

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ**

Научный журнал

№ 4(66)

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.

Выходит 4 раза в год

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций

(свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук, включён в Единый
государственный перечень научных изданий — «Белый список» (уровень 3)

Подписной индекс в каталоге “Пресса России” 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко, С. В. Тихонов

Ответственные секретари: С. В. Матвеев, Е. В. Мурашкин

Редакционный совет: Ю. Н. Радаев, И. Э. Келлер, В. П. Радченко,
А. И. Шашкин, Л. Ю. Коссович, А. А. Маркин, Л. А. Игумнов, А. А. Алексеев,
А. А. Буренин

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. Н. Богданов, А. Н. Власов,
Д. В. Георгиевский, В. В. Глаголев, Д. В. Иванов, Р. А. Каюмов, Д. М. Климов,
В. А. Ковалев, Д. С. Лисовенко, Е. В. Ломакин, Л. А. Максимова,
Н. В. Минаева, Ю. В. Немировский, Р. И. Непершин, В. Н. Орлов,
А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев,
А. Д. Чернышов, А. В. Чигарев

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, Президентский бульвар, 19А

Адрес издателя: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Тел.: (8352) 22-28-71, доб. 1182

E-mail: predel21@mail.ru

WWW: <https://limit21.ru>

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

**VESTNIK
CHUVASHSKOGO GOSUDARSTVENNOGO PEDAGOGICHESKOGO
UNIVERSITETA IM. I. YA. YAKOVLEVA
SERIYA: MEKHANIKA PREDEL'NOGO SOSTOYANIYA**

**Scientific journal
№ 4(66)**

The Journal founder: I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Founders of the series: D. D. Ivlev, D. M. Klimov, L. A. Maksimova, A. V. Manzhirov,
B. G. Mironov, G. K. Mikhailov, Yu. N. Radaev, E. I. Shemyakin

Published since March 2007

Published four times a year

Registered in Federal Service for Supervision of Communications

Information Technology, and Mass Media "Roskomnadzor"

(Accreditation Certificate PI No. FS77-58094 d/d 20 May, 2014).

Hard copy of the Journal is available by subscription from the catalogue "Press of Russia"
(reg. No. 13109).

Editor-in-chief: B. G. Mironov

Executive Editor: Yu. N. Radayev

Associate Editor: N. M. Matchenko, S. V. Tikhonov

Executive Secretary: E. V. Murashkin, S. V. Matveev

Editorial Council: Yu. N. Radayev, I. E. Keller, V. P. Radchenko, A. I. Shashkin,
L. Yu. Kossovich, A. A. Markin, L. A. Igumnov, A. A. Alekseev, A. A. Burenin

Editorial Board: V. G. Bazhenov, A. N. Bogdanov, A. N. Vlasov,
D. V. Georgievskiy, V. V. Glagolev, D. V. Ivanov, R. A. Kayumov, D. M. Klimov,
V. A. Kovalev, D. S. Lisovenko, E. V. Lomakin, L. A. Maksimova, N. V. Minaeva,
Yu. V. Nemorovskii, R. I. Nepershin, V. N. Orlov, A. F. Revuzhenko, S. I. Senashov,
A. N. Sporihin, A. A. Treshev, A. D. Chernishov, A. V. Chigarev

Postal address: ul. K. Marks 38, 428000 Cheboksary, Russia

Phone: +7 352 22 28 71, ex.ph. 1182

E-mail: predel21@mail.ru

Journal website: <http://limit21.ru>



С. В. Тихонов¹, Б. Г. Миронов²

ДЮИС ДАНИЛОВИЧ ИВЛЕВ. К 95-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

¹ Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, Чебоксары, Россия

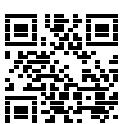
² Российский университет транспорта, Москва, Россия

Аннотация. Статья посвящена доктору физико-математических наук, профессору Ивлеву Дюису Даниловичу. В настоящей библиографической заметке приводятся биографические сведения об этом крупном ученом-механике.

