента в основное твердое тело; $\overset{\square}{X}^i(x^s) = \overset{\square}{X}^i(x^s, t)|_{t=\tau(x^s)+0}$. Момент $t = \tau(x^s) + 0$ соответствует моменту сразу после прикрепления элемента к поверхности наращивания, $\overset{\boxminus}{M}_{\cdot k}^{i\cdot}$ — интеграл, связанный со скачком моментных напряжений, $\overset{\boxminus}{\mu}_{\cdot k}^{i\cdot}(x^s) = \overset{\boxminus}{\mu}_{\cdot k}^{i\cdot}(x^s, t)|_{t=\tau(x^s)-0}$ — компоненты тензора моментных напряжений, вычисленные во время $t = \tau(x^s) - 0$.

3. Мультивесовые псевдотензорные функции, связывающие актуальные силовые и моментные напряжения с силовыми и моментными напряжениями в наращиваемом элементе. В процессах аддитивного производства можно выделить характерные направления на поверхности наращивания $\overset{1}{j}, \overset{2}{j}$. Рассмотрим случай, когда векторы $\overset{1}{j}$ и $\overset{2}{j}$ ортогональны. Процесс наращивания и способы определения необходимых параметров такого процесса можно представить в виде схема (см. рис. 1). В этом случае мультивесовые

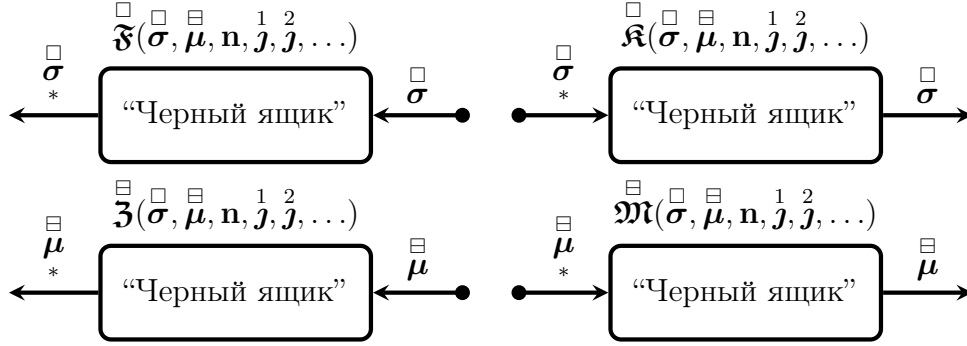


Рис. 1. Идея физического принципа “Черного ящика” в механике наращиваемых тел.

псевдотензорные функции связи силовых σ_{*}^{ij} и моментных напряжений $\mu_{*}^{i \cdot k}$ с актуальными напряжениями и моментами на поверхности наращивания можно принять в форме

$$\sigma_{*}^{ij} = \mathfrak{F}_{*}^{ij}(\sigma_{*}^{ij}, \mu_{*}^{i \cdot j}, n_j, j_j^1, j_j^2, \dots), \quad \mu_{*}^{i \cdot j} = \mathfrak{Z}_{*}^{i \cdot j}(\sigma_{*}^{ij}, \mu_{*}^{i \cdot j}, n_j, j_j^1, j_j^2, \dots), \quad (20)$$

и, если возможно обратно, тогда справедливы соотношения

$$\sigma_{*}^{ij} = \mathfrak{K}_{*}^{ij}(\sigma_{*}^{ij}, \mu_{*}^{i \cdot j}, n_j, j_j^1, j_j^2, \dots), \quad \mu_{*}^{i \cdot j} = \mathfrak{M}_{*}^{i \cdot j}(\sigma_{*}^{ij}, \mu_{*}^{i \cdot j}, n_j, j_j^1, j_j^2, \dots), \quad (21)$$

В мультивесовых соотношениях (20) и (21) требуется экспериментальное определение неизвестных функций $\mathfrak{F}_{*}^{ij}$, $\mathfrak{Z}_{*}^{i \cdot k}$, $\mathfrak{K}_{*}^{ij}$ и $\mathfrak{M}_{*}^{i \cdot k}$. “Черный ящик” в схеме на рис. 1 определяет возможные изменения физико-механических параметров напряженно деформированного состояния материала во временном промежутке от момента создания наращиваемого элемента до момента его присоединения к основному телу, т.е. во временном интервале $\tau - 0 \leq t \leq \tau + 0$. “Черный ящик” может быть связан с различными физическими явлениями. В частности, мультивесовые псевдотензорные функции $\mathfrak{F}_{*}^{ij}$, $\mathfrak{Z}_{*}^{i \cdot k}$, $\mathfrak{K}_{*}^{ij}$ и $\mathfrak{M}_{*}^{i \cdot k}$ при аддитивном производстве 3D-материалов могут зависеть от подвижных выделенных направлений j^1, j^2 на распространяющейся поверхности наращивания. Физический смысл дополнительных направляющих директоров j^1, j^2 можно трактовать как: характерные направления укладки волокон в тканых композитных материалах; направления армирования более жесткими волокнами; направления наматывания нитей в бобину и т. д. Следует отметить, что при определении мультивесовых псевдотензорных функций $\mathfrak{F}_{*}^{ij}$, $\mathfrak{Z}_{*}^{i \cdot k}$, $\mathfrak{K}_{*}^{ij}$ и $\mathfrak{M}_{*}^{i \cdot k}$ следует учитывать инвариантность их аргументов к поворотам подвижной системы координат связанной с поверхностью наращивания вокруг единичного вектора нормали n_j к указанной поверхности. В таком случае система совместных псевдоинвариантов

псевдотензоров $\overset{\square}{\sigma}, \overset{\boxminus}{\mu}$ и абсолютных векторов $\mathbf{n}, \overset{1}{j}, \overset{2}{j}$, удовлетворяющих условию ротационной инвариантности относительно вектора $\mathbf{n}$.

4. Способы построения систем совместных алгебраических относительных инвариантов тензора второго ранга и вектора. Как видно из обсуждения в предыдущем разделе, для дальнейшей конкретизации определяющих тензорных функций на поверхности наращивания необходимо определить систему совместных псевдоинвариантов псевдотензоров $\overset{\square}{\sigma}, \overset{\boxminus}{\mu}$ и абсолютных векторов $\mathbf{n}, \overset{1}{j}, \overset{2}{j}$. С помощью векторов $\mathbf{n}, \overset{1}{j}, \overset{2}{j}$ можно определить систему координат, возможно косоугольную.

Теория построения систем совместных рациональных псевдоинвариантов подробно рассмотрены в монографии проф. Г.Б. Гуревича [13]. Следуя методологии Г.Б. Гуревича, и, используя теорию Гамильтона–Кэли, обобщенную на случай псевдотензоров [–sayley]. В рассматриваемом случае систему рациональных алгебраических мультивесовых псевдоинвариантов псевдотензора силовых $\overset{\square}{\sigma}$ и моментных $\overset{\boxminus}{\mu}$ напряжений и векторов $\mathbf{n}, \overset{1}{j}, \overset{2}{j}$ можно составить из всевозможных скалярных произведений линейно независимых векторов: $\mathbf{n}, \overset{1}{j}, \overset{2}{j}, \overset{\square}{t}, \overset{\square}{t}_{\perp}, \overset{\boxminus}{m}, \overset{\boxminus}{m}_{\perp}, \overset{2\square}{t}, \overset{2\square}{t}_{\perp}, \overset{2\boxminus}{m}, \overset{2\boxminus}{m}_{\perp}$. В дальнейшем будем использовать обозначения

$$\begin{aligned} \overset{\square}{t} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{n} \cdot \overset{\square}{\sigma} \cdot \mathbf{n}, & \overset{\square}{t}_{\perp} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{n} \cdot \overset{\square}{\sigma} \cdot \overset{\square}{\sigma} \cdot \mathbf{n}, & \overset{\boxminus}{m} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{n} \cdot \overset{\boxminus}{\mu} \cdot \mathbf{n}, & \overset{2\boxminus}{m} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{n} \cdot \overset{\boxminus}{\mu} \cdot \overset{\boxminus}{\mu} \cdot \mathbf{n}, \\ \overset{\square}{t} \cdot \overset{s}{j} &= \mathbf{n} \cdot \overset{\square}{\sigma} \cdot \overset{s}{j}, & \overset{\boxminus}{m} \cdot \overset{s}{j} &= \mathbf{n} \cdot \overset{\boxminus}{\mu} \cdot \overset{s}{j}, & \overset{2\square}{t} \cdot \overset{s}{j} &= \mathbf{n} \cdot \overset{\square}{\sigma} \cdot \overset{\square}{\sigma} \cdot \overset{s}{j}, & \overset{2\boxminus}{m} \cdot \overset{s}{j} &= \mathbf{n} \cdot \overset{\boxminus}{\mu} \cdot \overset{\boxminus}{\mu} \cdot \overset{s}{j} \end{aligned} \quad (22)$$

($s = 1, 2$).

В мультипликаторе, представленном с помощью табл. 1, указана полная система искоемых рациональных мультивесовых псевдоинвариантов. Однако, не все мультивесовые псевдоинварианты являются независимыми. Зависимые псевдоинварианты можно устранить из дальнейшего рассмотрения, найдя соответствующие сизигии связывающие зависимые псевдоинварианты. Так, например, очевидная сизигия $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ позволяет отбросить псевдоинварианты расположенные ниже главной диагонали мультипликатора (см. табл. 1).

Кроме того, совместные алгебраические рациональные инварианты высоких порядков, включающие кубы и биквадраты псевдотензоров силовых и моментных напряжений также могут быть исключены при использовании алгебраической теории Гамильтона–Кэли [13, –sayley].

Таким образом, неприводимая полная система совместных алгебраических рациональных мультивесовых ротационных псевдоинвариантов может быть сведена к виду

$$\overset{\square}{t} \cdot \mathbf{n}, \quad \overset{\square}{t} \cdot \overset{\square}{t}, \quad \overset{\boxminus}{m} \cdot \mathbf{n}, \quad \overset{\boxminus}{m} \cdot \overset{\boxminus}{m}, \quad \overset{\square}{t} \cdot \overset{\boxminus}{m}, \quad \overset{\square}{t}_1 \cdot \overset{\boxminus}{m}_1. \quad (23)$$

Таблица 1. Мультипликатор мультивесовых псевдоинвариантов.

5. Определяющие мультивесовые псевдотензорные функции в специфической ортогональной системе координат. В случае, когда в качестве базисных векторов выбраны $\mathbf{n}, \overset{1}{\mathbf{j}}, \overset{2}{\mathbf{j}}$ определяющие мультивесовые псевдотензорные функции (20) на поверхности наращивания в терминах полной системы совместных инвариантов (23) для сужения на двумерный плоский касательный элемент T тензора $\overset{*}{\boldsymbol{\tau}}$, примут вид

$$\overset{\square}{\sigma}_{*}^{ij} = \overset{\square}{\mathfrak{F}}^{ij}(\overset{\square}{\mathbf{t}} \cdot \overset{\square}{\mathbf{n}}, \overset{\square}{\mathbf{t}} \cdot \overset{\square}{\mathbf{t}}, \overset{\boxminus}{\mathbf{m}} \cdot \overset{\boxminus}{\mathbf{n}}, \overset{\boxminus}{\mathbf{m}} \cdot \overset{\boxminus}{\mathbf{m}}, \overset{\square}{\mathbf{t}} \cdot \overset{\boxminus}{\mathbf{m}}, \overset{\square}{\mathbf{t}}_1 \cdot \overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_1). \quad (24)$$

$$\overset{\boxminus}{\mu}_{*}^{i,j} = \overset{\boxminus}{\mathfrak{Z}}^{i,j}(\overset{\square}{\mathbf{t}} \cdot \overset{\square}{\mathbf{n}}, \overset{\square}{\mathbf{t}} \cdot \overset{\square}{\mathbf{t}}, \overset{\boxminus}{\mathbf{m}} \cdot \overset{\boxminus}{\mathbf{n}}, \overset{\boxminus}{\mathbf{m}} \cdot \overset{\boxminus}{\mathbf{m}}, \overset{\square}{\mathbf{t}} \cdot \overset{\boxminus}{\mathbf{m}}, \overset{\square}{\mathbf{t}}_1 \cdot \overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_1). \quad (25)$$

Для проекций псевдовекторов $\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp}$ и $\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_{\perp}$ в касательной плоскости T к поверхности наращивания следует

$$\begin{aligned} |\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp}|^2 &= |\overset{\square}{\mathbf{t}}_1 \cdot \overset{\square}{\mathbf{j}}_1|^2 + |\overset{\square}{\mathbf{t}}_2 \cdot \overset{\square}{\mathbf{j}}_2|^2, \\ |\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_{\perp}|^2 &= |\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_1 \cdot \overset{\boxminus}{\mathbf{j}}_1|^2 + |\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_1 \cdot \overset{\boxminus}{\mathbf{j}}_2|^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Квадраты совместных инвариантов и длины векторов (23) и длины проекций (26) легко вычисляются через актуальные значения $\overset{\square}{\mathbf{t}}$ и $\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}$ на поверхности наращивания, т.е. через актуальные компоненты силовых и моментных напряжений, согласно формулам

$$\begin{aligned} |\overset{\square}{\mathbf{t}} \cdot \overset{\square}{\mathbf{n}}| &= |\overset{\square}{\sigma}_{33}|, \quad |\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp} \cdot \overset{\square}{\mathbf{j}}_1|^2 = \overset{\square}{\sigma}_{31}^2, \quad |\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp} \cdot \overset{\square}{\mathbf{j}}_2|^2 = \overset{\square}{\sigma}_{32}^2, \\ |\overset{\boxminus}{\mathbf{m}} \cdot \overset{\boxminus}{\mathbf{n}}| &= |\overset{\boxminus}{\mu}_{33}|, \quad |\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_{\perp} \cdot \overset{\boxminus}{\mathbf{j}}_1|^2 = \overset{\boxminus}{\mu}_{31}^2, \quad |\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_{\perp} \cdot \overset{\boxminus}{\mathbf{j}}_2|^2 = \overset{\boxminus}{\mu}_{32}^2, \\ |\overset{\square}{\mathbf{t}} \cdot \overset{\square}{\mathbf{t}}| &= |\overset{\square}{\sigma}_{3s} \overset{\square}{\sigma}_{s3}| = |\overset{\square}{\sigma}_{31} \overset{\square}{\sigma}_{13} + \overset{\square}{\sigma}_{32} \overset{\square}{\sigma}_{23} + \overset{\square}{\sigma}_{33}^2|, \\ |\overset{\boxminus}{\mathbf{m}} \cdot \overset{\boxminus}{\mathbf{m}}| &= |\overset{\boxminus}{\mu}_{3s} \overset{\boxminus}{\mu}_{s3}| = |\overset{\boxminus}{\mu}_{31} \overset{\boxminus}{\mu}_{13} + \overset{\boxminus}{\mu}_{32} \overset{\boxminus}{\mu}_{23} + \overset{\boxminus}{\mu}_{33}^2|. \end{aligned} \quad (27)$$

Определяющие тензорные функции (24) и (25) на поверхности наращивания с учетом выражений (27) и приняв следующие обозначения для инвариантов,

$$\begin{aligned} I &= |\overset{\square}{\sigma}_{33}|, \quad II = \overset{\square}{\sigma}_{31}^2 + \overset{\square}{\sigma}_{32}^2, \quad III = |\overset{\square}{\sigma}_{31} \overset{\square}{\sigma}_{13} + \overset{\square}{\sigma}_{32} \overset{\square}{\sigma}_{23} + \overset{\square}{\sigma}_{33}^2|, \\ IV &= |\overset{\boxminus}{\mu}_{33}|, \quad V = \overset{\boxminus}{\mu}_{31}^2 + \overset{\boxminus}{\mu}_{32}^2, \quad VI = |\overset{\boxminus}{\mu}_{31} \overset{\boxminus}{\mu}_{13} + \overset{\boxminus}{\mu}_{32} \overset{\boxminus}{\mu}_{23} + \overset{\boxminus}{\mu}_{33}^2|, \\ VII &= |\overset{\square+\boxminus}{\sigma}_{33} \overset{\boxminus}{\mu}_{33}|. \end{aligned} \quad (28)$$

можно выписать в форме

$$\overset{\square}{\sigma}_{*}^{ij} = \overset{\square}{\mathfrak{F}}^{ij}(I, II, III, IV, V, VI, VII). \quad (29)$$

$$\overset{\boxminus}{\mu}_{*}^{i,j} = \overset{\boxminus}{\mathfrak{Z}}^{i,j}(I, II, III, IV, V, VI, VII). \quad (30)$$

Граничные условия в форме дифференциальных ограничений на поверхности наращивания (14), (15) обладают необходимыми свойствами чувствительности к геометрии поверхности наращивания и характерным направлениям выкладки материала в процессах намотки нитей или производстве тканых композитов.

6. Заключение. В настоящей работе предложен способ построения мультивесовой теории поверхностного роста в терминах псевдотензоров. Предложенная к рассмотрению математическая теория существенным образом опирается на достижения современного псевдотензорного исчисления. Обсуждаются определения мультивесовых псевдотензорных элементов площади и объема. Выведена общая мультивесовая форма псевдотензорного соотношения на растущей поверхности, при учете дополнительного выделенного направления. Определена необходимая система независимых мультивесовых псевдотензорных аргументов определяющей псевдотензорной функции на поверхности наращивания. Определяется полный набор совместных рациональных псевдоинвариантов псевдотензоров силовых и моментных напряжений. Дана псевдоинвариантно-полная формулировка определяющих соотношений на поверхности наращивания в специфической системе координат.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500437-9).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number 124012500437-9).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] B. Berman. 3-D printing: The new industrial revolution // Business Horizons. 2012. Vol. 55. P. 155–162. DOI: 10.1016/j.bushor.2011.11.003.
- [2] V. Southwell R. An introduction to the theory of elasticity. For engineers and physicists. London : Oxford Univ. Press, 1936.
- [3] Kovalev V. A. Radayev Yu. N. On a form of the first variation of the action integral over a varied domain // Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform. 2014. Vol. 14. P. 199–209. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-2-199-209>.

- [4] Arutyunyan N. Kh. Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // J. Appl. Math. Mech. 1984. Vol. 48. P. 1–10. DOI: 10.1016/0021-8928(84)90099-6.
- [5] Быковцев ГИ. Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред: сб. статей. Владивосток : Дальнаука, 2002. 153 p.
- [6] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. 2019. Vol. 23. P. 646–656. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1696>.
- [7] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. Об одном классе определяющих уравнений на растущей поверхности // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. P. 11–29. DOI: 10.26293/chgpu.2019.40.2.012.
- [8] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a Differential Constraint in Asymmetric Theories of the Mechanics of Growing Solids // Mechanics of Solids. 2019. Vol. 54. P. 1157–1164. DOI: 10.3103/S0025654419080053.
- [9] В. Мурашкин Е. О формулировках краевых условий в задачах синтеза тканых 3d материалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. P. 114–121. DOI: 10.37972/chgpu.2021.1.47.010.
- [10] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Trans. Am. Math. Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: <https://www.jstor.org/stable/1989146>.
- [11] O. Veblen. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge : Cambridge University Press, 1927. 102 p.
- [12] Levi-Civita T. The absolute differential calculus (calculus of tensors). London & Glasgow : Blackie & Son Limited, 1927. 450 p.
- [13] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л. : ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].
- [14] A. Einstein. General Relativity; an Einstein Centenary Survey. Cambridge : Cambridge University Press, 1979. 937 p.
- [15] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford : Clarendon Press, 1965. 434 p. [Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. 456 с.].
- [16] Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York : John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.].
- [17] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto : Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [18] Das A. J. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Berlin, Heidelberg : Springer Science & Business Media, 2007. DOI: 10.1007/978-0-387-69469-6.
- [19] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М. : Наука, 1966. 648 с.
- [20] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 1(51). С. 17–26. DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.002.
- [21] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 106–115. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.012.

- [22] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 118–127. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.013.
- [23] Radayev Y. N. Tensors with Constant Components in the Constitutive Equations of a Hemitropic Micropolar Solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 5. P. 1517–1527. DOI: 10.3103/S0025654423700206.
- [24] Poincaré H. Sur les residus des integrales doubles // Acta Math. 1887. no. 6. P. 321–380.
- [25] Poincaré H. Analysis situs // J. Ecole Polytech. 1895. no. 1 (2). P. 1–123.
- [26] Фиников Сергей Павлович. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Л., М. : ОГИЗ, 1948. 432 с.
- [27] Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М. : Мир, 1971. 392 с.
- [28] Ефимов Н. В. Введение в теорию внешних форм. М. : Наука, 1977. 88 с.
- [29] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М. : Наука, 1979. 431 с.
- [30] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М. : Физматлит, 2009. 156 с.
- [31] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 2010. 328 с.
- [32] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. 2023. № 4 (58). С. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
- [33] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. 2023. № 3 (57). С. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
- [34] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/S0025654424700274.
- [35] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Generalization of the algebraic hamilton–cayley theory // Mechanics of Solids. 2021. Vol. 56, no. 6. P. 996–1003. DOI: 10.3103/s0025654421060145.

REFERENCES

- [1] B. Berman. 3-D printing: The new industrial revolution // Business Horizons. 2012. Vol. 55. P. 155–162. DOI: 10.1016/j.bushor.2011.11.003.
- [2] V. Southwell R. An introduction to the theory of elasticity. For engineers and physicists. London : Oxford Univ. Press, 1936.
- [3] Kovalev V. A. Radayev Yu. N. On a form of the first variation of the action integral over a varied domain // Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform. 2014. Vol. 14. P. 199–209. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-2-199-209>.
- [4] Arutyunyan N. Kh. Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // J. Appl. Math. Mech. 1984. Vol. 48. P. 1–10. DOI: 10.1016/0021-8928(84)90099-6.
- [5] Быковцев ГИ. Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред: сб. статей. Владивосток : Дальнаука, 2002. 153 p.
- [6] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. 2019. Vol. 23. P. 646–656. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1696>.

- [7] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Об одном классе определяющих уравнений на растущей поверхности // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. Р. 11–29. DOI: 10.26293/chgpu.2019.40.2.012.
- [8] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a Differential Constraint in Asymmetric Theories of the Mechanics of Growing Solids // Mechanics of Solids. 2019. Vol. 54. P. 1157–1164. DOI: 10.3103/S0025654419080053.
- [9] Мурашкин Е. В. О формулировках краевых условий в задачах синтеза тканых 3d материалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. Р. 114–121. DOI: 10.37972/chgpu.2021.1.47.010.
- [10] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Trans. Am. Math. Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: <https://www.jstor.org/stable/1989146>.
- [11] Veblen O. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge : The University Press, 1933. 102 p.
- [12] Levi-Civita T. The absolute differential calculus (calculus of tensors). London & Glasgow : Blackie & Son Limited, 1927. 450 p.
- [13] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л. : ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].
- [14] Einstein A. General Relativity; an Einstein Centenary Survey. Cambridge : Cambridge University Press, 1979. 937 p.
- [15] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford : Clarendon Press, 1965. 434 p. [Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. 456 с.].
- [16] Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York : John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.].
- [17] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto : Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [18] Das A. J. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Berlin, Heidelberg : Springer Science & Business Media, 2007. DOI: 10.1007/978-0-387-69469-6.
- [19] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М. : Наука, 1966. 648 с.
- [20] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 1(51). С. 17–26. DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.002.
- [21] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 106–115. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.012.
- [22] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 118–127. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.013.
- [23] Radayev Y. N. Tensors with Constant Components in the Constitutive Equations of a Hemitropic Micropolar Solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 5. P. 1517–1527. DOI: 10.3103/S0025654423700206.
- [24] Poincaré H. Sur les residus des integrales doubles // Acta Math. 1887. no. 6. P. 321–380.
- [25] Poincaré H. Analysis situs // J. Ecole Polytech. 1895. no. 1 (2). P. 1–123.

-
- [26] Фиников Сергей Павлович. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Л., М. : ОГИЗ, 1948. 432 с.
 - [27] Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М. : Мир, 1971. 392 с.
 - [28] Ефимов Н. В. Введение в теорию внешних форм. М. : Наука, 1977. 88 с.
 - [29] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М. : Наука, 1979. 431 с.
 - [30] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М. : Физматлит, 2009. 156 с.
 - [31] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 2010. 328 с.
 - [32] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. 2023. № 4 (58). С. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
 - [33] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. 2023. № 3 (57). С. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
 - [34] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/S0025654424700274.
 - [35] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Generalization of the algebraic hamilton–cayley theory // Mechanics of Solids. 2021. Vol. 56, no. 6. P. 996–1003. DOI: 10.3103/s0025654421060145.

М. А. Артемов, Е. С. Барановский, Р. Г. Меджидов, Д. И. Соломатин

О ПОЯВЛЕНИИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. Проблема получения непрерывных полей пластических деформаций при решении задач плоского напряженного состояния, в отличие от плоского деформированного состояния, характерна для всех моделей идеального упругопластического тела, включающих кусочно-линейные функции пластичности. Однако в ряде западных научных статей считается, что только модель идеального упругопластического тела с условием пластичности Треска неправильно прогнозирует неупругие деформации. В настоящей работе определяются границы изменения внешних параметров нагрузки, для которых диск будет находиться в упругом состоянии. Напряжения связаны с упругими деформациями законом Гука. В зависимости от значений параметров нагрузки пластическая область может зарождаться на внутренней границе диска, или на внешней границе диска, или на обеих границах одновременно. Рассматриваются разные условия пластичности. Показан вид годографа вектора напряжений.

Ключевые слова: вращающийся диск, закон Гука, кусочно-линейные функции пластичности, идеально пластическое тело, эквивалентное напряжение, годограф вектора напряжений.

Артемов Михаил Анатольевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой программного обеспечения и администрирования информационных систем; e-mail: artemov_m_a@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0001-8356-5418>; AuthorID: 8282

Барановский Евгений Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем; e-mail: bares84@mail.ru

Меджидов Руслан Гусенович, преподаватель кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем; e-mail: ihatedamnmails@gmail.com

Соломатин Дмитрий Иванович, старший преподаватель кафедры программирования и информационных технологий; e-mail: solomatin.cs.vsu.ru@gmail.com; AuthorID: 537983

для цитирования: Артемов М. А., Барановский Е. С., Меджидов Р. Г., Соломатин Д. И. О появлении пластических областей во вращающемся диске // Вестник Чувашия государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 1(59). С. 21–38. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.005 EDN: FIIDHC

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© Артемов М. А., Барановский Е. С., Меджидов Р. Г., Соломатин Д. И. 2024

Поступила: 10.01.2024; принята в печать: 01.02.2024; опубликована: 05.07.2024.

M. A. Artemov, E. S. Baranovsky, R. G. Medzhidov, D. I. Solomatin

ON THE APPEARANCE OF PLASTIC REGIONS IN A ROTATING DISK

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. Problem obtaining continuous fields of plastic deformations when solving problems of a plane stress state, in contrast to a plane deformed state, is characteristic of all models of an ideal elastoplastic body that include piecewise linear plasticity functions. However, only the model of an ideal elastoplastic body with the Tresca plasticity condition in a number of Western scientific articles is considered to incorrectly predict inelastic deformations. In this work, the boundaries of changes in external load parameters are determined for which the disk will be in an elastic state. Stresses are related to elastic deformations by Hooke's law. Depending on the values of the load parameters, a plastic region can nucleate on the inner boundary of the disk, either on the outer border of the disk, or on both borders simultaneously. Various plasticity conditions are considered. The view of the stress hodograph vector is shown.

Keywords: rotating disk, Hooke's law, piecewise linear plasticity functions, ideally plastic body, equivalent stress, stress vector hodograph.

Mikhail A. Artemov, Head of Chair, Professor, e-mail: artemov_m_a@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8356-5418>, AuthorID: 8282

Eugene S. Baranovsky, Associate Professor, e-mail: bares84@mail.ru

Ruslan G. Medzhidov, Lecturer, e-mail: ihatedamnmails@gmail.com

Dmitry I. Solomatin, Lecturer, e-mail: solomatin.cs.vsu.ru@gmail.com, AuthorID: 537983

to cite this article: Artemov M. A. Baranovsky E. S. Medzhidov R. G. Solomatin D. I. On the appearance of plastic regions in a rotating disk // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 1(59). p. 21–38. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.005 EDN: FIIDHC

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Принятые обозначения

$0\rho\theta z$ – цилиндрическая система координат;
 a – внутренний радиус диска;
 b – внешний радиус диска;
 E – модуль Юнга;
 ν – коэффициент Пуассона;
 k – предел пластичности при одноосное растяжение;
 $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_z$ – компоненты тензора напряжений;
 σ_{eq} – эквивалентное напряжение;
 p_a – давление на границе $\rho = a$ диска;
 p_b – давление на границе $\rho = b$ диска;
 $m = \frac{\gamma\omega^2}{gk}$ – безразмерный параметр инерционного воздействия;
 ω – угловая скорость вращения диска;
 γ – объемный вес;
 g – ускорение свободного падения;
 u – радиальная координата вектора перемещений;
 u_a – радиальное перемещение границы $\rho = a$;
 u_b – радиальное перемещение границы $\rho = b$;
 J_2, J_3 – квадратичный и кубический основные инварианты девиатора напряжений.

Введение. В математической теории пластичности, в частности, рассматриваются вопросы, связанные с изучением и применением математических моделей, включающих кусочно-линейные функции пластичности [1–8]. Кусочно-линейные условия пластичности идеально-пластических тел основаны на функциях пластичности, которые являются линейными относительно главных компонент тензора напряжений. Кроме исторических аспектов теории пластичности, особый интерес к кусочно-линейным условиям пластичности связан с возможностью получения аналитических решений некоторых практически важных задач. Известно [1–7], что при выборе общего предела пластичности на одноосное растяжение все поверхности пластичности изотропных несжимаемых идеально-пластических тел будут расположены между поверхностью пластичности максимального касательного напряжения и поверхностью пластичности максимального приведенного напряжения.

В настоящей работе рассматриваются условия пластичности с кусочно-линейными функциями и условие пластичности максимальной интенсивности напряжений (условие Мизеса). Выбор этих условий пластичности обусловлен тем, что они наиболее часто выбираются при решении одномерных упруго-пластических задач [9–11, 15–18, 20]. Выбор нелинейных условий пластичности приводит к необходимости численного решения таких задач [14, 19].

1. Постановка задачи

Рассматривается вопрос о зарождении пластических зон в тонком вращающемся диске постоянной толщины в процессе изменения нагрузки. Нагрузка

является комбинированной, определяется условиями на границах диска и угловой скоростью вращения диска. Задаются граничные условия разных видов: в напряжениях, кинематические. Определяются границы зарождения пластических областей.

Для оценки напряженного состояния в точках диска вводится эквивалентное напряжение, значение которого зависит от значения параметров нагрузки, геометрических параметров и параметров материала. Определяются границы изменения значений параметров нагрузки, в которых диск будет оставаться в упругом состоянии. Рассматривается модель линейного упругого тела.

Выбирается цилиндрическая система координат, ось Oz которой перпендикулярна срединной поверхности диска.

2. Безразмерные величины

Все рассматриваемые величины приводятся к безразмерному виду, что делает проведение вычислительного эксперимента более универсальным и удобным для оценки значения величин. В качестве характерного масштаба напряжений принимается значение предела пластичности на одноосное растяжение. Соответственно, все величины, имеющие размерность напряжений отнесены к пределу пластичности. За масштаб длины выбирается значение внешнего радиуса диска. Для удобочитаемости формул все безразмерные и размерные величины имеют одинаковые обозначения.

3. Граничные условия

Практическая реализация выбираемых значений параметров нагрузки не рассматривается.

Варианты граничных условий, когда на границах кольцевого диска $\rho = a$, $\rho = b$ заданы:

давления (граничные условия в напряжениях – силовые граничные условия)

$$\sigma_\rho|_{\rho=a} = -p_a, \quad \sigma_\rho|_{\rho=b} = -p_b, \quad (1)$$

перемещения (кинематические граничные условия)

$$u_\rho|_{\rho=a} = u_a, \quad u_\rho|_{\rho=b} = u_b, \quad (2)$$

условия

$$u_\rho|_{\rho=a} = u_a, \quad \sigma_\rho|_{\rho=b} = -p_b, \quad (3)$$

$$\sigma_\rho|_{\rho=a} = -p_a, \quad u_\rho|_{\rho=b} = u_b. \quad (4)$$

4. Упругое состояние диска

Для вращающегося диска, находящегося в упругом состоянии, напряжения и перемещения определяются по известным формулам [12]:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= A - \frac{B}{\rho^2} - \frac{3+\nu}{8} m \rho^2, \\ \sigma_\theta &= A + \frac{B}{\rho^2} - \frac{1+3\nu}{8} m \rho^2, \\ \sigma_z &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$Eu = (1 - \nu)A\rho + \frac{1 + \nu}{\rho}B - \frac{1 - \nu^2}{8}m\rho^3.$$

Кинематические граничные условия рассматривались, например, в [10, 11].

Формулы для определения неизвестных величин A, B (функции внешних параметров и параметров материала) определяются из граничных условий.

Если заданы граничные условия (1), то

$$\begin{aligned} A &= \frac{3 + \nu}{8}m(a^2 + b^2) + \frac{a^2p_a - b^2p_b}{b^2 - a^2}, \\ B &= \left(\frac{3 + \nu}{8}m + \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} \right) a^2b^2. \end{aligned} \quad (6)$$

После подстановки (6) в (5) можно получить, например, следующие формулы

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{3 + \nu}{8} \left(a^2 + b^2 - \rho^2 - \frac{a^2b^2}{\rho^2} \right) m + \frac{a^2p_a - b^2p_b}{b^2 - a^2} - \frac{a^2b^2(p_a - p_b)}{\rho^2(b^2 - a^2)}, \\ \sigma_\theta &= \frac{3 + \nu}{8} \left(a^2 + b^2 - \mu\rho^2 + \frac{a^2b^2}{\rho^2} \right) m + \frac{a^2p_a - b^2p_b}{b^2 - a^2} + \frac{a^2b^2(p_a - p_b)}{\rho^2(b^2 - a^2)}, \\ \mu &= \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu}. \end{aligned} \quad (7)$$

Если заданы граничные условия (2), то

$$\begin{aligned} A &= \frac{Eu_b b - Eu_a a}{(1 - \nu)(b^2 - a^2)} + \frac{1 + \nu}{8}(a^2 + b^2)m, \\ B &= \frac{Eu_a b - Eu_b a}{(1 + \nu)(b^2 - a^2)}ab - \frac{1 - \nu}{8}a^2b^2m. \end{aligned} \quad (8)$$

После подстановки (8) в (5) получим

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{Eu_b b - Eu_a a}{(1 - \nu)(b^2 - a^2)} - \frac{Eu_a b - Eu_b a}{(1 + \nu)(b^2 - a^2)} \frac{ab}{\rho^2} \\ &\quad + \left((1 + \nu)(b^2 + a^2) - (3 + \nu)\rho^2 + \frac{1 - \nu}{\rho^2}a^2b^2 \right) \frac{m}{8}, \\ \sigma_\theta &= \frac{Eu_b b - Eu_a a}{(1 - \nu)(b^2 - a^2)} + \frac{Eu_a b - Eu_b a}{(1 + \nu)(b^2 - a^2)} \frac{ab}{\rho^2} \\ &\quad + \left((1 + \nu)(b^2 + a^2) - (1 + 3\nu)\rho^2 - \frac{1 - \nu}{\rho^2}a^2b^2 \right) \frac{m}{8}. \end{aligned} \quad (9)$$

Если заданы граничные условия (3), то

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 + \nu}{8} \frac{(1 - \nu)a^4 + (3 + \nu)b^4}{(1 - \nu)a^2 + (1 + \nu)b^2} m + \frac{Eu_a a - (1 + \nu)p_b b^2}{(1 - \nu)a^2 + (1 + \nu)b^2}, \\ B &= \frac{1 - \nu}{8} \frac{(1 + \nu)a^2 - (3 + \nu)b^2}{(1 - \nu)a^2 + (1 + \nu)b^2} a^2b^2 m + \frac{Eu_a a + (1 - \nu)p_b a}{(1 - \nu)a^2 + (1 + \nu)b^2} ab^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Если заданы граничные условия (4), то

$$\begin{aligned} A &= \frac{1+\nu}{8} \frac{(1-\nu)b^4 + (3+\nu)a^4}{(1-\nu)b^2 + (1+\nu)a^2} m + \frac{Eu_b b - (1+\nu)p_a a^2}{(1-\nu)b^2 + (1+\nu)a^2}, \\ B &= \frac{1-\nu}{8} \frac{(1+\nu)b^2 - (3+\nu)a^2}{(1-\nu)b^2 + (1+\nu)a^2} a^2 b^2 m + \frac{Eu_b + (1-\nu)p_a b}{(1-\nu)b^2 + (1+\nu)a^2} a^2 b. \end{aligned} \quad (11)$$

Если зафиксировать внутренние параметры, такие как модуль Юнга, коэффициент Пуассона, плотность материала (параметры материала) и внешние геометрические параметры, то при рассмотрении вопроса о зарождении пластических зон можно измерять внешние параметры, характеризующие нагрузку.

5. Эквивалентное напряжение

Для оценки напряженного состояния в точках упругой области вводится эквивалентное напряжение. Эквивалентное напряжение позволяет определять в каких точках происходит нагружение, разгрузка или нейтральное нагружение. Эквивалентное напряжение определяется по правилам, аналогичным правилам, устанавливаемым при задании функции пластичности [1–8, 13, 14]. Когда рассматривается модель упругопластического тела, то эквивалентное напряжение равно функции пластичности.

Рассмотрим два варианта определения эквивалентного напряжения:

$$\sigma_{eq}^{(1)} = \frac{1}{2} (|\sigma_\rho - \sigma_\theta| + |\sigma_\theta - \sigma_z| + |\sigma_z - \sigma_\rho|)$$

и

$$\sigma_{eq}^{(2)} = \left(\frac{(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2}{2} \right)^{1/2}.$$

На рис. 1 показаны графики эквивалентных напряжений, когда σ_ρ , σ_θ , σ_z определяются по формулам (7), а параметры $p_a = p_b = 1$, $m = 1.029$, $a = 0.2$, $b = 1$ и $\nu = 0.3$.

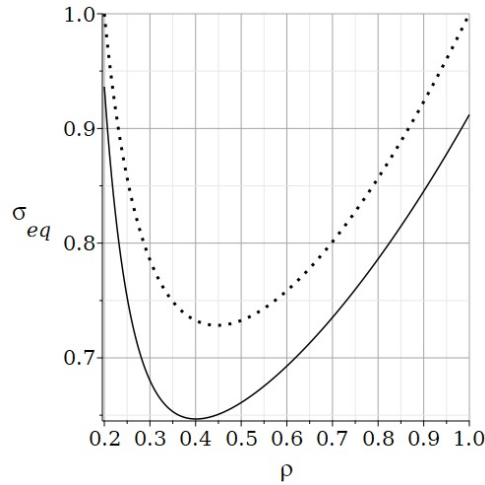


Рис. 1. Сплошная линия — $\sigma_{eq}^{(1)}$, пунктирная — $\sigma_{eq}^{(2)}$

6. Кусочно-линейные функции пластичности

Для режима

$$\alpha\sigma_\theta + \beta\sigma_\rho = k,$$

учитывая (5) и (7), находим, что при задании граничных условий (1) граница $\rho = a$ диска переходит в пластическое состояние, когда

$$m = 4 \frac{(b^2 - a^2)k + 2\alpha b^2 p_b - ((\alpha + \beta)a^2 + (\alpha - \beta)b^2)p_a}{\alpha(b^2 - a^2)((1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)b^2)}. \quad (12)$$

Следует обратить внимание на то, что при $\alpha = 0$ эта формула неприменима.

Если рассматриваются граничные условия (2), то граница $\rho = a$ диска переходит в пластическое состояние, когда

$$m = \frac{4}{b^2 - a^2} \left(\frac{1}{1 - \nu^2} \left(\frac{Eu_a}{a} \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} - \frac{\alpha + \nu\beta}{\nu\alpha + \beta} \right) - \frac{2bEu_b}{b^2 - a^2} \right) + \frac{k}{\nu\alpha + \beta} \right). \quad (13)$$

Если рассматриваются граничные условия (3), то из (5) и (10) следует, что граница $\rho = a$ диска переходит в пластическое состояние, когда

$$m = \frac{8p_b b^2}{(b^2 - a^2)((1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)b^2)} + 4 \frac{((1 - \nu)a^2 + (1 + \nu)b^2)ak - ((\alpha + \beta)a^2 + (\alpha - \beta)b^2)Eu_a}{a(\alpha\nu + \beta)(b^2 - a^2)((1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)b^2)}.$$

Если рассматриваются граничные условия (4), то из (5) и (11) следует, что граница $\rho = a$ диска переходит в пластическое состояние, когда

$$m = 4 \frac{((1 + \nu)a^2 + (1 - \nu)b^2)k + ((1 + \nu)(\alpha + \beta)a^2 + (1 - \nu)(\beta - \alpha)b^2)p_a - 2bEu_b\alpha}{\alpha(1 - \nu^2)(b^2 - a^2)^2}.$$

Приведенные формулы для вычисления значений параметра m применяются вместе с проверкой допустимых значений напряжений на границах диска.

7. Предельное состояние диска

Если давления, действующие на границы диск равны ($p_a = p_b = p$), и угловая скорость вращения диска равны нулю, то

$$A = -p, \quad B = 0$$

и для всех точек диска

$$\sigma_\rho = \sigma_\theta = -p.$$

В этом случае эквивалентное напряжение во всех точках диска будет принимать одно и тоже значение

$$\sigma_{eq} = \text{const.}$$

Для всех условий пластичности $F(J_2, |J_3|) = k$ изотропного идеального упруго-пластического тела с равными пределами пластичности на одноосное растяжение, когда на границах $\rho = a$, $\rho = b$ диска $\sigma_\rho|_{\rho=a} = \sigma_\rho|_{\rho=b} = \pm k$, весь диск будет находиться в предельном состоянии. Если действие нагрузки таково,

что не совершается работа, то деформированное состояние диска не изменяется. При попытке совершения работы нагрузкой, наступает неограниченный рост деформаций, существенно изменяющий конфигурацию диска. Аналогичная ситуация возникает при нагружении тонкой пластины внутренним давлением [13].

При увеличении угловой скорости вращения диска $m > 0$ происходит изменение напряженного состояния в его точках; напряжения будут вычисляться по формулам

$$\sigma_\rho = \frac{3 + \nu}{8} \left(a^2 + b^2 - \rho^2 - \frac{a^2 b^2}{\rho^2} \right) m - p,$$

$$\sigma_\theta = \frac{3 + \nu}{8} \left(a^2 + b^2 - \mu \rho^2 + \frac{a^2 b^2}{\rho^2} \right) m - p.$$

При $\sigma_\rho|_{\rho=a} = \sigma_\rho|_{\rho=b} = -k$ и выборе условия пластичности Треска в предельном состоянии будут находиться только точки контуров $\rho = a$, $\rho = b$, а область диска $a < \rho < b$ переходит в упругое состояние. При этом увеличение угловой скорости вращения диска в этой области приводит к разгрузке – ассоциированное эквивалентное напряжение уменьшается. Значение параметра m может изменяться в диапазоне

$$0 \leq m \leq m_{\max}.$$

Максимальное значение параметра m определяется из условия $\sigma_\theta|_{\rho=a} = 0$. Из формул (7) находим, когда $\sigma_\theta|_{\rho=a} = 0$, параметр

$$m = m_{\max} = \frac{4}{(1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)a^2}.$$

На рис. 2 показан годограф вектора напряжений (функция радиальной координаты) на плоскости $\sigma_z = 0$ пространства главных напряжений, когда

$$p_a = p_b = k.$$

При выполнении расчетов всюду ниже выбирались следующие значения внешних геометрических параметров: $a = 0.2$, $b = 1$ и параметров материала (внутренних параметров): $\nu = 0.3$, $k = 1$.

8. Граничные условия в напряжениях. Условие пластичности Треска

Рассмотрим случай, когда на границе $\rho = a$ выполняется режим $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Из формулы (12) находим

$$m = 4 \frac{(b^2 - a^2)k - (b^2 + a^2)p_a + 2b^2 p_b}{(b^2 - a^2)((1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)b^2)}.$$

Если $p_b = 0$ и $-k \leq p_a \leq 0$, то

$$m = m_{\min} = \frac{4k}{(1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)b^2},$$

$$m = m_{\max} = \frac{8b^2 k}{(b^2 - a^2)(1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)b^2}.$$

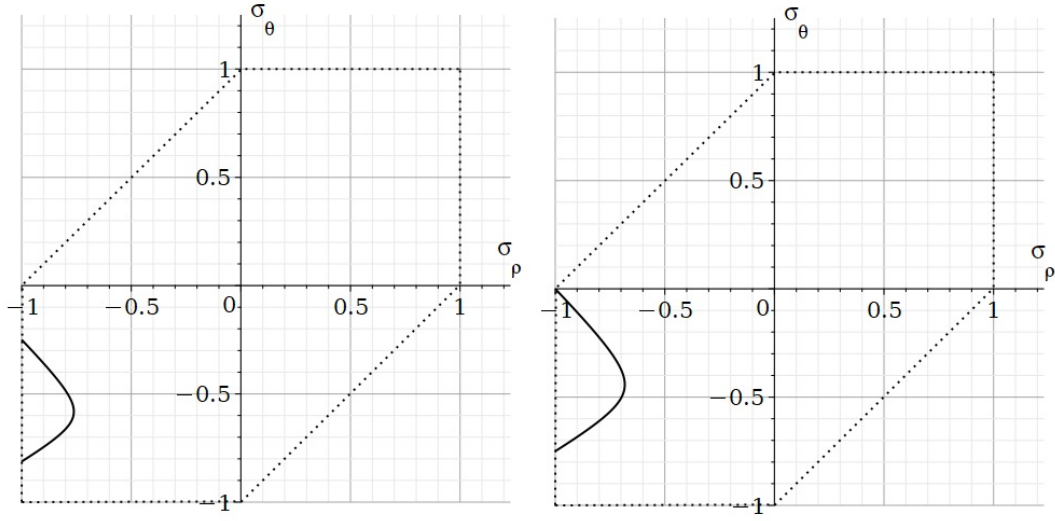
a) $m = 0.75m_{max}$ b) $m = m_{max}$

Рис. 2. Годограф вектора напряжений. Условие пластичности Треска

На рис. 3 показан годограф вектора напряжений в плоскости $\sigma_z = 0$ пространства главных напряжений для разных значений p_a .

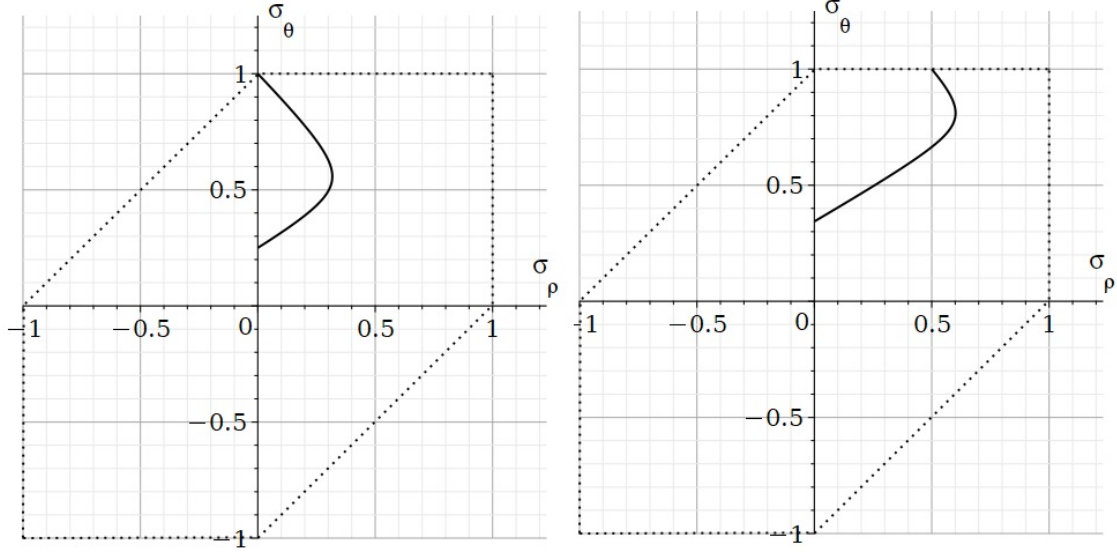
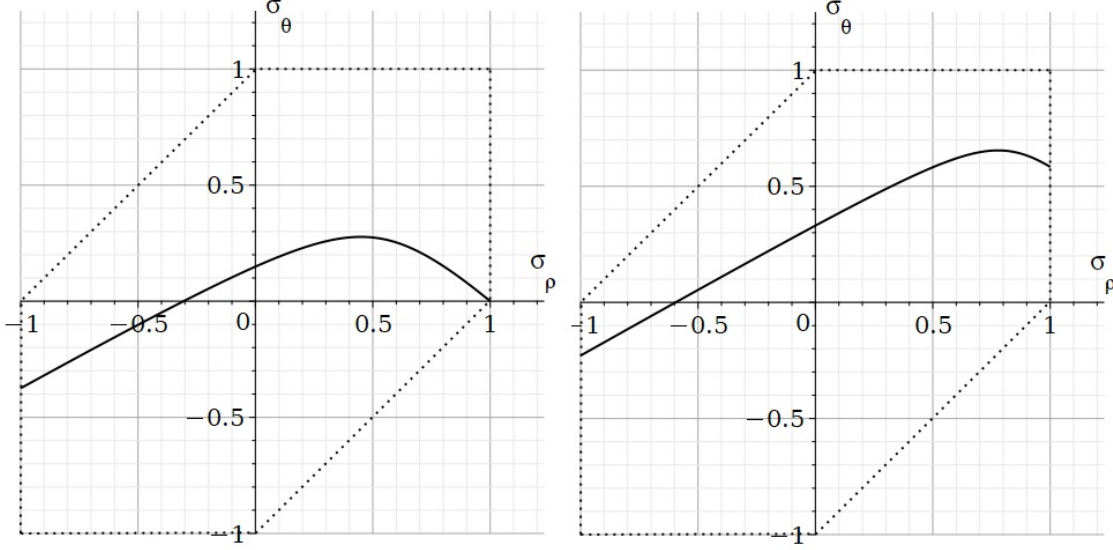
a) $p_a = 0, m = 1.202$ b) $p_a = -0.5k, m = 2.504$

Рис. 3. Годограф вектора напряжений. Условие пластичности Треска

В случае, когда $p_b = k$, $p_a = -k$, максимальное и минимальное значения параметра m определяются из условий $\sigma_\theta|_{\rho=a} = k$ и $\sigma_\theta|_{\rho=a} = 0$, соответственно:

$$m = m_{max} = \frac{16k}{b^2 - a^2} \frac{b^2}{((1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)b^2)},$$

$$m = m_{min} = \frac{4k}{b^2 - a^2} \frac{3b^2 + a^2}{((1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)b^2)}.$$

а) $m = m_{min}$ б) $m = 0.9m_{max}$ Рис. 4. Годограф вектора напряжений $p_b = -p_a = -k$

В случае, когда $p_b = k$, $0 < p_a < k$, значение параметра m определяем по формуле

$$m = \frac{4}{b^2 - a^2} \frac{(3b^2 - a^2)k - 2b^2p_a}{((1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)a^2)}.$$

Если $p_b = k$, $-k < p_a < 0$, то значение параметра m определяем по формуле.

$$m = \frac{4}{b^2 - a^2} \frac{(b^2 + a^2)k - 2b^2p_a}{((1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)a^2)}.$$

На рис. 5 показан годограф вектора напряжений в плоскости $\sigma_z = 0$ для разных значений параметров нагрузки.

Приведенные результаты показывают, что при выполнении на границах диска условия $|\sigma_\rho| = k$ и увеличении значения параметра нагрузки m вектор напряжений будет перемещаться по соответствующей стороне шестиугольника Треска.

9. Граничные условия в перемещениях. Условие пластичности Треска

Во всех точках диска, находящегося в упругом состоянии $|\sigma_\rho| \leq k$, $|\sigma_\theta| \leq k$, для построения годографа напряжений используем формулы (9). Используя формулу для перемещений $Eu = \rho(\sigma_\theta - \nu\sigma_\rho)$ и, задавая конкретные значения для напряжений на границах диска, определяем минимальное и максимальное значения параметра m .

Рассмотрим вариант, когда $\sigma_\rho|_{\rho=a} = k$, $\sigma_\rho|_{\rho=b} = 0$ и окружное напряжение

$$0 \leq \sigma_\theta \leq k.$$

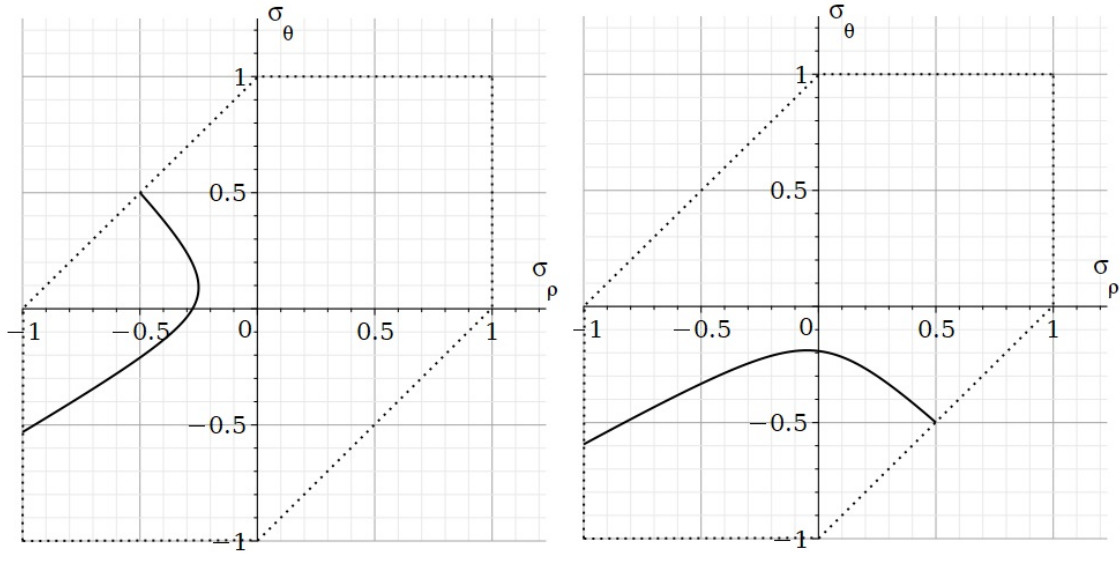
а) $p_a = 0.5k$, $p_b = k$, $m = 2.454$;б) $p_a = -0.5k$, $p_b = k$, $m = 2.554$

Рис. 5. Годограф вектора напряжений

В этом случае перемещения на границах диска

$$\begin{aligned} Eu_a &= \frac{(3 + \nu)b^4 + (1 - \nu)a^4 - 2(1 + \nu)a^2b^2}{4(b^2 - a^2)}am - \frac{(1 - \nu)a^2 + (1 + \nu)b^2}{b^2 - a^2}ak, \\ Eu_b &= \frac{2(1 + \nu)b^2a^2 + (1 - \nu)b^4 - (3 + \nu)a^4}{4(b^2 - a^2)}mb - \frac{2a^2bk}{b^2 - a^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

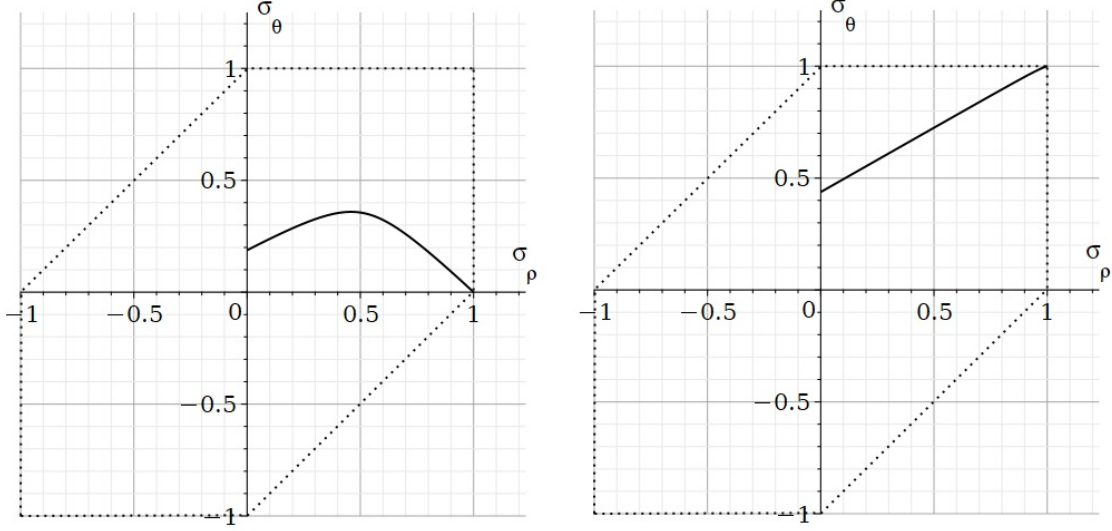
Соответствующие рассматриваемому случаю минимальное и максимальное допустимые значения параметра m будут

$$\begin{aligned} m_{min} &= \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} \frac{4k}{(1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)b^2}, \\ m_{max} &= \frac{b^2}{b^2 - a^2} \frac{8k}{(1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)b^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя выражения из (15) в формулы (14), получим

$$\begin{aligned} \min(Eu_a) &= \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} - \frac{(1 - \nu)a^2 + (1 + \nu)b^2}{b^2 - a^2} \right) ak, \\ \min(Eu_b) &= \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} \frac{2(1 + \nu)a^2b^2 + (1 - \nu)b^4 - (3 + \nu)a^4}{b^2 - a^2((1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)b^2)} - \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \right) bk, \\ \max(Eu_a) &= \left(2b^2 \frac{(3 + \nu)b^4 - (1 - \nu)b^4 - 2(1 + \nu)a^2b^2}{(b^2 - a^2)^2((1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)b^2)} - \frac{(1 - \nu)a^2 + (1 + \nu)b^2}{b^2 - a^2} \right) ak, \\ \max(Eu_b) &= \left(2b^2 \frac{(1 - \nu)b^4 + 2(1 + \nu)a^2b - (3 + \nu)a^4}{(b^2 - a^2)^2((1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)b^2)} - \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \right) bk. \end{aligned}$$

На рис. 6 показано изображение годографа вектора напряжений при задании разных значений перемещений на границах диска.



а) $m = 2.504$, $Eu_a = -0.06$, $Eu_b = 0.188$ б) $m = 1.302$, $Eu_a = 0.14$, $Eu_b = 0.438$

Рис. 6. Годограф вектора напряжений. Условие Треска

Если $Eu|_{\rho=a} = (1-\nu)ak$, $Eu|_{\rho=b} = (1-\nu)bk$, то при $m = 0$ диск будет находиться в предельном состоянии $\sigma_\rho = \sigma_\theta = k$. С увеличением значения параметра m диск переходит в упругое состояние.

10. Гладкие функции пластичности

Одно из отличий гладких функций пластичности от кусочно-гладких в том, что для кусочно-гладких функций пластичности в зависимости от значения внешних параметров (параметры нагрузки и геометрические параметры) и параметров материала надо выяснять, какой из режимов будет выполняться и в какой области диска, что может приводить к громоздким алгоритмам решения задач. Поскольку для всех гладких функций пластичности алгоритмы решения задач о зарождении пластических областей в диске весьма схожи, то можно ограничиться рассмотрением функции условия пластичности Мизеса [23].

11. Условие пластичности Мизеса

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2k^2.$$

Поскольку компоненты σ_ρ , σ_θ , σ_z тензора напряжения являются главными, для плоского напряженного состояния ($\sigma_z = 0$) условие пластичности Мизеса запишем в виде

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + \sigma_\rho^2 + \sigma_\theta^2 = 2k^2.$$

Из условия

$$((\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + \sigma_\rho^2 + \sigma_\theta^2)|_{\rho=a} = 2k^2$$

следуют формулы, позволяющие выразить один параметр нагрузки через другие, например,

$$m = m_{a1} = 2 \frac{4p_b b^2 - (a^2 + 3b^2)p_a + \sqrt{4k^2 - 3p_a^2}(b^2 - a^2)}{((3 + \nu)a^2 + (1 - \nu)b^2)(b^2 - a^2)},$$

$$m = m_{a2} = 2 \frac{4p_b b^2 - (a^2 + 3b^2)p_a - \sqrt{4k^2 - 3p_a^2}(b^2 - a^2)}{((3 + \nu)a^2 + (1 - \nu)b^2)(b^2 - a^2)}.$$

Аналогично из условия

$$((\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + \sigma_\rho^2 + \sigma_\theta^2)|_{\rho=b} = 2k^2$$

находим

$$m = m_{b1} = 2 \frac{(3a^2 + b^2)p_a - 4p_a a^2 + \sqrt{4k^2 - 3p_a^2}(b^2 - a^2)}{((3 + \nu)a^2 + (1 - \nu)b^2)(b^2 - a^2)},$$

$$m = m_{b2} = 2 \frac{(3a^2 + b^2)p_a - 4p_a a^2 - \sqrt{4k^2 - 3p_a^2}(b^2 - a^2)}{((3 + \nu)a^2 + (1 - \nu)b^2)(b^2 - a^2)}.$$

При построении годографа вектора напряжений, исключая отрицательные значения величин m_{a1} , m_{b1} , m_{a2} , m_{b2} , выбираем

$$m = m_1 = \min(m_{a1}, m_{b1})$$

или

$$m = m_2 = \min(m_{a2}, m_{b2}).$$

Для условия Мизеса радиальное напряжение может изменяться в пределах

$$-\frac{2k}{\sqrt{3}} \leq \sigma_\rho \leq \frac{2k}{\sqrt{3}}.$$

Область допустимых значений для параметров p_a , p_b :

$$-\frac{2k}{\sqrt{3}} \leq p_a, p_b \leq \frac{2k}{\sqrt{3}}.$$

Если заданы граничные условия в перемещениях, и $u|_{\rho=a} = 0$, $u|_{\rho=b} = 0$, то формулы (9) для напряжений примут вид

$$\sigma_\rho = \left((1 + \nu)(b^2 + a^2) - (3 + \nu)\rho^2 + \frac{1 - \nu}{\rho^2} a^2 b^2 \right) \frac{m}{8},$$

$$\sigma_\theta = \left((1 + \nu)(b^2 + a^2) - (3 + \nu)\rho^2 - \frac{1 - \nu}{\rho^2} a^2 b^2 \right) \frac{m}{8}.$$

Когда при увеличении угловой скорости вращения диска параметр m достигнет значения

$$m = \frac{4k}{(b^2 - a^2)\sqrt{\nu^2 - \nu + 1}},$$

на внутренней $\rho = a$ и внешней $\rho = b$ границах диска эквивалентное напряжение достигнет предельного значения

$$\sigma_{eq} = k.$$

12. Условие пластичности Ишлинского

Заданы граничные условия в перемещениях и $u|_{\rho=a} = 0$, $u|_{\rho=b} = 0$. В данном случае из формул (9) для напряжений получаем, что

$$\begin{aligned}\sigma_\rho|_{\rho=a} &= \frac{b^2 - a^2}{4}m, & \sigma_\theta|_{\rho=a} &= \nu \frac{b^2 - a^2}{4}m, \\ \sigma_\rho|_{\rho=b} &= -\frac{b^2 - a^2}{4}m, & \sigma_\theta|_{\rho=b} &= -\nu \frac{b^2 - a^2}{4}m.\end{aligned}$$

При увеличении значения параметра m на внутренней $\rho = a$ и внешней $\rho = b$ границах диска эквивалентное напряжение одновременно достигнет значения

$$\sigma_{eq} = k.$$

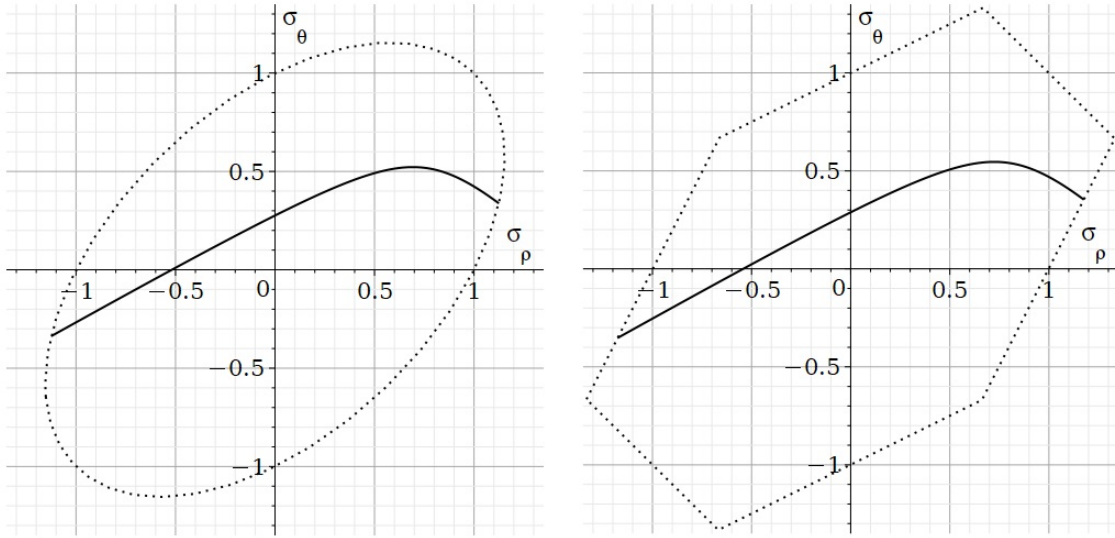
При выборе условия А. Ю. Ишлинского [22] на границах диска будет выполняться режим

$$|2\sigma_\rho - \sigma_\theta| = 2k,$$

когда параметр инерционной нагрузки

$$m = \frac{8k}{(2 - \nu)(b^2 - a^2)}.$$

На рис. 7 на плоскости $\sigma_z = 0$ в пространстве главных напряжений показан годограф вектора напряжений и кривые пластичности для разных условий пластичности.



а) условие Мизеса

б) условие Ишлинского

Рис. 7. Годограф вектора напряжений. $u_a = 0$, $u_b = 0$

Алгоритм решения задачи об определении значения параметров нагрузки, когда происходит зарождение пластических областей во вращающемся диске, если заданы граничные условия (3) или (4) и напряжения вычисляются по формулам (5), (10) или (5), (11), соответственно, строится по аналогии с рассмотренными выше.

13. О записи условия пластичности Треска

$$\max \{ |\sigma_\rho - \sigma_\theta|, |\sigma_\theta - \sigma_z|, |\sigma_z - \sigma_\rho| \} = k. \quad (16)$$

При построении кривых пластичности можно использовать выражение

$$|\sigma_\rho - \sigma_\theta| + |\sigma_\theta - \sigma_z| + |\sigma_z - \sigma_\rho| = 2k. \quad (17)$$

Уравнения (16) и (17) в пространстве главных напряжений определяют одну и ту же призму Треска. Заметим, что известные альтернативные формы записи условия пластичности Треска [6, 7, 21] не отражают его сути, а именно: выбор максимального касательного напряжения.

Заклучение. Математические модели упругопластических тел при выборе кусочно-линейных функций пластичности позволяют получить аналитические решения ряда одномерных задач, но приводят к значительно более громоздким алгоритмам решения поставленных задач по сравнению с математическими моделями упругопластических тел при выборе гладких функций пластичности. Это связано с тем, что, когда пластическая область включает части, в которых реализуются разные режимы пластичности, приходится повторять выполнение однотипных алгоритмов решения задачи. При этом утверждение, что соотношения ассоциированного закона пластического течения интегрируются и сводятся к соотношениям ассоциированного закона пластического деформирования справедливо только в случае, если в пластической области выполняется только один режим кусочно-линейного условия пластичности. Тем не менее в силу ряда причин, в том числе и исторических, изучение особенностей моделей, включающих кусочно-линейные функции пластичности, является весьма важным элементом математической теории пластичности. Исследования, изложенные в настоящей работе, показывают, каким образом при выборе условия пластичности Треска происходит изменение напряженного состояния в точках, где реализуется режим $\sigma_\rho = -k$ или $\sigma_\rho = k$. Это исследование весьма важно, поскольку после опубликования работ [15, 16], в которых U. Garger сделал вывод о том, что выбор условия пластичности Треска приводит к неприемлемым результатам. Было высказано предложение отказаться от использования условия пластичности Треска, заменив его условием пластичности максимального касательного напряжения с учетом изотропного упрочнения. Критический анализ работы [15] дан в [24].

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The authors' contribution is equal.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
- [2] Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [3] Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. I. Теория идеальной пластичности. М.: Физматлит, 2001. 448 с.
- [4] Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2003. 704 с.
- [5] Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Наука, 1969. 420 с.
- [6] Chakrabarty J. Theory of Plasticity. Amsterdam: Elsevier, 2005. 896 p.
- [7] Lubliner J. Plasticity. Theory. New York: Dover Publications, Incorporated. 2008. 540 p.
- [8] Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Об одной форме определяющих соотношений математической теории пластичности (течение на ребре призмы Кулона–Треска) // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия “Физико-математические науки”. 2008. № 6 (65). С. 260–280.
- [9] Буренин А.А., Ткачева А.В. Кусочно-линейные пластические потенциалы как средство расчетов плоских неустановившихся температурных напряжений // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2020. № 6. С. 40–49.
- [10] Прокудин А.Н., Фирсов С.В. Деформирование вращающегося полого цилиндра с жестким внешним покрытием // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 4. С. 120–135.
- [11] Alexandrova N., Real P. V. Elastic–plastic stress distributions and limit angular velocities in rotating hyperbolic annular discs // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2007. V. 221. P. 137–142.
- [12] Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of Elasticity, 3rd ed. New York: McGraw-Hill. 1970. 591 p.
- [13] Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
- [14] Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
- [15] Gamer U. Tresca’s Yield Condition and the Rotating Disk // Transactions ASME: Journal of Applied Mechanics. 1983. V. 50. No. 2. P. 676–678.

- [16] Gamer U. The Elastic-plastic shrink fit with supercritical interference // *Acta Mechanica*. 1986. V. 61, P. 1–14.
- [17] Rees D.W.A. Elastic-Plastic Stresses in Rotating Discs by von Mises and Tresca // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1999. V. 79. Iss. 4. P. 281–288.
- [18] Sahni M., Sharma S. Elastic-plastic deformation of a thin rotating solid disk of exponentially varying density // *Research on Engineering Structures and Materials*. 2017. V. 3. Iss. 2. P. 123–133.
- [19] Aleksandrova N.N., Artemov M.A., Baranovsky E.S. et al. On stress/strain state in a rotating disk // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. V. 1203. Article ID 012001.
- [20] Kamal S.M., Dixit U.S. Design of a disk-mandrel assembly for achieving rotational autofrettage in the disk // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2021. V. 235. P. 2452–2467.
- [21] Kolupaev V.A., Yum M.-H., Altenbach H. Yield criteria of hexagonal symmetry in the π -plane // *Acta Mechanica*. 2013. V. 224. P. 1527–1540.
- [22] Ишлинский А.Ю. Гипотеза прочности формоизменения // *Ученые записки МГУ. Механика*, 1940. № 46. С. 117–124.
- [23] von Mises R. *Mechanik des festen Körpers im plastischen deformablen Zustand* // *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse*. 1913. P. 589–592.
- [24] Semka E.V., Artemov M.A., Babkina Yu.N. et al. Mathematical modeling of rotating disk states // *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. V. 1479. Article ID 012122.

REFERENCES

- [1] Ivlev D.D. *Theory of ideal plasticity*. M.: Nauka, 1966. 232 p. (in Russian)
- [2] Ivlev D.D. *Mechanics of plastic media*. V. I. *Theory of ideal plasticity*. M.: Fizmatlit, 2001. 448 p. (in Russian)
- [3] Bykovtsev G.I., Ivlev D.D. *Plasticity theory*. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p. (in Russian)
- [4] Ishlinsky A.Yu., Ivlev D.D. *Mathematical theory of plasticity*. M.: Fizmatlit, 2003. 704 p. (in Russian)
- [5] Malinin N.H. *Applied theory of plasticity and creep*. M.: Nauka, 1969. 420 p. (in Russian)
- [6] Chakrabarty J. *Theory of Plasticity*. Amsterdam: Elsevier, 2005. 896 p.
- [7] Lubliner J. *Plasticity. Theory*. New York: Dover Publications, Incorporated. 2008. 540 p.
- [8] Kovalev V.A., Radaev Yu.N. On one form of constitutive relations of the mathematical theory of plasticity (flow on the edge of a Coulomb-Tresca prism) // *Bulletin of the Samara State Technical University. Series “Physical and Mathematical Sciences.”* 2008. No. 6 (65). P. 260–280. (in Russian)
- [9] Burenin A.A., Tkacheva A.V. Piecewise linear plastic potentials as a means of calculating plane transient temperature stresses // *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids*. 2020. No. 6. P. 40–49. (in Russian)
- [10] Prokudin A.N., Firsov S.V. Deformation of a rotating hollow cylinder with a rigid outer coating // *Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics*. 2019. No. 4. P. 120–135. (in Russian)

- [11] Alexandrova N., Real P. V. Elastic-plastic stress distributions and limit angular velocities in rotating hyperbolic annular discs // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2007. V. 221. P. 137–142.
- [12] Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of Elasticity, 3rd ed. New York: McGraw-Hill. 1970. 591 p.
- [13] Kachanov L.M. Fundamentals of the Theory of Plasticity. North-Holland Publishing Company. Amsterdam/London 1971. 482 p.
- [14] Sokolovskii V.V. Theory of plasticity. Moscow: Vishaya Shkola, Higher. Shk. 1950, 396 p.
- [15] Gamer U. Tresca's Yield Condition and the Rotating Disk // Transactions ASME: Journal of Applied Mechanics. 1983. V. 50. No. 2. P. 676–678.
- [16] Gamer U. The Elastic-plastic shrink fit with supercritical interference // Acta Mechanica. 1986. V. 61, P. 1–14.
- [17] Rees D.W.A. Elastic-Plastic Stresses in Rotating Disks by von Mises and Tresca // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1999. V. 79. Iss. 4. P. 281–288.
- [18] Sahni M., Sharma S. Elastic-plastic deformation of a thin rotating solid disk of exponentially varying density // Research on Engineering Structures and Materials. 2017. V. 3. Iss. 2. P. 123–133.
- [19] Aleksandrova N.N., Artemov M.A., Baranovsky E.S. et al. On stress/strain state in a rotating disk // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1203. Article ID 012001.
- [20] Kamal S.M., Dixit U.S. Design of a disk-mandrel assembly for achieving rotational autofrettage in the disk // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2021. V. 235. P. 2452–2467.
- [21] Kolupaev V.A., Yum M.-H., Altenbach H. Yield criteria of hexagonal symmetry in the π -plane // Acta Mechanica. 2013. V. 224. P. 1527–1540.
- [22] Ishlinsky A.Yu. Hypothesis of the strength of shape change // Scientific notes of Moscow State University. Mechanics, 1940. No. 46. P. 117–124. (in Russian)
- [23] von Mises R. Mechanik des festen Körpers im plastischen deformablen Zustand // Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. 1913. P. 589–592.
- [24] Semka E.V., Artemov M.A., Babkina Yu.N. et al. Mathematical modeling of rotating disk states // Journal of Physics: Conference Series. 2020. V. 1479. Article ID 012122.

А. В. Ченцов, А. В. Сокоренко

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ И МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СТРУКТУР МИУРА-ОРИ

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Аннотация. Механические метаматериалы - искусственные материалы, у которых механические свойства преимущественно зависят от их структуры, а не от характеристик материала из которого они изготовлены. Из множества разработанных структур метаматериалов можно выделить класс структур, разработанных на основе искусства оригами – складывания бумаги, позволяющего из плоского листа бумаги получать трёхмерные структуры различной сложности. В работе представлены общие сведения о механических метаматериалах, со структурой, основанной на методе складывания Миура-ори, рассмотрены области их применения, преимущества, и приведён краткий обзор исследований таких метаматериалов.

Ключевые слова: механические метаматериалы, ауксетики, оригами, Структуры Миура-ори, развёртываемые структуры.

Ченцов Александр Викторович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник; e-mail: chentsov@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0003-4760-1738>; AuthorID: 157206

Сокоренко Алексей Викторович, аспирант; e-mail: sokorenkoav@mail.ru

для цитирования: Ченцов А. В., Сокоренко А. В. Исследование моделей и механических свойств структур Миура-Ори // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 1(59). С. 39–49. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.003 EDN: CSJSRK

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

A. V. Chentsov, A. V. Sokorenko

STUDY OF MODELS AND MECHANICAL PROPERTIES OF MIURA-ORI STRUCTURES

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

Abstract. Mechanical metamaterials are artificial materials whose mechanical properties primarily depend on their structure rather than on the characteristics of the material from which they are made of. From the many developed metamaterial structures, a class of structures developed based on the art of origami can be distinguished. Origami is the art of paper folding, which allows you to create three-dimensional structures of varying complexity made of a flat sheet of paper. The paper presents general information on mechanical metamaterials, with a structure based on the Miura-ori folding method, discusses their areas of application, advantages, and provides a brief overview of research on such metamaterials.

Keywords: mechanical metamaterials, auxetics, origami, Miura-ori structures, deployable structures.

Alexander V. Chentsov, Cand. Sci. Phys. & Math., Senior Researcher, e-mail: chentsov@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0003-4760-1738>; AuthorID: 157206

Alexey V. Sokorenko, Postgraduate, e-mail: sokorenkoav@mail.ru

to cite this article: Chentsov A. V., Sokorenko A. V. Study of models and mechanical properties of Miura-Ori structures // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 1(59). p. 39–49. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.003 EDN: CSJSRK

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. В 1970 году, японским астрофизиком Коре Миурой, была разработана схема жёсткого складывания, которая была применена для развёртывания солнечных батарей космических спутников. В предложенном методе складывания складки представляют собой линейные шарниры, соединяющие параллелограммы, то есть складки расположены не горизонтально и вертикально, а под углом друг к другу. Структура, полученная таким образом, состоит из множества регулярно повторяющихся блоков. Каждый блок состоит из четырёх параллелограммов и четырёх шарниров (сладок). Если считать, что каждый параллелограмм абсолютно жесткий, а шарниры, которые их соединяют, являются идеальными, то такая структура представляет собой механизм с одной степенью свободы – углом сложения. Форма структуры может изменяться в широком диапазоне в зависимости от угла сложения. Данный метод складывания получил название в честь своего изобретателя – Миура-ори. На рис. 1 изображен лист бумаги, сложенный техникой Миура-ори.

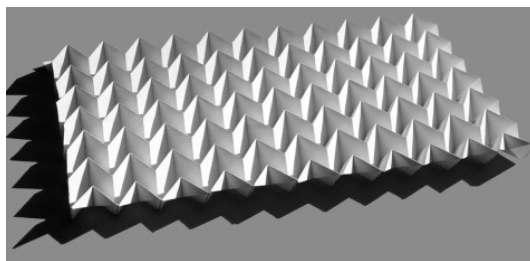


Рис. 1. Лист бумаги, сложенный техникой Миура-ори

На рис. 2 приведена кинематика развёртывания листа бумаги, сложенной по технике Миура-ори. Морфология и механизм развёртывания такой структуры аналогичны тем, что встречаются в природе. На рис. 3 изображены листок дерева и крыло насекомого которые разворачиваются по механизму, во многом аналогичному Миура-ори.

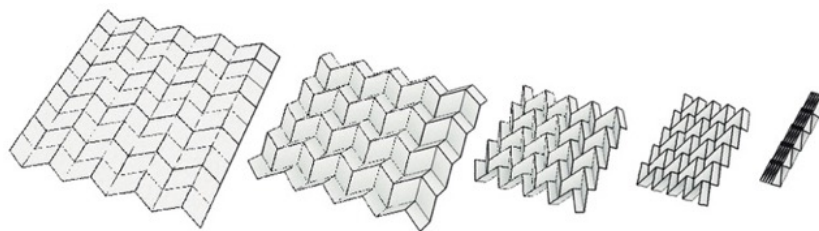


Рис. 2. Развёртывание листа бумаги, сложенной по технике Миура-ори

1. Особенности структур Миура-ори. Структура Миура-ори состоит из множества одинаковых элементарных ячеек. Каждая ячейка состоит из четырёх параллелограммов и четырёх складок, которыми они соединены между



Рис. 3. Листок дерева и крыло насекомого

собой. Для выявления основных свойств структур Миура-ори необходимо рассмотреть элементарную ячейку. Элементарная ячейка шаблона Миура-ори и общий вид сложенного шаблона представлены на рис. 4.

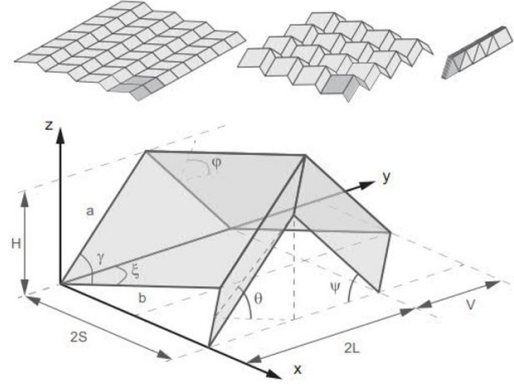


Рис. 4. Общий вид сложенного шаблона и элементарная ячейка Миура-ори

Геометрия элементарной ячейки может быть определена различными способами. В работах, посвященных данной структуре, элементарная ячейка обычно задана размерами наименьшего составляющего компонента – параллелограмма с размерами сторон a и b , углом между сторонами параллелограмма $\gamma < \pi/2$ и углом между плоскостью рассматриваемого параллелограмма и плоскостью $xy - \theta < \pi/2$. Тогда внешние размеры ячейки могут быть заданы как:

$$H = a \sin \theta \sin \gamma; \quad S = b \frac{\cos \theta \cdot \tan \gamma}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta \cdot \tan^2 \gamma}};$$

$$L = a \left(\sqrt{1 - \sin^2 \theta \cdot \sin^2 \gamma} \right); \quad V = b \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta \cdot \tan^2 \gamma}}.$$

Из кинематики сложения элементарной ячейки, очевидно, что образец обладает отрицательным коэффициентом Пуассона. Коэффициент Пуассона в плоскости SL

$$\nu_{SL} = -\frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_S} = -\frac{S \cdot dL}{L \cdot dS}$$

Или, с учётом обозначений на рис. 4, $\nu_{SL} = -\tan^2 \xi$. На рис. 5 приведен график зависимости ν_{SL} от угла ξ и графики зависимости ν_{SL} от угла сложения θ для различных значений угла γ между сторонами параллелограмма. На рис. 5 (справа) при угле между сторонами грани $\gamma = 60^\circ$ и угле сложения $\theta = 55^\circ$, коэффициент Пуассона $\nu_{SL} = -1$.