Ключевые слова: механика предельного состояния, пластиичность, персоналии

Тихонов Сергей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий; e-mail: strangcheb@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-7628-3364>; AuthorID: 183385

Миронов Борис Григорьевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики и естественных наук; e-mail: mbg.chgpi@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0002-2116-8908>; AuthorID: 13384



для цитирования: Тихонов С. В., Миронов Б. Г. Дюис Данилович Ивлев. К 95-летию со дня рождения // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 4(66). С. 7–11. DOI: 10.37972/chgpi.2025.66.4.002. EDN: MVDIDZ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

S. V. Tikhonov¹, B. G. Mironov²

DYUIS DANILOVICH IVLEV. ON THE OCCASION OF HIS 90TH BIRTHDAY

¹*I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

²*Russian University of Transport, Moscow, Russia*

Abstract. This article is dedicated to Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor Dyuis Danilovich Ivlev. This bibliographic note provides biographical information about this leading mechanical scientist.

Keywords: limit state mechanics, plasticity, personalities.

Sergey V. Tikhonov, PhD, Assoc. Prof.; e-mail: strangcheb@mail.ru;
<https://orcid.org/0000-0002-7628-3364>; AuthorID: 183385

Boris G. Mironov, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor; e-mail: mbg.chspu@yandex.ru;
<https://orcid.org/0000-0002-2116-8908>; AuthorID: 13384



to cite this article: Tikhonov S. V., Mironov B. G. Dyuis Danilovich Ivlev. On the occasion of his 90th birthday // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 4(66). p. 7–11. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.002

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

6 сентября 2025 исполнилось 95 лет со дня рождения выдающегося российского ученого в области механики деформируемого твердого тела, теории упругости и пластичности, теории предельного состояния и несущей способности тел и конструкций доктора физико-математических наук, профессора Дюиса Даниловича Ивлева.

Дюис Данилович Ивлев родился в г. Чебоксары в семье преподавателя Чувашского педагогического института (сейчас Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева) Данила Осиповича Ивлева. После окончания средней школы в 1948 г. он поступил на механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова. Как он сам указывал в своих воспоминаниях, в выборе механико-математического факультета МГУ сыграло много обстоятельств личных и не совсем личных, например, таких как географическое расположение факультета в то время на Моховой улице. Впоследствии, как он всегда указывал, о своем выборе никогда не жалел. В Университете он активно посещал лекции А. Г. Куроша, С. Н. Бахвалова, А. Я. Хинчина, А. П. Минакова, П. К. Рашевского, А. И. Маркушевича, С. Л. Соболева, М. М. Филоненко-Бородича, А. А. Космодемьянского, Л. И. Седова и др. Деканом мехмата в те времена был В. В. Голубев, заместителем декана по научной части — П. В. Мясников, отец В. П. Мясникова, позже должность декана занял Ю. Н. Работнов. Курсовая работа на третьем году обучения в университете была написана Дюисом Даниловичем под руководством Андрея Петровича Минакова и была связана с сухим тренированием. Данная работа произвела на Андрея Петровича хорошее впечатление, и положительная оценка сыграла большую роль в его жизни, когда во время его последующей учебы в аспирантуре он рекомендовал Д. Д. Ивлева Владимиру Николаевичу Щелкачеву, заведующему кафедрой теоретической механики Московского нефтяного института имени академика Губкина, где впоследствии он проработал ассистентом на этой кафедре полтора года. Следующая его курсовая работа была связана с повторными нагружениями упругопластического тела и была удостоена 3 места на конкурсе студенческих работ механико-математического факультета. До поступления в аспирантуру он несколько месяцев проработал в Подлипках (г. Королев), где уже работал Леонид Викторович Ершов. С тех пор началась их совместная работа. В аспирантуре он вместе с В. Д. Клюшниковым и С. А. Шестериковым принял участие в работе семинара кафедры теории пластичности, которой заведовал Ю. Н. Работнов. Впоследствии к ним присоединились Б. Д. Аннин, Ю. В. Немировский, О. В. Соснин и др. В 1956 г. после окончания аспирантуры при Институте механики МГУ он успешно защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук на тему «Приближенное решение упругопластических задач методом малого параметра». Первым оппонентом диссертации был В. В. Соколовский, вторым — Г. С. Шапиро. Впоследствии, на основе кандидатской диссертации совместно с Леонидом Викторовичем Ершовым была издана монография «Метод возмущений в теории упругопластического тела», которая легла в основу ряда кандидатских и докторских диссертаций.

В феврале 1957 г. после защиты диссертации Алексей Антонович Ильюшин, будучи директором, принял Д. Д. Ивлева на должность младшего научного сотрудника Института механики АН СССР, где он проработал вплоть до октября 1958 г.

В 1959 г. в возрасте 29 лет Дюис Данилович защитил диссертационную работу по теме «Пространственная задача теории идеальной пластичности» в диссертационном совете при МГУ и получил степень доктора физико-математических наук.

В октябре 1959 г. Д. Д. Илев как один из самых молодых докторов физико-математических наук страны был приглашен в Воронежский государственный университет, где руководил созданной им кафедрой теории упругости и пластичности, одновременно заведовал кафедрой сопротивления материалов в Воронежском политехническом институте и читал лекции по математике в Воронежском педагогическом институте. С этой даты ведет начало созданная Дюисом Даниловичем Воронежская школа механики, в которой сейчас насчитывается более 30 докторов, среди них как прямые ученики Дюиса Даниловича, так и учеными следующих поколений. Среди учеников следует выделить Г. И. Быковцева, И. А. Бережного, В. В. Дудукаленко. Сейчас в Воронеже работают такие ученые, как А. Д. Чернышев, А. Н. Спорыхин, Ю. А. Россихин, и М. В. Шитикова и др., в Москве и Самаре — Ю. Н. Радаев, Комсомольске-на-Амуре А. А. Буренин и А. И. Хромов (ученик Г. И. Быковцева), в Новосибирске — А. Ф. Ревуженко, в Минске — А. В. Чигарев.

По возвращении в Москву, Дюис Данилович работал профессором кафедры высшей математики Московского высшего технического училища им. Н. Э. Баумана, позднее заведовал этой кафедрой (1966–1970 гг.), а впоследствии (1971–1982 гг.) — кафедрой высшей математики во Всесоюзном заочном политехническом институте.

В 1982 г. Д. Д. Илев вернулся на родину в г. Чебоксары, где работал в ЧГУ им. И. Н. Ульянова сначала заведующим кафедрой математического анализа, а потом заведующим кафедрой механики деформируемого твердого тела и деканом физико-математического факультета (1982–1993 гг.). Под его председательством был открыт диссертационный совет по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности «Механика деформируемого твердого тела». В истории науки Чувашии это был первый докторский диссертационный совет.

В 1993 г. Д. Д. Илев перешел на работу в Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, где заведовал кафедрой математического анализа. С самого начала работы в педагогическом университете он не только обеспечил функционирование докторского диссертационного совета по механике деформируемого твердого тела, но придал ему качественно новый статус — регионального совета с привлечением ведущих ученых страны в области механики твердых тел и конструкций. За время работы в вузе под его

научным руководством и консультированием подготовлено более 30 кандидатов наук и 3 доктора наук.

Основными научными результатами Д. Д. Ивлева считается развитие общей теории предельных статически определимых состояний тел с математическим анализом уравнений гиперболического типа, в которой классические результаты плоской задачи являются частным разделом общей теории. Ряд исследований посвящен упрочняющемуся телу, деформационной теории пластичности, построению моделей сложных сред, статике и динамике сыпучих сред, механике квазихрупкого разрушения и др.

Профессором Д. Д. Ивлевым опубликовано более 250 научных и методических трудов, в том числе 9 монографий. Являлся экспертом Высшей аттестационной комиссии, членом редакционной коллегии журнала «Известия РАН. Механика твердого тела», ответственным редактором журнала «Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния», членом экспертного совета ВАК РФ по математике и механике.

За большие заслуги в области высшего образования и научной деятельности Д. Д. Илев был награжден медалями «За доблестный труд в Великой Отечественной войне 1941–1945 гг.», «50 лет Победы в Великой Отечественной войне 1941–1945 гг.», «60 лет Победы в Великой Отечественной войне 1941–1945 гг.», медалью ордена «За заслуги перед Отечеством» II степени, высшей наградой Национальной академии наук и искусств Чувашской Республики — Золотой медалью им. И. Я. Яковлева, нагрудным значком «За отличные успехи в работе», знаком «Изобретатель СССР».



E. B. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

К 70-ЛЕТИЮ ПРОФЕССОРА АЛЕКСАНДРА НИКОЛАЕВИЧА ВЛАСОВА

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Аннотация. Статья посвящена доктору технических наук, Александру Николаевичу Власову. В настоящей библиографической заметке приводятся биографические сведения об этом крупном ученом-механике.

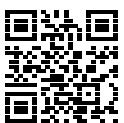
Ключевые слова: механика, персоналии

Мурашкин Евгений Валерьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: murashkin@ipmnet.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Радаев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radaev@ipmnet.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116



для цитирования: Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К 70-летию профессора Александра Николаевича Власова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 4(66). С. 15–43. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.001. EDN: OATQBF

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

E. V. Murashkin, Y. N. Radayev

ON THE 70TH ANNIVERSARY OF PROFESSOR ALEXANDER NIKOLAEVICH VLASOV

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. This article is dedicated to Doctor of Technical Sciences Alexander Nikolaevich Vlasov. This bibliographic note provides biographical information about this prominent mechanical scientist.