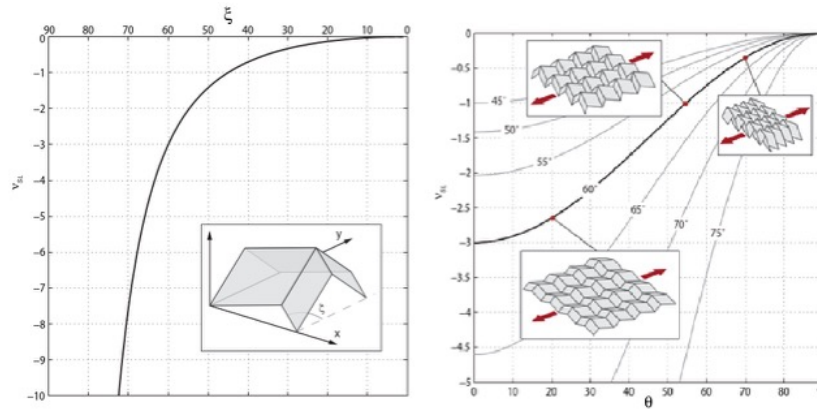


Рис. 5. График зависимости ν_{SL} от угла ξ (слева), графики зависимости ν_{SL} от угла θ для различных значений угла γ (справа)

Для анализа поведения структур Миура-ори из плоскости xu необходимо рассмотреть модели, в которых вводится дополнительная степень свободы – изгиб граней вдоль короткой диагонали. Для таких моделей при изгибе характерна седловидная форма деформирования. При этом, коэффициент Пуассона при изгибе ν_k (отношение кривизны в направлениях x и y) оказывается равным по величине, но противоположным по знаку коэффициенту Пуассона в плоскости ν_{SL} : $\nu_k = -k_{yy}/k_{xx} = -\nu_{SL}$.

Обратим внимание, что образец Миура-ори может быть сложен из плоского листа только за счёт сгиба вдоль линий сложения и, следовательно, является развёртывающейся поверхностью. Если принять жесткость отдельного параллелограмма значительно большей, чем жесткость складки и пренебречь деформациями параллелограмма, то образец Миура-ори обладает всего одной степенью свободы.

Ряд свойств, присущих структурам Миура-ори представляет особый интерес.

- (1) Отрицательное значение коэффициента Пуассона при деформировании в плоскости листа, то есть структура ведет себя как ауксетик. При этом значение коэффициента изменяется с изменением угла разложения;
- (2) Значение коэффициента Пуассона из плоскости имеет противоположный знак относительно коэффициента в плоскости, что приводит к нестандартному поведению (деформированию) при изгибе. Структура принимает седловидную форму при изгибе;

- (3) Может претерпевать значительные деформации и изменять глобальную Гауссову кривизну (подразумевается кривизна эквивалентной сложенному листу срединной поверхности) без появления напряжений на уровне материала (то есть не происходит растяжение или сжатие граней элементарных ячеек, деформирование происходит преимущественно за счёт поворота граней);
- (4) Обладает низким удельным весом.

2. Основные направления исследований.

2.1. Исследование механических характеристик. В работе [1] рассмотрена простая сложенная по Миура-ори структура, состоящая из одинаковых элементарных ячеек каждая из которых полностью определяется двумя углами $\gamma < \pi/2$ и $\theta < \pi/2$ и двумя длинами a и b . Для рассмотренной структуры показано, что коэффициент Пуассона при растяжении и изгибе (отношение кривизны поверхности при изгибе в направлении y и x) равны по значению и противоположны по знаку. Выведены соответствующие аналитические зависимости. Проведены численные эксперименты, подтверждающие выведенные зависимости. Пластические свойства не учитывались.

Коэффициент Пуассона в плоскости $\nu_{SL} = 1 - \xi^{-2}$ где $\xi = \sin \alpha \cdot \sin (\theta/2)$.

Коэффициент Пуассона при изгибе $\nu_B = -K_y/K_x = \xi^{-2} - 1$.

При выведении зависимости для ν_B было принято, что отдельные грани могут деформироваться. Введена дополнительная степень свободы для каждой грани – взаимный поворот половины грани относительно диагонали

В работе [2] представлена нелинейная формулировка моделирования структур типа Миура-ори, разработаны аналитические и численные модели, учитывающие жёсткости складок и изгибные жесткости граней для больших деформаций и перемещений. Так же в работе смоделировано возникновение дефекта (т.н. pop-through) форме «смятия» центральной вершины ячейки при действии локально приложенной нагрузки.

В работе [3] выполнен анализ структуры Миура-ори выполненной из материала с анизотропией свойств (полимер, армированный углеродным волокном) с помощью МКЭ.

Для оптимизации геометрических параметров образца и получения одновременно высокой жёсткости и отрицательных значений коэффициента Пуассона был выполнен регрессионный анализ. В работе показано, что применение композитных материалов может улучшить механические характеристики.

2.2. Разработка метаматериалов, основанных на технике Миура-ори. В работе [4] представлены два вида метаматериалов, которые состоят из одинаковых граней. Первый вид представляет собой лист, сложенный по Миура-ори. Второй, показанный на рис. 6, представляет собой отдельные паттерны Миура-ори, которые сгруппированы послойно.

Для многослойного образца показано, что коэффициент Пуассона отрицательный в плоскости слоя, и из плоскости (то есть высота образца увеличивается при растяжении в плоскости), и что образец является раскладываемым. Выведены аналитические зависимости для коэффициента Пуассона из плоскости. Для заданных ограничений $0 < \theta_A < \pi/2$ значение коэффициента Пуассона в плоскости HL отрицательное, несмотря на то, что для одиночного слоя он положительный.

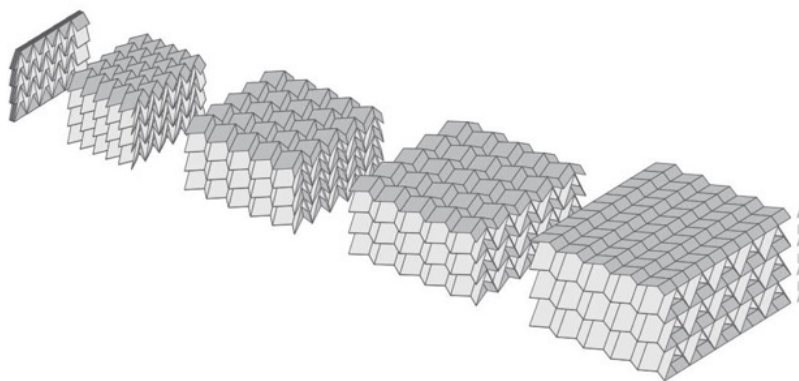


Рис. 6. Образец метаматериала, в котором структуры Миура-ори сгруппированы послойно

Так же представлен образец, в котором центральный ряд элементарных ячеек имеет отличные размеры. При деформировании такого образца центральный ряд раньше остальных достигает максимального угла сложения, что приводит к «самоблокировке» дальнейшего деформирования.

В работе [5] представлены два вида метаматериалов, которые состоят из не одинаковых граней. Отдельные паттерны Миура-ори сгруппированы послойно двумя способами (V-V, M-V) как показано на рис. 7.

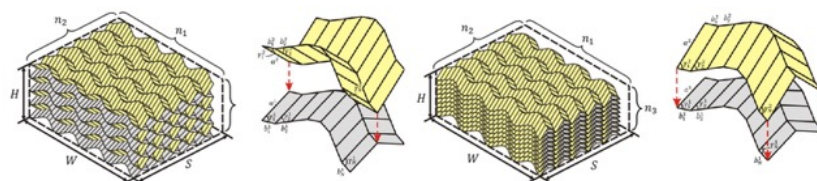


Рис. 7. Образцы метаматериалов в которых структуры Миура-ори сгруппированы послойно, элементарные ячейки структур состоят из не одинаковых граней

Разработанные аналитические модели позволяют предсказать изменение размеров и кинематику деформирования. Получены аналитические модели для объёмного модуля упругости и модуля упругости при растяжении.

В работе [6] представлен класс метаматериалов, представляющих собой модернизированную структуру Миура-ори с отверстиями. Элементарная ячейка

такого образца представляет собой две больших грани и $2 \cdot n$ малых граней соединённых через линии сгиба. На рис. 8 приведена элементарная ячейка образца при $n = 2$ и модернизированная структура Миура-ори в сравнении с обычной структурой Миура-ори.

Получены аналитические зависимости для коэффициента Пуассона, жесткость на растяжение. Показано, что поведение предложенных материалов качественно совпадает со структурами Миура-ори, но деформационные характеристики отличаются по значению. В частности, зависимости коэффициента Пуассона для элементарной ячейки модифицированного и обычного паттерна Миура-ори совпадают, но для образца в целом -отличаются.

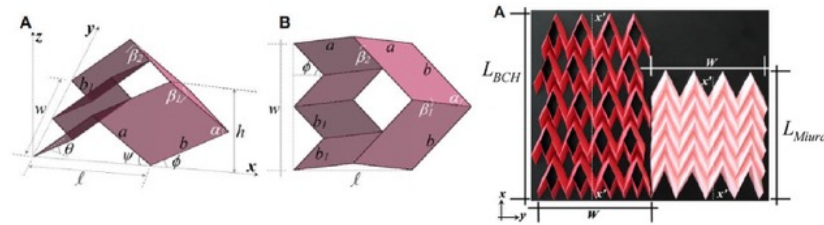


Рис. 8. Элементарная ячейка модернизированной структуры Миура-ори, сравнение обычной структуры Миура-ори и модернизированной

2.3. Разработка методов изготовления структур Миура-ори. В работе [7] предложен новый метод изготовления развёртываемых структур (в частности структур Миура-ори) – складывание под давлением. Метод основан на использовании разности внешнего давления и давления в чехле, в который помещена заготовка. Заготовка представляет собой две предварительно ослабленных перфорацией вдоль линий сгиба пластины которые соединены «распорками». Высота распорок определяет целевой угол сложения. На рис. 9 изображены основные этапы изготовления структуры.

Авторами выведены аналитические зависимости для давления, которое требуется для сложения заготовки, изготовленной из материала с определённым значением предела текучести до целевого угла сложения.

3. Применение в различных устройствах, конструкциях В некоторых случаях особенности деформирования ауксетических структур оказываются полезными и для традиционных технологий. Так, в работе [8] предложен новый подход для производства гибкой электроники на примере солнечной батареи (рис. 10, слева). Жесткие солнечные элементы из кремния объединены с помощью змеевидных связей, которые позволяют добиться высокого угла сложения и хорошей надёжности при циклическом сложении и разложении. Каждый элемент представляет собой грань элементарной ячейки структуры Миура-ори.

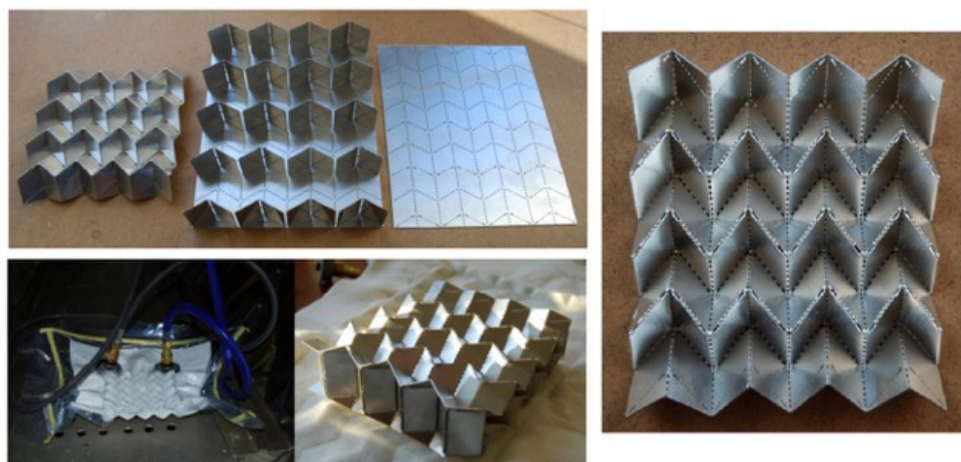


Рис. 9. Основные этапы изготовления структуры Миура-ори новым методом

В работе [9] предложен новый подход для производства литий-ионных батарей. Применение принципов оригами (Миура-ори) в дизайне позволяет получить батарею с высокой механической деформируемостью (складывание, раскладывание, изгиб, кручение). В качестве токоприёмника в батарее используется бумага, покрытая углеродными нанотрубками, что обеспечивает стабильные электромеханические характеристики при циклических деформациях (рис. 10, в центре).

Послойно сгруппированные листы, сложенные техникой Миура-ори в работе [10], составляют ячеистый материал. Показана перспективность применения данного материала (рис. 10, справа) в качестве внутреннего слоя в многослойной конструкции, предназначенной для уменьшения воздействия взрывной волны.

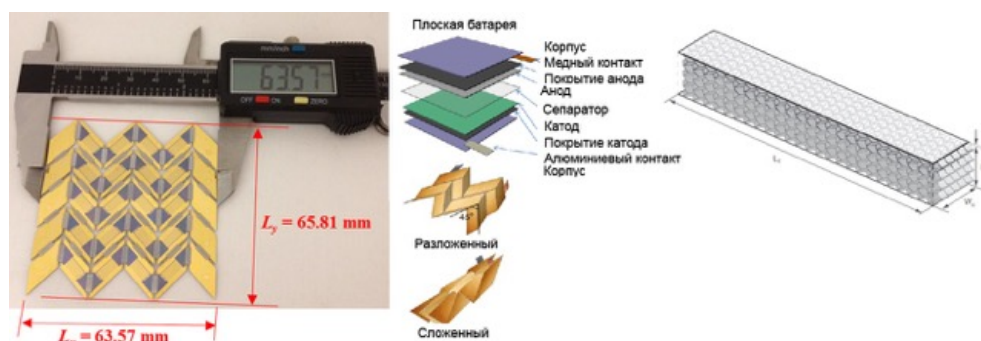


Рис. 10. Основные этапы изготовления структуры Миура-ори новым методом

Заключение. Как и большинство метаматериалов, структуры Миура-ори, позволяют изменять в широком диапазоне механические характеристики, за

счёт изменения геометрических параметров и модификации элементарных ячеек, изменения способов их компоновки, применения материалов обладающих анизотропией свойств. Однако следует выделить ряд преимуществ структур Миура-ори:

- (1) Относительная простота математического описания;
- (2) Возможность отказа от 3d-печати при изготовлении;
- (3) Низкое число дефектов при изготовлении;
- (4) Возможность применения различных материалов при изготовлении таких материалов.

Выше перечисленные преимущества способствуют росту интереса к структурам Миура-ори для применения в различных отраслях, и как следствие, способствуют углублению и расширению исследования таких структур.

Исследования структур Миура-ори позволили выявить и объяснить их необычные свойства – отрицательный коэффициент Пуассона в плоскости структуры и положительный коэффициент Пуассона из плоскости. Выведены аналитические зависимости для коэффициентов Пуассона, осевой и изгибной жесткости от геометрических параметров элементарной ячейки и угла сложения. Построены аналитические и численные модели, учитывающие геометрическую и физическую нелинейность материала при больших деформациях, учитывающих анизотропию свойств материала. Проведены исследования таких структур с модернизированной формой элементарных ячеек и с различными способами компоновки элементарных ячеек. Кроме того, уже предложены многослойные структуры, образующие объемные метаматериалы. Отдельные исследования направлены на оптимизацию процесса изготовления таких структур. Множество работ посвящено внедрению таких структур в различные устройства и конструкции.

Искусство оригами, в частности структуры Миура-ори, можно применять при решении множества задач, связанных с необходимостью разместить большое в малом, увеличить жёсткость или снизить вес конструкции, и задач, связанных с поглощением энергии удара.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Исследование выполнено по теме госзадания ИПМех РАН № 123021700045-7.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The contribution of the authors is equivalent.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The study was carried out on the topic of the state task of the Institute of Mechanics and Mechanics of the Russian Academy of Sciences No. 123021700045-7.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Geometric mechanics of periodic pleated origami / Z. Y. Wei [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* 2013. no. 110. P. 215501.
- [2] Liu K., Paulino G. H. Nonlinear mechanics of non-rigid origami: an efficient computational approach // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science.* 2017. no. 473(2206). P. 20170348.
- [3] Feng H., Yan G., Prabhakar P. Role of material directionality on the mechanical response of Miura-ori Composite Structures // *Composite Structures.* 2023. no. 306. P. 116606.
- [4] Schenk M., Guest S. D. Geometry of Miura-folded metamaterials // *P. Natl. Acad. Sci. USA.* 2013. no. 110. P. 3276–3281.
- [5] Xiang Zhou, Shixi Zang, Zhong You. Origami mechanical metamaterials based on the Miura-derivative fold patterns // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science.* 2016. no. 472(2191). P. 20160361.
- [6] Eidini M., Paulino G. Unraveling metamaterial properties in zigzag-base folded sheets // *Science Advances.* 2015. no. 1(8). P. e1500224.
- [7] Schenk M., Allwood J. M., Guest S. D. Cold gas-pressure folding of miura-ori sheets // *Special Edition: 10th International Conference on Technology of Plasticity, ICTP 2011.* 2011. P. 459–464.
- [8] Origami-enabled deformable silicon solar cells / R. Tang [et al.] // *Applied Physics Letters.* 2014. no. 104. P. 083501.
- [9] Origami lithium-ion batteries / Z. Song [et al.] // *Nature communications.* 2014. no. 5. P. 3140.
- [10] Schenk M., Guest S. D., McShane G. Novel stacked folded cores for blast-resistant sandwich beams // *International Journal of Solids and Structures.* 2014. no. 51(25-26). P. 4196–4214.

REFERENCES

- [1] Geometric mechanics of periodic pleated origami / Z. Y. Wei [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* 2013. no. 110. P. 215501.
- [2] Liu K., Paulino G. H. Nonlinear mechanics of non-rigid origami: an efficient computational approach // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science.* 2017. no. 473(2206). P. 20170348.
- [3] Feng H., Yan G., Prabhakar P. Role of material directionality on the mechanical response of Miura-ori Composite Structures // *Composite Structures.* 2023. no. 306. P. 116606.
- [4] Schenk M., Guest S. D. Geometry of Miura-folded metamaterials // *P. Natl. Acad. Sci. USA.* 2013. no. 110. P. 3276–3281.
- [5] Xiang Zhou, Shixi Zang, Zhong You. Origami mechanical metamaterials based on the Miura-derivative fold patterns // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science.* 2016. no. 472(2191). P. 20160361.
- [6] Eidini M., Paulino G. Unraveling metamaterial properties in zigzag-base folded sheets // *Science Advances.* 2015. no. 1(8). P. e1500224.
- [7] Schenk M., Allwood J. M., Guest S. D. Cold gas-pressure folding of miura-ori sheets // *Special Edition: 10th International Conference on Technology of Plasticity, ICTP 2011.* 2011. P. 459–464.
- [8] Origami-enabled deformable silicon solar cells / R. Tang [et al.] // *Applied Physics Letters.* 2014. no. 104. P. 083501.
- [9] Origami lithium-ion batteries / Z. Song [et al.] // *Nature communications.* 2014. no. 5. P. 3140.
- [10] Schenk M., Guest S. D., McShane G. Novel stacked folded cores for blast-resistant sandwich beams // *International Journal of Solids and Structures.* 2014. no. 51(25-26). P. 4196–4214.

М. В. Останин, О. Н. Любимова, Е. А. Свердлов

ПРИБЛИЖЕНИЕ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ В АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О САМОУРАВНОВЕШЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ОБРАЗЦА ГОРНОЙ ПОРОДЫ

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия

Аннотация. Исследуется явление реверсивного характера деформаций в предразрушающей области образца горной породы при одноосном сжатии на основе модельных представлений теории самоуравновешенных напряжений с учетом экспериментально наблюдаемой деформационной картины на поверхности образца. Экспериментальные данные получены с помощью акустико-деформационного метода. Актуальность данного исследования связана именно с развитием неклассических модельных представлений механики деформируемого твердого тела, эволюции напряженно-деформируемого состояния в массивах и образцах горных пород при разного рода силовых воздействиях. Разработан метод определения полной картины напряженно-деформированного состояния во всем объеме образца на протяжении всей истории нагружения.

Ключевые слова: акустико-деформационный метод, явление реверсивного характера деформаций.

Останин Максим Валентинович, старший преподаватель департамента управления на основе данных, школа экономики и менеджмента; **e-mail:** ostanin.mv@dvfu.ru; AuthorID: 1064048

Любимова Ольга Николаевна, доктор физико-математических наук, зав. лаборатории механики геоматериалов Научно-исследовательского и образовательного центра геомеханики и геодинамики сильно сжатых горных пород и массивов; **e-mail:** lyubimova.on@dvfu.ru; <https://orcid.org/0000-0003-4802-7352>; AuthorID: 372335

Свердлов Евгений Алексеевич, студент политехнического института (школы); **e-mail:** sverdlov.ea@students.dvfu.ru

для цитирования: Останин М. В., Любимова О. Н., Свердлов Е. А. Приближение краевых условий в аналитическом решении задачи о самоуравновешенных напряжениях для цилиндрического образца горной породы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 1(59). С. 50–60. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.001 EDN: BQFWRW

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

M. V. Ostanin, O. N. Lyubimova, E. A. Sverdlov

APPROXIMATION OF BOUNDARY CONDITIONS IN THE ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF SELF-BALANCED STRESSES FOR A CYLINDRICAL ROCK SAMPLE

Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia

Abstract. The phenomenon of reversible deformation in the pre-destructive region of a rock specimen under uniaxial compression is investigated on the basis of model representations of the theory of self-equilibrated stresses, taking into account the experimentally observed deformation pattern on the specimen surface. The experimental data were obtained using the acoustic-deformation method. The relevance of this study is related to the development of non-classical model representations of mechanics of deformable solid bodies, the evolution of stress-strain state in arrays and rock samples under different kinds of force actions. A method for determining the complete stress-strain state in the entire volume of the specimen throughout the entire loading history has been developed.

Keywords: acoustic deformation method, the phenomenon of the reversible nature of deformations.

Ostanin V. Maksim, Senior Lecturer, e-mail: ostanin.mv@dvfu.ru; AuthorID: 1064048

Lyubimova N. Olga, Doctor of Ph.D., Head of the Laboratory of Geomaterials Mechanics of the Scientific Research and Educational Center for Geomechanics and Geodynamics of Highly Compressed Rocks and Massifs, e-mail: lyubimova.on@dvfu.ru; <https://orcid.org/0000-0003-4802-7352>; AuthorID: 372335

Sverdlov A. Evgenii, Student of the Polytechnic Institute (school), e-mail: sverdlov.ea@students.dvfu.ru

to cite this article: Ostanin M. V., Lyubimova O. N., Sverdlov E. A. Approximation of boundary conditions in the analytical solution of the problem of self-balanced stresses for a cylindrical rock sample // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 1(59). p. 50–60. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.001 EDN: BQFWRW

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

1. Введение. Последние десятилетия XX века были отмечены открытиями новых геомеханических явлений, которые с позиции традиционных взглядов на деформирование и разрушение горных пород представляются аномальными [1]. Прежде всего, это зональная дезинтеграция пород вокруг подземных выработок [2, 3], а также реверсивный характер деформирования образцов горных пород при их нагружении в предразрушающей области [4]. Такие явления наблюдаются, когда внутренние напряжения в среде превышают величину, характеризующую прочность породы. На сегодняшний день факт их существования надежно установлен экспериментально, что заставляет исследовать наблюдаемые закономерности, а также разрабатывать новые математические модели для описания геомеханической среды [5–7].

Однако, специфика моделирования геомеханических сред связана не только с описанием напряженно-деформированного состояния, но и с экспериментальным определением свойств горных пород и масштабными переходами [8]. Ситуация осложняется предысторией деформирования и изначально предварительно напряженным состоянием изучаемых сред и материалов, при этом история их деформирования и эволюции напряжений неизвестна. Горные породы формировались, эволюционировали, разрушались в течение длительного времени, поэтому начальное представление их как ненапряженных, далеко от реальности. Временные параметры и недоступность геологических объектов, не позволяет непосредственно наблюдать за происходящими процессами. Перечисленные особенности, накладывают существенные ограничения на применение модельных представлений механики сплошных сред в исследовании геоматериалов [9, 10].

Целью данной работы является определение напряженно-деформированного состояния образцов горных пород на основе аналитического решения при моделировании упругого поведения цилиндрических образцов горной породы при одноосном сжатии, полученного в работе [11].

2. Основная часть. Известно, что предразрушающее состояние, а также реверсивный характер деформаций горных образцов [10] может быть описан с помощью модели сплошной среды с учетом самоуравновешенных напряжений [11].

Согласно этой модели, состояние предразрушения характеризуется наличием дефектов различных типов в образце [12]. Они создают дополнительное поле напряжений, меняющее деформированное состояние материала. Это проявляется в том, что при нагрузке, превышающей критическое значение, измеряемые на поверхности образца деформации зависят от угла, тогда как в отсутствие дефектов при P меньше P_* такой зависимости от угла нет. Поскольку образец находится в равновесии, то силы, определяемые полем T_{ij} , должны быть скомпенсированы. Естественным кандидатом в качестве компенсирующего поля является упругое поле напряжений Π_{ij} . При этом полное поле напряжений Σ_{ij} внутри образца равно $\Sigma_{ij} = T_{ij} + \Pi_{ij}$. Оно удовлетворяет уравнениям равновесия и краевым условиям в следующей форме:

$$\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} = F_i, \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -F_i, \Pi_{ij} n_j|_{dV} = -T_{ij} n_j, \quad (1)$$

значит, что функциональная зависимость упругого поля в образце от угловой переменной может определяться или объемными силами F_i или взаимодействием упругого поля с полем дефектов на границе. При этом структура и распределение поля T_{ij} в материале зависит от типа рассмотренных дефектов. Но в условиях проведенного эксперимента эволюция дефектной структуры не рассматривалась, и, следовательно, можно считать $F_i=0$:

$$\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} = 0, \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad (2)$$

тогда граничные условия к уравнениям (2) совпадают с последним соотношением в (1)

$$\Pi_{ij} n_j|_{dV} = -T_{ij} n_j. \quad (3)$$

В ходе эксперимента на боковой поверхности образца измеряются деформации, которые определяют напряжения в дискретном наборе точек. Поэтому возможная постановка задачи состоит в построении такого упругого поля Π_{ij} , чтобы соответствующие ему деформации E_{ij} совпадали с измеренными значениями на границе в дискретном наборе точек.

Поле упругих напряжений Π_{ij} и деформаций E_{ij} можно связать линейными соотношениями с некоторыми коэффициентами A, B .

$$\Pi_{ij} = A(E_{ij} + B E_{kk} \delta_{ij}), A = E/(1 + \nu) = 2\mu, B = \nu/(1 - 2\nu). \quad (4)$$

Так как уравнения равновесия (1) являются линейными, то представим поле Π_{ij} в виде суммы классического решения σ_{ij}^e , которое хорошо известно [13] и некоторого упругого поля π_{ij}

$$\Pi_{ij} = \sigma_{ij}^e + \pi_{ij}. \quad (5)$$

Дополнительно потребуем, чтобы первый инвариант π_{kk} обращался в нуль. Тогда тензор π_{ij} можно записать в следующем виде:

$$\pi_{ij} = \mu \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right), \quad (6)$$

где a_i - компоненты вектора перемещений.

Для определения компонент a_i ($i=1,2,3$) подставим напряжения π_{ij} в виде (6) в первое из уравнений (2), получим систему уравнений в перемещениях, в цилиндрической системе координат она имеет вид:

$$\begin{aligned}
\Delta a_r - \frac{a_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} &= 0, \\
\Delta a_\varphi - \frac{a_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} &= 0, \\
\Delta a_z &= 0, \\
\Delta^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Ограниченное решение системы (7) уравнений записываем в виде рядов Фурье по тригонометрическим функциям [14]:

$$\begin{aligned}
a_r &= \sum_n (u_n^{(1)}(\rho) \cos(n\varphi) + u_n^{(2)}(\rho) \sin(n\varphi)) \cos(m\gamma z), \\
a_\varphi &= \sum_n (v_n^{(1)}(\rho) \cos(n\varphi) + v_n^{(2)}(\rho) \sin(n\varphi)) \cos(m\gamma z), \\
a_z &= \sum_n (w_n^{(1)}(\rho) \cos(n\varphi) + w_n^{(2)}(\rho) \sin(n\varphi)) \cos(m\gamma z),
\end{aligned} \tag{8}$$

где $\rho = \gamma r$, $\gamma = \frac{\pi}{h}$.

Подставим соотношения (8) в систему уравнений (7.), тогда коэффициенты Фурье $u_n^{(i)}(\rho)$, $v_n^{(i)}(\rho)$, $w_n^{(i)}(\rho)$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
u_n^{(i)}(\rho) &= \frac{A_n^{(i)}}{2\gamma} I_{n+1}(\rho) + \frac{B_n^{(i)}}{2\gamma} I_{n-1}(\rho), \\
v_n^{(i)}(\rho) &= \frac{A_n^{(i)}}{2\gamma} I_{n+1}(\rho) - \frac{B_n^{(i)}}{2\gamma} I_{n-1}(\rho), \\
w_n^{(i)}(\rho) &= \frac{C_n^{(i)}}{\gamma} I_n(\rho).
\end{aligned} \tag{9}$$

Так как первый инвариант тензора деформаций ε_{kk} должен равняться нулю, то постоянные $A_n^{(i)}$, $B_n^{(i)}$, $C_n^{(i)}$ связаны условием:

$$C_n^{(i)} = \frac{A_n^{(i)} + B_n^{(i)}}{2}. \tag{10}$$

Тогда компоненты тензора упругих напряжений в цилиндрических координатах находим из закона Гука:

$$\begin{aligned}
\pi_{\varphi\varphi} &= \sum_n (\pi_{\varphi\varphi}^{(1)}(n\rho) \cos(n\varphi) + \pi_{\varphi\varphi}^{(2)}(\rho) \sin(n\varphi)) \cos(m\gamma z), \\
\pi_{zz} &= \sum_n (\pi_{zz}^{(1)}(n\rho) \cos(n\varphi) + \pi_{zz}^{(2)}(\rho) \sin(n\varphi)) \cos(m\gamma z),
\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}\pi_{\varphi\varphi}^{(i)}(n, \rho) &= m(A_{nm}^{(i)}(\frac{n+1}{\rho}I_{n-1} - \frac{2n^2+2n}{\rho^2}I_n) - B_{nm}^{(i)}\frac{n-1}{\rho}I_{n-1}), \\ \pi_{zz}^{(i)}(n, \rho) &= -m(A_{nm}^{(i)} + B_{nm}^{(i)})I_n,\end{aligned}\quad (12)$$

здесь компоненты напряжений содержат набор неизвестных параметров $A_{nm}^{(i)}$, $B_{nm}^{(i)}$.

3. Задача сопряжения модельного представления с экспериментальными данными. Согласно изложенной выше постановке задачи, неизвестные параметры должны определяться из условий совпадения компонент тензора деформаций E_{ij} со значениями, которые измеряются экспериментально в дискретном наборе точек на поверхности образца.

Поскольку $\Pi_{rr} + \Pi_{\varphi\varphi} + \Pi_{zz} = -P$, то при $r = R$ и $z = 0$ получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\mu}\pi_{\varphi\varphi}|_{r=R, z=0} &= (E_{\varphi\varphi} - \frac{\nu}{E}P)|_{r=R, z=0}, \\ \frac{1}{2\mu}\pi_{zz}|_{r=R, z=0} &= (E_{zz} - \frac{1}{E}P)|_{r=R, z=0}.\end{aligned}\quad (13)$$

В ходе эксперимента тензометрические датчики располагаются на поверхности образца по окружности в точках $\varphi_k = \frac{\pi k}{4}$, $k = 0, 7$.

Предварительный анализ показывает, что в рядах Фурье можно взять одну гармонику по оси z . Вычисляя значения напряжений и деформаций в этих точках, получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных параметров $A_{nm}^{(i)}$, $B_{nm}^{(i)}$.

Численные расчеты проводились при следующих значениях параметров: $\nu = 0,19$, $E = 7,02 \cdot 10^4$, $h = 108$, $R = 27$. Используя экспериментальные данные для продольных $E_{\varphi\varphi}$ и поперечных деформаций E_{zz} с поверхности образца, находим значения $A_{nm}^{(1)}$, $B_{nm}^{(1)}$. Затем вычисляем коэффициенты Фурье $\pi_{ij}^k(n, \rho)$ и определяем компоненты тензора напряжений $\pi_{\varphi\varphi}$ и π_{zz} . Используя данные шести пар тензодатчиков построим аналитические решения $E_{\varphi\varphi}$ и E_{zz} . Оставшиеся два датчика будем использовать в качестве тестовых для сравнения с теоретическим решением. Сравним экспериментальные данные со значениями деформаций, вычисленными теоретически, по формулам:

$$\begin{aligned}E_{\varphi\varphi}|_{\varphi=\varphi_i, r=R, z=0} &= (\frac{1}{2\mu}\pi_{\varphi\varphi} + \frac{\nu}{P}E)|_{\varphi=\varphi_i, r=R, z=0}, \\ E_{zz}|_{\varphi=\varphi_i, r=R, z=0} &= (\frac{1}{2\mu}\pi_{\varphi\varphi} + \frac{1}{P}E)|_{\varphi=\varphi_i, r=R, z=0}.\end{aligned}\quad (14)$$

Относительные отклонения аналитического решения от экспериментальных значений вычислялись по следующим формулам:

$$\delta = \frac{\sqrt{\sum (E_{\text{exp}}^i - E_{\text{theory}}^i)^2}}{\sqrt{\sum (E_{\text{exp}}^i)^2}}, \quad (15)$$

в точке $\varphi = \varphi_k$:

$$\begin{aligned} \delta_{\varphi}^k &= \frac{|E_{\varphi\varphi}^{\text{exp}}(\varphi_k) - E_{\varphi\varphi}^{\text{theory}}(\varphi_k)|}{|E_{\varphi\varphi}^{\text{exp}}(\varphi_k)|}, \\ \delta_z^k &= \frac{|E_{zz}^{\text{exp}}(\varphi_k) - E_{zz}^{\text{theory}}(\varphi_k)|}{|E_{zz}^{\text{exp}}(\varphi_k)|}. \end{aligned} \quad (16)$$

Относительные погрешности в проверочных точках соответственно равны $\delta_{\varphi} = 61, 2$, $\delta_z = 12, 9$ в точке $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ и $\delta_{\varphi} = 46, 87$, $\delta_z = 19, 41$ в точке $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

Поточечный способ определения коэффициентов Фурье имеет ряд недостатков:

- отсутствие поточечной сходимости приводит к большим значениям относительных погрешностей;
- неопределенность в выборе количества гармоник, связанная с совместностью системы линейных алгебраических уравнений;
- необходимость дополнительно исследовать расположение тензодатчиков.

Поэтому, определим коэффициенты в рядах Фурье используя аппроксимирующие функции $E_{zz}^{\text{approx}}(\varphi)$, $E_{\varphi\varphi}^{\text{approx}}(\varphi)$, по формулам:

$$\begin{aligned} \pi_{\varphi\varphi}^1(\rho, n) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(E_{\varphi\varphi}^{\text{approx}}(\varphi) - \frac{\nu}{E} P \right) \cos(n\varphi) d\varphi, \\ \pi_{\varphi\varphi}^2(\rho, n) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(E_{\varphi\varphi}^{\text{approx}}(\varphi) - \frac{\nu}{E} P \right) \sin(n\varphi) d\varphi, \\ \pi_{zz}^1(\rho, n) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(E_{zz}^{\text{approx}}(\varphi) - \frac{\nu}{E} P \right) \cos(n\varphi) d\varphi, \\ \pi_{zz}^2(\rho, n) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(E_{zz}^{\text{approx}}(\varphi) - \frac{\nu}{E} P \right) \sin(n\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (17)$$

4. Результаты расчетов на основе предложенной модели. Аппроксимирующие функции строились на основе значений продольных и поперечных деформаций с поверхности образца методом наименьших квадратов для заданного уровня нагрузки [15]. В таблицах 1 и 2 представлены относительные отклонения аналитического решения от экспериментальных значений для трех видов аппроксимирующих функций:

I. $f(\varphi) = a_{11}(\rho \cos(\varphi))^2 + a_{22}(\rho \sin(\varphi))^2 + 2a_{12}\rho^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) + 2a_{13} \cos(\varphi) + 2a_{23} \sin(\varphi) + a_{33} = 0$,

II. $f(\varphi) := A\varphi + B$,

$$\text{III. } f(\varphi) = A\varphi^3 + B\varphi^2 + C\varphi + D.$$

Вид аппроксимирующей функции	Относительное отклонение в точке $\varphi = 0$, δ_φ^0	Относительное отклонение по всем значениям, δ_φ
I	14,55%	14,35%
II	13,71%	13,53%
III	5,68%	11,65%

Таблица 1. Вид аппроксимирующей функции и относительные отклонения для продольных и поперечных деформаций на поверхности образца.

Вид аппроксимирующей функции	Относительное отклонение в точке $\varphi = 0$, δ_z^0	Относительное отклонение по всем значениям, δ_z
I	5,20 %	3,50 %
II	7,80 %	4,44 %
III	6,62 %	3,87 %

Таблица 2. Вид аппроксимирующей функции и относительные отклонения для продольных и поперечных деформаций на поверхности образца.

Используя предложенный подход к описанию напряженно деформированного состояния образца вычислены значения продольных E_{zz} и поперечных $E_{\varphi\varphi}$ деформаций на всем интервале нагружения (от 0 до 336 МПа) для трех пар тензометрических датчиков с использованием аппроксимирующей функции в виде многочлена третьей степени. На рисунках 1-3 представлены графики продольных и поперечных деформаций, вычисленные предложенным способом и экспериментальные значения для трех пар тензометрических датчиков.

5. Заключение. В рамках неклассических положений о самоуравновешенных напряжениях получено аналитическое решение трехмерной краевой задачи механики деформируемого твердого тела для цилиндрических образцов при одноосном сжатии с учетом экспериментальных данных и вычислены относительные отклонения, также в ходе построения аналитического решения было выявлено, что на относительную погрешность наибольшее влияние оказывает выбор аппроксимирующей функции для определения коэффициентов по формулам (15) чем увеличение количества гармоник в аналитическом решении. Наименьшая относительная погрешность достигалась при выборе аппроксимирующей функции в виде многочлена третьей степени (5) и числе гармоник в аналитическом решении $n = 4$.