Keywords: mechanics, personalities.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; e-mail: evmurashkin@gmail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Yuri N. Radayev, Dr. Sci. Phys. & Math., Prof., Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; e-mail: radayev@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116



to cite this article: Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the 70th anniversary of Professor Alexander Nikolaevich Vlasov // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 4(66). p. 15–43. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.001

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

А.Н. Власов родился в 28 октября 1955 г. в городе Коломне Московской области. Женат, имеет двоих детей. В 1973 г. завершает обучение в средней политехнической школе № 12 в городе Балашихе Московской области. Сразу после окончания школы в 1973 г. поступает в Московский государственный университет (МГУ) им. М.В. Ломоносова на механико-математический факультет отделения математики, обучение в котором завершает в 1978 г.. Будучи студентом 5-го курса, в 1977 г. А.Н. Власов поступает на работу во Всесоюзный научно-исследовательский институт противопожарной обороны (ВНИИПО МВД СССР), где проходит практику в должности лаборанта по январь 1977 г.. После окончании МГУ с 1978 г. проходит срочную военную службу в в/ч 44526 (26 ЦНИИ Министерства обороны СССР). Во время прохождения воинской службы А.Н. Власов участвует в крупномасштабных экспериментах.

В декабре 1983 г. А.Н. Власов увольняется из в/ч 44526 и в декабре того же года поступает на работу в Московский инженерно-строительный институт им. В.В. Куйбышева, который в 1993 г. был переименован в Московский государственный строительный университет (МГСУ). В 1983–1998 гг. работает в МИСИ–МГСУ в должностях: старший инженер, младший научный сотрудник, старший научный сотрудник.

За время работы, в МИСИ А.Н. Власов завершает обучение в аспирантуре и защищает в 1990 г. кандидатскую диссертационную работу по теме «Определение эффективных деформационных характеристик слоистых и трещиноватых скальных пород» по специальности 01.02.07 — Механика сыпучих тел и грунтов. Научным руководителем по кандидатской диссертации был проф., д.т.н. Ухов Сергей Борисович. Официальными оппонентами выступили: проф., д.т.н. Батугин С.А., к.ф.-м.н. Талонов А.В. Ведущей организацией был выбран Всесоюзный научно-исследовательский институт гидротехники им. Б.Е.Веденеева (ВНИИГ). После защиты кандидатской диссертации завершает докторантуру при МГСУ.

За время работы в МГСУ А.Н. Власов принимает участие в работах по исследованию механических свойств грунтов, оснований и бортов примыканий при строительстве Вилюйской ГЭС-III и в исследованиях, предваряющих строительство Адычанской ГЭС, он был в служебных командировках на Колымской ГЭС, в г. Магадане, г. Якутске и г. Владивостоке.

С июля 1998 г. по настоящее время А.Н. Власов работает в Институте прикладной механики Российской академии наук (ИПРИМ РАН). В ИПРИМ РАН работает в должностях старшего научного сотрудника, ведущего научного сотрудника, главного научного сотрудника, заведующего Отделом механики гетерогенной и структурированной среды, и.о. директора ИПРИМ РАН. В настоящее время является директором ИПРИМ РАН.

В 2010 г. А.Н. Власов защищает докторскую диссертацию по теме «Усреднение механических характеристик структурно неоднородных сред природных материалов скальных пород» по специальности 01.02.04 — Механика деформируемого твёрдого тела. Научным консультантом по докторской диссертации

являлся проф., д.т.н. Ухов Сергей Борисович. Официальными оппонентами выступили: проф., д.ф.-м.н. Победря Б.Е., д.ф.-м.н. Вахрушев А.В., д.ф.-м.н. Стефанов Ю.П. Ведущей организацией являлся Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН (ИФЗ РАН).

А.Н. Власов регулярно читает лекции по вычислительным методам в механике неоднородных сред аспирантам, обучающимся по направлениям 01.06.01 Математика и механика (ФГОС 01.02.04 и 01.02.05) и 03.06.01 Физика и астрономия (ФГОС 01.04.07).