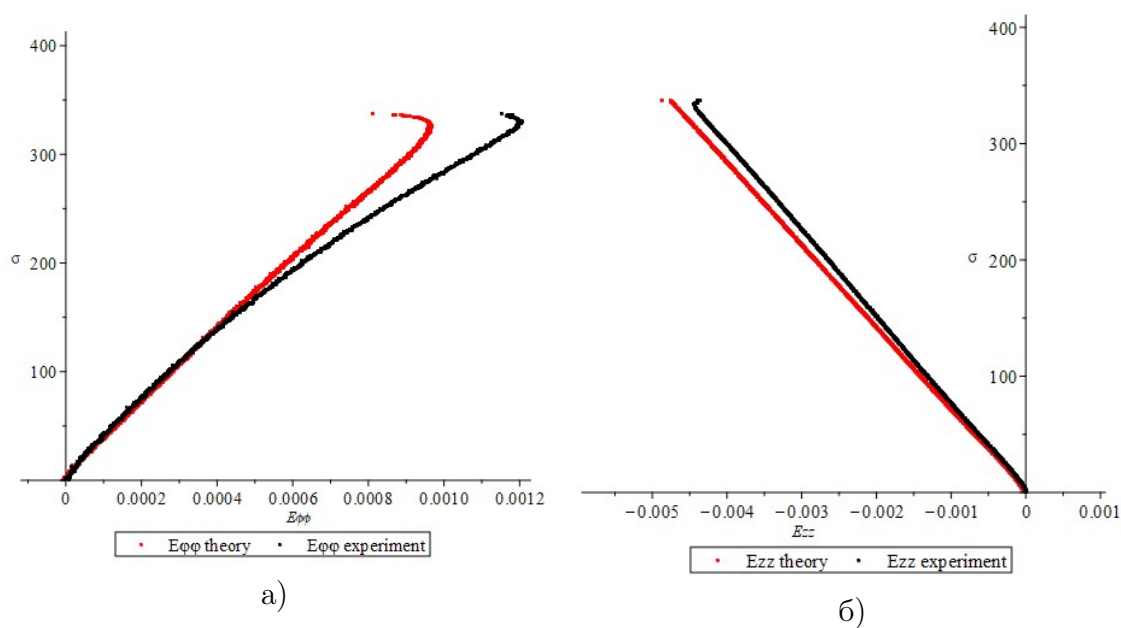


Рис. 1. Значения $E_{\varphi\varphi}$ (а) и E_{zz} (б) вычисленные теоретически и экспериментальные данные для пары датчиков №1, $\varphi = 0$

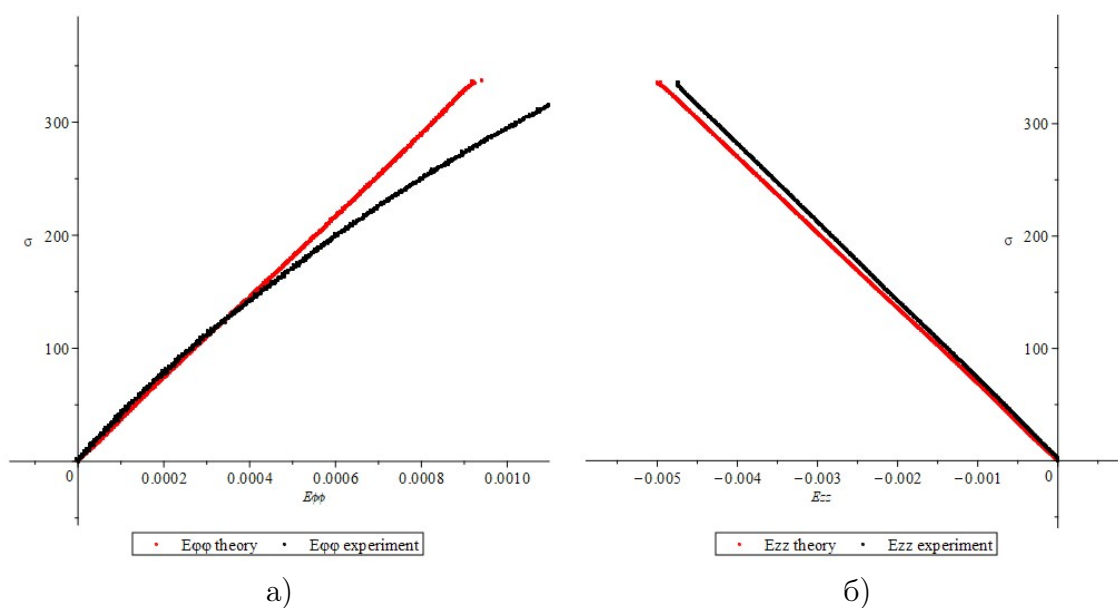


Рис. 2. Значения $E_{\varphi\varphi}$ (а) и E_{zz} (б) вычисленные теоретически и экспериментальные данные для пары датчиков №4, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

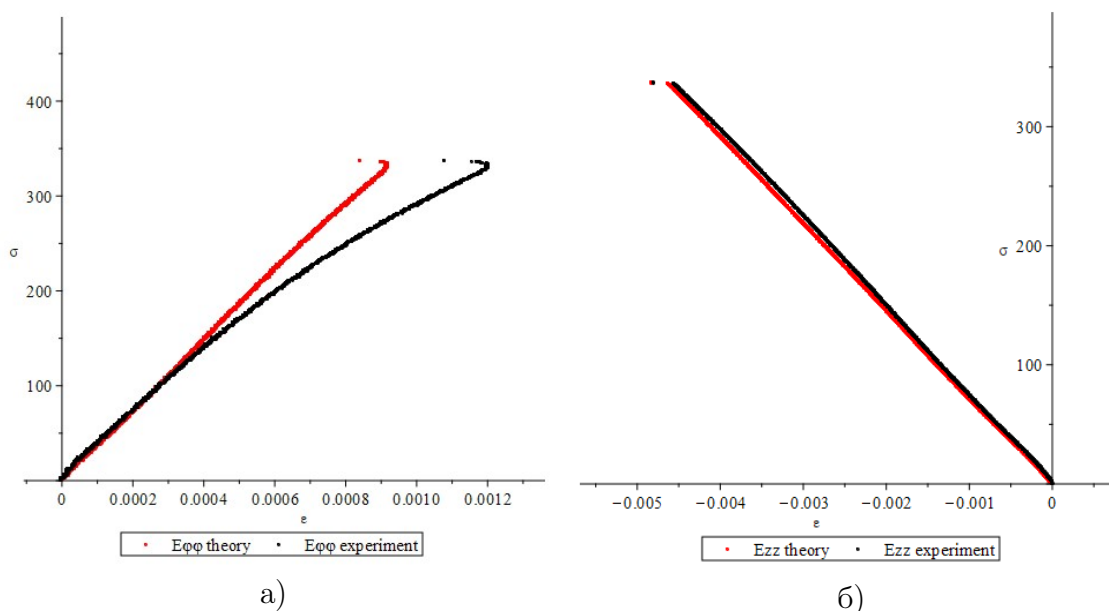


Рис. 3. Значения $E_{\varphi\varphi}$ (а) и E_{zz} (б) вычисленные теоретически и экспериментальные данные для пары датчиков №8, $\varphi = \frac{7\pi}{4}$

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Статья написана при поддержке Фонда целевого капитала ДВФУ: договор от 05.07.2022 № Д-231-22, проект № 22-07-01-001.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The contribution of the authors is equivalent.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The article was written with the support of the FEFU Endowment Fund: agreement dated 07/05/2022 No. D-231-22, project No. 22-07-01-001.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гузев М.А., Макаров В.В. Деформирование и разрушение сильно сжатых горных пород вокруг выработок. 2007. 232 р.
- [2] Гузев М.А. Моделирование осцилляционного деформирования сильно сжатых горных пород // «Вестник Дальневосточного государственного технического университета» № 3/4 (8/9). 2011. С. 38-47.
- [3] Опанасюк А.А. Периодический осцилляционный характер деформирования образцов сильно сжатых горных пород. № 12, Сб. науч. трудов. Донецк: «Норд-Пресс». 2006. С. 79–80.
- [4] Голосов А.М. Об эффекте реверсивного деформирования образцов горных пород при одноосном сжатии // Вестник инженерной школы ДВФУ. 2016. № 1(26). С. 127–133.
- [5] Гузев М.А., Горбунов А.В. Неевклидова модель сплошной среды и описание остаточных напряжений // Вестник инженерной школы ДВФУ. 2020. № 2(43). С. 3–12.
- [6] Гузев М.А., Макаров В.В., Ушаков А.А. Моделирование упругого поведения сжатых горных образцов в предразрушающей области. № 6. 2005. С. 3–13.
- [7] Кадич А., Эделен Д. Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций. 1987. 168 с.

- [8] Мясников В. П., Гузев М. А. Неевклидова модель деформирования материалов на различных структурных уровнях. 2000. 5-16 с.
- [9] Геомеханические процессы в геологической среде горнотехнических систем и управление геодинамическими рисками: монография / А. А. Козырев [и др.]. Львов : Апатиты: КНЦ РАН, 2019. 431, ил. ISBN 978-5-91137-391-7 с.
- [10] Периодический характер деформирования образцов сильно сжатых горных пород / В.В. Макаров [и др.] // ГИАБ. 2008. № 1. С. 185 –187.
- [11] Ушаков А.А. Самоуравновешенные поля напряжений //дисс. канд.физ-мат наук. Владивосток. 2006. 128 с.
- [12] Гузев М.А., Макаров В.В., Ушаков А.А. Моделирование упругого поведения сжатых горных образцов в предразрушающей области. No. 6. 2006.
- [13] Амензаде Ю.А. Теория упругости, Изд. 3-е, доп. М.: Высшая школа, 1976. 272с. 1976.
- [14] Толстов Г.П. Ряды Фурье. Изд. 3. М.: Наука, 1980. 384 с.
- [15] Бахвалов Н., Н.Жидков, Кобельков. Г. Численные методы. М.: Изд. Физматлит, 2006. 637 с.

REFERENCES

- [1] Guzev M.A., Makarov V.V. Deformation and destruction of highly compressed rocks around workings. 2007, pp.232.
- [2] Guzev M.A. Modeling of oscillatory deformation of highly compressed rocks // Bulletin of the Far Eastern State Technical University. No 3/4 (8/9). 2011, pp.38-47.
- [3] Opanasyuk A.A. Periodic oscillatory character of deformation of samples of strongly compressed rocks. No. 12, Collection of scientific papers. – Donetsk: Nord-Press. 2006, pp.79-80.
- [4] Votes A.M. On the effect of reversible deformation of rock samples under uniaxial compression // Bulletin of the fevu school of engineering. 2016. no. 1(26), pp.127-133.
- [5] Guzev M.A., Gorbunov A.V. Non-Euclidean continuum model and description of residual stresses // Bulletin of the fevu school of engineering. 2020. no. 2(43), pp.3-12.
- [6] Guzev M.A., Makarov V.V., Ushakov A.A. Modeling of elastic behavior of compressed rock samples in the pre-destructive region. No. 6. 2005, pp.3-13.
- [7] Kadich A., Edelen D. Gauge theory of dislocations and disclinations. 1987, 168 p.
- [8] Myasnikov V. P., Guzev M. A. Non-Euclidean model of deformation of materials at various structural levels. 2000, pp.5-16.
- [9] Geomechanical processes in the geological environment of mining systems and geodynamic risk management: monograph / A. A. Kozыrev [et al.]. Lviv : Apatity: KSC RAS, 2019. 431, ill. ISBN 978-5-91137-391-7 p.
- [10] Periodic character of deformation of samples of strongly compressed rocks / V.V. Makarov [et al.] // GИAB. 2008. no. 1. pp.185-187.
- [11] Ushakov A.A. Self-balanced stress fields //diss. kand.physical sciences. Vladivostok. 2006. 128 p.
- [12] Guzev M.A., Makarov V.V., Ushakov A.A. Modeling of the elastic behavior of compressed rock samples in the pre-destructive region. No. 6. 2006.
- [13] Amenzade Yu.A. Theory of elasticity. 1976. 272 p.
- [14] Tolstov G.P. Fourier series. Ed. 3. Moscow: Nauka, 1980. 384 p.
- [15] Bakhvalov N., Zhidkov N., Kobelkov. G. Numerical methods. M.: Ed. Fizmatlit, 2006. 637 p.

С. К. Иванов

ОБ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ НЕТОЧНЫХ ПАРАМЕТРАХ БИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

*Московский государственный университет технологий и управления имени
К. Г. Разумовского, Москва, Россия*

Аннотация. Для оценки компоненты дисперсии выходного показателя статистической модели необходимо получить оценки производных от математического ожидания выходного показателя статистической модели по параметрам генерируемых в модели случайных величин. Проанализирована сходимость ряда видов оценок таких производных для случая биномиальных случайных величин. Предложены оценки производных с улучшенной сходимостью. Проведён численный эксперимент для подтверждения теоретических выводов.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, оценка точности, биномиальное распределение.

Иванов Сергей Константинович, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики; e-mail: s_k_ivanov@rambler.ru; AuthorID: 5876

для цитирования: Иванов С. К. Об оценке точности результатов компьютерного моделирования при неточных параметрах биномиального распределения // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 1(59). С. 61–75. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.002 EDN: CLSSNO

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

S. K. Ivanov

ON COMPUTER SIMULATION ACCURACY ESTIMATION WITH INACCURATE PARAMETERS OF BINOMIAL DISTRIBUTION

*Moscow State University of Technology and Management named after K. G. Razumovsky,
Moscow, Russia*

Abstract. To estimate a dispersion of the output value of a Monte-Carlo model due to inaccuracy of input data we need to have estimates of derivatives of the output value by parameters of underlying distributions. A number of estimates of the output value by parameter of binomial distribution are analyzed. Improved estimates are proposed. A numerical experiment was carried out to confirm the theoretical conclusions.

Keywords: computer simulation, accuracy estimation, binomial distribution.

Sergey K. Ivanov, Cand. Tech. Sc., Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, e-mail: mail1@mail.ru; e-mail: s_k_ivanov@rambler.ru; AuthorID: 5876

to cite this article: Ivanov S.K. On computer simulation accuracy estimation with inaccurate parameters of binomial distribution // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 1(59). p. 61–75. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.002 EDN: CLSSNO

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

1. Введение. Метод статистического моделирования, называемый также методом статистических испытаний или методом Монте-Карло, уже с пионерских работ Улама [1] стал и остаётся традиционным методом исследования сложных систем различной природы [2–10]. При этом отдельные подсистемы, процессы, элементы представляются вероятностными распределениями, параметры которых с некоторой ограниченной точностью оцениваются путём усреднения результатов независимых натуральных экспериментов или расчётов на частных моделях.

Таким образом, сами эти параметры можно считать случайными величинами, распределение которых хорошо аппроксимируется нормальным законом, то есть величины эти вполне определяются их средними значениями и дисперсией.

Рассмотрим стандартную схему метода статистического моделирования. В модели рассчитывается N независимых реализаций выходного показателя L_m , $m = 1, 2, \dots, N$, и в качестве его оценки берётся выборочное среднее

$$L = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N L_m$$

Как показано в [7, 8], дисперсия L имеет две компоненты: $D(L) = D_1(L) + D_2(L)$, где $D_1(L)$ обусловлена конечностью числа реализаций N , а $D_2(L)$ – неточностью исходных данных. $D_1(L)$ оценивается выборочной дисперсией

$$D_1(L) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{m=1}^N (L_m - L)^2$$

Для $D_2(L)$ там же получено асимптотическое разложение. На практике для оценки этой компоненты используется его главный член, имеющий вид

$$D_2(L) = \sum_{i=1}^n (a^{(i)})^2 \sigma_{ii} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a^{(i)} a^{(j)} \sigma_{ij}$$

где $a^{(i)}$ – оценка производной по i -му параметру от математического ожидания выходного показателя, σ_{ij} – элементы ковариационной матрицы параметров.

Оценка компоненты дисперсии $D_2(L)$, обусловленной неточностью исходных данных позволяет не только уточнить доверительные интервалы оценки выходного показателя, но и дать разумный критерий для выбора количества реализаций N . Действительно, расчёты имеет смысл проводить до тех пор, пока выборочная оценка компоненты дисперсии $D_1(L)$, обусловленной конечностью N , не сравняется по порядку величины с $D_2(L)$.

Для оценивания производных, определяющих главный член асимптотического разложения $D_2(L)$ предлагались два способа.

В [5] предлагалось оценивать их варьированием параметров и использованием конечно-разностной аппроксимации. Этот подход имеет два недостатка. Во-первых, появляются дополнительные реализации модели, значительно увеличивающие время расчётов без увеличения их точности. Во-вторых, имеет место трудно разрешимое противоречие. С одной стороны для увеличения точности

конечно-разностной аппроксимации мы должны уменьшать интервал варьирования. Но при этом у оценки производной появляется малый знаменатель, существенно увеличивающий дисперсию этой оценки. Уже первый недостаток делает практически нецелесообразным применение этого способа для сложных моделей.

В [2, 7, 8] предлагалось оценивать производные без увеличения числа реализаций путём усреднения получаемых значений выходного показателя L_m , $m = 1, 2, \dots, N$, с весовым коэффициентом, зависящим от вида соответствующего распределения. А именно, оценка a производной $\frac{\partial M(L)}{\partial c}$ по параметру распределения с плотностью $f(c, x)$, в соответствии с которым в m -й реализации модели генерируется случайная величина ξ_m , имеет вид

$$a = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N L_m R(\xi_m), \quad (1)$$

$$R(x) = \frac{1}{f(c, x)} \frac{\partial f(c, x)}{\partial c}.$$

Аналогичная оценка может быть построена и для дискретного распределения. В частности, для оценки производной a по параметру K биномиального распределения (часто трактуемому как коэффициент готовности элементов моделируемой системы)

$$P\{\xi = k\} = C_n^k K^k (1 - K)^{n-k}, \quad 0 < K < 1,$$

$$R(x) = \frac{x - nK}{K(1 - K)}.$$

Следует отметить, что в типичном случае систем с высоконадёжными элементами коэффициент готовности K элемента близок к 1. Следовательно и здесь появляется описанная выше проблема малого знаменателя.

В этой работе далее мы исследуем сходимость оценки производной a вида (1) по параметру K биномиального распределения и предложим для этой производной оценки с улучшенной сходимостью.

2. Исследование сходимости оценки a . Сходимость в среднем квадратичном определяется скоростью убывания дисперсии оценки (1) производной. По порядку величины это $O(1/N)$. Но нас интересует величина этой дисперсии при конечных N , поскольку при моделировании ограничиваются конечным и желательно минимальным количеством реализаций модели. Не умаляя общности, будем считать, что $0 \leq L_m \leq 1$. Обозначим $M(\cdot | \xi = i)$ оператор условного математического ожидания при условии $\xi = i$.

Теорема 1. Если $M(L^2 | \xi = i) \geq d > 0$ для любого $i = 0, 1, \dots, n$, то

$$\frac{nd}{NK(1 - K)} - \frac{4n^2}{N} \leq D(a) \leq \frac{n}{NK(1 - K)}. \quad (2)$$

Доказательство. Дисперсия $D(a)$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 D(a) &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^n C_n^i K^i (1-K)^{n-i} \left(\frac{i-nK}{K(1-K)} \right)^2 M(L^2 | \xi = i) - \\
 &\quad - \frac{1}{N} \left[\sum_{i=0}^n C_n^i K^i (1-K)^{n-i} \frac{i-nK}{K(1-K)} M(L | \xi = i) \right]^2 \leq \\
 &\leq \frac{1}{NK^2(1-K)^2} \sum_{i=0}^n C_n^i K^i (1-K)^{n-i} (i-nK)^2 = \frac{1}{NK^2(1-K)^2} \cdot nK(1-K) = \\
 &= \frac{n}{NK(1-K)}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, получена верхняя оценка в выражении (2) Теоремы 1.

Получим теперь нижнюю оценку. Во первых, аналогично предыдущему получаем первый член нижней оценки

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=0}^n C_n^i K^i (1-K)^{n-i} \left(\frac{i-nK}{K(1-K)} \right)^2 M(L^2 | \xi = i) \geq \\
 &\geq \frac{d}{K^2(1-K)^2} \sum_{i=0}^n C_n^i K^i (1-K)^{n-i} (i-nK)^2 = \frac{d}{K^2(1-K)^2} \cdot nK(1-K) = \frac{nd}{K(1-K)}.
 \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned}
 &\left| \sum_{i=0}^n C_n^i K^i (1-K)^{n-i} \frac{i-nK}{K(1-K)} M(L | \xi = i) \right| \leq \\
 &\leq \max \left| \sum_{nK < i} C_n^i K^i (1-K)^{n-i} \frac{i-nK}{K(1-K)} M(L | \xi = i) \right| \\
 &\quad + \left| \sum_{i \leq nK} C_n^i K^i (1-K)^{n-i} \frac{i-nK}{K(1-K)} M(L | \xi = i) \right|.
 \end{aligned}$$

Для первого члена под знаком максимума справедлива оценка

$$\begin{aligned}
 &\left| \sum_{nK < i} C_n^i K^i (1-K)^{n-i} \frac{i-nK}{K(1-K)} M(L | \xi = i) \right| \leq \\
 &\leq \frac{1}{K(1-K)} \left(\sum_{i=0}^n C_n^i K^i (1-K)^{n-i} i - nK \sum_{nK < i} C_n^i K^i (1-K)^{n-i} \right) = \\
 &= \frac{n}{(1-K)} \left(1 - \sum_{nK < i} C_n^i K^i (1-K)^{n-i} \right) \leq \frac{n}{(1-K)}.
 \end{aligned}$$

Для него же справедлива и другая оценка

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{nK < i} C_n^i K^i (1-K)^{n-i} \frac{i-nK}{K(1-K)} M(L|\xi=i) \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{K(1-K)} \left[\sum_{i=0}^n C_n^i K^i (1-K)^{n-i} (n-nK) \right] = \frac{n}{K}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left| \sum_{nK < i} C_n^i K^i (1-K)^{n-i} \frac{i-nK}{K(1-K)} M(L|\xi=i) \right| \leq \min \left\{ \frac{n}{(1-K)}, \frac{n}{K} \right\} \leq 2n. \quad (3)$$

А поскольку для второго члена справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i \leq nK} C_n^i K^i (1-K)^{n-i} \frac{i-nK}{K(1-K)} M(L|\xi=i) \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{K(1-K)} \sum_{i \leq nK} C_n^i K^i (1-K)^{n-i} (nK-i) = \\ & = \frac{1}{K(1-K)} \sum_{n(1-K) \leq n-i} C_n^{n-i} K^{n-i} (1-K)^i [(n-i) - n(1-K)], \end{aligned}$$

то по аналогии с (3) отсюда выводим, что также

$$\left| \frac{1}{K(1-K)} \sum_{n(1-K) \leq n-i} C_n^{n-i} K^{n-i} (1-K)^i [(n-i) - n(1-K)] \right| \leq 2n.$$

То есть

$$\left| \sum_{i=0}^n C_n^i K^i (1-K)^{n-i} \frac{i-nK}{K(1-K)} M(L|\xi=i) \right| \leq 2n$$

и следовательно

$$- \left[\sum_{i=0}^n C_n^i K^i (1-K)^{n-i} \frac{i-nK}{K(1-K)} M(L|\xi=i) \right]^2 \geq -4n^2.$$

Собирая вместе полученные неравенства, приходим к (2), что и требовалось доказать.

Из (2) следует, что при фиксированном N дисперсия $D(a) \rightarrow \infty$ при $K \rightarrow 0$ или при $K \rightarrow 1$. То есть при значениях K близких к 0 или 1 необходимо просчитывать весьма большое число реализаций модели N , чтобы компенсировать увеличение дисперсии.

3. Улучшенные оценки производных. Для построения улучшенных оценок воспользуемся тем, что рассматриваемую биномиальную случайную величину ξ можно представить в виде суммы n независимых случайных величин ξ_i^0 , $i = 1, 2, \dots, n$, принимающих значения 0 и 1 с вероятностями $(1 - K)$ и K , соответственно. Обозначим K_i показатель, соответствующий случайной величине ξ_i^0 . При этом $K_i = K$. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial M(L)}{\partial K} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial M(L)}{\partial K_i} \cdot \frac{\partial K_i}{\partial K} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial M(L)}{\partial K_i}.$$

Таким образом, задача свелась к получению оценок производных $\frac{\partial M(L)}{\partial K_i}$. Для этого продифференцируем равенство

$$M(L) = K_i M(L | \xi_i^0 = 1) + (1 - K_i) M(L | \xi_i^0 = 0)$$

и получим

$$\frac{\partial M(L)}{\partial K_i} = M(L | \xi_i^0 = 1) - M(L | \xi_i^0 = 0).$$

Отсюда видно, что в качестве оценки $\frac{\partial M(L)}{\partial K_i}$ можно взять величину

$$\hat{a}_1(i) = \frac{1}{N_1} \sum_{m \in A_1} L_m - \frac{1}{N_0} \sum_{m \in A_0} L_m,$$

где A_0 – множество реализаций, в которых $\xi_i^0 = 0$, A_1 – множество реализаций, в которых $\xi_i^0 = 1$, $N_0 = |A_0|$, $N_1 = |A_1|$, $N_0 + N_1 = N$. Если какое-то из множеств пустое, то соответствующий член полагается равным 0. Улучшенной оценкой $\frac{\partial M(L)}{\partial K}$ будет служить величина

$$a_1 = \sum_{i=1}^n \hat{a}_1(i).$$

Уже по построению оценки a_1 видно, что у неё отсутствует свойственная оценке a проблема малых знаменателей. Построенные таким образом оценки мы будем называть улучшенными.

4. Смещение улучшенных оценок, несмещённые оценки. Смещённость оценки $\hat{a}_1(i)$ следует из Теоремы 2.

Теорема 2. Математическое ожидание $\hat{a}_1(i)$ имеет вид

$$M\hat{a}_1(i) = \frac{\partial M(L)}{\partial K_i} - (1 - K)^N M(L | \xi_i^0 = 1) + K^N M(L | \xi_i^0 = 0).$$

Доказательство.

$$M\hat{a}_1(i) = \sum_{k=1}^{N-1} P\{N_1 = k\} M\left(\frac{1}{k} \sum_{m \in A_1} L_m - \frac{1}{N-k} \sum_{m \in A_0} L_m\right) +$$

$$\begin{aligned}
& +P\{N_1 = N\} M\left(\frac{1}{N} \sum_{m \in A_1} L_m\right) - P\{N_1 = 0\} M\left(\frac{1}{N} \sum_{m \in A_0} L_m\right) = \\
& = M(L|\xi_i^0 = 1) - M(L|\xi_i^0 = 0) - (1-K)^N M(L|\xi_i^0 = 1) + K^N M(L|\xi_i^0 = 0).
\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Из Теоремы 2 следует асимптотическая несмещённость $\hat{a}_1(i)$. Действительно, смещение

$$\Delta\{\hat{a}_1(i) = -(1-K)^N M(L|\xi_i^0 = 1) + K^N M(L|\xi_i^0 = 0)$$

при возрастании N стремится к нулю с экспоненциальной скоростью: $\Delta\{\hat{a}_1(i) = O(\delta^N)$, где $\delta = \max\{K, 1-K\}$.

Как следствие получаем

$$\Delta\{a_1(i) = -(1-K)^N \sum_{i=1}^n M(L|\xi_i^0 = 1) + K^N \sum_{i=1}^n M(L|\xi_i^0 = 0).$$

Если $(r-1)$ раз применить стандартный приём, когда из рассматриваемой оценки вычитается выборочная оценка её смещения, то можно получить оценку $\hat{a}_r(i)$, смещение которой имеет порядок $O(\delta^{rN})$:

$$\hat{a}_r(i) = \left(\sum_{j=0}^{r-1} (1-K)^{jN}\right) \frac{1}{N_1} \sum_{m \in A_1} L_m - \left(\sum_{j=0}^{r-1} K^{jN}\right) \frac{1}{N_0} \sum_{m \in A_0} L_m.$$

Смещение такой оценки равно

$$\Delta\{\hat{a}_r(i) = -(1-K)^{rN} M(L|\xi_i^0 = 1) + K^{rN} M(L|\xi_i^0 = 0)$$

а следовательно смещение оценки $a_r = \sum_{i=1}^n \hat{a}_r(i)$ равно

$$\Delta(a_r) = -(1-K)^{rN} \sum_{i=1}^n M(L|\xi_i^0 = 1) + K^{rN} \sum_{i=1}^n M(L|\xi_i^0 = 0).$$

Производя предельный переход $r \rightarrow \infty$, можно получить оценку a_∞ , несмещённую при всех N

$$a_\infty = \sum_{i=1}^n \hat{a}_\infty(i)$$

$$\hat{a}_\infty(i) = \left(\frac{1}{1-(1-K)^N}\right) \frac{1}{N_1} \sum_{m \in A_1} L_m - \left(\frac{1}{1-K^N}\right) \frac{1}{N_0} \sum_{m \in A_0} L_m.$$

Дисперсия этой оценки уже не остаётся ограниченной на всём интервале значений K , однако при $K \rightarrow 0$ и $K \rightarrow 1$ она всё же растёт существенно медленнее, чем дисперсия a , как это будет продемонстрировано далее.

5. Дисперсия улучшенных оценок. Для исследования дисперсии улучшенных оценок нам понадобится следующее утверждение общего характера.

Лемма 1. Для $K \in (0, 1)$ справедлива формула

$$\sum_{j=1}^N C_N^j \frac{(1-K)^j K^{N-j}}{j} = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{K^j - K^N}{N-j}. \quad (4)$$

Доказательство. Обозначим $S(K)$ левую часть (4). Непосредственным дифференцированием получаем уравнение

$$K(1-K) \frac{dS(K)}{dK} = 1 + K^N + N(1-K)S(K).$$

Нас интересуют его решения вида

$$S(K) = \sum_{j=0}^N b_j K^j, \quad (5)$$

удовлетворяющие условию $S(K) \rightarrow 0$ при $K \rightarrow 1$. Подставляя (5) в уравнение, методом неопределённых коэффициентов находим

$$b_j = \frac{1}{N-j}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1; \quad b_N = -\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{N-j}.$$

Откуда

$$S(K) = \sum_{j=0}^N b_j K^j = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{N-j} K^j + \left(-\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{N-j}\right) K^N = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{K^j - K^N}{N-j}.$$

Что и требовалось доказать.

Из Леммы 1 следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N C_n^j \frac{(1-K)^j K^{N-j}}{j} &\leq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{K^j}{N-j} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \frac{K^j}{N-j} + \sum_{j=\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}^{N-1} \frac{K^j}{N-j} \leq \\ &\leq \frac{1}{N - \lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} K^j + K^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1} \sum_{j=0}^{N - \lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 2} K^j \leq \left(\frac{2}{N} + K^{\frac{N}{2}} \right) \sum_{i=0}^{\infty} K^i = \\ &= \frac{1}{1-K} \left(\frac{2}{N} + K^{\frac{N}{2}} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Теорема 3. Справедлива следующая верхняя оценка для дисперсии $D\{\hat{a}_1(i)\}$

$$\begin{aligned} D\{\hat{a}_1(i)\} &\leq \frac{1}{2} \min \left\{ 1, \frac{1}{K(1-K)} \left(\frac{1}{N} + \frac{K^{\frac{N}{2}+1} + (1-K)^{\frac{N}{2}+1}}{2} \right) \right\} + \\ &+ 3K^N + 3(1-K)^N. \end{aligned} \quad (7)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
M(\hat{a}_1(i)^2) &= \sum_{j=1}^{N-1} P\{N_1 = j\} M\left(\frac{1}{j} \sum_{m \in A_1} L_m - \frac{1}{N-j} \sum_{m \in A_0} L_m\right)^2 + \\
&+ P\{N_1 = N\} M\left(\frac{1}{N} \sum_{m \in A_1} L_m\right)^2 + P\{N_1 = 0\} M\left(\frac{1}{N} \sum_{m \in A_0} L_m\right)^2 = \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} P\{N_1 = j\} \left(\frac{D(L|\xi_i^0 = 1)}{j} + \frac{D(L|\xi_i^0 = 0)}{N-j} \right) + P\{N_1 = N\} \frac{D(L|\xi_i^0 = 1)}{N} + \\
&+ P\{N_1 = 0\} \frac{D(L|\xi_i^0 = 0)}{N} + \sum_{j=1}^{N-1} P\{N_1 = j\} (M(L|\xi_i^0 = 1) - M(L|\xi_i^0 = 0))^2 + \\
&+ P\{N_1 = N\} (M(L|\xi_i^0 = 1))^2 + P\{N_1 = 0\} (M(L|\xi_i^0 = 0))^2.
\end{aligned}$$

Поскольку $0 \leq L \leq 1$, то

$$\begin{aligned}
0 \leq M(L|\xi_i^0 = 1) \leq 1, \quad 0 \leq M(L|\xi_i^0 = 0) \leq 1, \quad D(L|\xi_i^0 = 1) \leq \frac{1}{4}, \\
D(L|\xi_i^0 = 0) \leq \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
M(\hat{a}_1(i)^2) &\leq \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \frac{C_N^j K^j (1-K)^{N-j}}{j} + \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{C_N^j K^j (1-K)^{N-j}}{N-j} + \\
&+ [M(L|\xi_i^0 = 1) - M(L|\xi_i^0 = 0)]^2 + K^N + (1-K)^N = \\
&\frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \frac{C_N^j K^j (1-K)^{N-j}}{j} + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \frac{C_N^j (1-K)^j K^{N-j}}{N-j} + \\
&+ (M(L|\xi_i^0 = 1) - M(L|\xi_i^0 = 0))^2 + K^N + (1-K)^N.
\end{aligned}$$

С использованием (6) и очевидного неравенства

$$\sum_{j=1}^N C_N^j \frac{(1-K)^j K^{N-j}}{j} \leq \sum_{j=0}^N C_N^j (1-K)^j K^{N-j} = 1$$

получаем

$$\begin{aligned}
M(\hat{a}_1(i)^2) &\leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{1-K} \left(\frac{2}{N} + K^{\frac{N}{2}} \right) + \frac{1}{K} \left(\frac{2}{N} + (1-K)^{\frac{N}{2}} \right) \right] + \\
&+ [M(L|\xi_i^0 = 1) - M(L|\xi_i^0 = 0)]^2 + K^N + (1-K)^N \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \min \left\{ 1, \frac{1}{K(1-K)} \left(\frac{1}{N} + \frac{K^{\frac{N}{2}+1} + (1-K)^{\frac{N}{2}+1}}{2} \right) \right\} + \\
&+ [M(L|\xi_i^0 = 1) - M(L|\xi_i^0 = 0)]^2 + K^N + (1-K)^N.
\end{aligned}$$

По Теореме 2

$$\begin{aligned}
 [M\hat{a}_1(i)]^2 &= [M(L|\xi_i^0=1) - M(L|\xi_i^0=0) - (1-K)^N M(L|\xi_i^0=1) + \\
 &+ K^N M(L|\xi_i^0=0)]^2 = [M(L|\xi_i^0=1) - M(L|\xi_i^0=0)]^2 + \\
 &+ [(1-K)^N M(L|\xi_i^0=1) - K^N M(L|\xi_i^0=0)]^2 + \\
 &+ 2(K^N + (1-K)^N) M(L|\xi_i^0=1) M(L|\xi_i^0=0) - \\
 &- 2(1-K)^N M(L|\xi_i^0=1)^2 - 2K^N M(L|\xi_i^0=0)^2 \geq \\
 &\geq [M(L|\xi_i^0=1) - M(L|\xi_i^0=0)]^2 - 2K^N - 2(1-K)^N.
 \end{aligned}$$

Собирая полученные оценки, получаем

$$\begin{aligned}
 &D\{\hat{a}_1(i) = M([\hat{a}_1(i)]^2) - [M\{\hat{a}_1(i)\}]^2 \leq \\
 &\leq \frac{1}{2} \min \left\{ 1, \frac{1}{K(1-K)} \left(\frac{1}{N} + \frac{K^{\frac{N}{2}+1} + (1-K)^{\frac{N}{2}+1}}{2} \right) \right\} + 3K^N + 3(1-K)^N.
 \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Для дисперсии оценки $a_1 = \sum_{i=1}^n \hat{a}_1(i)$ имеем

$$\begin{aligned}
 D(a_1) &= D \sum_{i=1}^n \hat{a}_1(i) \leq \left(\sum_{i=1}^n D(\hat{a}_1(i))^{\frac{1}{2}} \right)^2 \leq \\
 &\leq \frac{n^2}{2} \min \left\{ 1, \frac{1}{K(1-K)} \left(\frac{1}{N} + \frac{K^{\frac{N}{2}+1} + (1-K)^{\frac{N}{2}+1}}{2} \right) \right\} + 3n^2 K^N + 3n^2 (1-K)^N.
 \end{aligned}$$

Для дисперсий $D(\hat{a}_r(i))$ и $D(a_r)$ справедливы неравенства

$$D\{\hat{a}_r(i) \leq r^2 D\{\hat{a}_1(i); \quad D(a_r) \leq r^2 D(a_1).$$

6. Численный пример. Рассмотрим простую модель, в которой генерируется биномиальная случайная величина ξ , такая что $P\{\xi=1\}=K, P\{\xi=0\}=1-K$. Математическое ожидание выходного показателя и его дисперсия при условии $\xi=0$ равны L_0 и D_0 . Соответствующие величины при условии $\xi=1$ равны L_1 и D_1 . N , как и раньше, обозначает число реализаций.

Для данной модели выражения для дисперсии и смещения оценок производных от выходного показателя по K принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 D(a) &= \frac{D_1(1-K) + D_0K + (L_1(1-K) + L_0K)^2}{NK(1-K)}; \\
 D(a_\infty) &= \frac{D_0}{(1-K^N)^2} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{K^m - K^N}{N-m} + \frac{L_0^2 K^N}{(1-K^N)^2} + 2 \frac{L_0 L_1 K^N (1-K)^N}{(1-K^N)(1-(1-K)^N)} + \\
 &+ \frac{D_1}{(1-(1-K)^N)^2} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{(1-K)^m - (1-K)^N}{N-m} + \frac{L_1^2 (1-K)^N}{(1-(1-K)^N)^2};
 \end{aligned}$$

$$D(a_1) = D_0 \sum_{m=0}^{N-1} \frac{K^m - K^N}{N - m} + D_1 \sum_{m=0}^{N-1} \frac{(1 - K)^m - (1 - K)^N}{N - m} +$$

$$+ L_0^2 K^N (1 - K^N) + L_1^2 (1 - K)^N (1 - (1 - K)^N) + 2L_0 L_1 K^N (1 - K)^N;$$

$$\Delta(a_1) = L_0 K^N - L_1 (1 - K)^N.$$

В таблицах 1-3 приведены результаты расчётов зависимости $D(a)$, $D(a_\infty)$, $D(a_1) + \Delta^2(a_1)$ от N при $L_0 = 0,5$; $L_1 = 0,6$ и $D_0 = D_1 = 0,0004$. Расчёты проводились при $K = 0,7$; $K = 0,85$ и $K = 0,9$.

Графики соответствующих зависимостей приведены на рисунках 1-3.

Эти простые примеры наглядно показывают, что улучшенные оценки демонстрируют существенно более быструю сходимость с ростом N по сравнению с предлагавшимися ранее оценками вида a .

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$D(a)$	0,6698	0,4465	0,3349	0,2679	0,2233	0,1914	0,1674	0,1488	0,134	0,1218
$D(a_\infty)$	0,5682	0,2184	0,1091	0,0624	0,0386	0,025	0,0167	0,0113	0,0078	0,0054
$D(a_1) + \Delta^2(a_1)$	0,1554	0,0959	0,0634	0,0433	0,0301	0,0211	0,0148	0,0104	0,0074	0,0052

Таблица 1. Результаты расчётов для $K = 0,7$.

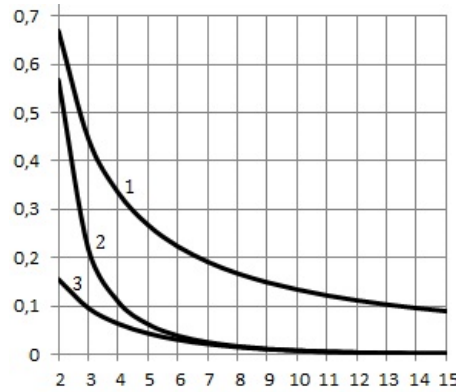


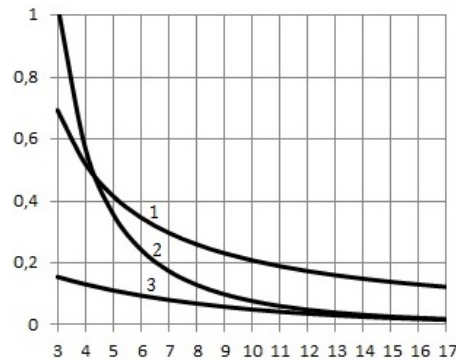
Рис. 1. Зависимость от N : 1 – $D(a)$, 2 – $D(a_\infty)$, 3 – $D(a_1) + \Delta^2(a_1)$; $K = 0,7$.

На графике непосредственно видна гораздо более быстрая сходимость улучшенных оценок a_1 и a_∞ по сравнению с ранее предлагавшейся оценкой a .

Второй график показывает, что более быстрая сходимость улучшенных оценок a_1 и a_∞ по сравнению с ранее предлагавшейся оценкой a сохраняется и при приближении K к единице.

Из рассмотрения последнего графика видно, что и при K ещё более близком к единице улучшенные оценки a_1 и a_∞ сходятся существенно быстрее ранее

N	3	5	7	9	11	13	15	17
$D(a)$	0,6944	0,4167	0,2976	0,2315	0,1894	0,1603	0,1389	0,1225
$D(a_\infty)$	1,0367	0,3593	0,1743	0,0987	0,0609	0,0396	0,0266	0,0184
$D(a_1) + \Delta^2(a_1)$	0,1550	0,1113	0,0806	0,0583	0,0423	0,0307	0,0222	0,0161

Таблица 2. Результаты расчётов для $K = 0,85$.Рис. 2. Зависимость от N : 1 — $D(a)$, 2 — $D(a_\infty)$, 3 — $D(a_1) + \Delta^2(a_1)$; $K = 0,85$.

N	4	6	8	10	12	14	16	18
$D(a)$	0,7236	0,4824	0,3618	0,2894	0,2412	0,2067	0,1809	0,1608
$D(a_\infty)$	1,3883	0,6061	0,3325	0,2062	0,1377	0,0967	0,0703	0,0524
$D(a_1) + \Delta^2(a_1)$	0,1643	0,1332	0,108	0,0876	0,071	0,0576	0,0468	0,0379

Таблица 3. Результаты расчётов для $K = 0,9$.

предлагавшейся оценки a . Сравнение трёх графиков показывает также, что при приближении K к единице сходимость улучшенной оценки a_∞ всё-таки несколько замедляется, как и указывалось ранее. В то же время на сходимость улучшенной оценки a_1 изменение K практически не оказывает влияния.

Заключение. Проведённое в данной работе исследование сходимости оценок производных от выходного показателя модели по параметру K биномиального распределения показывают существенное улучшение сходимости предложенных улучшенных оценок по сравнению с предлагавшимися ранее. В особенности это относится к практически значимому случаю K близких к 1. Это позволяет рекомендовать их к использованию при оценке точности результатов компьютерного моделирования.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. 100%.

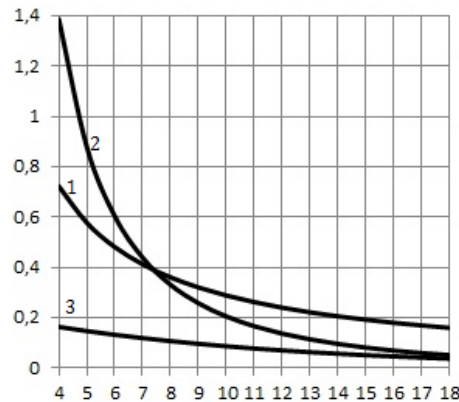


Рис. 3. Зависимость от N : 1 – $D(a)$, 2 – $D(a_\infty)$, 3 – $D(a_1) + \Delta^2(a_1)$; $K = 0,9$.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. 100%.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Metropolis N., Ulam S. The Monte Carlo Method // Journal of the American Statistical Association. 1949. Т. 44, № 247. С. 335–341.
- [2] Бусленко Н. П., Шрейдер Ю. А. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). Физматлит, 1961. 228 с.
- [3] Александров В. М., Сысоев В. Н., Шеменёва В. В. Стохастическая оптимизация систем // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1968. № 5. С. 42–51.
- [4] Соболев И. М. Метод Монте-Карло. Наука, 1968. 64 с.
- [5] Полляк Ю. Г. Вероятностное моделирование на цифровых электронных вычислительных машинах. Советское радио, 1971. 400 с.
- [6] Ермаков С. М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. Наука, 1971. 328 с.
- [7] Ивницкий В. А. Об оценке точности результатов моделирования сложных систем с неточной входной информацией при схеме независимых испытаний // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1974. № 4. С. 31–40.
- [8] Шаракшанэ А. С., Железнов И. Г., Ивницкий В. А. Сложные системы. Высшая школа, 1977. 247 с.
- [9] Fishman G. S. Monte Carlo: concepts, algorithms, and applications. Springer, 1996. 698 p.
- [10] Quantum Monte Carlo simulations of solids / W. M. C. Foulkes [et al.] // Reviews of Modern Physics. 2001. Vol. 73, no. 1. P. 33–83.

REFERENCES

- [1] Metropolis N., Ulam S. The Monte Carlo Method // Journal of the American Statistical Association. 1949. Vol. 44, no. 247. P. 335–341.