В 2000–2016 гг. А.Н. Власов работает по совместительству в Институте геоэкологии им. Е.М. Сергеева РАН (ИГЭ РАН) в лаборатории Геокриологии в должностях старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник, главный научный сотрудник. Участвовал в экспедиции на Троицкое месторождение (Бурятия), в экспедициях на о. Ольхон (о. Байкал). Принимал участие в работе Координационного совета Программы фундаментальных исследований Российской Федерации по Секции технических наук (2021, 2022 гг.).

А.Н. Власов является председателем диссертационного совета Д 002.068.XX (24.1.508.01) по специальности 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические и технические науки), членом диссертационного совета МГУ.013.4 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, действующего по специальности 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки). Был членом диссертационного совета Д 212.138.08 при Московском строительном университете (МГСУ) по специальности 25.00.20 (геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика (технические науки) — закрыт в 2022 г..

В МГСУ принимал участие в работе ГЭК по программе подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре по направлению подготовки 01.06.01 (математика и механика) и ГЭК и ГИА (магистры и бакалавры) по направлениям подготовки 08.03.01 (строительство), 08.04.01 (геотехника) и 15.04.03 «Прикладная механика» в качестве председателя (2020–2025 гг.). В МАИ принимал участие, как член комиссии, в работе ГЭК по программе подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре по направлению подготовки 01.02.06 (механика деформируемого твердого тела).

А.Н. Власов является экспертом РАН, членом Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике (РНКТПМ); членом International Society for Rock Mechanics and Rock Engineering (ISRM); International Society for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering (ISSMGE); Российского общества по механике грунтов, геотехнике и фундаментостроению (РОМГГиФ); экспертом Городской экспертно-консультативной комиссии по основаниям, фундаментам и подземным сооружениям, которая имеет статус экспертно-консультативного и координационного органа Правительства г. Москвы; является председателем экспертно-консультационного совета Международной Ассоциации Фундаментостроителей (ЭКС МАФ); главным редактором журнала «Composites: Mechanics, Computations, Applications, An

International Journal» (Begell House Inc., USA); заместителем главного редактора Всероссийского научного журнала «Механика композиционных материалов и конструкций»; членом Редакционных советов журналов «Вестник МГСУ» и «Арктика и Антарктика» и членом редколлегии журнала «Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния».

1 авторское свидетельство, 6 патентов и 3-и свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

А.Н. Власов является научным руководителем знаковых хоздоговорных работ:

- (1) «Проведение математического моделирования нарастания прочности льда, определение расчетной толщины льда и выдача рекомендаций по расчету опор моста на воздействие ледовой нагрузки на объекте «Транспортный переход через Керченский пролив». 2016 г. (отв. исполнитель Сахаров А.Н.).
- (2) «Адаптационные технологии для обеспечения безопасности производственных объектов при изменении геокриологических условий». Этапы 1 «Разработка концепции адаптационных подходов к совершенствованию отраслевых подходов, технических средств и управлеченческих мероприятий в условиях меняющегося климата и геокриологических условий». Этап 9 «Разработка методики экспресс-определения несущей способности свай, вмороженных в грунт, при различных отрицательных температурах и в процессе оттаивания». Этап 16 «Разработка методики постановки задачи численного термомеханического моделирования». Этап 17 «Разработка проекта корпоративной программы адаптации производственной деятельности ПАО «Газпром» к меняющимся климатическим и геокриологическим условиям». 2018 – 2019 гг. (отв. исполнитель Королев М.В.).
- (3) «Сбор и анализ исходных материалов, проведение численного моделирования и расчетов для определения причин аварии 29.05.2020 г. хранилища № 5 дизельного топлива ТЭЦ – 3 ПАО ГМК «Норильский никель» в г. Норильске». 2020 – 2021 гг. (отв. исполнитель Королев М.В.).
- (4) «Установление технических причин аварии по объекту: Склад дробленой руды, инв. № 10300001593 дробильного цеха Норильской обогатительной фабрики в г. Норильске». 2021 г. (отв. исполнитель Королев М.В.).

Область научных интересов А.Н. Власов — усреднения дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами, механика композитных материалов, геомеханика, численные методы и программирование задач механики, теплофизики и фильтрации, математических задач геокриологии.

В настоящее время А.Н. Власов занимается разработкой аналитико-численных методов определения эффективных характеристик механических

свойств (упругих, прочностных и вязких) структурно неоднородных сред, таких как композиты и нанокомпозиты (в том числе полимерные и эластомерные), грунты и горные породы, а также теплофизических, термомеханических и фильтрационных (для пористых сред) характеристик. Результаты его работ представляют существенный вклад в развитие этих методов и соответствуют мировому уровню.