- [2] Buslenko N. P., Shreyder U. A. Method of statistical simulation (Monte Carlo method). FisMathLit, 1961. 228 p. In Russian.
- [3] Aleksandrov V. M., Sysoev V. N., Shemeniova V. V. Stochastic optimization of systems // Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Technical cybernetics. 1968. no. 5. P. 42–51. In Russian.
- [4] Sobol I. M. Monte Carlo method. Nauka, 1968. 64 p. In Russian.
- [5] Polliak U. G. Probabilistic modelling on digital computers. Soviet radio, 1971. 400 p. In Russian.
- [6] Ermakov S. M. Monte Carlo method and related issues. Science, 1971. 328 p. In Russian.
- [7] Ivitsky V. A. On estimation of complex systems modeling accuracy with inaccurate input information under independent testing scheme // Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Technical cybernetics. 1974. no. 4. 31–40 p. In Russian.
- [8] Sharakhane A. S., Zheleznov I. G., Ivitsky V. A. Complex systems. Higher school, 1977. 247 p. In Russian.
- [9] Fishman G. S. Monte Carlo: concepts, algorithms, and applications. Springer, 1996. 698 p.
- [10] Quantum Monte Carlo simulations of solids / W. M. C. Foulkes [et al.] // Reviews of Modern Physics. 2001. Vol. 73, no. 1. P. 33–83.

А. Я. Корнилов¹, В. Н. Орлов²

ОБ ОДНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ТАНДЕМА ИЗ ДВУХ ПРОФИЛЕЙ ПОТОКОМ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

¹Московский государственный университет технологий и управления им. К. Г. Разумовского (ПКУ), Москва, Россия

²Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия

Аннотация. В работе рассмотрено безотрывное обтекание системы из двух проницаемых тонких профилей, установившимся потенциальным потоком идеальной невесомой несжимаемой жидкости. Получено конформное отображение физической области на канонический прямоугольник. Для решения рассматриваемой задачи использован аппарат эллиптических функций. Представлен вариант аналитического решения.

Ключевые слова: идеальная жидкость, тета-функции Якоби, конформно-отображающая функция, плоская задача гидродинамики, тандем тонких профилей, подъемная сила.

Корнилов Александр Яковлевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Московский государственный университет технологий и управления им. К. Г. Разумовского (ПКУ); e-mail: a.kornilov@mgutm.ru; AuthorID: 161334

Орлов Виктор Николаевич, доктор физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия; e-mail: orlovvn@mgsu.ru; <https://orcid.org/0000-0001-7606-5490>; AuthorID: 711175

для цитирования: Корнилов А. Я., Орлов В. Н. Об одном аналитическом решении задачи обтекания тандема из двух профилей потоком идеальной несжимаемой жидкости // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 1(59). С. 76–87. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.004 EDN: ENDIHA

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

A. Ya. Kornilov¹, V. N. Orlov²

ON ONE ANALYTICAL SOLUTION TO THE PROBLEM OF FLOW AROUND A TANDEM FROM TWO PROFILES BY A FLOW OF IDEAL INCOMPRESSIBLE FLUID

¹*Moscow State University of Technology and Management. K.G. Razumovsky (PKU),
Moscow, Russia*

²*National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

Abstract. The work considers the continuous flow around a system of two permeable thin profiles by a steady potential flow of an ideal weightless incompressible fluid. A conformal mapping of the physical domain onto a canonical rectangle is obtained. To solve the problem under consideration, the apparatus of elliptic functions is used. A variant of the analytical solution is presented

Keywords: ideal fluid, Jacobi theta functions, conformal mapping function, plane hydrodynamics problem, tandem of thin profiles, lifting force.

Alexander Ya. Kornilov, Candidate of Physics and Mathematics, Docent; **e-mail:** a.kornilov@mgutn.ru; AuthorID: 161334

Viktor N. Orlov, Doctor of Physical and Mathematics, Docent; **e-mail:** orlovvn@mgisu.ru; <https://orcid.org/0000-0001-7606-5490>; AuthorID: 711175

to cite this article: Kornilov A. Ya., Orlov V. N. On one analytical solution to the problem of flow around a tandem from two profiles by a flow of ideal incompressible fluid // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 1(59). p. 76–87. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.004 EDN: ENDIHA

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Аналитический вид конформного отображения внешности двух симметричных отрезков равной длины на прямоугольник через тета-функции Якоби получено в монографиях Л.И. Седова [1]. В этой же работе, в случае, когда отрезки равной длины расположены не симметрично, внешность этих отрезков конформно отображается на кольцо при помощи сигма-функции Вейерштрасса. В. Коппенфельса и Ф. Штальмана [2] внешности двух отрезков на прямоугольник также приведен с помощью специальных функций Вейерштрасса. В статье Петровой Т.Н. [3] численно получено конформное отображение внешности двух контуров на прямоугольник. В отличие от результатов статьи [3], в данной работе представлен аналитический вариант получения вышеуказанного отображения.

1. Конформное отображение плоскости с двумя исключенными параллельными отрезками на прямоугольник. Пусть в плоскости $z = x + iy$ заданы два исключенных отрезка AC и BD , длинами l_1 и l_2 соответственно, и расположенные параллельно друг другу (рис. 1). Не нарушая общности задачи, система координат вводится с началом в точке A , а координаты B точки обозначаются $(-L, H)$. Требуется найти конформное отображение данной области с дополнительно введенными разрезами $1E - 2E$ и $3E - 4E$ на прямоугольник со сторонами π и $\pi|\tau|/2$ такое, что его первая производная была бы двоякопериодическая функция с основными периодами π и $\pi\tau$ (рис. 2). Из нарушения углов при обходе точек A, C, B, D и E можно найти

$$\frac{dz}{d\zeta} = N \frac{\vartheta_1(\zeta - a)\vartheta_1(\zeta + a)\vartheta_4(\zeta - b)\vartheta_4(\zeta + b)}{\vartheta_1^2(\zeta - ic)\vartheta_1^2(\zeta + ic)}, \quad (1)$$

где N — некоторая действительная постоянная, так как на горизонтальных сторонах прямоугольника функция $dz/d\zeta$ принимает чисто действительные значения.

В силу произвола выбора вертикальных разрезов в плоскости z координаты образов точек C и D можно заранее задать в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$.

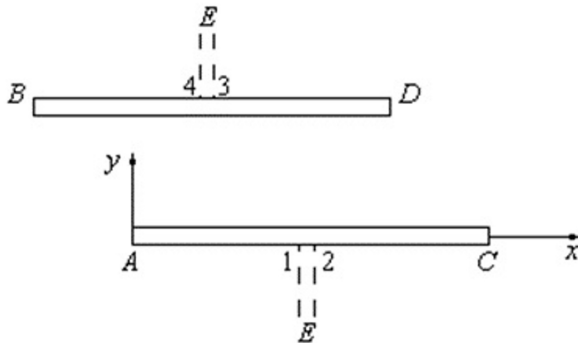


Рис. 1

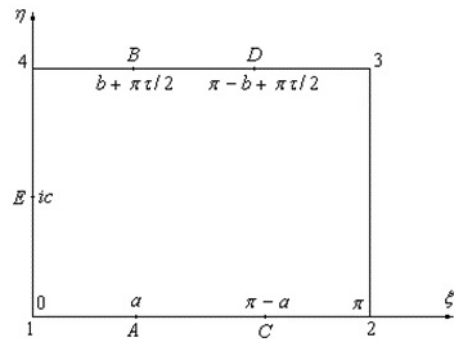


Рис. 2

Неизвестными параметрами конформного отображения являются N , a , b , c и $q = \exp(-\pi|\tau|)$, которые должны быть определены из геометрических характеристик границы области (рис. 1).

2. Производная конформно-отображающей функции. Для нахождения параметров конформного отображения, а также функцию $z = z(\zeta)$, конформно-отображающую плоскость с двумя исключенными отрезками на канонический прямоугольник, представление (1) малоэффективное. Получим иное выражение этой функции. Для этого в начале приведем выражения логарифмических производных от тета-функций Якоби [4]:

$$\frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}(\zeta) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \sin 2n\zeta}{1 - q^{2n}}, \quad (2)$$

$$\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(\zeta) = \operatorname{ctg} \zeta + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n} \sin 2n\zeta}{1 - q^{2n}}, \quad (3)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}(\zeta) = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n \cos 2n\zeta}{1 - q^{2n}}, \quad (4)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(\zeta) = -\frac{1}{\sin^2 \zeta} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{2n} \cos 2n\zeta}{1 - q^{2n}}, \quad (5)$$

где $\vartheta_i = \vartheta_i(\zeta)$ $i = 1, 2, 3, 4$ — тета-функции Якоби.

Учитывая, что функция $dz/d\zeta$ на горизонтальных сторонах прямоугольника принимает чисто действительные значения, свойства функций (3) и (4), а также теорему Вейерштрасса - Якоби [5], рациональную дробь (1) можно записать в следующем виде:

$$\frac{dz}{d\zeta}(\zeta) = A \left[\frac{d}{d\zeta} \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(\zeta - ic) + \frac{d}{d\zeta} \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(\zeta + ic) \right] + iB \left[\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(\zeta - ic) - \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(\zeta + ic) \right], \quad (6)$$

где A , B — произвольные действительные параметры.

Нетрудно проверить, что при прибавлении к аргументу ζ число $\pi\tau/2$ функция (6) принимает вид:

$$\frac{dz}{d\zeta}(\zeta + \frac{\pi\tau}{2}) = A \left[\frac{d}{d\zeta} \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}(\zeta - ic) + \frac{d}{d\zeta} \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}(\zeta + ic) \right] + iB \left[\frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}(\zeta - ic) - \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}(\zeta + ic) \right]. \quad (7)$$

Из (6) и (7) с учетом функций (2) - (5), получаем конформно-отображающую функцию:

$$z(\zeta) = A \left[\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(\zeta - ic) + \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(\zeta + ic) \right] + iB \ln \frac{\vartheta_1(\zeta - ic)}{\vartheta_1(\zeta + ic)} + C, \quad (8)$$

где

$$= -A \left[\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(a - ic) + \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(a + ic) \right] - iB \ln \frac{\vartheta_1(a - ic)}{\vartheta_1(a + ic)}. \quad (9)$$

Для аргумента $\zeta + \pi\tau/2$ имеем

$$z(\zeta + \frac{\pi\tau}{2}) = -2(cB + iA) + A \left[\frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}(\zeta - ic) + \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}(\zeta + ic) \right] + iB \ln \frac{\vartheta_4(\zeta - ic)}{\vartheta_4(\zeta + ic)} + C. \quad (10)$$

Функции (8) и (9) можно переписать в другом виде, удобном для реализации численных экспериментов:

$$\begin{aligned} z(\zeta) = & 2A \left[4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n} \operatorname{ch} 2nc \cdot \sin 2n\zeta}{1 - q^{2n}} + \frac{\sin 2\zeta}{\operatorname{ch} 2c - \cos 2\zeta} \right] + \\ & + 2B \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n} \operatorname{sh} 2nc \cdot \sin 2n\zeta}{n(1 - q^{2n})} - \operatorname{arctg}(cthc \cdot \operatorname{tg} \zeta) \right] + C, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} z(\zeta + \frac{\pi\tau}{2}) = & -2(cB + iA) + 8A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \operatorname{ch} 2nc \cdot \sin 2n\zeta}{1 - q^{2n}} + \\ & + 4B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \operatorname{sh} 2nc \cdot \sin 2n\zeta}{n(1 - q^{2n})} + C, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} C = & -2A \left[4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n} \operatorname{ch} 2nc \cdot \sin 2na}{1 - q^{2n}} + \frac{\sin 2a}{\operatorname{ch} 2c - \cos 2a} \right] - \\ & - 2B \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n} \operatorname{sh} 2nc \cdot \sin 2na}{n(1 - q^{2n})} - \operatorname{arctg}(cthc \cdot \operatorname{tg} a) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

При этом функции (6) и (7) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\zeta}(\zeta) = & 4A \left[4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{2n} \operatorname{ch} 2nc \cdot \cos 2n\zeta}{1 - q^{2n}} + \frac{\operatorname{ch} 2c \cdot \cos 2\zeta - 1}{(\operatorname{ch} 2c - \cos 2\zeta)^2} \right] + \\ & + 2B \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n} \operatorname{sh} 2nc \cdot \cos 2n\zeta}{1 - q^{2n}} - \frac{\operatorname{sh} 2c}{\operatorname{ch} 2c - \cos 2\zeta} \right], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{dz}{d\zeta}(\zeta + \frac{\pi\tau}{2}) = 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n \operatorname{ch} 2nc \cdot \cos 2n\zeta}{1 - q^{2n}} + 8B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \operatorname{sh} 2nc \cdot \cos 2n\zeta}{1 - q^{2n}}. \quad (15)$$

3. Определение параметров конформного отображения. Поскольку функция (1) в точках $\zeta = a$, $\zeta = \pi - a$, $\zeta = b + \pi\tau/2$ и $\zeta = \pi - b + \pi\tau/2$ обращается в нуль, то функции (14) и (15) в этих же точках должна принимать нулевое значение, т. е.

$$\begin{aligned} & 2A \left[4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n \operatorname{ch} 2nc \cdot \cos 2na}{1 - q^{2n}} + \frac{\operatorname{ch} 2c \cdot \cos 2a - 1}{(\operatorname{ch} 2c - \cos 2a)^2} \right] + \\ & + B \left[4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n} \operatorname{sh} 2nc \cdot \cos 2na}{1 - q^{2n}} - \frac{\operatorname{sh} 2c}{\operatorname{ch} 2c - \cos 2a} \right] = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$2A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n \operatorname{ch} 2nc \cdot \cos 2nb}{1 - q^{2n}} + B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n} \operatorname{sh} 2nc \cdot \cos 2nb}{1 - q^{2n}} = 0. \quad (17)$$

Запишем условия задания длин исключенных отрезков

$$\zeta(\pi - a) - z(a) = l_1 \quad \zeta(\pi - b + \frac{\pi\tau}{2}) - z(b + \frac{\pi\tau}{2}) = l_2,$$

которые с учетом (11) - (13) примут вид:

$$l_1 = -4A \left[4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n} \operatorname{ch} 2nc \cdot \sin 2na}{1 - q^{2n}} + \frac{\sin 2a}{\operatorname{ch} 2c - \cos 2a} \right] - \\ - 8B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n} \operatorname{sh} 2nc \cdot \sin 2na}{n(1 - q^{2n})}, \quad (18)$$

$$l_2 = -16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \operatorname{ch} 2nc \cdot \sin 2nb}{1 - q^{2n}} - 8B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \operatorname{sh} 2nc \cdot \sin 2nb}{n(1 - q^{2n})}. \quad (19)$$

Из условия задания расстояния между отрезками с учетом (12), находим

$$A = -\frac{H}{2}, \quad (20)$$

а из смещения передней кромки (точка B) на расстояние $-L$ от точки A по горизонтали получаем:

$$L = 2cB - 8A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \operatorname{ch} 2nc \cdot \sin 2nb}{1 - q^{2n}} - 4B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \operatorname{sh} 2nc \cdot \sin 2nb}{n(1 - q^{2n})} - C. \quad (21)$$

$$B = H \cdot \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n \operatorname{ch} 2nc \cdot \cos 2nb}{1 - q^{2n}}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \operatorname{sh} 2nc \cdot \cos 2nb}{1 - q^{2n}}}. \quad (22)$$

Таким образом, уравнения (16), (18), (19) и (21) служат для определения четырех параметров конформного отображения: a , b , C и q .

4. Постановка задачи и аналитическое решение. Пусть тандем из двух тонких профилей разной длины максимальной хорды l_1 и l_2 обтекается потенциальным установившимся потоком идеальной несжимаемой жидкости. Согласно линейной теории [1] в силу малости кривизны α контуров тонких профилей за исключением передних кромок (точки A и B) краевые условия в физической области течения $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$ можно сносить на границы исключенных отрезков в плоскости $z = x + iy$ (рис. 3).

Считаются известными: координаты передней кромки верхнего профиля относительно передней кромки нижнего профиля, т. е. $x_B = -L$, $y_B = H$; границы проницаемых участков $M_i N_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) т. е. $x_{M_i} y_{N_i}$ ($i = 1, 2, 3, 4$); коэффициенты проницаемости k_i для участков $M_i N_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$); скорость набегающего невозмущенного потока на бесконечности V_{∞} ; плотность жидкости ρ ; внутри

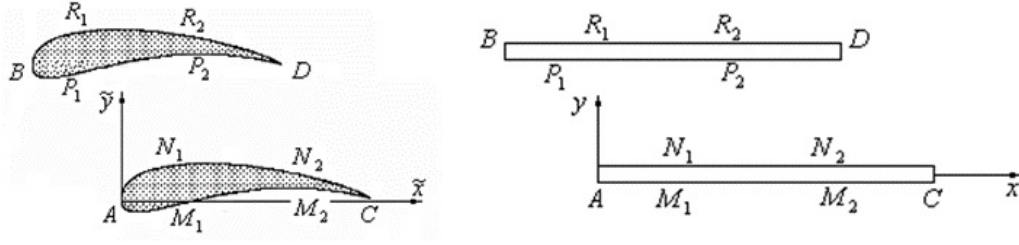


Рис. 3. Физическая область течения

тонких профилей поддерживаются постоянные давления p_1 и p_2 с коэффициентами давления $C_{p1} = \frac{p_\infty - p_1}{\alpha \rho V_\infty^2}$ для первого и $C_{p2} = \frac{p_\infty - p_2}{\alpha \rho V_\infty^2}$ для второго профилей. Предполагается, что суммарный расход жидкости на нижнем и верхнем контурах каждого профиля равен нулю.

Требуется аналитически получить формулу для вычисления подъёмной силы. Определим краевые условия задачи.

Уравнения границ контуров имеют вид:

$$y = \alpha f_1(x) = \begin{cases} \alpha f_{11}(x) & \text{на нижнем контуре AC;} \\ \alpha f_{12}(x) & \text{на верхнем контуре AC;} \end{cases} \quad (23)$$

$$y = \alpha f_2(x) = \begin{cases} \alpha f_{21}(x) & \text{на нижнем контуре BD;} \\ \alpha f_{22}(x) & \text{на верхнем контуре BD;} \end{cases} \quad (24)$$

где α — некоторый малый параметр.

Введем в рассмотрение комплексно-сопряженную скорость возмущенного потока [1]:

$$\omega(\zeta) = \frac{dW}{d\zeta} - V_\infty = U - iV, \quad (25)$$

где $W = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал набегающего потока, а $dW/d\zeta = V_x - iV_y$ — комплексно-сопряженная скорость этого потока.

Согласно работе [6] запишем краевые условия для функции (25):

- на непроницаемых участках тонкого профиля AC

$$V = V_\infty \alpha f'_{1x}(x); \quad (26)$$

- на проницаемых участках профиля AC

$$V + k_i U = V_\infty \alpha [f'_{1x}(x) + k_i C_{p1}], (i = 1, 2); \quad (27)$$

- на непроницаемых участках тонкого профиля BD

$$V = V_\infty \alpha f'_{2x}(x); \quad (28)$$

- на проницаемых участках профиля BD

$$V + k_i U = V_\infty \alpha [f'_{2x}(x) + k_j C_{p2}], (i = 3, 4); \quad (29)$$

Согласно линейной теории [1] функция (25) в передних кромках профилей имеет следующие особенности:

$$\omega(z) \sim z^{-1/2}, \quad \text{и} \quad \omega(z + L - iH) \sim (z + L - iH)^{-1/2}. \quad (30)$$

В дальнейшем решение краевой задачи (26) - (30) будет строится в классе функций (25) ограниченной на обоих концах пронизаемых участков. При этом предполагается, что в потоке дополнительные гидродинамические особенности отсутствуют.

5. Краевые условия на каноническом прямоугольнике. Решение задачи строится в параметрическом виде на каноническом прямоугольнике со сторонами π и $\pi|\tau|/2$ в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$. Для этого линеаризованная физическая область течения (рис. 3) при помощи функции (1) конформно отображается на данный прямоугольник. Соответствие точек границ области приведено на рис. 4.

Преобразуем краевые условия (26) - (29):

Граница Γ_1 :

$$V(\xi) = V_\infty \alpha f'_{1x}(\xi), \quad (31)$$

при $\eta = 0$ и $\xi \in (m_1, n_1) \cup (n_2, m_2)$;

Граница Γ_2 :

$$V(\xi) + k_1 U(\xi) = V_\infty \alpha [f'_{1x}(\xi) + k_1 C_{p1}], \quad (32)$$

при $\eta = 0$ и $\xi \in (0, m_1) \cup (m_2, \pi)$;

Граница Γ_3 :

$$V(\xi) + k_2 U(\xi) = V_\infty \alpha [f'_{1x}(\xi) + k_2 C_{p1}], \quad (33)$$

при $\eta = 0$ и $\xi \in (n_1, n_2)$;

Граница Γ_4 :

$$V(\xi) = V_\infty \alpha f'_{2x}(\xi), \quad (34)$$

при $\eta = \pi|\tau|/2$ и $\xi \in (r_1, p_1) \cup (p_2, r_2)$;

Граница Γ_5 :

$$V(\xi) + k_3 U(\xi) = V_\infty \alpha [f'_{2x}(\xi) + k_3 C_{p2}], \quad (35)$$

при $\eta = \pi|\tau|/2$ и $\xi \in (p_1, p_2)$;

Граница Γ_6 :

$$V(\xi) + k_4 U(\xi) = V_\infty \alpha [f'_{2x}(\xi) + k_4 C_{p1}], \quad (36)$$

при $\eta = \pi|\tau|/2$ и $\xi \in (0, r_1) \cup (r_2, \pi)$.

Условие (30) поведения функции $\omega(\zeta) = \omega[z(\zeta)]$ в передних кромках профилей на каноническом прямоугольнике означает, что решение краевой задачи (31) - (36) Гильберта должно иметь простые полюсы в точках $\zeta = a$ и $\zeta = b +$

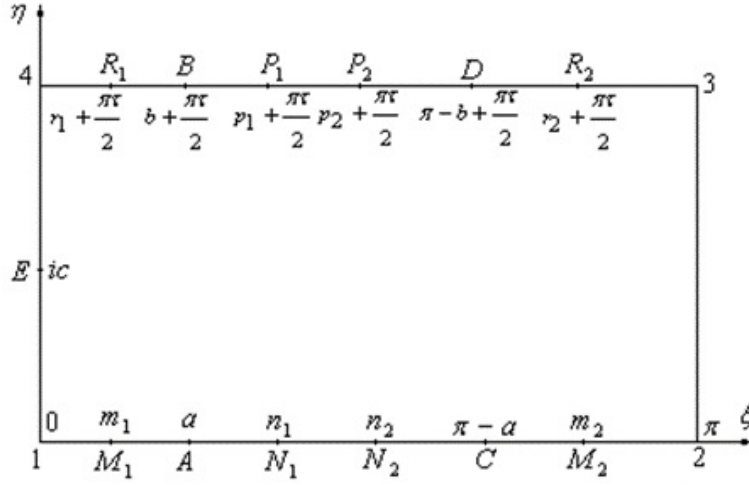


Рис. 4

$\pi|\tau|/2$. Условие задания скорости набегающего потока на бесконечности можно в соответствии с формулой (25) записать в виде

$$\omega(ic) = 0. \quad (37)$$

Секундный расход жидкости на проницаемом участке вычисляется согласно формуле

$$Q = \rho \int_L V_n ds, \quad (38)$$

где L — некоторый замкнутый участок. Так как нормальная составляющая скорости

$$V_n = -V_\infty \alpha f'(x) + V,$$

то (38) с точностью до величин второго порядка малости примет вид

$$Q = -\rho V_\infty \alpha \int_L f'(x) dx + \rho \int_L V dx,$$

или

$$Q = -\rho V_\infty \alpha [f(x_{\text{п}}) - f(x_{\text{л}})] + \rho \int_L V dx, \quad (39)$$

где $x_{\text{п}}$ и $x_{\text{л}}$ — абсциссы правой и левой границ проницаемого участка.

Поскольку с точностью до величин второго порядка малости справедливо преобразование

$$V dx = V \frac{dx}{d\xi} d\xi = V \frac{dz}{d\xi} d\xi = -Im \left[\omega(\zeta) \frac{dz}{d\zeta} \right] d\xi,$$

то (39) перепишем в виде

$$Q = -\rho V_{\infty} \alpha [f(x_{\text{п}}) - f(x_{\text{л}})] - \rho \int_{\zeta_{\text{н}}}^{\zeta_{\text{в}}} \operatorname{Im} \left[\omega(\zeta) \frac{dz}{d\zeta} \right] d\zeta,$$

и если граница проницаемого участка при конформном отображении переходит на горизонтальный отрезок ($d\xi = d\zeta$), то

$$Q = -\rho V_{\infty} \alpha [f(x_{\text{п}}) - f(x_{\text{л}})] - \rho \operatorname{Im} \int_{\zeta_{\text{н}}}^{\zeta_{\text{в}}} \omega(\zeta) \frac{dz}{d\zeta} d\zeta. \quad (40)$$

Таким образом, функция $\omega(\zeta)$ должна удовлетворять следующим условиям: Q_{AC} и Q_{BD} , или с учетом (40) имеем два уравнения

$$V_{\infty} \alpha [f(m_2) - f(m_1) + f(n_2) - f(n_1)] + \operatorname{Im} \int_{\Gamma_2} \omega(\zeta) \frac{dz}{d\zeta} d\zeta + \operatorname{Im} \int_{\Gamma_3} \omega(\zeta) \frac{dz}{d\zeta} d\zeta = 0; \quad (41)$$

$$V_{\infty} \alpha [f(p_2) - f(p_1) + f(r_2) - f(r_1)] + \operatorname{Im} \int_{\Gamma_5} \omega(\zeta) \frac{dz}{d\zeta} d\zeta + \operatorname{Im} \int_{\Gamma_6} \omega(\zeta) \frac{dz}{d\zeta} d\zeta = 0. \quad (42)$$

6. Общее решение задачи. Согласно работе [7] решение краевой задачи (31) - (36) Гильберта для прямоугольника представим в виде

$$\omega(\zeta) = G(\zeta) \chi(\zeta), \quad (43)$$

где $G(\zeta)$ — фундаментальное решение

$$G(\zeta) = \left[\frac{\vartheta_1(m_1 - \zeta)}{\vartheta_1(\zeta - m_2)} \right]^{\gamma_1} \left[\frac{\vartheta_1(\zeta - n_2)}{\vartheta_1(\zeta - n_1)} \right]^{\gamma_2} \left[\frac{\vartheta_4(\zeta - p_2)}{\vartheta_4(\zeta - p_1)} \right]^{\gamma_3} \left[\frac{\vartheta_4(r_1 - \zeta)}{\vartheta_4(\zeta - r_2)} \right]^{\gamma_3} \times \\ \times \frac{\vartheta_1(\zeta - f_1) \vartheta_1(\zeta - f_2) \vartheta_4(\zeta - f_3) \vartheta_4(\zeta - f_4)}{\vartheta_1(\zeta - e_1) \vartheta_1(\zeta - e_2) \vartheta_4(\zeta - e_3) \vartheta_4(\zeta - e_3)}, \quad \gamma_j = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} k_j; \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

При этом должно выполняться условие разрешимости краевой задачи:

$$\gamma_1(m_2 - m_1) + \gamma_2(n_2 - n_1) + \gamma_3(p_2 - p_1) + \gamma_4(r_2 - r_1) + \sum_{n=1}^4 (f_i - e_i) = 0.$$

7. Вычисление подъемной силы. Главный вектор давления потока на каждый тонкий профиль можно вычислить по формуле Жуковского – Чаплыгина [8] и затем найти главный вектор всего тандема тонких профилей. Однако, промежуточные вычисления можно избежать, если вычислить главный вектор давления потока на систему «тандем профилей». Для этого тандем профилей охватываем некоторой замкнутой кривой тогда

$$\vec{R} = X + iY = \oint_{p\vec{n}ds}. (44)$$

В соответствии с уравнением Бернулли [8]

$$p = p_{\infty} - \frac{1}{2}\rho V^2 + \frac{1}{2}\rho V_{\infty}^2$$

и линейной теории формулу (44) можно преобразовать к виду

$$Y = -\rho V_{\infty} Re \oint_{\omega(\zeta) \frac{dz}{d\zeta} d\zeta}. (45)$$

По теореме Коши [9] (45) можно свести к вычислению вычета от подынтегральной функции в точке $\zeta = ic$ т. е.

$$Y = 2\pi\rho V_{\infty} Im\left\{\omega \frac{dz}{d\zeta}(\zeta)\right\}. (46)$$

Так как $\omega(ic) = 0$, то подъемная сила (46) преобразуется к виду

$$Y = \pi H\rho V_{\infty} Im \frac{d\omega}{d\zeta}(ic). (47)$$

8. Заключение. Предложен явный вид функции конформно-отображающей плоскость с двумя исключенными параллельными отрезками, с проницаемыми участками на контурах, на канонический прямоугольник. Найдена производная конформно-отображающей функции. Решена гидродинамическая задача обтекание тандема из двух тонких профилей, с проницаемыми участками на контурах, потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Найдено математическое решение поставленной задачи. Аналитически получена формула для вычисления главного вектора давления потока на систему «тандем профилей». На основе аналитического решения могут быть найдены оптимальные расположения проницаемых участков на тонких профилях.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The authors declare that they have no competing interests.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М. : Наука, 1966. С. 448.
- [2] Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. М. : ИЛ, 1963. С. 406.
- [3] Петрова Т. Н. Численное конформное отображение внешности двух контуров на прямоугольник // Труды Всерос. научн. шк. «Гидродинамика больших скоростей». Чебоксары : Изд-во Чуваш. ун-та, 1996. С. 130–132.
- [4] Уиттекер Э., Ватсон Д. Н. Курс современного анализа. М. : ГИФМЛ, 1963. Т. 2. С. 516.
- [5] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М. : Наука, 1977. С. 408.
- [6] Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л. : Физматгиз, 1962. С. 708.
- [7] Васильев В. Н. Обтекание безграничным потоком тонкого профиля с проницаемым участком на верхнем контуре // Известия НАНИ ЧР. 1996. № 6. С. 15–27.
- [8] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М. : Наука, 1971. С. 847.
- [9] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. Москва : Наука, 1977. С. 408.

REFERENCES

- [1] Sedov L. I. Plane problems of hydrodynamics and aerodynamics. M. : Science, 1966. P. 448.
- [2] Koppenfels V., Stahlman F. Practice conformal mappings. M. : IL, 1963. P. 406.
- [3] Petrova T.N. Numerical conformal mapping of the appearance of two contours onto a rectangle // Proceedings of Vseros. scientific school "Hydrodynamics of high speeds". Cheboksary : Publishing house Chuvash. university, 1996. P. 130–132.
- [4] Whittaker E., Watson D.N. Course of modern analysis. M. : GIFML, 1963. Vol. 2. P. 516.
- [5] Lavrentyev M. A., Shabat B. V. Problems of hydrodynamics and their mathematical models. M. : Science, 1977. P. 408.
- [6] Kantorovich L. V., Krylov V. I. Approximate methods of higher analysis. M.-L. : Fizmatgiz, 1962. P. 708.
- [7] Vasiliev V.N. Unlimited flow around a thin profile with a permeable section on the upper contour // Izvestia NANI CR. 1996. no. 6. P. 15–27.
- [8] Loitsyansky L. G. Fluid and Gas Mechanics. M. : Science, 1971. P. 847.
- [9] Lavrentiev M.A., Shabbat B.V. Problems of hydrodynamics and their mathematical models. Moscow : Science, 1977. P. 408.

Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко, Е. О. Попова

О ТЕПЛОТВОРНОЙ СПОСОБНОСТИ НЕОБРАТИМОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛА ПРОБКИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

*Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения
РАН, Владивосток, Россия*

Аннотация. В статье представлено решение связанной краевой задачи теории больших деформаций о деформировании пробки конечной длины в круглой трубе под действием изменяющегося перепада давления. Предполагается, что пробка имеет цилиндрическую форму, а ее материал является несжимаемым и обладает упругими, вязкими и пластическими свойствами. Возрастающий со временем перепад давления задается на граничных поперечных поверхностях пробки. На боковой поверхности пробки задано условие прилипания. Изменение температуры материала происходит за счет его необратимого деформирования. Необратимые деформации накапливаются в материале пробки с начала процесса деформирования и могут быть как деформациями ползучести, так и пластическими деформациями. Предполагается, что параметры ползучести, предел текучести и коэффициент динамической вязкости материала зависят от температуры. При возрастающем перепаде давления рассмотрена ползучесть материала, а также возникновение и развитие вязкопластического течения. Рассчитаны температура и параметры напряженно-деформированного состояния, установлена закономерность продвижения упругопластической границы по деформируемому материалу.

Ключевые слова: термоупругость, вязкоупругость, ползучесть, вязкопластическое течение, большие деформации, деформационное теплопроизводство, теплопроводность, связанное термомодеформирование.

Ковтанюк Лариса Валентиновна, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заведующий лабораторией механики необратимого деформирования; e-mail: lk@iacp.dvo.ru; <https://orcid.org/0000-0002-2349-4803>; AuthorID: 7247

Панченко Галина Леонидовна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики необратимого деформирования; e-mail: ranchenko@iacp.dvo.ru; <https://orcid.org/0000-0002-6921-2971>; AuthorID: 727612

Попова Елена Олеговна, аспирант лаборатории механики необратимого деформирования; e-mail: polenao@bk.ru

для цитирования: Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л., Попова Е. О. О теплотворной способности необратимого деформирования материала пробки в круглой трубе // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 1(59). С. 88–100. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.007 EDN: JANYEG

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

L. V. Kovtanyuk, G. L. Panchenko, E. O. Popova

ON THE CALORIC CAPACITY OF IRREVERSIBLE DEFORMATION OF THE PLUG MATERIAL IN A ROUND PIPE

Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia

Abstract. The paper presents a solution to a coupled boundary value problem of the theory of large deformations on the deformation of a plug of finite length in a circular pipe under the influence of a changing pressure difference. It is assumed that the plug has a cylindrical shape, and its material is incompressible and has elastic, viscous and plastic properties. The pressure drop, which increases over time, is set on the boundary transverse surfaces of the plug. The adhesion condition is specified on the side surface of the plug. The temperature of the material changes due to its irreversible deformation. Irreversible deformations accumulate in the plug material from the beginning of the deformation process and can be either creep deformations or plastic deformations. It is assumed that the creep parameters, yield strength and dynamic viscosity coefficient of the material depend on temperature. With an increasing pressure drop, the creep of the material, as well as the emergence and development of viscoplastic flow, are considered. The temperature and parameters of the stress-strain state are calculated, and the pattern of movement of the elastoplastic boundary along the deformable material is established.

Keywords: thermoelasticity, viscoelasticity, creep, viscoplastic flow, large deformations, strain-induced heat production, thermal conductivity, coupled thermal deformation.

Larisa V. Kovtanyuk, Dr. Sci. Phys.&Math., Corresponding member of the Russian Academy of Sciences, Head of the Laboratory; e-mail: lk@iacp.dvo.ru; <https://orcid.org/0000-0002-2349-4803>; AuthorID: 7247

Galina L. Panchenko, Candidate of Phys. & Math., Senior Researcher; e-mail: panchenko@iacp.dvo.ru; <https://orcid.org/0000-0002-6921-2971>; AuthorID: 727612

Elena O. Popova, Scientific Researcher; e-mail: polenao@bk.ru

to cite this article: Kovtanyuk L. V., Panchenko G. L., Popova E. O. On the caloric capacity of irreversible deformation of the plug material in a round pipe // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 1(59). p. 88–100. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.007 EDN: JANYEG

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Любой процесс деформирования твердого тела протекает с изменением его температуры. При решении краевых задач изменением температуры часто пренебрегают, так как его учет значительно усложняет модельные соотношения. Нужно учитывать взаимосвязанность процессов деформирования и теплопередачи, а также зависимость постоянных материала, например, таких как предел текучести, вязкость, от температуры. Здесь рассмотрим неизотермическое деформирование упруговязкопластической пробки конечной длины в круглой трубе с жесткими стенками под действием переменного перепада давления. На боковой поверхности пробки задано условие жесткого сцепления. Необратимое деформирование материала связано с его ползучестью и последующим вязкопластическим течением. Вместе с необратимым процессом деформирования рассмотрим еще и необратимый процесс теплопроводности, полагая, что тепло создается внутри только за счет необратимого деформирования, то есть приток тепла в среду через ее границу отсутствует.

1. Основные модельные соотношения. Воспользуемся теорией больших упругопластических деформаций [1], в которой тензоры обратимых $\mathbf{m}$ и необратимых $\mathbf{p}$ деформаций задаются дифференциальными уравнениями изменения (переноса) в форме

$$\frac{D\mathbf{m}}{Dt} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} - \frac{1}{2}((\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{z})), \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{p}}{Dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}, \quad (2)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{e} + \alpha T_0 \theta \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{z}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m}), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v}),$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}), \quad \theta = (T - T_0) T_0^{-1}.$$

Здесь $\mathbf{v}$ — вектор скорости; T, T_0 — текущая температура и температура недеформированного состояния (комнатная температура); $\mathbf{e}$ — тензор, задающий упругие деформации; $\mathbf{I}$ — единичный тензор, составленный из символов Кронекера; $\mathbf{z}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m})$ — нелинейная часть тензора вращений $\boldsymbol{\varphi}$ ($\boldsymbol{\varphi} = -\boldsymbol{\varphi}^T$), из-за ее громоздкости здесь она не выписана, в общем виде она приведена в [1]; $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma}$ — источники необратимых и обратимых деформаций в уравнениях изменения, являющиеся скоростями их накопления, α — коэффициент линейного расширения. Зависимость (2) определяет объективную производную по времени, задающую взаимодействие между обратимыми и необратимыми деформациями в процессе деформирования, что обеспечивает геометрическую корректность кинематики среды.

Из зависимостей (1) и (2) следует соотношение для тензора полных деформаций Альманси $\mathbf{d}$

$$\mathbf{d} = \mathbf{m} + \mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{m}. \quad (3)$$

Отсюда следует, что тензор $\mathbf{m}$ является линейной частью тензора обратимых деформаций $\mathbf{c} = \mathbf{m} - 0.5\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}$. Из закона сохранения энергии следуют [1] равенства

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}), \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J} - T^{-2} \mathbf{q} \cdot \nabla T + T^{-1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\gamma}. \quad (5)$$

Здесь $\Psi = \Psi(\mathbf{m}, \theta)$ — плотность распределения внутренней энергии; $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений; s — плотность энтропии; $\mathbf{q}$ — поток тепла; $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} s + \mathbf{q}$ — поток энтропии; ρ — плотность среды; для упрощения математической модели принимается гипотеза о независимости термодинамического потенциала $\Psi(\mathbf{m}, \theta)$ от необратимых деформаций $\mathbf{p}$.

Считаем, что деформируемый материал механически несжимаем и изменение его объема может происходить только за счет теплового расширения (сжатия). Тогда из (4) следует соотношение для тензора напряжений

$$\boldsymbol{\sigma} = -P_1 \mathbf{I} + (1 + 3\alpha T_0 \theta)^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{m}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}). \quad (6)$$

В зависимости (6) P — неизвестная функция добавочного гидростатического давления; $W = \rho_0 \Psi(\mathbf{m}, \theta)$ — упругий потенциал; ρ_0 — плотность материала в его свободном состоянии. Далее предположим, что деформируемый материал является изотропным. Это позволяет разложить упругий потенциал в ряд Тейлора относительно свободного состояния [2]

$$\begin{aligned} W = W(J_1, J_2, \theta) = & -2\mu J_1 - \mu J_2 + b J_1^2 + (b - \mu) J_1 J_2 - \chi J_1^3 + \nu_1 J_1 \theta + \nu_2 \theta^2 - \\ & - \nu_3 J_1 \theta^2 - \nu_4 J_1^2 \theta - \nu_5 J_2 \theta - \nu_6 \theta^3 + \dots, \\ J_1 = \operatorname{tr} \mathbf{c}, \quad J_2 = \mathbf{c} \cdot \cdot \mathbf{c}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь μ — модуль сдвига, b , χ , ν_m ($m = 1, 2, \dots, 6$) — иные термомеханические постоянные. Если принять закон теплопроводности в простейшей форме Фурье, то из (5) и (7) следует уравнение теплопроводности

$$\begin{aligned} (1 + \beta_1 \theta + \beta_2 \operatorname{tr} \mathbf{c}) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta_3 (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma}) \cdot \cdot \mathbf{c} = & g \Delta \theta - \frac{1}{2\nu_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\gamma}, \\ \beta_1 = \frac{\nu_2 (1 - 3\alpha T_0) - 3\nu_6}{\nu_2}, \quad \beta_2 = -\frac{\nu_3}{\nu_2}, \quad \beta_3 = -\frac{\nu_1 + \nu_5}{\nu_2}, \end{aligned} \quad (8)$$

в котором g — коэффициент температуропроводности.

Диссипативный механизм деформирования связан с реологическими и пластическими свойствами материала. Считаем, что необратимые деформации накапливаются в материале с начала процесса деформирования в результате процесса ползучести.

В областях, где напряженное состояние еще не достигло поверхности текучести, или, где пластическое течение было, но прекратилось, соответствующий диссипативный механизм деформирования зададим в форме степенного закона

ползучести Нортона [3]. В этом законе тензор скоростей необратимых деформаций γ полагается равным тензору скоростей деформаций ползучести ϵ^v

$$V(\sigma) = B\Sigma^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \Sigma = \max|\sigma_i - \sigma_j|, \quad \gamma = \epsilon^v = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \sigma}. \quad (9)$$

В (9) $V(\sigma)$ — термодинамический потенциал; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные значения тензора напряжений; B, n — параметры ползучести материала.