Основные научные результаты Власова А.Н.:

- Предложил параметрический метод асимптотического усреднения дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами и с его использованием был разработан метод определения нелинейных характеристик структурно неоднородных сред — горных пород, в частности мерзлых, и композитов, в том числе и с нанонаполнителями.
- Был предложен метод оценки деформационных свойств композитных материалов, описывающий эффект усиления модуля Юнга при уменьшении размеров частиц наполнителя от микро- до нано с достижением «насыщения» в нанообласти, после чего происходит резкое снижение его значения.
- С использованием метода асимптотического усреднения был разработан метод определения характеристик композитных материалов с градиентным контактным слоем, что позволяет корректно учитывать концентрации напряжений, обусловленные структурой композитных материалов.
- Метод определения характеристик на основе метода асимптотического усреднения Бахвалова композитных материалов периодической структуры со случайными характеристиками фаз и со случайным размером включений, у которых центры включений имеют периодическое расположение.
- Предложена и разработана нелинейная модель скальной трещины, учитывающей дилатансию. Предложены и разработаны аналитико-численные методы определения деформационных и прочностных характеристик слоистых и трещиноватых скальных пород с учетом дилатанси и нелинейного деформирования. Предложены модели определения вязкоупругих свойств мерзлых супесей и песков базальной структуры в зависимости от температуры.
- Был разработан параметрический вариант метода асимптотического усреднения дифференциальных уравнений теплопроводности и термоупругости и решены задачи по оценке теплофизических и деформационных характеристик структурно-неоднородных сред, свойства которых зависят от температуры (композитные материалы, мёрзлая супесь).
- Была решена задача асимптотического усреднения уравнений фильтрации Бринкмана в трёхмасштабной пористой среде на основе метода асимптотического усреднения Бахвалова.

Друзья и коллеги поздравляют Александра Николаевича с 70-летием и желает ему новых ярких достижений в науке, талантливых учеников и успехов в его многогранной деятельности в области науки и образования.

Книги

2008

1. Очерки вероятностной геокриологии / А. Хименков [и др.]. – Москва : ВИНИТИ РАН, 2008. – 386 с.

2009

2. *Власов А., Мерзляков В.* Усреднение деформационных и прочностных свойств в механике скальных пород. – М. : Издательство Ассоциации строительных вузов, 2009. – 208 с.
3. *Власов А., Саваторова В., Талонов А.* Описание физических процессов в структурно неоднородных средах. – М. : РУДН, 2009. – 258 с.

2010

4. Криогенные геосистемы: проблемы исследования и моделирования / В. Мельников [и др.]. – Новосибирск : Академическое издательство "Гео", 2010. – 390 с.

2017

5. Угличское водохранилище. Переработка берегов. Мониторинг. Геомеханические исследования / М. Королев [и др.]. – Москва : ИПРИМ РАН; СамПолиграфист, 2017. – 308 с.

2020

6. Примеры и причины аварий сооружений. Вопросы обеспечения качества строительных объектов, надёжной работы оснований и фундаментов в условиях меняющихся природных и техногенных воздействий / М. Королев [и др.]. – Москва : СамПолиграфист (ИПРИМ РАН, ГБУ ЦЭИИС, НИУ МГСУ), 2020. – 216 с.

2021

7. Геосистемы газонасыщенных многолетнемёрзлых пород / А. Хименков [и др.]. – Москва : ГеоИнфо, 2021. – 228 с.

Статьи

1987

1. К расчету температурного режима и напряженно-деформированного состояния промерзающих-оттаивающих массивов горных пород / С. Ухов [и др.] // Проблемы инженерного мерзлотоведения в энергетическом строительстве. Москва, МИСИ. – 1987. – С. 115–130.

1990

2. *Vlasov A., Merzlyakov V., Ukhov S.* Effective characteristics of the deformation properties of stratified rock // Soil Mechanics and Foundation Engineering. – New York, 1990. – Vol. 1, no. 1. – P. 22–26.
3. *Власов А., Мерзляков В., Ухов С.* Эффективные характеристики деформационных свойств слоистых пород // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1990. – № 1. – С. 19–21.