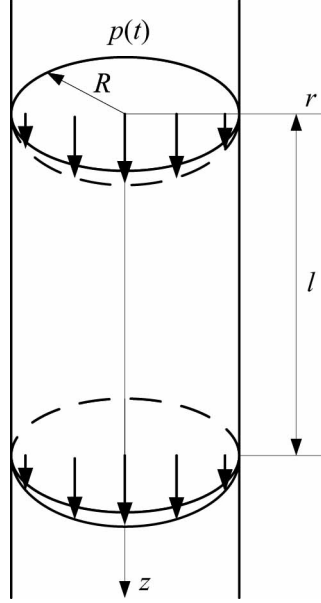


Рис. 1. Геометрия задачи

При дальнейшем увеличении нагружающих усилий в некоторый момент времени напряженное состояние достигает поверхности текучести, что приводит к смене диссипативного механизма деформирования. Таким образом, в материале начинается пластическое течение. Поэтому в увеличивающейся области пластического течения полагаем, что $\gamma = \epsilon^p$, где ϵ^p — тензор скоростей пластических деформаций. Не разделяя необратимые деформации на составляющие, будем считать, что накопленные к моменту начала пластического течения необратимые деформации ползучести (9) являются начальными значениями для накапливающихся далее в области течения пластических деформаций. В случае учета вязких свойств среды при пластическом течении также требуется совпадение скоростей необратимых деформаций при изменении механизма деформирования с вязкого на пластический.

Из принципа максимума Мизеса следует ассоциированный закон пластического течения [4, 5]

$$\alpha = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma}, \quad F(\sigma, \alpha) = k, \quad \lambda > 0, \quad \alpha = \epsilon^p - \epsilon^{v_0}, \quad (10)$$

связывающий тензор скоростей пластических деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ с тензором напряжений. В (10) $\boldsymbol{\varepsilon}^{v_0}$ — тензор скоростей деформаций ползучести в момент начала пластического течения, k предел текучести.

В качестве пластического потенциала примем [4] обобщенное условие пластического течения Треска – Сен-Венана

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^p) = k, \quad F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \frac{1}{2} \max |\sigma_i - \sigma_j| - \eta \max |\varepsilon_k^p|. \quad (11)$$

Здесь ε_k^p — главные значения тензора скоростей пластических деформаций; η — коэффициент вязкого сопротивления пластическому течению.

При температурном воздействии на материал от нее зависят и параметры материала. Для параметров ползучести и принимаем зависимости в форме [6]

$$B = \frac{c_1}{\sigma_0^{n-1}} \exp \left(-\frac{Q}{R_u T_0 (1 + \theta)} \right), \quad n = b_1 + \frac{b_2}{T_0 (1 + \theta)}. \quad (12)$$

В (12) c_1 , σ_0 , b_1 и b_2 — постоянные материала, Q — энергия активации, R_u — универсальная газовая постоянная. Для предела текучести и коэффициента вязкости пластического течения будем использовать соотношения [7]

$$k = k_0 \left(1 - \frac{\theta}{\theta_m} \right)^2, \quad \eta = \eta_0 \exp(-v T_0 \theta), \quad \theta_m = \frac{T_m - T_0}{T_0}. \quad (13)$$

В (13) T_m — температура плавления деформируемого материала, k_0 , η_0 — предел текучести и вязкость материала при комнатной температуре, v — экспоненциальная скорость.

2. Постановка задачи и деформирование до вязкопластического течения. Рассмотрим постановку краевой задачи в рамках модели, описанной в параграфе 1. Пусть есть недеформируемая цилиндрическая труба радиуса R , в которой расположен слой материала конечной длины l (рис. 1). Этот слой имеет такой же радиус, как и труба и образует плотную пробку. Материал пробки является несжимаемым и обладает упругими, вязкими и пластическими свойствами. При этом вязкие свойства материал проявляет сначала в форме ползучести, затем при достижении напряженным состоянием поверхности нагружения в форме вязкого сопротивления пластическому течению.

Решение этой краевой задачи в цилиндрической системе координат r , φ , z ищется в классе функций $\theta = \theta(r, t)$, $u = u_z(r, t)$, $v = v_z(r, t)$, где u и v — отличные от нуля компоненты векторов перемещений и скорости.

Механическое нагружение представляет собой перепад давления $p(t)$ на граничных поверхностях пробки $z = u(r, t)$ и $z = l + u(r, t)$. Пусть граничные условия для $\sigma_{zz}(r, z, t)$ имеют вид

$$\sigma_{zz}(0, u(0, t), t) = -p(t), \quad \sigma_{zz}(0, l + u(0, t), t) = 0, \quad (14)$$

где $r = 0$ — координата максимального перемещения граничных точек пробки.

Согласно второму условию (14), сопротивление продавливанию на свободном конце пробки при $r = 0$ предполагается отсутствующим. Но его можно задавать

постоянной величиной, отличной от нуля. Это не влияет на способ решения задачи.

На боковой поверхности пробки зададим условия прилипания

$$u|_{r=R} = v|_{r=R} = 0. \quad (15)$$

Первоначально, пока пластическое течение отсутствует, необратимые деформации накапливаются в материале в результате медленного процесса ползучести. Необратимое деформирование материала вызывает его разогрев. Поэтому примем для температуры следующие условия

$$\theta(r, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} \right|_{r=R} = 0. \quad (16)$$

При выбранной кинематике движения отличными от нуля компонентами тензора деформаций Альманси будут d_{rr} и d_{rz} . Из формулы (3) получаем для них следующие соотношения

$$d_{rr} = -\frac{1}{2}u'^2, \quad d_{rz} = \frac{1}{2}u', \quad u' = \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (17)$$

Напряжения определяются обратимыми деформациями и согласно соотношениям (6) и (7) имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi} &= -(P_1 + 2\mu) + 2(b - (\nu_4 + 3b\beta)\theta)(m_{rr} + m_{zz}) - 2(\mu - (\nu_4 + 3b\beta)\theta)m_{rz}^2 + \\ &+ (\nu_1 + 6\mu\beta)\theta - (\nu_3 + 3\nu_1\beta + 18\mu\beta^2)\theta^2 = -p_1, \quad \sigma_{rz} = 2(\mu - l_1\theta)m_{rz}, \\ \sigma_{rr} &= -p_1 + 2(\mu - l_1\theta)m_{rr} + (3\mu + l_1\theta)m_{rz}^2, \quad l_1 = \nu_1 + \nu_5 + 3\mu\beta, \\ \sigma_{zz} &= -p_1 + 2(\mu - l_1\theta)m_{zz} + (3\mu + l_1\theta)m_{rz}^2, \quad \beta = \alpha T_0. \end{aligned} \quad (18)$$

Зависимости (18) для компонент тензора напряжений выписаны с точностью до слагаемых первого порядка малости по компонентам обратимых деформаций m_{rr} и m_{zz} и второго — по компоненте m_{rz} .

В рамках квазистатического приближения выпишем уравнения равновесия в рассматриваемом случае

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0. \quad (19)$$

Из решения второго уравнения (19) следует, во-первых, что p_1 является линейной функцией z : $p_1 = c(t)z + p_0(r, t)$, во-вторых, компонента напряжений σ_{rz} имеет вид

$$\sigma_{rz} = \frac{c(t)r}{2} + \frac{c_2(t)}{r}. \quad (20)$$

Функцию интегрирования $c_2(t)$ в (20) следует положить равной нулю, чтобы напряжение σ_{rz} имело конечное значение при $r = 0$. Для нахождения функции

интегрирования $c(t)$ воспользуемся граничными условиями (14). Таким образом, для компоненты σ_{rz} получим соотношение

$$\sigma_{rz} = -\frac{pr}{2l}, \quad p = p(t). \quad (21)$$

Потенциал ползучести (9) в данном случае примет вид

$$V(\sigma_{ij}) = B((\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{rz}\sigma_{zr})^{\frac{n}{2}}. \quad (22)$$

В потенциале (22) ограничимся слагаемыми до порядка n по напряжениям, тогда для скоростей деформаций ползучести из (9), (18) и (22) получим

$$\varepsilon_{rz}^v = -Bn \left(\frac{pr}{l}\right)^{n-1}, \quad \varepsilon_{rr}^v = -\varepsilon_{zz}^v = \frac{\varepsilon_{rz}^v m_{rr} - m_{zz}}{2 m_{rz}}. \quad (23)$$

С учетом зависимостей (18) и (23) уравнение теплопроводности (8) примет форму

$$\left(1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_3 l_1 p^2 r^2}{8l^2 (\mu - l_1 \theta)^3}\right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\beta_3 p r^2 \frac{\partial p}{\partial t}}{8l^2 (\mu - l_1 \theta)^2} = g \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r}\right) - \frac{Bn}{2\nu_2} \left(\frac{pr}{l}\right)^n. \quad (24)$$

Уравнение теплопроводности (24) с учетом (12) и (16) было решено численно.

Из соотношений (1) и (2) следует, что кинематика среды в рассматриваемом случае описывается зависимостями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rz} &= \frac{dd_{rz}}{dt} = \frac{\partial d_{rz}}{\partial t} = \frac{v'}{2} = \varepsilon_{rz}^e + \gamma_{rz} = \frac{\partial m_{rz}}{\partial t} + \frac{\partial p_{rz}}{\partial t}, \\ \varphi_{rz} &= -\varphi_{rz} = \frac{2\varepsilon_{rz}(1 - m_{zz})}{m_{rr} + m_{zz} - 2}, \quad \gamma_{rr} = \frac{dp_{rr}}{dt} + 2p_{rz}(\varphi_{zr} + \gamma_{rz}), \\ \gamma_{zz} &= \frac{dp_{zz}}{dt} + 2p_{rz}(\varphi_{rz} + \gamma_{rz}), \quad \gamma_{rr} = -\gamma_{zz} = \frac{\gamma_{rz} m_{rr} - m_{zz}}{2 m_{rz}}, \end{aligned} \quad (25)$$

в которых скорости необратимых деформаций равны скоростям деформаций ползучести: $\gamma_{rr} = \varepsilon_{rr}^v$, $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^v$ и $\gamma_{zz} = \varepsilon_{zz}^v$.

Из (18), (21), (23) и (25) следуют соотношения для компонент тензоров обратимых и необратимых деформаций m_{rz} и p_{rz} , а также для градиента перемещений точек пробки

$$m_{rz} = -\frac{pr}{4l(\mu - l_1 \theta)}, \quad p_{rz} = -\int_0^t Bn \left(\frac{pr}{l}\right)^{n-1} dt, \quad u' = 2(m_{rz} + p_{rz}). \quad (26)$$

Интегрируя последнее уравнение (26) с учетом условия прилипания (15), найдем перемещения точек материала пробки. Для компонент обратимых деформаций m_{rr} , m_{zz} и необратимых деформаций p_{rr} , p_{zz} из зависимостей (25) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{zz}}{\partial t} &= \gamma_{rz} \left(m_{rz} - \frac{p_{zz}}{m_{rz}} \right) + \frac{4(\varepsilon_{rz}^e + \gamma_{rz}) p_{rz}}{2 + m_{rz}^2} \left(1 + p_{zz} - \frac{m_{rz}^2}{2} - 2m_{rz} p_{rz} \right), \\ p_{rr} &= -p_{zz} - 2p_{rz}^2, \quad m_{zz} = -p_{zz} + \frac{m_{rz}^2}{2} + 2m_{rz} p_{rz}, \quad m_{rr} = -m_{zz} - m_{rz}^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Учитывая зависимости (18), граничные условия (14) и интегрируя первое уравнение равновесия (19), получим зависимости для вычисления компонент тензора напряжений по найденным ранее распределениям температуры, перемещений и компонентам обратимых деформаций

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \frac{p}{l} (z - l - u(0, t)) - \int_0^r \frac{2(\mu - l_1 \theta) m_{rr} + (3\mu + l_1 \theta) m_{rz}^2}{r} dr + \\ &+ 2(\mu - l_1 \theta) (m_{zz} - m_{rr}) - 2(\mu - l_1 \theta(0, t)) (m_{zz}(0, t) - m_{rr}(0, t)), \\ \sigma_{rr} &= \sigma_{zz} + 2(\mu - l_1 \theta) (m_{rr} - m_{zz}), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -p_1 = \sigma_{zz} - 2(\mu - l_1 \theta) m_{zz} - (3\mu + l_1 \theta) m_{rz}^2. \end{aligned} \quad (28)$$

Найденное решение неизотермической задачи при возрастающем перепаде давления остается справедливым до момента времени t_1 , в который на боковой границе пробки $r = R$ впервые выполнится условие пластического течения (11) в следующем виде

$$|\sigma_{rz}|_{r=R} = k(t_1). \quad (29)$$

В условии (29) предел текучести зависит от температуры и вычисляется по первой формуле (13). Момент начала вязкопластического течения вычисляется из уравнения $p(t_1) R = 2lk(t_1)$.

3. Вязкопластическое течение при возрастающем перепаде давления. С момента времени t_1 в материале развивается область вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$. Движущаяся граница $r = m(t)$ отделяет область течения от области $0 \leq r \leq m(t)$, в которой материал продолжает деформироваться вязкоупруго. В области $0 \leq r \leq m(t)$ для напряжений выполняются зависимости (18). Используя соотношения (6) и (7), установим, что в области течения $m(t) \leq r \leq R$ компоненты тензора напряжений также удовлетворяют соотношениям (18).

Из интегрирования второго уравнения равновесия (19) в обеих областях с использованием граничных условий (14) следует зависимость (21) для компоненты тензора напряжений σ_{rz} .

Компоненты скоростей деформаций ползучести в области $0 \leq r \leq m(t)$ имеют вид (23), а уравнение теплопроводности в этой области — (24).

Из ассоциированного закона пластического течения (10) следует, что условие пластичности (11) в рассматриваемом случае ($\sigma_{rz} < 0, \varepsilon_{rz}^p < 0$) имеет вид

$$\sigma_{rz} = -k + \eta (\varepsilon_{rz}^p - \varepsilon_{rz}^{v_0}). \quad (30)$$

Разрешая уравнение (30) относительно ε_{rz}^p с использованием соотношения (21), получим

$$\varepsilon_{rz}^p = \frac{1}{\eta} \left(k - \frac{pr}{2l} \right) + \varepsilon_{rz}^{v_0}. \quad (31)$$

Еще раз отметим, что $\varepsilon_{rz}^{v_0}$ в формулах (30) и (31) — это компонента скоростей деформаций ползучести ε_{rz}^v в точке в момент достижения ее упругопластической границей, и в текущий момент времени t она вычисляется из зависимости

$$\varepsilon_{rz}^{v_0} = -Bn \left(\frac{pm}{l} \right)^{n-1}. \quad (32)$$

Из условия непрерывности скоростей необратимых деформаций на границе $r = m(t)$ следует уравнение для определения ее положения

$$\frac{pm}{2l} = k_0 \left(1 - \frac{\theta(m, t)}{\theta_m} \right)^2. \quad (33)$$

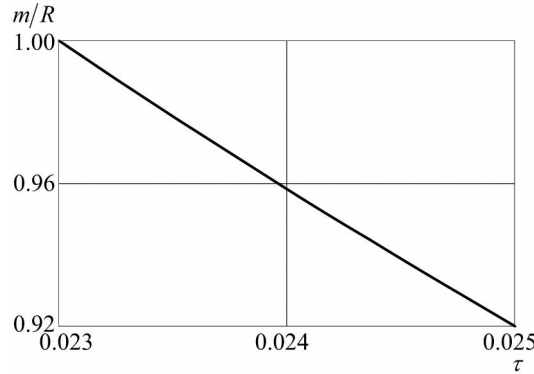


Рис. 2. График упругопластической границы

Уравнение теплопроводности (8) в области вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$ при использовании зависимостей (18) и (31) принимает форму

$$\begin{aligned} \left(1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_3 l_1 p^2 r^2}{8l^2 (\mu - l_1 \theta)^3} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\beta_3 p r^2 \frac{\partial p}{\partial t}}{8l^2 (\mu - l_1 \theta)^2} = g \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \\ + \frac{pr}{2l\nu_2} \left(\frac{1}{\eta} \left(k - \frac{pr}{2l} \right) + \varepsilon_{rz}^{v_0} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Уравнения (24), (32)–(34) образуют систему уравнений относительно неизвестных функций: θ в областях $0 \leq r \leq m(t)$ и $m(t) \leq r \leq R$, $m(t)$ и $\varepsilon_{rz}^{v_0}$. К этой системе добавим второе и третье граничные условия (16) и начальные условия

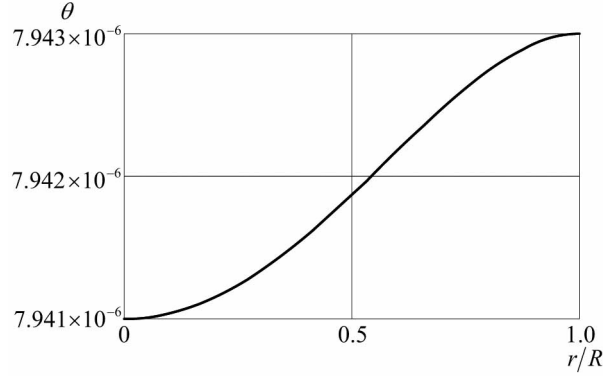


Рис. 3. Распределение температуры в материале

$m(t_2) = R$, $\varepsilon_{rz}^{v_0}(R) = -B(t_2)n(t_2)\left(\frac{p(t_2)R}{l}\right)^{n(t_2)-1}$. Также примем непрерывность искомой функции θ и ее производной $\frac{\partial \theta}{\partial r}$ на границе $r = m(t)$ и непрерывность температуры в момент начала вязкопластического течения t_1 . Для решения этой системы уравнений разработан алгоритм на основе конечно-разностного метода.

Кинематика среды в вязкоупругой области $0 \leq r \leq m(t)$ описывается соотношениями (25) при $\gamma_{rr} = \varepsilon_{rr}^v$, $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^v$ и $\gamma_{zz} = \varepsilon_{zz}^v$. Эти же соотношения выполняются и в области течения $m(t) \leq r \leq R$ при $\gamma_{rr} = \varepsilon_{rr}^p$, $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^p$ и $\gamma_{zz} = \varepsilon_{zz}^p$.

Расчеты проводились в безразмерных переменных $\frac{r}{R}$ и $\tau = \frac{\alpha_1 t}{\mu}$ при линейной функции $p(t) = \alpha_1 t$. Значения безразмерных постоянных выбирались следующими: $\beta_1 = -2.772$, $\beta_3 = -10$, $k_0 \mu^{-1} = 2.298 \times 10^{-3}$, $\theta_m = 2.074$, $l_1 \mu^{-1} = 0.452$, $lR^{-1} = 5$, $g\mu\alpha_1^{-1}R^{-2} = 2.638 \times 10^4$, $\nu_2 \mu^{-1} = 80$, $b_1 = 2.518$, $b_2 T_0^{-1} = 1.482$, $c_1 \mu \alpha_1^{-1} = 4.887 \times 10^4$, $\sigma_0 \mu^{-1} = 7.199 \times 10^{-6}$, $QR_u^{-1}T_0^{-1} = 52.37$, $\alpha_1 \eta_0 \mu^{-2} = 3.257 \times 10^{-5}$, $\nu T_0 = 1.212$.

На рисунке 2 представлен график изменения границы области вязкопластического течения в зависимости от времени τ в промежутке от $\tau_1 = 0.023$ до $\tau_2 = 0.025$. Распределение температуры θ в момент времени τ_2 по материалу пробки представлено на рисунке 3.

Для компонент m_{rz} , p_{rz} и градиента перемещений в области $0 \leq r \leq m(t)$ справедливы зависимости (26). Первая и третья формулы (26) также верны и в области $m(t) \leq r \leq R$. Компонента необратимых деформаций p_{rz} в области течения находится путем интегрирования дифференциального уравнения, следующего из (25) и (31):

$$\frac{\partial p_{rz}}{\partial t} = \frac{1}{\eta} \left(k - \frac{pr}{2l} \right) + \varepsilon_{rz}^{v_0}. \quad (35)$$

При решении уравнения (35) используется условие непрерывности компоненты необратимых деформаций p_{rz} в момент времени t_1 .

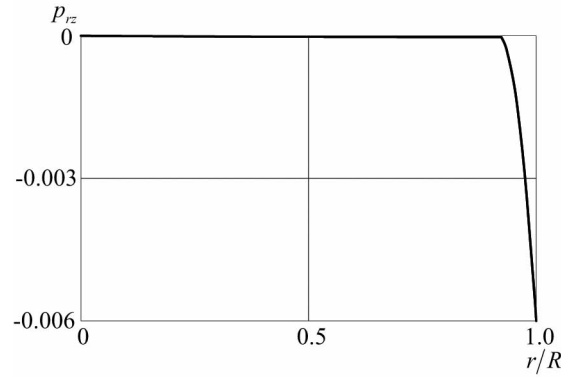
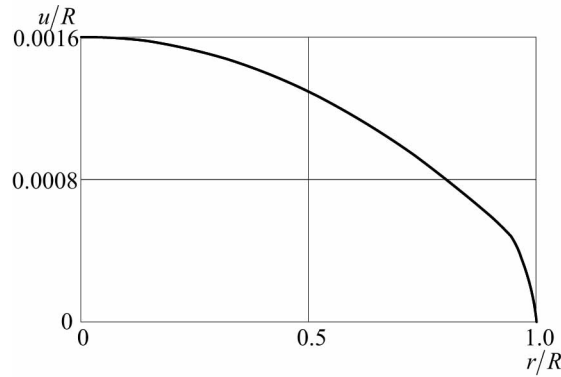
Рис. 4. Компонента необратимых деформаций p_{rz} 

Рис. 5. Распределение перемещений в материале

Рисунок 4 иллюстрирует график компоненты тензора необратимых деформаций p_{rz} в зависимости от радиуса $\frac{r}{R}$ в момент времени τ_2 . Распределение перемещений в материале в момент времени τ_2 представлено на рисунке 5.

Компоненты обратимых деформаций m_{rr} , m_{zz} и необратимых деформаций p_{rr} , p_{zz} в обеих областях вычисляются из системы уравнений (27). В области $0 \leq r \leq m(t)$ $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^v$, а в области $m(t) \leq r \leq R$ $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^p$.

По вычисленным распределениям температуры и деформаций напряжения в области $0 \leq r \leq m(t)$ находятся из зависимостей (28). Условия непрерывности напряжений на границе $r = m(t)$ приводят к этим же соотношениям для вычисления напряжений в области течения $m(t) \leq r \leq R$.

В данной статье получено решение связанной краевой задачи теории больших деформаций о неизотермическом деформировании материала, образующего пробку конечной длины в круглой недеформируемой трубе, под действием возрастающего со временем перепада давления. Накопление необратимых деформаций в материале связано с его ползучестью и последующим пластическим

течением. Разогрев материала происходит только за счет процессов необратимого деформирования. В условиях достаточно медленного процесса деформирования (квазистатическое приближение) при отсутствии теплового потока и трения на граничной поверхности (условие жесткого сцепления) нагрев материала ожидаемо оказывается незначительным, тем не менее изменение температуры влияет на все характеристики напряженно-деформированного состояния.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена в рамках государственных заданий ИАПУ ДВО РАН (темы № FFWF-2021-0005, FFWF-2022-0002).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The authors declare that they have no competing interests.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The work was carried out within the framework of state assignments of the Institute of Automation and Control of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences (topics No. FFWF-2021-0005, FFWF-2022-0002).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Большие необратимые деформации и упругое послейдействие // Монография. Владивосток: Дальнаука. 2013. 312 с.
- [2] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [3] Norton F. H. The creep steel of high temperature. Y.: Mc Graw Hill, 1929. 110 p.
- [4] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
- [5] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [6] Alain I. The correlation between the power-law coefficients in creep: the temperature dependence // Journal of Materials Science. 1998. V. 33. P. 3201-3206.
- [7] Pla F. Bifurcation phenomena in a convection problem with temperature dependent viscosity at low aspect ratio // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2009. V. 238. I. 5. P. 572-580.

REFERENCES

- [1] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V. Large irreversible strains and elastic aftereffect // Monograph. Vladivostok: Dalnauka. 2013. 312 p. (in Russian).
- [2] Lurie A. I. Nonlinear theory of elasticity. M.: Nauka, 1980. 512 p. (in Russian).
- [3] Norton F. H. The creep steel of high temperature. Y.: Mc Graw Hill, 1929. 110 p.
- [4] Ishlinsky A. Yu., Ivlev D. D. Mathematical theory of plasticity. M.: Fizmatlit, 2001. 704 p. (in Russian).
- [5] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. Plasticity theory. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p. (in Russian).
- [6] Alain I. The correlation between the power-law coefficients in creep: the temperature dependence // Journal of Materials Science. 1998. V. 33. P. 3201-3206.
- [7] Pla F. Bifurcation phenomena in a convection problem with temperature dependent viscosity at low aspect ratio // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2009. V. 238. I. 5. P. 572-580.

Ю. В. Немировский

УТОЧНЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНО ДОПУСТИМЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ГИБРИДНЫХ ПОЛИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ФЕРМ МИЗЕСА

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО
РАН, Новосибирск, Россия*

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия

Аннотация. Рассматривается решения предельно допустимых деформаций гибридных полиметаллических ферм Мизеса. Предполагается, что все элементы создаваемой фермы Мизеса сохраняют основные базовые характеристики материалов при производстве фермы, независимо от используемых технологических разработок.

Ключевые слова: гибридные полиметаллические фермы, предельная деформация, разрушение.

Немировский Юрий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник; e-mail: nemiryury@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-4281-4358>; AuthorID: 2403

для цитирования: Немировский Ю. В. Уточнение решения предельно допустимых деформаций гибридных полиметаллических ферм Мизеса // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 1(59). С. 101–106. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.012 EDN: YIQCHT

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Yu. V. Nemirovskii

CLARIFICATION OF THE SOLUTION TO THE MAXIMUM PERMISSIBLE DEFORMATIONS OF HYBRID POLYMETALLIC SIMSON TRUSSES

S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

Abstract. Solutions for maximum permissible deformations of hybrid polymetallic Mises trusses are considered. It is assumed that all elements of the created Mises farm retain the basic characteristics of the materials used in the production of the farm, regardless of the technological developments used.

Keywords: hybrid polymetallic trusses, ultimate deformation, destruction.

Yuri V. Nemirovskii, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, e-mail: nemiryury@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4281-4358>, AuthorID: 2403

to cite this article: Nemirovskii Yu. V. Clarification of the solution to the maximum permissible deformations of hybrid polymetallic Simson trusses // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 1(59). p. 101–106. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.012 EDN: YIQCHT

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Последние два века в производство активно внедряются оригинальные ферменные конструкции для выполнения важных задач анализа текущего состояния и профилактики в изделиях производственного, транспортного и сельскохозяйственного назначения.

Ферма Мизеса представляет из себя набор из нескольких стержневых конструкций разных фазовых состояний, соединенных шарнирным узловым элементом в точке прикрепления изучаемого объекта и несколькими боковыми элементами, закрепленными в неподвижных точках стенки привеса.

В соответствии с этим параметры основного центрального стержня с длиной l , связанных с длинами боковых поддерживающих элементов $l_1, l_2, \dots, l_m$ между собой соотношениями.

Из условия совместности деформаций всех элементов точки привеса имеем очевидные соотношения

$$l = \frac{l_m}{\cos \alpha_m}. \quad (1)$$

Из условия совместности деформаций всех элементов точки привеса имеем соотношения

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\cos^2 \alpha_m}. \quad (2)$$

Все стержни фермы Мизеса деформируются в условиях растяжения.

Считается, что все фазовые материалы проектируемой фермы имеют заданные механические и физические характеристики, определяемые по стандартным методикам для материалов соответствующих фаз.

Предполагается, что все элементы создаваемой фермы Мизеса сохраняют основные базовые характеристики материалов при производстве фермы, независимо от используемых технологических разработок.

Важно подчеркнуть, что многочисленные разработки ферменных элементов Мизеса в наших и зарубежных странах показывают, что наиболее неизменными характеристиками в рамках любых технологических переработок наиболее устойчивыми оказываются базовые характеристики материалов в виде удельных весов, пределов прочности, предельных деформаций, пластичности и модулей Юнга.

Отмеченные обстоятельства позволяют вести мерные характеристики используемых в производстве конструктивных элементов как меры сравнения получаемых проектов при использовании в разных целях.

Это позволяет также ввести некоторые базовые характеристики.

Стержневой элемент из однородного материала, как эталонный для сравнения с любыми другими конструкциями Мизеса.

В сравнении могут быть введены элементы производства независимо от места изготовления.

Чтобы выстраивать выборку ряда подходящих проектов, мы можем ввести критерии качеств:

- предельно допустимые деформации проектируемого проекта;

- характеристики жесткости или податливости создаваемого проекта. В общем случае выделить классы проектов со сравнительно низкими уровнями нагружения, когда ни в одном из базовых стержней не будет превышен предел упругого деформирования (предел пластичности);
- высоконагруженных проектов, которые могут деформироваться до предела прочности (пределов несущей способности).

До середины прошлого века существующие подходы расчетов ферм Мизеса в качестве одной из главнейших гипотез принимали предположение, что фазовые материалы для изготовления ферм Мизеса невесомыми. Это вызывало сомнение в достоверности и экспериментальности проверки расчетных методов.

Вопрос в этом направлении продолжает существовать и в настоящее время. Цель данной работы внести дополнительную ясность и исправить, где требуется предыдущие расчеты.

Для проведения сходственных и различных подходов в этих двух моделях выпишем все необходимые соотношения для первой модели, а затем для сравнения соотношения для второй модели.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. 100 %

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. 100 %

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Абовский Н. П. Управление конструкциями с помощью механических устройств // Известия Высших учебных заведений. Строительство. 1997. № 4.
- [2] Хархардин А. Н. Топологические состояния и свойства композитных материалов // Известия Высших учебных заведений. Строительство. 1997. № 4.
- [3] Вильдеман В. Э., Соколкин Ю. В., Ташкинов А. А. Краевая задача механики деформирования и разрушения поврежденных тел с зонами разупрочнения // Прикладная механика и техническая физика. 1995. № 6.
- [4] Методика оценки оптимального ассортимента предприятия по производству геотекстильных строительных материалов / С. В. Федосов [и др.] // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2015. № 10. С. укажите страницы.
- [5] Абашкин Е. Е., Каинг М., Ткачева А. В. Влияние температурной зависимости упругих постоянных на решение задачи для температурных напряжений // Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. Т. I. Самара, 2017. С. 9–11.
- [6] Адигамаев Н. С., Верзунов С. Н., Дьяченко Е. Н. Об упругопластическом деформировании материала с учетом эффектов старения // Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. Т. 1. Самара, 2017. С. 24–25.

- [7] Орленко Л. П. Поведение материалов при интенсивных динамических нагрузках. Машиностроение, 1964. С. 168.
- [8] Ерхов М. И. Теория идеально пластических тел и конструкций. Наука, 1979. С. 352.
- [9] Гопкинс Г., Прагер В. Динамика пластической круглой пластинки // Механика. 1955. № 3. С. 112–122.
- [10] Мазалов В. Н. Динамический на изгиб кольцевых жестко-пластических пластин с неподвижными круговыми контурами // Динамика сплошной среды. 1973. Т. 14. С. 57–65.
- [11] Вирма Э. Динамика пластических прямоугольных пластин // Уч. записки Тартуск. гос. Университета. 1972. Т. 305. С. 289–299.
- [12] Кошур В. Д., Немировский Ю. В. Континуальные и дискретные модели динамического деформирования элементов конструкций. Новосибирск : Наука, 1990. С. 198.
- [13] Комаров К. Л., Немировский Ю. В. Динамика жестко-пластических элементов конструкции. Новосибирск : Наука, 1984. С. 232.
- [14] Саймондс П. Динамика неупругих конструкций: сборник статей. Москва : Мир, 1982. С. 225. Перевод с английского.
- [15] Шапиро Г. С. Механике материалов и технологические процессы обработки металлов // Пластические деформация легких специальных сплавов. 1978. № 1. С. 5–20.
- [16] Рейтман М. И., Шапиро Г. С. Динамическая теория пластичности. Упругость и пластичность. Москва : Изд. ВИНТИ, 1966. С. 112. Издание 1968 года.
- [17] Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамический изгиб пластических полигональных плит // Прикладная механика и техническая физика. 1984. № 4. С. 149–156.
- [18] Строительная механика: учебник для вузов / Под ред. А. В. Дарков. Высшая школа, 1976. 600 с.
- [19] Композиционные материалы / Под ред. В. В. Васильев [и др.]. М. : Машиностроение, 1990. 512 с.

REFERENCES

- [1] Abovskiy N. P. Control of structures using mechanical devices // News of Higher Educational Institutions. Construction. 1997. no. 4.
- [2] Kharkhardin A. N. Topological states and properties of composite materials // News of Higher Educational Institutions. Construction. 1997. no. 4.
- [3] Vildeman V. E., Sokolkin Yu. V., Tashkinov A. A. Boundary problem of mechanics of deformation and destruction of damaged bodies with zones of weakening // Applied Mechanics and Technical Physics. 1995. no. 6.
- [4] Methodology for assessing the optimal range of products for the production of geotextile construction materials / S. V. Fedosov [et al.] // News of Higher Educational Institutions. Construction. 2015. no. 10.
- [5] Abashkin E. E., Kaing M., Tkacheva A. V. The influence of temperature dependence of elastic constants on the solution of the problem for temperature stresses // Proceedings of the X All-Russian Conference on Mechanics of Deformable Solid Body. Vol. I. Samara, 2017. P. 9–11.
- [6] Adigamov N. S., Verzunov S. N., Dyachenko E. N. On the elastoplastic deformation of material considering aging effects // Proceedings of the X All-Russian Conference on Mechanics of Deformable Solid Body. Vol. 1. Samara, 2017. P. 24–25.
- [7] Orlenko L. P. Behavior of materials under intense dynamic loads. Machinery Engineering, 1964. P. 168.
- [8] Erkhov M. I. Theory of perfectly plastic bodies and structures. Science, 1979. P. 352.
- [9] Hopkins H., Prager W. Dynamics of a plastic circular disk // Mechanics. 1955. no. 3. P. 112–122.
- [10] Mazalov V. N. Dynamic bending of ring rigid-plastic plates with immovable circular contours // Dynamics of Continuous Media. 1973. Vol. 14. P. 57–65.

-
- [11] Virma E. Dynamics of plastic rectangular plates // Scientific Notes of Tartu State University. 1972. Vol. 305. P. 289–299.
 - [12] Koshur V. D., Nemirovskiy Yu. V. Continual and discrete models of dynamic deformation of structural elements. Novosibirsk : Science, 1990. P. 198.
 - [13] Komarov K. L., Nemirovskiy Yu. V. Dynamics of rigid-plastic structural elements. Novosibirsk : Science, 1984. P. 232.
 - [14] Simonds P. Dynamics of inelastic structures: collection of articles. Moscow : World, 1982. P. 225. Translated from English.
 - [15] Shapiro G. S. Mechanics of materials and technological processes of metal treatment // Plastic deformation of light special alloys. 1978. no. 1. P. 5–20.
 - [16] Reitman M. I., Shapiro G. S. Dynamic theory of plasticity. Elasticity and plasticity. Moscow : Publishing House of the All-Russian Scientific Research Institute for Standardization and Technical Information (VINITI), 1966. P. 112. 1968 edition.
 - [17] Nemirovskiy Yu. V., Romanova T. P. Dynamic bending of plastic polygonal plates // Applied Mechanics and Technical Physics. 1984. no. 4. P. 149–156.
 - [18] Structural Mechanics: Textbook for Universities / Ed. by A. V. Darkov. Higher Education, 1976.
 - [19] Composite materials / Ed. by V. V. Vasiliev [et al.]. M. : Mechanical Engineering, 1990. 512 p.

С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова

ИЗГИБ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО БРУСА КОРОВЧАТОГО СЕЧЕНИЯ

*Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика
М. Ф. Решетнева, Красноярск, Россия*

Аннотация. Для выдвижения антенн на космических аппаратах используются полые стержни коробчатого сечения большой длины. Эти стержни изготавливаются из многослойных композитных материалов. Под действием солнечного излучения в стержнях возникают напряжения, которые существенно влияют на функции приборов, находящихся на выдвигаемой конструкции. В работе рассмотрен упруго-пластический коробчатый стержень, который изгибается поперечной силой. Предполагается, что деформации в стержне упруго-пластические и боковая поверхность его свободна от напряжений. Центр тяжести поперечного сечения не совпадает с точкой приложения силы. С помощью законов сохранения построено точное решение, описывающее напряженное состояние этой конструкции. Напряженное состояние вычисляется в каждой точке рассмотренной фигуры с помощью интегралов по внешним контурам поперечного сечения.

Ключевые слова: упруго-пластический изгиб, коробчатый брус, точное решение, законы сохранения.

Сенашов Сергей Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического моделирования и процессов управления; e-mail: sen@sibsau.ru; <https://orcid.org/0000-0001-5542-4781>; AuthorID: 214483

Савостьянова Ирина Леонидовна, доцент кафедры информационных экономических систем; e-mail: savostyanova@sibsau.ru; AuthorID: 742389

для цитирования: Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Изгиб упруго-пластического бруса коробчатого сечения // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 1(59). С. 107–114. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.006 EDN: EBWYKU

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

S. I. Senashov, I. L. Savostyanova

BENDING OF AN ELASTIC-PLASTIC BEAM OF BOX SECTION

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia

Abstract. In space technology, hollow box-shaped rods of large length are used to extend antennas on spacecraft. These rods are made of multilayer composite materials. Under the influence of solar radiation, stresses arise in the rods, which significantly affect the functions of the devices located on the extended structure. In the work, the authors considered an elasto-plastic box-shaped rod that bends by transverse force. It is assumed that deformations in the rod are elasto –plastic and its lateral surface is stress-free. The center of gravity of the cross section does not coincide with the point of application of force. The authors have constructed an exact solution using conservation laws describing the stress state of this structure. The authors calculated the stress state at each point of the considered figure using integrals along the external contours of the cross section.

Keywords: elastic-plastic bending, box bar, exact solution, conservation laws.

Sergei I. Senashov, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor; e-mail: sen@sibsau.ru; <https://orcid.org/0000-0001-5542-4781>; AuthorID: 214483

Irina L. Savostyanova, Ph.D. in Pedagogy; e-mail: savostyanova@sibsau.ru; AuthorID: 742389

to cite this article: Senashov S. I., Savostyanova I. L. Bending of an elastic-plastic beam of box section // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 1(59). p. 107–114. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.006 EDN: EBWYKU

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

1. Введение. Проблема компактного размещения и развертывания крупногабаритных трансформируемых конструкций из транспортного положения в рабочее для наземных и комических условий ставит задачи поиска концепций, способных разрешить основное противоречие: минимальная масса, максимальные компактность и необходимые габариты в рабочем состоянии. Перспективный способ, развертывания крупногабаритных трансформируемых конструкций, базируется на упругой энергии, запасаемой в процессе компактного размещения. Перспективными составными частями таких конструкций являются гибкие, упругие стержни из армированных композиционных материалов. Проблема изгиба и кручения армированного композитного стержня во многом определяет потенциальные возможности конструкции в целом. Ситуация, когда масса изделия должна быть минимальна, а надежность развертывания максимальна, требует детального изучения механики процесса, с полным пониманием ограничений, накладываемых на конструкцию, и, как следствие, ограничений на технологию изготовления составных частей таких конструкций.

В современной литературе имеется достаточно решений, описывающих напряженно – деформированное состояние упруго - пластических тел (смотрите, например, [1 - 3] и цитируемую там литературу). Построение точных частных решений опирается, в частности, на методы группового анализа дифференциальных уравнений: симметрии и законы сохранения [4, 5]. Теория симметрий позволяет строить решения так называемым «полуобратным методом», когда к построенному тем или иным способом решению подбирается соответствующая краевая задача. Для решения конкретных краевых задач более перспективным, по мнению авторов, являются законы сохранения, построенные для данной системы уравнений [3, 6]. При этом методика законов сохранения приводит, к так называемому, «численно-аналитическому методу», когда окончательное решение получается в виде интегралов по границе заданной области. Законы сохранения уже показали свою эффективность для решения ряда краевых задач упругости и пластичности, а так уже применяются для решения задач, возникающих для многослойных и композитных материалов.

2. Постановка задачи. Рассмотрено упруго-пластическое состояние бруса коробчатого сечения находящегося под действием поперечной силы. С помощью построенных законов сохранения вычислим напряженное состояние в каждой точке этой конструкции.

В матрице S выполняются уравнение равновесия и уравнение, которое является следствием соотношений Бельтрами–Митчелла

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\partial \tau_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_2}{\partial y} - P[\delta_1(x - x^0) + \delta_2(y - y^0)] = 0, \\ F_2 &= \frac{\partial \tau_1}{\partial y} - \frac{\partial \tau_2}{\partial x} + P[\delta_1(y - y^0) - \delta_2(x - x^0)] + 2K = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где S – поперечное сечение, I_{ij} – моменты инерции сечения, S_i – статические моменты,

$$\delta_1 = -\frac{I_{11}S - I_{12}S_1^2}{\Delta}, \delta_2 = \frac{I_{12}S - I_{12}S_1S_2}{\Delta}, \Delta = \begin{vmatrix} I_{22} & I_{12} & S_2 \\ I_{12} & I_{11} & S_1 \\ S_2 & S_1 & S \end{vmatrix},$$

$$x^0 = \frac{S_2}{S}, y^0 = \frac{S_1}{S}, \sigma_{33} = P(l - z)(\delta_1(x - x^0) + \delta_2(y - y^0)),$$

$$S = \iint_S ds, S_1 = \iint_S y ds, S_2 = \iint_S x ds, I_{11} = \iint_S y^2 ds, I_{12} = \iint_S xy ds, I_{22} = \iint_S x^2 ds,$$

$\tau_1 = \tau_{xz}, \tau_2 = \tau_{yz}, \sigma_{33} = P(l - z)(\delta_1(x - x^0) + \delta_2(y - y^0))$ - компоненты тензора напряжений, ν - коэффициент Пуассона матрицы, x^0, y^0 - координаты центра тяжести сечения. Пусть брус нагружен в концевом сечении силами, равномерно распределенными с равнодействующей $P = (P, 0, 0)$, которая действует в направлении оси x , центр тяжести поперечного сечения бруса не совпадает с началом координат (рисунок 1).