1991

4. Власов А. Метод асимптотического осреднения в анализе анизотропии скальных оснований // Строительная механика и расчет сооружений. – 1991. – № 4. – С. 32–37.
5. Лебедев С., Власов А. Выбор длины и расстановки забивных свай квадратного сечения в кусте // Свайные фундаменты. – Москва, 1991. – С. 50–55.

1993

6. Merzlyakov V., Vlasov A. Effect of polygonal crack grids on deformation characteristics of rock // Soil Mechanics and Foundation Engineering. – New York, 1993. – Vol. 30, no. 3. – P. 85–91.
7. Мерзляков В., Власов А. Влияние полигональных сетей трещин на деформационные характеристики скальных пород // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1993. – № 3. – С. 6–9.

1995

8. Влияние локальных фазовых переходов на деформируемость пластично-мёрзлых грунтов / А. Брушков [и др.] // Геоэкология. Инженерная геология, гидрогеология, геокриология. – 1995. – № 5. – С. 71–77.
9. Власов А., Саваторова В., Талонов А. Аналитические методы исследования фазовых переходов в средах с неоднородной структурой // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1995. – Т. 1, № 2. – С. 134–140.
10. Власов А., Саваторова В., Талонов А. Использование метода асимптотического усреднения для решения задач теплопроводности с фазовыми переходами // Прикладная механика и техническая физика. – 1995. – Т. 36, № 5. – С. 154–163.

1996

11. Локальные фазовые переходы и перколяция влаги как процессы, определяющие реологию пластично-мёрзлых грунтов / С. Ухов [и др.] // Информационный бюллетень РФФИ. – 1996. – Т. 4, № 5. – С. 451.
12. Локальные фазовые переходы и фильтрация как процессы, определяющие реологию пластично-мёрзлых грунтов / А. Власов [и др.] // Доклады Академии наук. – 1996. – Т. 349, № 6. – С. 758–760.
13. Некоторые процессы, определяющие реологическое поведение мёрзлых грунтов под нагрузкой / С. Ухов [и др.] // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1996. – № 2. – С. 14–19.
14. Власов А., Потапов В., Яновский Ю. Объектно-ориентированное программирование метода конечных элементов для задач механики неоднородных сред. Часть 1. Идеология объектно-ориентированного подхода и его приложение к методу конечных элементов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1996. – Т. 2, № 1. – С. 94–109.
15. Власов А., Саваторова В., Талонов А. Локальные фазовые переходы в неоднородной среде под действием внешнего поля напряжений // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1996. – Т. 2, № 2. – С. 125–137.

1997

16. Плавление льда в несвязных мёрзлых грунтах, обусловленное локальными давлениями / С. Ухов [и др.] // Криосфера Земли. – 1997. – Т. 1, № 3. – С. 35–38.

1998

17. К возможности фильтрационной консолидации пластично-мёрзлой супеси / А. Власов [и др.] // Криосфера Земли. – 1998. – Т. 2, № 2. – С. 65–68.

1999

18. Иерархические модели в механике гетерогенных сред / Ю. Яновский [и др.] // Физическая мезомеханика. – 1999. – Т. 2, № 3. – С. 23–45.

19. Структура и микромеханические свойства межфазных слоёв полимерных матричных композитов / В. Згаевский [и др.] // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1999. – Т. 5, № 2. – С. 109–122.

20. *Власов А., Мнушкин М., Яновский Ю.* Численное моделирование напряжённо-деформированного состояния волокнонаполненных полимерных композитов при нагружении вплоть до момента разрушения // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1999. – Т. 5, № 4. – С. 167–184.

2000

21. Упругие свойства полимерного композита с учётом молекулярных и структурных параметров слоя / В. Згаевский [и др.] // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2000. – Т. 6, № 1. – С. 141–150.

22. *Власов А., Мерзляков В., Ухов С.* Метод асимптотического усреднения в механике скальных грунтов // Доклады Академии наук. – 2000. – Т. 372, № 4. – С. 1–4.

2001

23. Коэффициенты Пуассона межфазных слоёв полимерных композитов / И. Образцов [и др.] // Доклады Академии наук. – 2001. – Т. 378, № 3. – С. 336–338.

24. *Власов А., Мнушкин М.* Использование современных методов программирования в решении задач геомеханики // Страйклуб. – 2001. – № 1. – С. 18–21.

2003

25. Обработка данных измерения уровня водной поверхности заданной акватории и оценка оптимальности расположения измерительных приборов / А. Власов [и др.] // Гидротехническое строительство. – 2003. – № 6. – С. 23–29.