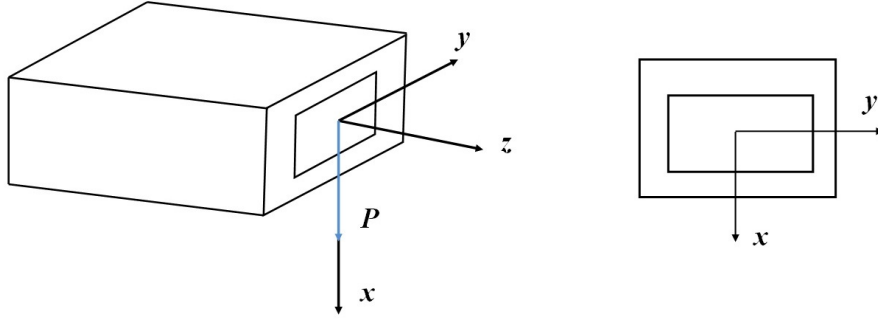


Рис. 1. Изгиб упруго-пластического бруса коробчатого сечения

Постоянная K характеризует крутку вокруг продольной оси бруса, вычисление этой постоянной можно найти в [7, стр. 455]. Материал бруса имеет предел текучести k_S .

Замечание. Второе уравнение (1) без труда получается как следствие первого уравнения (1) и соотношений Бельтрами–Митчелла $\Delta\tau_1 = \frac{P\delta_1}{(1+\nu)}$, $\Delta\tau_2 = \frac{P\delta_2}{1+\nu}$, Δ - оператор Лапласа.

Граничные условия. Внешняя и внутренние поверхности бруса предполагаются свободной от напряжений, поэтому на них выполняются условия

$$\tau_1 n + \tau_2 m = 0, \quad (2)$$

а также условие пластичности

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 = k^2 = k_s^2 - \frac{1}{3}\sigma_{33}^2, \quad (3)$$

Здесь n, m - компоненты вектора внешней нормали к боковой поверхности. В результате из (2), (3) получаем следующие граничные условия

$$\tau_1 = -mk, \tau_2 = nk. \quad (4)$$

3. Законы сохранения уравнений (1). Сохраняющийся ток закона сохранения ищем в виде

$$A = \alpha^1 \tau_1 + \beta^1 \tau_2 + \gamma^1, B = \alpha^2 \tau_1 + \beta^2 \tau_2 + \gamma^2, \quad (5)$$

где $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i$ - функции от x, y . Имеем

$$\partial_x A + \partial_y B = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2, \quad (6)$$

Подставляем (5) в (6), получаем

$$\partial_x(\alpha^1 \tau_1 + \beta^1 \tau_2 + \gamma^1) + \partial_y(\alpha^2 \tau_1 + \beta^2 \tau_2 + \gamma^2) = \omega_1(\partial_x \tau_1 + \partial_y \tau_2 + C) + \omega_2(\partial_x \tau_2 - \partial_y \tau_1 + D). \quad (7)$$

В формулах (7) для краткости введены обозначения

$$C = -P[\delta_1(x - x^0) + \delta_2(y - y^0)], D = P[\delta_1(y - y^0) - \delta_2(x - x^0)] + 2K.$$

Из (7) получаем

$$\alpha^1 = \beta^2, \alpha^2 = -\beta^1, \partial_x \beta^1 + \partial_y \alpha^1 = 0, \partial_x \alpha^1 - \partial_y \beta^1 = 0, \partial_x \gamma^1 + \partial_y \gamma^2 = \alpha^1 C + \beta^1 D. \quad (8)$$

Из (8) следует, что система уравнений (1) допускает бесконечную серию законов сохранения.

4. Вычисления компонент тензора напряжений в брус. Пусть $(x_0, y_0) \in S$. Рассмотрим решение уравнений (8), которое имеет особенность в этой точке.

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \gamma^1 &= P\left\{-[\delta_1(x_0 - x^0) + \delta_2(y_0 - y^0) + \frac{2K}{y - y_0}] \arctg \frac{x - x_0}{y - y_0} + \right. \\ &+ \frac{[\delta_1(y_0 - y^0) - \delta_2(x_0 - x^0)]}{2} \ln[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] - \delta_2(x - x_0)\bigg\}, \\ \gamma^2 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Опишем вокруг точки $(x_0, y_0) \in S_1$ окружность радиуса ε : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$, сделаем разрез, как это изображено на рисунке 2.

По формуле Грина получаем

$$\iint_S (A_x + B_y) dx dy = \oint_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} A dy - B dx - \oint_{\varepsilon} A dy - B dx = 0, \quad (10)$$

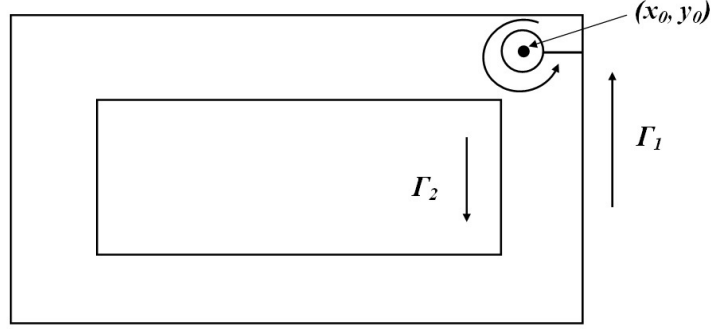


Рис. 2. Направление обхода контуров при вычислении интеграла (10)

где ε - окружность $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$.

Рассмотрим решение (9), полагая $x - x_0 = \varepsilon \cos \phi$, $y - y_0 = \varepsilon \sin \phi$, тогда из (10) с учетом (8), при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем

$$2\pi\tau_{12}(x_0, y_0) = \oint_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} (m_0 k \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - n_0 k \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \gamma^1) dy - \\ - (m_0 k \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + n_0 k \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}) dx. \quad (11)$$

Рассмотрим другое решение уравнений (8)

$$\alpha_*^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \beta_*^2 = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \partial_x \gamma_*^1 + \partial_y \gamma_*^2 = \alpha_*^1 C + \beta_*^2 D. \quad \gamma_*^1 = \\ = P[-\delta_1(x - x_0) + \frac{(-\delta_1(x_0 - x^0) + \delta_2(y_0 - y^0))}{2} \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) + \\ + (\delta_2(x_0 - x^0) - \delta_1(y_0 - y^0) + \frac{2K}{y - y_0}) \operatorname{arctg} \frac{x - x_0}{y - y_0}], \\ \gamma_*^1 = 0. \quad (12)$$

Почти дословно повторяя предыдущие рассуждения с решением (12) получаем

$$2\pi\tau_{23}(x_0, y_0) = \oint_{\Gamma_0} (m_0 k \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + n_0 k \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}) dy - \\ - (-m_0 k \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + n_0 k \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \gamma_*^1) dx. \quad (13)$$

Заключение. В работе построены законы сохранения для уравнений, описывающих напряженное состояние упруго-пластического бруса коробчатого сечения под действием поперечной силы для каждой фиксированной точки z . Законы сохранения позволили вычислить напряженное состояние в каждой точке бруса по формулам (12) и (13) с помощью интегралов по внешним границам бруса.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The contribution of the authors is equivalent.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упруго-пластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 238 с.
- [2] Галин Л. А. Упругопластические задачи. Москва: Наука, 1984. 232 с.
- [3] Сенашов С. И., Савостьянова И.Л. Упругопластичность и законы сохранения. Красноярск, СибГУ им. М.Ф.Решетнева, 2023. 190 с.
- [4] Senashov S. I., Yakhno A. N. Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity // SIGMA 8 (2012). 071. 16 pages, <http://dx.doi.org/10.3842/SIGMA.2012.071>. Special Issue "Geometrical Methods in Mathematical Physics"
- [5] Senashov S. I., Vinogradov A.M. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity // Proc. Edinburg Math. Soc. 1988. V.3(2). pp. 415-439.
- [6] Гомонова О. В., Сенашов С. И. Определение областей упругого и пластического деформирования в задаче об одноосном растяжении пластины, ослабленной отверстиями. // Журнал ПМТФ. 2021. Т. 62. №1. С. 208-216.
- [7] Новацкий В. Теория упругости. Москва: Мир, 1975. 872 с.

REFERENCES

- [1] Annin B. D., Cherepanov G. P. Elastic-plastic problem. Novosibirsk, Nauka, 1983. 238 p.
- [2] Galin L. A. Elastoplastic problems. Moscow: Nauka, 1984. 232 p.
- [3] Senashov S. I. Savostyanova I. L. Elastoplasticity and conservation laws. Krasnoyarsk: SibGU, 2023. 190 p.
- [4] Senashov S. I., Yakhno A. N. Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity // SIGMA 8 (2012). 071. 16 pages, <http://dx.doi.org/10.3842/SIGMA.2012.071>. Special Issue "Geometrical Methods in Mathematical Physics"

- [5] Senashov S. I., Vinogradov A. M. Symmetries and conservation laws of 2- dimensional ideal plasticity // Proc. Edinburg Math. Soc. 1988. V.3(2). pp. 415-439.
- [6] Gomonoova O. V., Senashov S. I. Determination of elastic and plastic deformation regions in the problem of uniaxial tension of a plate weakened by holes. // Journal of PMTF. 2021. Vol. 62. No.1. pp. 208-216.
- [7] Novatsky V. Theory of elasticity. Moscow: Mir, 1975. 872 p.

Нестеров Т. К.

ПЛОСКИЕ МОНОХРОМАТИЧЕСКИЕ СВЯЗАННЫЕ ВОЛНЫ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И МИКРОВАРАЩЕНИЙ В ЛИНЕЙНОМ ПОЛУИЗОТРОПНОМ МИКРОПОЛЯРНОМ ТЕЛЕ

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Аннотация. В настоящей работе рассматривается процесс распространения плоских монохроматических связанных волн перемещений и микровращений в линейном полуизотропном микрополярном теле. Получено уравнение для определения волнового числа продольной и поперечной плоской монохроматической волны. Рассмотрено дисперсионное уравнение, получены необходимые условия связанности продольных и поперечных волн перемещений и микровращений. Приведена таблица пересчета скоростей продольной и поперечной волны для различных наборов определяющих констант полуизотропного микрополярного тела.

Ключевые слова: микрополярный континуум, полуизотропность, плоская монохроматическая волна, связанная волна перемещений и микровращений, продольная волна, поперечная волна, волновое число.

Нестеров Тимофей Константинович, программист лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: nesterovtim4@gmail.com; AuthorID: 1016707

для цитирования: Нестеров Т. К. Плоские монохроматические связанные волны перемещений и микровращений в линейном полуизотропном микрополярном теле // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 1(59). С. 115–129. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.008 EDN: PUSHOQ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

T. K. Nesterov

PLANE HARMONIC WAVES IN A HEMITROPIC MICROPOLAR BODY

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

Abstract. This paper deals with the propagation of plane monochromatic coupled waves of displacement and microrotation in a linear semi-isotropic micropolar body. An equation is obtained for determining the wave number of a longitudinal and transverse plane monochromatic wave. The dispersion equation is considered, and the necessary conditions for the existence of the dependence of the amplitudes of displacements and microrotations for longitudinal and transverse coupled waves are obtained. A table is given for converting the velocities of longitudinal and transverse waves for various sets of material constants of a semi-isotropic micropolar body.

Keywords: Micropolar continuum, semi-isotropy, plane monochromatic waves, coupled waves of displacement and microrotation, longitudinal wave, transverse wave.

Timopheev K. Nesterov, Programmer; e-mail: nesterovtim4@gmail.com;
AuthorID: 1016707

to cite this article: Nesterov T.K. Plane harmonic waves in a hemitropic micropolar body // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 1(59). p. 115–129. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.008 EDN: PUSHOQ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Математические модели континуумов с микроструктурой это модели сред, в которых точка среды обладает дополнительными степенями свободы, помимо трех, описывающих положение точки среды в пространстве. Дополнительные степени свободы обеспечиваются посредством прикрепления к точке среды т.н. триады "директоров". В таком случае имеет смысл говорить не о точке тела, а о некотором малом теле, построенном на данной триаде директоров. При деформировании такого тела преобразование тройки директоров определяет тензор микродеформации.

Впервые микрополярная теория была предложена в работе [1] в 1909 году. В дальнейшем интерес к ней вернула работа Трусделла и Эриксона, посвященная применению идей, изложенных братьями Коссера, к вопросу расчета оболочек [2]. После этого в 1960-1980 годах теория сред с микроструктурой и в частности теория микрополярных сред получает активное развитие, здесь перечислим некоторые работы [3–7].

Позже в работах [8–11], было замечено, что при моделировании анизотропного микрополярного тела (полуизотропность является простейшим случаем) необходимо привлекать аппарат псевдотензоров [12, 13] для получения корректных результатов.

1. Уравнения Навье –Ламе линейного полуизотропного микрополярного тела. Вывод системы уравнений Навье –Ламе для линейного полуизотропного микрополярного тела можно найти в работе [14], и в терминах псевдотензоров [8, 11]:

$$\begin{aligned}
 & (a_1 + c_1) \nabla^j \nabla_p u^p + b_1 \nabla^p \nabla_p u^j + \frac{1}{e^2} (b_1 - c_1) \epsilon^{jpq} \nabla_p \phi_q^{[+1]} + \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{a_1^{[-1]}}{3} + \frac{c_1^{[-1]}}{3} \right) \nabla^j \nabla_p \phi^p^{[+1]} + \frac{1}{2} \frac{b_1^{[-1]}}{3} \nabla^p \nabla_p \phi^j^{[+1]} = -\rho (X^j - \ddot{u}^j); \\
 & \left(\frac{a_2^{[-2]}}{2} + \frac{c_2^{[-2]}}{2} \right) \nabla_j \nabla_p \phi^p^{[+1]} + \frac{b_2^{[-2]}}{2} \nabla^p \nabla_p \phi_j^{[+1]} + \frac{1}{2} \left(\frac{a_3^{[-1]}}{3} + \frac{c_3^{[-1]}}{3} \right) \nabla_j \nabla_p u^p + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{b_3^{[-1]}}{3} \nabla^p \nabla_p u_j - \frac{2}{e^2} (b_1 - c_1) g_{jp} \phi^p^{[+1]} + (b_1 - c_1) \epsilon_{j pq} \nabla^p u^q + \\
 & + \left(\frac{b_3^{[-1]}}{3} - \frac{c_3^{[-1]}}{3} \right) \epsilon_{j pq} \nabla^p \phi^q^{[+1]} = -\rho \left(Y_j^{[-1]} - J^{[-2][+1]} \ddot{\phi}_j \right),
 \end{aligned} \tag{1}$$

здесь u^j – вектор макродисplacements (в дальнейшем просто вектор перемещений); $\phi^j^{[+1]}$ – аксиальный вектор микровращения, в квадратных скобках над корневым символом указывается вес псевдотензора; X^j , $Y_j^{[-1]}$ – объемные силы и моменты; ρ , $J^{[-2]}$ – плотность и тензор микроинерции; $\frac{[W_p]}{a_p}$, $\frac{[W_p]}{b_p}$, $\frac{[W_p]}{c_p}$ где $p = (1, 2, 3)$ – набор материальных констант, соответствующий упругому потенциалу полуизотропного микрополярного тела, записанному в виде основной энергетической

формы; $\epsilon^{[-1]}_{jpq}$, $\epsilon^{[+1]}_{jpq}$ – символы перестановок; $e^{[+1]}$, $\frac{1}{e^{[-1]}}$ – ориентирующий псевдоскаляр.

Систему уравнений (1) можно получить в терминах абсолютных тензоров, согласно методу предложенному в работе [15]. Суть метода заключается в том, чтобы посредством умножения или деления интересующего псевдотензора на целую степень ориентирующего псевдоскаляра $e^{[+1]}$ (который является ковариантно постоянным) свести итоговый вес произведения к нулю, тем самым получив абсолютный тензор. Благодаря данному подходу система уравнений (1) будет представима в терминах абсолютных тензоров:

$$\begin{aligned}
 & (a + c)_1 \nabla^j \nabla_p u^p + b_1 \nabla^p \nabla_p u^j + (b - c)_1 e^{jpq} \nabla_p \phi_q + \\
 & + \frac{1}{2} (a + c)_3 \nabla^j \nabla_p \phi^p + \frac{1}{23} b \nabla^p \nabla_p \phi^j + \rho (X^j - \ddot{u}^j) = 0, \\
 & (a + c)_2 \nabla_j \nabla_p \phi^p + b_2 \nabla^p \nabla_p \phi_j + \frac{1}{2} (a + c)_3 \nabla_j \nabla_p u^p + \\
 & + \frac{1}{23} b \nabla^p \nabla_p u_j - 2(b - c)_1 \phi_j + (b - c)_1 e_{jpq} \nabla^p u^q \\
 & + (b - c)_3 e_{jpq} \nabla^p \phi^q + \rho (Y_j - J \ddot{\phi}_j) = 0,
 \end{aligned} \tag{2}$$

здесь e^{jpq} – тензор перестановок. Отметим, что в системе уравнений (2) второе уравнение дополнительно умножили на $e^{[+1]}$.

Коэффициенты при слагаемых в системе уравнений (2) могут быть пересчитаны для иных материальных констант на основе соотношений представленных в работе [16].

Плоские монохроматические связанные волны перемещений и микровращений в линейном полуизотропном микрополярном теле. Плоская связанная монохроматическая волна перемещений и микровращений в линейном полуизотропном микрополярном представима в виде:

$$u_j = U_j e^{i(k_p x^p - \omega t)}, \quad \phi_j = \Phi_j e^{i(k_p x^p - \omega t)}, \tag{3}$$

где k_p – волновой вектор, x_p – пространственные ковариантные координаты, ω – частота, U_j, Φ_j – компоненты вектора амплитуды (поляризации) колебаний упругой волны и волны кручения, соответственно.

Подставим выражения, описывающие плоскую монохроматическую волну, (3) в систему уравнений движения (2) и учитывая, что:

$$\nabla_q u^j = i k_q u^j, \quad \partial_t u^j = -i \omega u^j,$$

получим систему из двух векторных уравнений, которым должен удовлетворять вектор амплитуд (поляризации) связанной волны перемещений и микровращений:

$$\begin{aligned} (a + c)_1^j k_p U^p + b k^2 U^j + i(b - c)_1^{jpq} k_p \Phi_q + \frac{1}{2}(a + c)_3^j k_p \Phi^p + \frac{1}{2} b k^2 \Phi^j + \rho \omega U^j &= 0, \\ (a + c)_2^j k_j k_p \Phi^p + b k^2 \Phi_j + \frac{1}{2}(a + c)_3^j k_j k_p U^p + \frac{1}{2} b k^2 u_j & \\ - 2(b - c)_1^j \Phi_j + i(b - c)_1^{jpq} k^p U^q + i(b - c)_3^{jpq} k^p \Phi^q + \omega^2 \rho J \Phi_j &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Систему линейных алгебраических уравнений (4) можно записать в символической форме:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad (5)$$

где $\mathbf{X} = (U^1, U^2, U^3, \Phi^1, \Phi^2, \Phi^3)$. Без исключения общности рассмотрим случай коллинеарности волнового вектора $\mathbf{k}$ и третьего пространственного орта² $\mathbf{k} = (0, 0, k)$, тогда матрица $\mathbf{D}$ будет иметь вид:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & d_{24} & d_{25} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 & 0 & d_{36} \\ d_{41} & d_{42} & 0 & d_{44} & d_{45} & 0 \\ d_{51} & d_{52} & 0 & d_{54} & d_{55} & 0 \\ 0 & 0 & d_{63} & 0 & 0 & d_{66} \end{pmatrix}$$

С помощью перестановок строк и столбцов матрица $\mathbf{D}$ может быть приведена к блочно-диагональному виду. В таком случае вектор амплитуд примет вид:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_\perp, \mathbf{X}_\parallel) = (\mathbf{U}_\perp, \mathbf{\Phi}_\perp, \mathbf{X}_\parallel) = (U_1, U_2, \Phi_1, \Phi_2, U_3, \Phi_3), \quad (6)$$

где $\mathbf{X}_\perp = (\mathbf{U}_\perp, \mathbf{\Phi}_\perp)$ – компоненты связанной поперечной волны перемещений и микровращений, $\mathbf{U}_\perp = (U_1, U_2)$ – компоненты поперечной волны перемещений, $\mathbf{\Phi}_\perp = (\Phi_1, \Phi_2)$ – компоненты поперечной волны микровращений, $\mathbf{X}_\parallel = (U_3, \Phi_3)$ – компоненты перемещений и микровращений продольной волны. Матрица $\mathbf{D}$ преобразуется к виду:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & 0 \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_{33} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

²Волновой вектор $\mathbf{k}$ всегда можно представить в таком виде посредством поворота системы координат.

где блочные элементы матрицы $\mathbf{D}^3 \mathbf{D}_{ij}$ записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{33} &= \begin{pmatrix} d_{33} & d_{36} \\ d_{63} & d_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 + b_1 + c_1)k^2 - \rho\omega^2 & \frac{1}{2}(a_3 + b_3 + c_3)k^2 \\ \frac{1}{2}(a_3 + b_3 + c_3)k^2 & (a_2 + b_2 + c_2)k^2 + 2(b_1 - c_1) - J\omega^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{D}_{11} &= \begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bk^2 - \rho\omega^2 & 0 \\ 0 & bk^2 - \rho\omega^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{D}_{22} &= \begin{pmatrix} d_{44} & d_{45} \\ d_{54} & d_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(b_1 - c_1) + bk^2 - J\omega^2 & (b_3 - c_3)ik \\ -(b_3 - c_3)ik & 2(b_1 - c_1) + bk^2 - J\omega^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{D}_{12} &= \begin{pmatrix} d_{14} & d_{15} \\ d_{24} & d_{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{23}bk^2 & (b_1 - c_1)ik \\ -(b_1 - c_1)ik & \frac{1}{23}bk^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{D}_{21} &= \begin{pmatrix} d_{41} & d_{42} \\ d_{51} & d_{52} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{23}bk^2 & (b_1 - c_1)ik \\ -(b_1 - c_1)ik & \frac{1}{23}bk^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для того чтобы существовало нетривиальное решение системы (5) необходимо чтобы детерминант матрицы $\mathbf{D}$ был равен нулю. Для блочно-диагональной матрицы $\mathbf{D}$ вида (7) определитель может быть рассчитан по следующей формуле [17][стр. 59, ур. Ia]⁴:

$$\det(\mathbf{D}) = \det(\mathbf{D}_{33}) \det(\mathbf{D}_{11}\mathbf{D}_{22} - \mathbf{D}_{21}\mathbf{D}_{12}). \quad (9)$$

Из уравнения выше сразу можно видеть, что для выполнения равенства (5) достаточно того, чтобы один из множителей был равен нулю. Выпишем их с учетом (8) вида блочных матриц⁵ $\mathbf{D}_{ij}$:

$$\det(\mathbf{D}_{33}) = d_{33}d_{66} - d_{63}d_{36} = 0, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{D}_{11}\mathbf{D}_{22} - \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_{21}) &= \begin{vmatrix} d_{11}d_{44} - d_{14}^2 + d_{15}^2 & d_{11}d_{45} - 2d_{14}d_{15} \\ -(d_{11}d_{45} - 2d_{14}d_{15}) & d_{11}d_{44} - d_{14}^2 + d_{15}^2 \end{vmatrix} = \\ &= [d_{11}d_{44} - d_{14}^2 + d_{15}^2 - i(d_{11}d_{45} - 2d_{14}d_{15})] [d_{11}d_{44} - d_{14}^2 + d_{15}^2 + i(d_{11}d_{45} - 2d_{14}d_{15})] = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

³Отметим, что $\mathbf{D}_{12} = \mathbf{D}_{21}$.

⁴Здесь учитывается, что $\mathbf{D}_{11} = d_{11}\mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ единичная матрица.

⁵Здесь учтены следующие соотношения между элементами блочных матриц:

$$d_{11} = d_{22}, d_{44} = d_{55}, d_{45} = -d_{54}, d_{14} = d_{41} = d_{25} = d_{52}, d_{15} = d_{42} = -d_{51} = -d_{24} \quad (10)$$

Далее для удобства перейдем к следующим обозначениям:

$$\begin{aligned}
 \frac{a + b + c}{\rho} &= v_{u\parallel}^2, & \frac{b}{\rho} &= v_{u\perp}^2, \\
 \frac{a + b + c}{J} &= v_{\phi\parallel}^2, & \frac{b}{J} &= v_{\phi\perp}^2, \\
 \frac{a + b + c}{2\rho J} &= v_{s\parallel}^2, & \frac{b}{2\rho J} &= v_{s\perp}^2, \\
 \frac{2(b - c)}{\rho J} &= \Omega_1^2, & \frac{(b - c)}{J} &= \Omega_3^2,
 \end{aligned} \tag{13}$$

где $v_{u\parallel}^2$, $v_{\phi\parallel}^2$, $v_{s\parallel}^2$ – скорости распространения связанной продольной волны перемещений и микровращений, соответственно; $v_{u\perp}^2$, $v_{\phi\perp}^2$, $v_{s\perp}^2$ – скорости распространения связанной поперечной волны перемещений и микровращений, соответственно, Ω_1^2 , Ω_3^2 – константы, имеющие размерность циклической частоты. Выпишем получившиеся вид блочных матриц $\mathbf{D}_{ij}$ с учетом введенных ранее обозначений⁶:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_{33} &= \begin{pmatrix} k^2 v_{u\parallel}^2 - \omega^2 & k^2 J v_{s\parallel}^2 \\ k^2 \rho v_{s\parallel}^2 & k^2 v_{\phi\parallel}^2 + \rho(\Omega_1^2 - \omega^2) \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{D}_{11} &= \begin{pmatrix} k^2 v_{u\perp}^2 - \omega^2 & 0 \\ 0 & k^2 v_{u\perp}^2 - \omega^2 \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{D}_{22} &= \begin{pmatrix} k^2 v_{\phi\perp}^2 + \rho(\Omega_1^2 - \omega^2) & ik\Omega_3 \\ -ik\Omega_3 & k^2 v_{\phi\perp}^2 + \rho(\Omega_1^2 - \omega^2) \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{D}_{12} &= J \begin{pmatrix} k^2 v_{s\perp}^2 & \frac{ik}{2}\Omega_1^2 \\ -\frac{ik}{2}\Omega_1^2 & k^2 v_{s\perp}^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_{21} = \rho \begin{pmatrix} k^2 v_{s\perp}^2 & \frac{ik}{2}\Omega_1^2 \\ -\frac{ik}{2}\Omega_1^2 & k^2 v_{s\perp}^2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Приведем на основании таблицы (1) из работы [16], формулы пересчета скоростей продольных и поперечных связанных волн перемещений, микровращений для различных наборов материальных констант, которые соберем для удобства в таблице (1).

С учетом вида блочных матриц (14) выпишем соотношения (11), (12) в развернутом виде и получим:

$$(v_{u\parallel}^2 v_{\phi\parallel}^2 - \rho J v_{s\parallel}^4) k^4 - (\rho v_{u\parallel}^2 (\omega^2 - \Omega_1^2) + \omega^2 v_{\phi\parallel}^2) k^2 + \rho \omega^2 (\omega^2 - \Omega_1^2) = 0 \tag{15}$$

⁶Здесь в матрице $\mathbf{D}$ первую, вторую и пятую строку разделили на ρ , а третью, четвертую и шестую строки на J .

Таблица 1. Скорости распространения продольной и поперечной волны перемещений и микровращений

	Скаляры первой основной энергетической формы	Скаляры конвенциональной энергетической формы	Скаляры основной энергетической формы	Материальные скаляры
$v_{u\parallel}^2$	$\frac{2(A_1 + A_3)}{\rho}$	$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$	$\frac{a_1 + b_1 + c_1}{\rho}$	$\frac{2G(1 - \nu)}{\rho(1 - 2\nu)}$
$v_{\phi\parallel}^2$	$\frac{2(A_2 + A_4)}{J}$	$\frac{\beta + 2\gamma}{J}$	$\frac{a_2 + b_2 + c_2}{J}$	$\frac{2GL^2(1 + c_3)}{J}$
$v_{s\parallel}^2$	$\frac{A_7 + A_8}{\rho J}$	$\frac{\varkappa + 2\chi}{\rho J}$	$\frac{a_3 + b_3 + c_3}{2\rho J}$	$\frac{GL(c_4 + c_5)}{\rho J}$
$v_{u\perp}^2$	$\frac{A_5 + 2A_3}{2\rho}$	$\frac{\mu + \alpha}{\rho}$	$\frac{b_1}{\rho}$	$\frac{G(1 + c_1)}{\rho}$
$v_{\phi\perp}^2$	$\frac{A_6 + 2A_4}{2J}$	$\frac{\gamma + \epsilon}{J}$	$\frac{b_2}{J}$	$\frac{GL^2(1 + c_2)}{J}$
$v_{s\perp}^2$	$\frac{2A_8 - A_9}{4\rho J}$	$\frac{\chi + \nu}{\rho J}$	$\frac{b_3}{2\rho J}$	$\frac{GL(2c_5 - c_6)}{4\rho J}$

$$(\rho J v_{s\perp}^4 - v_{u\perp}^2 v_{\phi\perp}^2) k^4 - (\rho J v_{s\perp}^2 \Omega_1^2 - v_{u\perp}^2 \Omega_3^2) k^3 +$$

$$+ \left(v_{\phi\perp}^2 \omega^2 + \rho v_{u\perp}^2 (\omega^2 - \Omega_1^2) + \frac{1}{4} \rho J \Omega_1^4 \right) k^2 - \Omega_3^2 \omega^2 k - \rho \omega^2 (\omega^2 - \Omega_1^2) = 0, \quad (16)$$

$$(\rho J v_{s\perp}^4 - v_{u\perp}^2 v_{\phi\perp}^2) k^4 + (\rho J v_{s\perp}^2 \Omega_1^2 - v_{u\perp}^2 \Omega_3^2) k^3 +$$

$$+ \left(v_{\phi\perp}^2 \omega^2 + \rho v_{u\perp}^2 (\omega^2 - \Omega_1^2) + \frac{1}{4} \rho J \Omega_1^4 \right) k^2 + \Omega_3^2 \omega^2 k - \rho \omega^2 (\omega^2 - \Omega_1^2) = 0, \quad (17)$$

где уравнение (15) соответствует соотношению (11), а (16) и (17) соответствуют первому и второму множителю во второй строке выражения (12), соответственно. Таким образом условие равенства нулю определителя, а следовательно и возможность существования нетривиального решения системы (5) выпишется в виде одного биквадратного алгебраического уравнения и двух уравнений

четвертой степени.⁷ Данные уравнения позволяют определить такие значения k волнового вектора $\mathbf{k}$ при котором будет возможно существование поперечной или продольной связанной волны перемещений и микровращений. Отметим сразу решение, которое удовлетворяет всем трем уравнениям свыше $k = 0$, $\omega^2 = \Omega_1^2$.

Биквадратное уравнение (15) может быть сведено к квадратному уравнению и его решением будет:

$$k_{1,2}^2 = \left[\pm \sqrt{4J\rho^2\omega^2 v_{s\parallel}^4 (\omega^2 - \Omega_1^2) + (\rho v_{u\parallel}^2 (\Omega_1^2 - \omega^2) + \omega^2 v_{\phi\parallel}^2)^2} + \rho v_{u\parallel}^2 (\omega^2 - \Omega_1^2) + v_{\phi\parallel}^2 \omega^2 \right] \setminus 2(v_{u\parallel}^2 v_{\phi\parallel}^2 - J\rho V_{s\parallel}^4). \quad (18)$$

Уравнения четвертой степени (16), (17) могут быть решены с помощью метода Декарта –Эйлера, изложение которого можно найти, к примеру, в [18].

Определение условий связанности продольной волны перемещений и микровращений. Рассмотрим случай, когда волновой вектор представим в виде $\mathbf{k} = (0, 0, k)$, где k волновое число, которое является решением уравнения (15) и не является решением уравнений (16), (17). В таком случае определитель матрицы $\mathbf{D}$ будет равен нулю и следовательно возможно существование нетривиального решения системы (5). Перепишем данную систему с учетом вида (7) матрицы $\mathbf{D}$ и вида (6) вектора амплитуд $\mathbf{X}$:

$$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{\perp} \\ \mathbf{\Phi}_{\perp} \\ \mathbf{X}_{\parallel} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} \cdot \mathbf{U}_{\perp} + D_{12} \cdot \mathbf{\Phi}_{\perp} \\ D_{21} \cdot \mathbf{U}_{\perp} + D_{22} \cdot \mathbf{\Phi}_{\perp} \\ D_{33} \cdot \mathbf{X}_{\parallel} \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (19)$$

Чтобы определить решение данной системы для начала рассмотрим вид компонент связанной поперечной волны $\mathbf{X}_{\perp}$. Поскольку выбрано такое волновое число k , что уравнения (16), (17) не выполняются, то следовательно не выполняется условие (12). Это означает, что компоненты связанной поперечной волны

⁷От скоростей волны можно перейти к длине волны если разделить на частоту ω , в таком случае получим:

$$\begin{aligned} & \left(\lambda_{\phi\parallel}^2 \lambda_{u\parallel}^2 - \rho J \lambda_{s\parallel}^4 \right) k^4 - \left(\lambda_{\phi\parallel}^2 + \rho \lambda_{u\parallel}^2 (1 - H_1^2) \right) k^2 + \rho (1 - H_1^2) = 0, \\ & (\rho J \lambda_{s\perp}^4 - \lambda_{\phi\perp}^2 \lambda_{u\perp}^2) k^4 - (\rho J \lambda_{s\perp}^2 H_1^2 - \lambda_{u\perp}^2 H_3^2) k^3 + \\ & \quad + \left(\lambda_{\phi\perp}^2 + \rho \lambda_{u\perp}^2 (1 - H_1^2) + \frac{1}{4} \rho J H_1^4 \right) k^2 - H_3^2 k - \rho (1 - H_1^2) = 0, \\ & (\rho J \lambda_{s\perp}^4 - \lambda_{\phi\perp}^2 \lambda_{u\perp}^2) k^4 + (\rho J \lambda_{s\perp}^2 H_1^2 - \lambda_{u\perp}^2 H_3^2) k^3 + \\ & \quad + \left(\lambda_{\phi\perp}^2 + \rho \lambda_{u\perp}^2 (1 - H_1^2) + \frac{1}{4} \rho J H_1^4 \right) k^2 + H_3^2 k - \rho (1 - H_1^2) = 0, \end{aligned}$$

где $H_1^2 = \frac{\Omega_1^2}{\omega^2}$, $H_3^2 = \frac{\Omega_3^2}{\omega^2}$.

могут обладать только тривиальным видом:

$$\mathbf{U}_\perp = (U_1, U_2) = (0, 0), \quad \mathbf{\Phi}_\perp = (\Phi_1, \Phi_2) = (0, 0). \quad (20)$$

Рассмотрим компоненты продольной связанной волны. Поскольку выбрано такое волновое число k , что выполняется уравнение (15), то это позволяет выразить компоненту продольной волны перемещений через компоненту продольной волны микровращений, либо наоборот компоненту продольной волны микровращений через компоненту продольной волны перемещений, что можно символически записать как:

$$U_3 = \frac{1}{C_\parallel} \Phi_3, \quad \Phi_3 = C_\parallel U_3. \quad (21)$$

Определить неизвестную константу $C_\parallel$ можно из необходимости выполнения следующих соотношений:

$$\mathbf{D}_{33} \cdot \mathbf{X}_\parallel = \begin{pmatrix} d_{33} & d_{36} \\ d_{63} & d_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_3 \\ C_\parallel U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{33} & C_\parallel d_{36} \\ d_{63} & C_\parallel d_{66} \end{pmatrix} U_3 = 0. \quad (22)$$

Откуда видно, что постоянная $C_\parallel$ может принимать два значения, каждое из которых выбирается таким образом, чтобы в соотношениях выше тождественно выполнялось либо первое, либо второе, на что указывает соответствующий нижний числовой индекс:

$$C_{\parallel,1} = -\frac{d_{33}}{d_{36}} = -\frac{k^2 v_{u\parallel}^2 - \omega^2}{k^2 J v_{s\parallel}^2}, \quad C_{\parallel,2} = -\frac{d_{63}}{d_{66}} = -\frac{k^2 \rho v_{s\parallel}^2}{k^2 v_{\phi\parallel}^2 + \rho (\Omega_1^2 - \omega^2)}, \quad (23)$$

где k обладает видом (18). При подстановке констант $C_{\parallel,1}$, $C_{\parallel,2}$ в систему уравнений (22) одно из соотношений будет выполняться тождественно благодаря выбранному виду констант, а оставшиеся соотношения будут выполняться в силу выполнения условия (11), поскольку полученные выражения совпадают с определителем матрицы $\mathbf{D}_{33}$. Отметим, что линейная комбинация $\frac{1}{2}(C_{\parallel,1} + C_{\parallel,2})$ так же будет удовлетворять системе уравнений (22).

2. Определение коэффициента связанности поперечной волны перемещений и микровращений. Рассмотрим теперь иной случай, когда волновое число k является решением уравнения (16) или (17), но не является решением уравнения (15). В данном случае уравнение (5) будет обладать нетривиальным решением.

Для начала рассмотрим каким видом будут обладать компоненты продольной связанной волны $\mathbf{X}_\parallel$. Поскольку волновое число k не является решением уравнения (15), то и условие (11) не выполняется, следовательно компоненты продольной волны перемещений и микровращений должны обладать тривиальным видом, чтобы уравнение (5) выполнялось, а именно:

$$\mathbf{X}_\parallel = (U_3, \Phi_3) = (0, 0). \quad (24)$$

Для определения коэффициента связанности поперечной волны перемещений и микровращений представим, что компоненты поперечной волны микровращений связаны с компонентами поперечной волны перемещений следующим соотношением:

$$\Phi_{\perp} = \mathbf{C}_{\perp} \cdot \mathbf{U}_{\perp}, \quad (25)$$

здесь $\mathbf{C}_{\perp}$ есть матрица коэффициентов связанности компонент поперечной волны перемещений и микровращений.

Подставим соотношение выше в первые два равенства системы уравнений (19) и получим систему двух векторных уравнений:

$$\begin{aligned} [\mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{C}_{\perp}] \cdot \mathbf{U}_{\perp} &= 0 \\ [\mathbf{D}_{21} + \mathbf{D}_{22} \cdot \mathbf{C}_{\perp}] \cdot \mathbf{U}_{\perp} &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

В силу произвольности вектора амплитуд поперечной волны перемещений $\mathbf{U}_{\perp}$ система уравнений выше должна выполняться за счет правильного выбора матрицы коэффициентов $\mathbf{C}_{\perp}$, которая может принимать два значения. Каждое из этих двух значений выбрано таким образом чтобы тождественно выполнялось первое или второе векторное уравнение (что, по аналогии с предыдущим случаем, указано в нижнем индексе соответствующего коэффициента) в (26):

$$\mathbf{C}_{\perp,1} = -(\mathbf{D}_{12})^{-1} \cdot \mathbf{D}_{11}, \quad \mathbf{C}_{\perp,2} = -(\mathbf{D}_{22})^{-1} \cdot \mathbf{D}_{21}. \quad (27)$$

Далее подставим полученные выражения (27) для коэффициентов связанности в (26) и придем к двум условиям для каждого значения коэффициента $\mathbf{C}_{\perp}$ которые должны выполняться:

$$\mathbf{D}_{21} - \mathbf{D}_{22} \cdot (\mathbf{D}_{12})^{-1} \cdot \mathbf{D}_{11} = 0, \quad \mathbf{D}_{11} - \mathbf{D}_{12} \cdot (\mathbf{D}_{22})^{-1} \cdot \mathbf{D}_{21} = 0; \quad (28)$$

Преобразуем их, учитывая, что матрица $\mathbf{D}_{11}$ обладает структурой вида $d_{11}\mathbf{I}$:

$$\mathbf{D}_{21} - \mathbf{D}_{22} \cdot (\mathbf{D}_{12})^{-1} \cdot \mathbf{D}_{11} = \mathbf{D}_{21} \cdot \mathbf{D}_{12} - \mathbf{D}_{11} \cdot \mathbf{D}_{22} = -(\mathbf{D}_{11} \cdot \mathbf{D}_{22} - \mathbf{D}_{21} \cdot \mathbf{D}_{12}) = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{11} - \mathbf{D}_{12} \cdot (\mathbf{D}_{22})^{-1} \cdot \mathbf{D}_{21} &= \mathbf{D}_{11} \cdot (\mathbf{D}_{21})^{-1} - \mathbf{D}_{12} \cdot (\mathbf{D}_{22})^{-1} = \\ &= (\mathbf{D}_{21})^{-1} \cdot \mathbf{D}_{11} \cdot \mathbf{D}_{22} - \mathbf{D}_{12} = \mathbf{D}_{11} \cdot \mathbf{D}_{22} - \mathbf{D}_{21} \cdot \mathbf{D}_{12} = 0 \end{aligned}$$

Как видно из выкладок выше, условия (28) по сути своей аналогичны и сводятся к условию равенства нулю матрицы $\mathbf{D}_{11} \cdot \mathbf{D}_{22} - \mathbf{D}_{21} \cdot \mathbf{D}_{12}$ и, учитывая вид данной матрицы (12) (условие равенства определителя данной матрицы было условием существования поперечных связанных волн), получим систему из двух уравнений:

$$\begin{aligned} d_{11}d_{44} - d_{14}^2 + d_{15}^2 &= \rho\omega^4 + (v_{u\perp}^2 v_{\phi\perp}^2 - \rho J v_{s\perp}^4) k^4 - \\ &- (\rho v_{u\perp}^2 + v_{\phi\perp}^2) \omega^2 k^2 - \rho \Omega_1^2 \omega^2 + \left(\rho \Omega_1^2 v_{u\perp}^2 - \frac{1}{4} \rho J \Omega_1^4 \right) k^2 = 0, \\ d_{11}d_{45} - 2d_{14}d_{15} &= -ik \left[(\rho J \Omega_1^2 v_{s\perp}^2 - \Omega_3^2 v_{u\perp}^2) k^2 + \Omega_3^2 \omega^2 \right] = 0 \end{aligned}$$

Отсюда сразу можно увидеть одно, указанное ранее, решение $k = 0$, $\omega = \Omega_1^2$. Другое нетривиальное решение получим, выразив из второго соотношения

квадрат волнового числа k^2 через квадрат частоты ω^2 (или наоборот) и подставив в первое соотношение. После чего остается только решить полученное биквадратное уравнение относительно k^2 или ω^2 , соответственно. Выпишем полученное решение:

$$k^2 = \frac{\Omega_1^4 \Omega_3^2 (\Omega_3^2 - 4\rho v_{s\perp}^2)}{4v_{s\perp}^4 (\rho J^2 \Omega_1^4 - \Omega_3^4) + 4\Omega_1^2 \Omega_3^2 v_{s\perp}^2 (v_{\phi\perp}^2 - \rho v_{u\perp}^2)}, \quad (29)$$

$$\omega^2 = \frac{\Omega_1^4 (4\rho v_{s\perp}^2 - \Omega_3^2) (J^2 \Omega_1^2 v_{s\perp}^2 - \Omega_3^2 v_{u\perp}^2)}{4v_{s\perp}^4 (\rho J^2 \Omega_1^4 - \Omega_3^4) + 4\Omega_1^2 \Omega_3^2 v_{s\perp}^2 (v_{\phi\perp}^2 - \rho v_{u\perp}^2)}. \quad (30)$$

Таким образом, для найденных квадратов волнового числа и частоты, существует связанная волна перемещений и микровращений.

Заключение. В настоящей работе были получены следующие результаты:

- Приведена таблица пересчета скоростей продольных и поперечных упругих волн и волн кручения для различных наборов материальных констант.
- Получены дисперсионные уравнения для плоской монохроматической волны в линейном полуизотропном микрополярном теле.
- Найдено волновое число при котором возможно существование продольной связанной волны перемещений и микровращений в линейном микрополярном теле и вычислен коэффициент связанности компоненты перемещений и микровращения.
- Определены квадраты частоты, волнового числа (и коэффициент связанности поперечной волны перемещений и микровращений), при которых возможно существование поперечной связанной волны, для которой вектор амплитуд перемещений будет выражаться через вектор амплитуд микровращений.

В дальнейшем данный подход может быть применим к исследованию распространения плоских монохроматических связанных волн перемещений, микровращений, температурных колебаний в линейном микрополярном термоупругом полуизотропном теле.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. 100%.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262 “Связанная термомеханика микрополярных полуизотропных сред”).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. 100%.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00262 “Coupled thermomechanics of micropolar semi-isotropic media”).

Автор выражает благодарность Е.В. Мурашкину за плодотворное обсуждение данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Cosserat E., Cosserat F. Theory of deformable solid. (Translated by D.H. Delphenich). A. Hermann et sons, 1909.
- [2] Ericksen J. L., Truesdell C. Exact theory of stress and strain in rods and shells // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1957. Vol. 1, no. 1. P. 295–323. URL: <http://link.springer.com/10.1007/BF00298012>.
- [3] Eringen A.Cemal, Suhubi E.S. Nonlinear theory of simple micro-elastic solids—I // International Journal of Engineering Science. 1964. Vol. 2, no. 2. P. 189–203. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020722564900047>.
- [4] Suhubi E.S., Eringen A.Cemal. Nonlinear theory of micro-elastic solids—II // International Journal of Engineering Science. 1964. Vol. 2, no. 4. P. 389–404. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020722564900175>.
- [5] Kafadar C.B., Eringen A.Cemal. Micropolar media—I the classical theory // International Journal of Engineering Science. 1971. Vol. 9, no. 3. P. 271–305. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020722571900401>.
- [6] Germain P. The Method of Virtual Power in Continuum Mechanics. Part 2: Microstructure // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1973. Vol. 25, no. 3. P. 556–575.
- [7] Mindlin R. D. Micro-structure in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1964. Vol. 16, no. 1. P. 51–78. URL: <http://link.springer.com/10.1007/BF00248490>.
- [8] Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
- [9] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об определяющих псевдоскалярах гемитропных микрополярных сред в инверсных координатных системах // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2021. Т. 25, № 3. С. 457–474. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1870>.
- [10] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории гемитропных тензоров четвертого ранга в трехмерных пространствах Евклида // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2022. Т. 26, № 3. С. 592–602. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1941>.
- [11] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 3(57). С. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
- [12] Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. Москва : Наука, 1971. Р. 376.
- [13] Veblen Oswald, Thomas Tracy Yerkes. Extensions of relative tensors // Transactions of the American Mathematical Society. 1924. Vol. 26, no. 3. P. 373–377. URL: <https://www.ams.org/tran/1924-026-03/S0002-9947-1924-1501284-6/>.
- [14] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635>.

- [15] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. An Algebraic Algorithm of Pseudotensors Weights Eliminating and Recovering // *Mechanics of Solids*. 2022. Vol. 57, no. 6. P. 1416–1423. URL: <https://link.springer.com/10.3103/S0025654422060085>.
- [16] Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2023. № 1 (55). С. 110–121. URL: <https://limit21.ru/upload/articles/825.pdf>.
- [17] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Главная редакция физико-математической литературы. Москва : Наука, 1966. С. 577.
- [18] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: определения, теоремы, формулы / Ed. by И. Г. Арамановича. Москва : Физматгиз, 1973. Р. 832.

REFERENCES

- [1] Cosserat E., Cosserat F. Theory of deformable solid. (Translated by D.H. Delphenich). A. Hermann et sons, 1909.
- [2] Ericksen J. L., Truesdell C. Exact theory of stress and strain in rods and shells // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1957. Vol. 1, no. 1. P. 295–323. URL: <http://link.springer.com/10.1007/BF00298012>.
- [3] Eringen A.Cemal, Suhubi E.S. Nonlinear theory of simple micro-elastic solids—I // *International Journal of Engineering Science*. 1964. Vol. 2, no. 2. P. 189–203. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020722564900047>.
- [4] Suhubi E.S., Eringen A.Cemal. Nonlinear theory of micro-elastic solids—II // *International Journal of Engineering Science*. 1964. Vol. 2, no. 4. P. 389–404. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020722564900175>.
- [5] Kafadar C.B., Eringen A.Cemal. Micropolar media—I the classical theory // *International Journal of Engineering Science*. 1971. Vol. 9, no. 3. P. 271–305. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020722571900401>.
- [6] Germain P. The Method of Virtual Power in Continuum Mechanics. Part 2: Microstructure // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1973. Vol. 25, no. 3. P. 556–575.
- [7] Mindlin R. D. Micro-structure in linear elasticity // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1964. Vol. 16, no. 1. P. 51–78. URL: <http://link.springer.com/10.1007/BF00248490>.
- [8] Murashkin Eugenii Valeryevich, Radayev Yuri Nikolaevich. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // *Problems of Strength and Plasticity*. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. URL: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>. (In Russian).
- [9] Murashkin Eugenii Valeryevich, Radayev Yuri Nikolaevich. On the constitutive pseudoscalars of hemitropic micropolar media in inverse coordinate frames // *Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*. 2021. Vol. 25, no. 3. P. 457–474. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1870>. (in Russian).
- [10] Murashkin Eugenii Valeryevich, Radayev Yuri Nikolaevich. On the theory of fourth-rank hemitropic tensors in three-dimensional Euclidean spaces // *Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*. 2022. Vol. 26, no. 3. P. 592–602. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1941>. (in Russian).
- [11] Murashkin Eugenii Valeryevich, Radayev Yuri Nikolaevich. On the polyvariance of the base equations of coupled micropolar thermoelasticity // *Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state*. 2023. no. 3 (57). P. 112–128. URL: <https://limit21.ru/upload/articles/858.pdf>. (In Russian).

- [12] Sokolnikoff I.S. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. Applied mathematics series. New York, John Wiley and Sons, 1964. P. xii+361. ISBN: 9780471810520.
- [13] Veblen Oswald, Thomas Tracy Yerkes. Extensions of relative tensors // Transactions of the American Mathematical Society. 1924. Vol. 26, no. 3. P. 373–377. URL: <https://www.ams.org/tran/1924-026-03/S0002-9947-1924-1501284-6/>.
- [14] Radayev Y. N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2018. T. 22, № 3. С. 504–517. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635>. (in Russian).
- [15] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. An Algebraic Algorithm of Pseudotensors Weights Eliminating and Recovering // Mechanics of Solids. 2022. Vol. 57, no. 6. P. 1416–1423. URL: <https://link.springer.com/10.3103/S0025654422060085>.
- [16] Murashkin E. V. On the relationship of micropolar constitutive parameters of thermodynamic state potentials // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2023. no. 1 (55). P. 110–121. URL: <https://limit21.ru/upload/articles/825.pdf>. (In Russian).
- [17] Gantmacher F. R. The theory of matrices. New York : Chelsea publishing company, 1959. Vol. I.
- [18] Korn G. A., Korn T. M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. 2-nd edition. New York : McGraw-Hill Book Company, 1968. P. 1130.

С. И. Сенашов, О. В. Гомонова

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ С ПОМОЩЬЮ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

*Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика
М. Ф. Решетнева, Красноярск, Россия*

Аннотация. Для уравнений линейной теории упругости в трехмерном случае построены новые законы сохранения. С их помощью впервые решена краевая задача в перемещениях в общем случае для произвольного тела конечных размеров. Решение получено в виде квадратур по внешней границе тела. Показано, что для решения этой задачи достаточно трех фиксированных гармонических функций.

Ключевые слова: краевая задача, теория упругости, законы сохранения.

Сенашов Сергей Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информационных экономических систем; e-mail: sen@sibsau.ru; <https://orcid.org/0000-0001-5542-4781>; AuthorID: 214483

Гомонова Ольга Валерьевна, кандидат физико-математических наук, доцент; заведующий кафедрой высшей математики; e-mail: gomonova@sibsau.ru; AuthorID: 501126

для цитирования: Сенашов С. И., Гомонова О. В. Решение краевой задачи теории упругости в перемещениях с помощью законов сохранения // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 1(59). С. 130–134. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.011 EDN: WENANA

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

S. I. Senashov, O. V. Gomonova

SOLVING OF BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY IN DISPLACEMENTS USING CONSERVATION LAWS

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia

Abstract. New conservation laws are constructed for the equations of the linear theory of elasticity in the three-dimensional case. Using these laws, for the first time, a boundary value problem in displacements was solved in the general case for an arbitrary body of finite dimensions. The solution is obtained in quadratures along the outer boundary of the body. It is shown that three fixed harmonic functions are sufficient to solve considered problem.

Keywords: boundary value problem, theory of elasticity, conservation laws.

Sergei I. Senashov, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor; e-mail: sen@sibsau.ru; <https://orcid.org/0000-0001-5542-4781>; AuthorID: 214483

Olga V. Gomonova, PhD. Sci. Phys. & Math.; Assoc. Prof. e-mail: savostyanova@sibsau.ru; AuthorID: 501126

to cite this article: Senashov S.I., Gomonova O.V. Solving of boundary value problem of the theory of elasticity in displacements using conservation laws // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 1(59). p. 130–134. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.011 EDN: WEHAHA

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Для уравнений линейной теории упругости существует много способов построения точных решений с помощью гармонических функций (см., например [1]). Для этих уравнений упругости строились и законы сохранения [2], которые, однако, не нашли практического применения. В работе показано, что краевая задача в перемещениях может быть полностью решена с помощью законов сохранения, впервые приведенных в статье, и трех гармонических функций.

Рассмотрим уравнения линейной теории упругости в пространственном случае:

$$\begin{aligned} F_1 &= (\lambda + 2\mu)u_{xx}^1 + (\lambda + \mu)(u_{xy}^2 + u_{xz}^3) + \mu(u_{yy}^1 + u_{zz}^1) = 0, \\ F_2 &= (\lambda + 2\mu)u_{yy}^2 + (\lambda + \mu)(u_{xy}^1 + u_{yz}^3) + \mu(u_{xx}^2 + u_{zz}^2) = 0, \\ F_3 &= (\lambda + 2\mu)u_{zz}^3 + (\lambda + \mu)(u_{xz}^1 + u_{yz}^2) + \mu(u_{xx}^3 + u_{yy}^3) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где λ, μ – упругие постоянные Ламе, u^i , ($i = 1, 2, 3$) – компоненты вектора деформации; индекс внизу означает производную по соответствующим переменным. Поставим для этих уравнений следующую краевую задачу:

$$u^1|_S = u_0^1(x, y, z), \quad u^2|_S = u_0^2(x, y, z), \quad u^3|_S = u_0^3(x, y, z). \quad (2)$$

Здесь S – замкнутая поверхность, ограничивающая объем V , u_0^i ($i = 1, 2, 3$) – некоторые заданные функции.

Определение. Законом сохранения для системы уравнений (1) назовем выражение вида

$$A_x + B_y + C_z = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2 + \omega_3 F_3,$$

где A, B, C называются компонентами сохраняющегося тока, ω_i ($i = 1, 2, 3$) – некоторые линейные дифференциальные операторы, одновременно не равные тождественно нулю. В этой работе A, B, C, ω_i – функции, зависящие только от независимых и независимых переменных.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Система уравнений (1) допускает закон сохранения со следующими сохраняющимися токами:

$$A = w^1 u_x^1 + w^2 u_x^2 + w^3 u_x^3, \quad B = w^1 u_y^1 + w^2 u_y^2 + w^3 u_y^3, \quad C = w^1 u_z^1 + w^2 u_z^2 + w^3 u_z^3. \quad (3)$$

Здесь $(u^1, u^2, u^3), (w^1, w^2, w^3)$, – произвольные решения системы уравнений (1).

Замечание. Система (1) допускает и другие законы сохранения с другими сохраняющимися токами, отличными от (3). Они здесь не приведены, поскольку не дают решения задачи (1), (2).

Решим задачу (1)–(2), поставленную выше.

Из (3) по формуле Гаусса – Остроградского следует, что

$$\iiint_V (A_x + B_y + C_z) dx dy dz = \oint_S A dy dz + B dz dx + C dx dy = 0. \quad (4)$$

Пусть (x_0, y_0, z_0) – некоторая внутренняя точка области V и

$$\begin{aligned} u^1 &= \frac{1}{r} - \alpha \frac{\partial}{\partial x} \frac{x - x_0}{r}, \quad u^2 = -\alpha \frac{\partial}{\partial y} \frac{x - x_0}{r}, \quad u^3 = -\alpha \frac{\partial}{\partial z} \frac{x - x_0}{r}, \\ 4\alpha &= \frac{1}{1 - \nu}, \quad r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2, \end{aligned} \quad (5)$$

где ν – коэффициент Пуассона. Тогда (5) есть решение системы уравнений (1) [1].

Рассмотрим шар радиуса ε : $\varepsilon^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$, описанный вокруг точки (x_0, y_0, z_0) . Тогда из (4) имеем:

$$\oint\!\!\!\oint_S A dy dz + B dz dx + C dx dy = - \oint\!\!\!\oint_\varepsilon A dy dz + B dz dx + C dx dy. \quad (6)$$

Сделаем в правой части равенства (6) замену по следующим формулам:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \varepsilon \cos \psi \cos \varphi, \quad y = y_0 + \varepsilon \sin \psi \cos \varphi, \quad z = z_0 + \varepsilon \sin \psi, \\ 0 &\leq \psi \leq 2\pi, \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ из (4)–(6) получаем:

$$\begin{aligned} &aw^1(x_0, y_0, z_0) = \\ &= \oint\!\!\!\oint_S u_0^1 \left(\frac{1}{r} - \alpha \frac{\partial}{\partial x} \frac{x - x_0}{r} \right) dy dz - u_0^2 \alpha \frac{\partial}{\partial y} \frac{x - x_0}{r} dz dx - u_0^3 \alpha \frac{\partial}{\partial z} \frac{x - x_0}{r} dx dy, \end{aligned} \quad (7)$$

здесь a – постоянная, равная $-\frac{8}{5}\alpha \left(\lambda + \frac{8}{3}\mu \right) + \frac{4}{3}\pi(\lambda + \mu)$.

Аналогично, если в (6) положить

$$u^1 = -\alpha \frac{\partial}{\partial x} \frac{y - y_0}{r}, \quad u^2 = \frac{1}{r} - \alpha \frac{\partial}{\partial y} \frac{y - y_0}{r}, \quad u^3 = -\alpha \frac{\partial}{\partial z} \frac{y - y_0}{r},$$

то получаем:

$$\begin{aligned} &bw^2(x_0, y_0, z_0) = \\ &= \oint\!\!\!\oint_S -u_0^1 \alpha \frac{\partial}{\partial x} \frac{y - y_0}{r} dy dz + u_0^2 \left(\frac{1}{r} - \alpha \frac{\partial}{\partial y} \frac{y - y_0}{r} \right) dz dx - u_0^3 \alpha \frac{\partial}{\partial z} \frac{y - y_0}{r} dx dy, \end{aligned} \quad (8)$$

где b – постоянная, равная $-\frac{9}{32}\pi^2\alpha\mu + \frac{4}{5}\alpha\pi \left(3\lambda + \frac{11}{3}\mu \right) + \frac{8}{3}\mu\pi$.

Таким же образом, если в (6) положить

$$u^1 = -\alpha \frac{\partial}{\partial x} \frac{z - z_0}{r}, \quad u^2 = -\alpha \frac{\partial}{\partial y} \frac{z - z_0}{r}, \quad u^3 = \frac{1}{r} - \alpha \frac{\partial}{\partial z} \frac{z - z_0}{r},$$

получаем:

$$w^3(x_0, y_0, z_0) = \iint_S -u_0^1 \alpha \frac{\partial}{\partial x} \frac{z - z_0}{r} dydz - u_0^2 \alpha \frac{\partial}{\partial y} \frac{z - z_0}{r} dzdx + u_0^3 \left(\frac{1}{r} - \alpha \frac{\partial}{\partial z} \frac{z - z_0}{r} \right) dxdy, \quad (9)$$

где c – постоянная, равная $\frac{3}{8}\pi^2\alpha\mu - \frac{4}{5}\alpha\pi \left(2\lambda + \frac{19}{3}\mu\right) + \frac{4}{3}\pi(\lambda + 4\mu)$.

Из формул (7) – (9) можно найти решение уравнений (1) в любой внутренней точке области V . Тем самым краевая задача (2) для системы уравнений (1) полностью решена. Отметим, что подобная задача для случая двумерной упругости решена в [3].

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The contribution of the authors is equivalent.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
- [2] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 639 с.
- [3] Аннин Б. Д., Сенашов С. И., Гомонова О. В. Решение краевых задач уравнений двумерной теории упругости с помощью законов сохранения // Вестник СибГУ. 2020. № 3 Т. 21. С. 290–294.

REFERENCES

- [1] Novatsky V. Theory of Elasticity. Moscow: Mir, 1975. 872 p. (in Russian)
- [2] Olver P. Application of Lie Groups to Differential Equations. Moscow: Mir, 1989. 639 p. (in Russian)
- [3] Annin B. D., Senashov S. I., Gomonova O. V. Solving of Boundary Value Problems of 2-dimensional Elasticity Using Conservation Laws // Vestnik SibSAU. 2020, № 3 Vol. 21. Pp. 290–294.

Ю. В. Немировский^{1,2}, С. В. Тихонов³

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ НАГРУЗОК N -СЛОЙНОГО ФИЗИЧЕСКИ-НЕЛИНЕЙНОГО БЕТОННОГО СТЕРЖНЯ

¹Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия

³Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. В данной работе рассматривается задача изгиба многослойного бетонного стержня поперечными нагрузками при наличии зон упругого и нелинейно-неупругого деформирования. Предполагается, что материал может состоять из произвольного количества слоев, отличающихся физическими свойствами. Нагрузки таковы, что верхняя часть стержня находится в области сжатия, а нижняя в области растяжения. В результате действия нагрузок, часть слоев будет находиться в области упругого деформирования, часть в области нелинейного квазиупругого деформирования, а остальная содержать границу раздела упругой и нелинейной квазиупругой области. Решается задача определения минимальных и максимальных нагрузок для каждой из возможных конфигураций областей в стержне. Приводится алгоритм решения в математическом пакете Maple и сравнение полученных результатов с аналитическими расчетами полученными ранее.

Ключевые слова: бетонные стержни, аналитические решения, физическая нелинейность, упругость, поперечные нагрузки, нейтральная линия.

Немировский Юрий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник; e-mail: nemiryury@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-4281-4358>; AuthorID: 2403

Тихонов Сергей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий; e-mail: strangcheb@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-7628-3364>; AuthorID: 183385

для цитирования: Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Определение предельных нагрузок n -слойного физически-нелинейного бетонного стержня // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 1(59). С. 135–143. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.009 EDN:RRDADP

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© Немировский Ю. В., Тихонов С. В. 2024

Поступила: 19.04.2024; принята в печать: 01.06.2024; опубликована: 05.07.2024.

Yu. V. Nemirovskii^{1,2}, S. V. Tikhonov³

DETERMINATION OF THE ULTIMATE LOADS OF AN N -LAYER PHYSICALLY NONLINEAR CONCRETE ROD

¹*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia*

²*Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia*

³*I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

Abstract. This paper considers the problem of bending a multilayer concrete rod under transverse loads in the presence of zones of elastic and nonlinear-inelastic deformation. It is assumed that the material can consist of an arbitrary number of layers that differ in physical properties. The loads are such that the upper part of the rod is in the compression region, and the lower part is in the tension region. As a result of the action of loads, some of the layers will be in the region of elastic deformation, some in the region of nonlinear quasi-elastic deformation, and the rest will contain the interface between the elastic and nonlinear quasi-elastic regions. The problem of determining the minimum and maximum loads for each of the possible configurations of areas in the rod is solved. The solution algorithm in the Maple mathematical package is presented and the results obtained are compared with analytical calculations obtained earlier.

Keywords: concrete rods, analytical solutions, physical nonlinearity, elasticity, transverse loads, neutral line.

Yuri V. Nemirovskii, Dr. Sci. Phys.&Math., Professor, Leading Research Worker; e-mail: nemiryury@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-4281-4358>; AuthorID: 2403

Sergey V. Tikhonov, PhD, Assoc. Prof.; e-mail: strangcheb@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-7628-3364>; AuthorID: 183385

to cite this article: Nemirovskii Yu. V., Tikhonov S. V. Determination of the ultimate loads of an n -layer physically nonlinear concrete rod // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 1(59). p. 135–143. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.009 EDN:RRDADP

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Современные технологии производства железобетонных изделий позволяют создавать многослойные конструкции, где в каждом из слоев может быть реализована своя марка бетона [1]. При проектировании зданий и сооружений часто возникает необходимость расчета стержней на несущую способность. Указанные задачи для многослойных железобетонных стержневых конструкций с учетом влияния формы поперечного сечения, состава фазовых материалов на несущую способность рассматривались в работе [2]. При воздействии поперечных нагрузок в слоях стержня могут возникать как области упругого, так и нелинейного квазиупругого деформирования. Аналитические и численные расчеты для указанных стержней в случае трех слоев были рассмотрены в работах [3,4]. С возрастанием количества слоев соответственно возрастает и количество различных случаев, в которых каждый слой может находиться. Если считать, что слои могут находиться в областях упругого деформирования, нелинейного квазиупругого деформирования и содержать границу раздела упругого и нелинейного квазиупругого деформирования, то в общем случае возможно 3^n различных случаев. Задача поиска верхней и нижней границ нагрузок для каждого конкретного случая рассматривается в данной работе.

1. Основные соотношения. Рассмотрим n -слойный стержень симметричного сечения [5].

Комбинацию из возможных случаев будем обозначать через $(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n)$, где значение i_j для j -го слоя равно 0 для слоя, находящегося целиком в области упругого деформирования, 1 – для нелинейного квазиупругого и 2 – с границей раздела упругой и нелинейной областей.

В данной работе будем считать справедливыми классические кинематические гипотезы Кирхгофа-Лява, при этом имеет место одноосное напряженное состояние, тогда для продольного усилия и изгибающего момента будет справедливо

$$M_y(x) = -2 \sum_{i \in A_e} \int_{-h_i}^{-h_{i-1}} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^e z dy - 2 \sum_{i \in A_n} \int_{-h_i}^{-h_{i-1}} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^n z dy - \quad (1)$$

$$-2 \sum_{i \in A_z} \left(\int_{-h_i}^{z_i} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^n z dy + \int_{z_i}^{-h_{i-1}} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^e z dy \right) - 2 \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^e z dy,$$

$$N(x) = -2 \sum_{i \in A_e} \int_{-h_i}^{-h_{i-1}} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^e dy - 2 \sum_{i \in A_n} \int_{-h_i}^{-h_{i-1}} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^n dy - \quad (2)$$

$$-2 \sum_{i \in A_z} \left(\int_{-h_i}^{z_i} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^n dy + \int_{z_i}^{-h_{i-1}} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^e dy \right) - 2 \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^e dy,$$

где z_i – граница раздела областей упругого и нелинейного квазиупругого деформирования.

Значения напряжений определяются из соотношений [6–8]

$$\sigma_i^e = E_i \varepsilon, \quad \sigma_i^n = A_{1i} \varepsilon + A_{2i} \varepsilon^2. \quad (3)$$

Будем рассматривать задачу изгиба шарнирно-опертого стержня равномерной поперечной нагрузкой q (рис. 1). Тогда моменты и усилия для данной статически определимой задачи будут равны

$$M_y(x) = q \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right), \quad N(x) = 0. \quad (4)$$

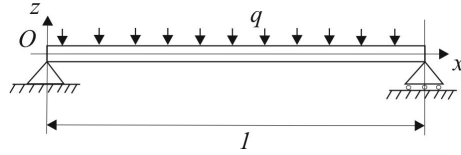


Рис. 1. Шарнирно-опертый стержень под действием равномерно-распределенной нагрузки

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \frac{\sigma}{\sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{l} = 1, \quad \tilde{b}_i = \frac{b_i}{l}, \quad \tilde{h}_i = \frac{h_i}{l}, \\ \tilde{q} &= q \frac{1}{l \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{Q} = Q \frac{1}{l^2 \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{N} = N \frac{1}{l^2 \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{M} = M \frac{1}{l \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{l}, \end{aligned} \quad (5)$$

где обезразмеривающие величины такие: σ_{1*}^- – предел прочности при сжатии бетона марки B10, l – длина стержня, q – величина распределенной нагрузки, Q – величина перерезывающей силы, M – величина изгибающего момента, N – продольного усилия, w – величина прогиба стержня.

Для деформации справедливы соотношения

$$\varepsilon(x, z) = z_0(x) \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} - z \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2}, \quad \varkappa(x) = \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2}, \quad (6)$$

где $w_0(x)$ – величина прогиба осевой линии стержня, $z_0(x)$ – величина, определяющая положение нейтральной линии, $\varkappa(x)$ – кривизна осевой линии стержня.

Для определения неизвестных границ раздела областей $z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_k}$ справедливы соотношения

$$\frac{\varepsilon_{0j_1}^+}{1 - z_{j_1}(x)} = \frac{\varepsilon_{0j_2}^+}{1 - z_{j_2}(x)} = \dots = \frac{\varepsilon_{0j_k}^+}{1 - z_{j_k}(x)}. \quad (7)$$

Решая совместно уравнения (1)–(6) для заданной конфигурации $(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n)$ относительно неизвестных $z_0, z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_k}$, можно получить распределение деформаций и моментов вдоль всей длины стержня. Причем полученные значения деформации для каждого слоя должны удовлетворять соответствующим ограничениям [5].

2. Определение предельных нагрузок. Минимально возможную нагрузку для заданной конфигурации $(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n)$ будем обозначать через $q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n)}^-$, а максимально возможную через $q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n)}^+$. Указанные предельные нагрузки определим из соотношений

$$q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n)}^- = \min\{q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), 1}^-, \dots, q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), k}^-, \dots, q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), n}^-\}, \quad (8)$$

$$q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n)}^+ = \min\{q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), 1}^+, \dots, q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), k}^+, \dots, q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), n}^+\}, \quad (9)$$

где нагрузка $q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), k}^\pm$ рассчитывается для конфигурации $(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n)$ в предположении, что минимальное значение (знак минус в верхнем индексе) или максимальное значение (знак плюс в верхнем индексе) достигается в слое с индексом k .

Кривизну $\varkappa$ будем рассматривать как функцию от ε и z , тогда из уравнения (6) получим

$$\varkappa(\varepsilon, z) = \frac{\varepsilon}{z_0 - z}. \quad (10)$$

Для определения нагрузок $q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), k}^\pm$ в уравнении (4) примем $q = q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), k}^\pm$ и положим значение кривизны равным (10) при значениях ε и z из таблицы 1 в уравнении (6). Решая совместно полученные уравнения (1)-(6) относительно $q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), k}^\pm$, z_0 , z_{j1} , z_{j2} , ..., z_{jk} для заданного сечения x , можем определить искомые предельные нагрузки.

i_k	$q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), k}^-$	$q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), k}^+$
0	$\varkappa(0, -h_{k-1})$	$\varkappa(\varepsilon_{0k}^+, -h_k)$
1	$\varkappa(\varepsilon_{0k}^+, -h_{k-1})$	$\varkappa(\varepsilon_{*k}^+, -h_k)$
2	$\varkappa(\varepsilon_{0k}^+, -h_k)$	$\varkappa(\varepsilon_{0k}^+, -h_{k-1})$

Таблица 1. Кривизна стержня при минимальной и максимальной нагрузках для слоя с индексом k

Значение кривизны для соответствующих значений нагрузок из таблицы 1 и соотношения (10) подставим в соотношение для определения деформации (6). Тогда соотношения для определения деформации в зависимости от значения i_k и того, искалась ли минимальная или максимальная нагрузка, примут вид, показанный в таблице 2.

Найденные значения положения нейтральной линии z_0 в заданном сечении позволяют найти значения деформации в каждом слое по соотношениям (6). В зависимости от слоя k и того, максимальное или минимальное значение деформации искалось, определим значение деформации в заданном сечении стержня x . Полученные решения будут иметь место, если для каждого слоя $j = 1, 2, \dots, n$ найденные значения деформации на верхних и нижних границах в каждом сечении x не будут превышать предельные значения (таблица 4).

i_k	$q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), k}^-$	$q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), k}^+$
0	$\varepsilon(z) = 0$	$\varepsilon(z) = \frac{\varepsilon_{0k}^+}{z_0 + h_k}(z_0 - z)$
1	$\varepsilon(z) = \frac{\varepsilon_{0k}^+}{z_0 + h_{k-1}}(z_0 - z)$	$\varepsilon(z) = \frac{\varepsilon_{*k}^+}{z_0 + h_{k-1}}(z_0 - z)$
2	$\varepsilon(z) = \frac{\varepsilon_{0k}^+}{z_0 + h_k}(z_0 - z)$	$\varepsilon(z) = \frac{\varepsilon_{0k}^+}{z_0 + h_{k-1}}(z_0 - z)$

Таблица 2. Деформация стержня при минимальной и максимальной нагрузках для слоя с индексом k

i_j	Деформация на нижней границе слоя	Деформация на верхней границе слоя
0	$-\varepsilon_{0j}^- \leq \varepsilon(-h_{i_j-1})$	$\varepsilon(-h_{i_j}) \leq \varepsilon_{0j}^+$
1	$\varepsilon_{0j}^+ \leq \varepsilon(-h_{i_j-1})$	$\varepsilon(-h_{i_j}) \leq \varepsilon_{*j}^+$
2	$\varepsilon(-h_{i_j-1}) \leq \varepsilon_{0j}^+$	$\varepsilon_{0j}^+ \leq \varepsilon(-h_{i_j}) \leq \varepsilon_{*j}^+$

Таблица 3. Условия, которым должна удовлетворять деформация в слое с индексом j

3. Результаты расчета. Для иллюстрации методики расчета предельных нагрузок возьмем физически-нелинейный бетонный стержень, полностью аналогичный рассмотренному в [4], который в дальнейшем будем называть конфигурацией 1

$$b_1 = 0,03, \quad b_2 = 0,04, \quad \Delta_1 = 0,06, \quad \Delta_2 = 0,04, \quad (11)$$

где первый слой реализован из бетона марки В10, второй – марки В30. Соответственно, все обозначения и предположения будут соответствовать работе [4].

№	Марка бетона	E^+	$\varepsilon_0^+, 10^{-2}$	$\varepsilon_*^+, 10^{-2}$	A_{1i}	$A_{2i}, 10^6$
1	В10	1232,92	0,005	0,015	1479,50	-4,93167
2	В30	2629,23	0,005	0,015	3155,08	-10,517
3	В50	3312,54	0,00375	0,015	3975,04	-13,250

Таблица 4. Физические параметры бетонов

Физические параметры бетонов В10, В30, В50, используемые в расчетах, прием согласно таблице 2 [9].

Рассмотрим конфигурацию $(0, 0)$, которая соответствует случаю, когда первый и второй слои полностью находятся в области упругого деформирования. В этом случае минимальное значение деформации и нагрузки будет равно 0

$$q_{(0,0)}^- = q_{(0,0),1}^- = q_{(0,0),2}^- = 0.$$

Максимальное значение нагрузки для конфигурации $(0, 0)$ будет, когда деформация достигнет значения предельной упругой ε_{0k}^+ на верхней границе слоя.

В этом случае нагрузка, соответствующая появлению нелинейной области во втором слое стержня, будет равна

$$q_{(0,0),2}^+ = 0,00048236,$$

а для нагрузки $q_{(0,0),1}^+$ отсутствуют соответствующие деформации, удовлетворяющие условиям в таблице 4.

Нагрузка $q_{(0,2),2}^-$ очевидно будет равна $q_{(0,0),2}^+$

$$q_{(0,2),2}^- = 0,00048236.$$

Максимальное значение нагрузки для конфигурации (0, 2) будет являться $q_{(0,2),1}^+$, а для $q_{(0,2),2}^+$ отсутствуют соответствующие деформации, удовлетворяющие условиям в таблице 4

$$q_{(0,2),1}^+ = 0,0007523.$$

Полученная нагрузка $q_{(0,2),1}^+$ будет равна минимальным нагрузкам для конфигураций (2, 1) и (2, 2)

$$q_{(2,1),1}^- = q_{(2,2),1}^- = q_{(2,2),2}^- = 0,0007523.$$

Откуда очевидно, что при $q \geq q_{(2,1),1}^-$ весь второй слой будет в области нелинейного деформирования и одновременно появится нелинейная область на верхней границе первого слоя.

Наибольшая нагрузка для конфигурации (2, 1) будет равна

$$q_{(2,1),2}^+ = 0,001112.$$

Указанные решения полностью совпадают с решениями, полученными в работе [9].

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The authors declare that they have no competing interests.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мут А. Р. Современные технологии производства ЖБИ // Бетон и железобетон. Оборудование. Материалы. Технологии. 2009. С. 20–23.
- [2] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Несущая способность многослойных бетонных стержней. Чебоксары : Изд-во Чуваш-го ун-та, 2022. 180 с.

- [3] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Определение предельных нагрузок при поперечном изгибе многослойных предельно-упругих бетонных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 1(55). С. 86–101. EDN: PSLREI. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.0010.
- [4] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Об определении положения нейтральной линии в случае предельно-упругого изгиба многослойных физически-нелинейных бетонных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 2(56). С. 41–52. EDN: TQWQEM. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.005.
- [5] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Предельно-упругий изгиб n-слойного физически-нелинейного бетонного стержня // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 3(57). С. 91–99. EDN: DJNEIN. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.008.
- [6] Мищенко А. В. Прямая и обратная задачи деформирования слоистых стержней с учетом физической нелинейности // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: труды XIX Всероссийской конференции, Бийск, 28-31 августа 2005 г. Параллель, 2005. С. 184–188.
- [7] Мищенко А. В., Немировский Ю. В. Нелинейное деформирование бетонных элементов при продольно-поперечном изгибе // Известия вузов. Строительство. 2013. № 4. С. 133–146. EDN: QOLBMF.
- [8] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Продольно-поперечный изгиб многослойного стержня из физически нелинейного материала // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2020. № 6. С. 14–23. EDN: RRIWCJ. DOI: 10.31857/S0572329920060112.
- [9] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Продольно-поперечный изгиб физически-нелинейных железобетонных балок // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 3(49). С. 85–93. EDN: KFUFUA. DOI: 10.37972/chgpu.2021.49.3.008.

REFERENCES

- [1] Muth A. R. Modern technologies for the production of concrete goods // Concrete and reinforced concrete. Equipment. Materials. Technologies. 2009. P. 20–23. (in Russian).
- [2] Nemirovsky Yu. V., Tikhonov S. V. Load-bearing capacity of multilayer concrete bars. Cheboksary : Publishing house of Chuvash University, 2022. 180 p. (in Russian).
- [3] Nemirovsky Yu. V., Tikhonov S. V. Determination of ultimate loads during transverse bending of multilayer extremely elastic concrete rods // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2023. no. 1(55). P. 86–101. EDN: PSLREI. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.0010. (in Russian).
- [4] Nemirovsky Yu. V., Tikhonov S. V. On determining the position of the neutral line in the case of extremely elastic bending of multilayer physically nonlinear concrete rods // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2023. no. 2(56). P. 41–52. EDN: TQWQEM. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.005. (in Russian).
- [5] Nemirovsky Yu. V., Tikhonov S. V. Ultimate elastic bending of an n-layer physically nonlinear concrete rod // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2023. № 3(57). С. 91–99. EDN: DJNEIN. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.008. (in Russian).
- [6] Mishchenko A. V. Direct and inverse problems of deformation of layered rods taking into account physical nonlinearity // Numerical methods for solving problems in the theory of

- elasticity and plasticity: proceedings of the XIX All-Russian Conference, Biysk, August 28-31, 2005. Parallel, 2005. P. 184–188. (in Russian).
- [7] Mishchenko A. V., Neimirovsky Yu. V. Nonlinear deformation of concrete elements during longitudinal-transverse bending // News of universities. Construction. 2013. no. 4. P. 133–146. EDN: QOLBMF. (in Russian).
- [8] Nemirovsky Yu. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of a multilayer rod made of a physically nonlinear material // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of solids. 2020. no. 6. P. 14–23. EDN: RRIWCJ. DOI: 10.31857/S0572329920060112. (in Russian).
- [9] Nemirovsky Yu. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of physically nonlinear reinforced concrete beams // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2021. no. 3(49). P. 85–93. EDN: KFUFUA. DOI: 10.37972/chgpu.2021.49.3.008. (in Russian).

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vlgzub@gmail.com) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

Каюмов Рашид Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Келлер Илья Эрнстович (kie@icmm.ru) – доктор физико-математических наук, доцент, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Коссович Леонид Юрьевич (president@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матвеев Сергей Владимирович (sergio2100@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Матченко Николай Михайлович (eks_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Минаева Надежда Витальевна (nminaeva@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Миронов Борис Гурьевич (mbg.chspu@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Немировский Юрий Владимирович (nemiryury@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

Орлов Виктор Николаевич (orlowvn@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

Спорохин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович (strangheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должна быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала predel21@mail.ru и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст,

который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки на русском и английском языках**; **сведения о всех авторах на русском и английском языках**: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2e с использованием стиля predel.sty. Стиль predel.sty и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки BibTeX. Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Стадник Н. Э.</i> О мультивесовых формулировках краевых условий в теориях поверхностного роста.....	5
<i>Артемов М. А., Барановский Е. С., Меджидов Р. Г., Соломатин Д. И.</i> О появлении пластических областей во вращающемся диске.....	21
<i>Ченцов А. В., Сокоренко А. В.</i> Исследование моделей и механических свойств структур Миура-Ори	39
<i>Останин М. В., Любимова О. Н., Свердлов Е. А.</i> Приближение краевых условий в аналитическом решении задачи о самоуравновешенных напряжениях для цилиндрического образца горной породы.....	50
<i>Иванов С. К.</i> Об оценке точности результатов компьютерного моделирования при неточных параметрах биномиального распределения.....	61
<i>Корнилов А. Я., Орлов В. Н.</i> Об одном аналитическом решении задачи обтекания тандема из двух профилей потоком идеальной несжимаемой жидкости	76
<i>Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л., Попова Е. О.</i> О теплотворной способности необратимого деформирования материала пробки в круглой трубе	88
<i>Немировский Ю. В.</i> Уточнение решения предельно допустимых деформаций гибридных полиметаллических ферм Мизеса	101
<i>Сенашов С. И., Савостьянова И. Л.</i> Изгиб упруго-пластического бруса коробчатого сечения	107
<i>Нестеров Т. К.</i> Плоские монохроматические связанные волны перемещений и микровращений в линейном полуизотропном микрополярном теле.....	115
<i>Сенашов С. И., Гомонова О. В.</i> Решение краевой задачи теории упругости в перемещениях с помощью законов сохранения.....	130
<i>Немировский Ю. В., Тихонов С. В.</i> Определение предельных нагрузок n -слойного физически-нелинейного бетонного стержня	135
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	144
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	147
СОДЕРЖАНИЕ	149

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2024. № 1 (59)**

Отв. за выпуск: С. В. Тихонов

Технические редакторы: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Компьютерная верстка: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Макет: С. В. Тихонов

Подписано в печать 28.06.2024. Выход в свет 05.07.2024.

Формат 70х100/8. Бумага писчая.

Печать оперативная. Typeset by L^AT_EX 2_ε. Усл. печ. л. 18,6.

Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ № 328

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском центре Чувашского государственного
педагогического университета им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38