26. Численная оценка механических свойств массива скальных пород с ортогональной системой трещин / А. Власов [и др.] // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2003. – Т. 9, № 4. – С. 449–456.

27. *Vlasov A., Merzlyakov V., Ukhov S.* Determination of deformation and strength properties of layered rock by asymptotic averaging // Soil Mechanics and Foundation Engineering. – 2003. – Vol. 40. – P. 197–205.

28. *Власов А., Курсова Е.* Оценка механических свойств массива скальных пород, рассечённого ортогональной системой трещин, методом численного моделирования эксперимента // Известия Тульского государственного университета. Серия: Геомеханика. Механика подземных сооружений. – 2003. – Т. 1. – С. 54–58.

29. *Власов А., Мерзляков В., Ухов С.* Определение деформационных и прочностных свойств слоистых скальных пород методом асимптотического усреднения // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2003. – № 6. – С. 2–7.

2004

30. Оптимизация сети измерительных приборов в морской акватории / А. Власов [и др.] // Гидротехническое строительство. – 2004. – № 7.
31. Власов А. Усреднение механических свойств структурно неоднородных сред // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2004. – Т. 10, № 3. – С. 424–441.
32. Власов А., Мерзляков В. Анализ результатов испытаний составных образцов, моделирующих скальную породу // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2004. – № 6. – С. 2–7.

2005

33. Власов А., Яновский Ю. Численное моделирование определяющих соотношений слоистых и трещиноватых скальных пород // Экологический вестник научных центров ЧЭС (Черноморского экономического сотрудничества). – 2005. – № 1. – С. 43–50.

2006

34. Власов А. Усреднение характеристик деформационных свойств структурно неоднородных сред с неидеальными условиями на контактах // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2006. – Т. 12, № 2. – С. 200–218.
35. Власов А., Мерзляков В. Деформация образца скальной породы с системной трещиноватостью и количественная оценка трещинной пустотности // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2006. – Т. 12, № 3. – С. 356–363.
36. Образцов И., Власов А., Яновский Ю. Расчётный метод оценки прочностных свойств структурно неоднородных сред // Доклады Академии наук. – 2006. – Т. 406, № 2. – С. 196–199.

2007

37. Анализ теоретической прочности межфазных слоёв адсорбционных комплексов полимерных композитных сред / Ю. Яновский [и др.] // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – Т. 13, № 1. – С. 33–41.
38. Власов А. Определение прочностных характеристик структурно-неоднородных сред // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – Т. 13, № 2. – С. 209–218.
39. Хименков А., Власов А. Влияние неоднородностей природной среды на динамику криолитозоны // Криосфера Земли. – 2007. – Т. XI, № 1. – С. 21–28.

2008

40. Наномеханические свойства нанокластеров полимерных композитов / Ю. Яновский [и др.] // Физическая мезомеханика. – 2008. – Т. 11, № 3. – С. 61–74.

2009

41. Власов А., Маркелов П., Саваторова В. Исследование деформационных свойств системы «матрица-слой-включение» // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2009. – Т. 17, № 1. – С. 100–102.
42. Власов А., Саваторова В., Талонов А. Усреднение уравнений теплопроводности с учётом конвективного механизма теплопередачи // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2009. – Т. 15, № 1. – С. 17–31.

2010

43. Математическое моделирование процесса теплопроводности в периодической среде с цилиндрическими включениями, отделенными от матрицы тонким слоем / В. Саваторова [и др.] // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. – 2010. – № 6. – С. 168–179.
44. *Власов А., Саваторова В., Талонов А.* Усреднение уравнений фильтрации Бринкмана в слоистой пористой среде // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т. 16, № 4. – С. 483–502.
45. *Знаменский В., Рузаев А., Власов А.* Оптимизация параметров свайных фундаментов // Геотехника. – 2010. – № 3. – С. 44–52.

2011

46. *Власов А.* Оценка деформационных свойств композиционных материалов на основе практически несжимаемой матрицы с нанонаполнителями // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – 4 (часть 5). – С. 2074–2076.

2012

47. Multi scale modeling of thermoelastic properties of composites with periodic structure of heterogeneities / V. Savatorova [et al.] // Materials Physics and Mechanics. – 2012. – Vol. 13, no. 2. – P. 130–142.
48. Генерация нерегулярных гексаэдralьных сеток / А. Власов [и др.] // Вестник Московского государственного строительного университета. – 2012. – № 4. – С. 78–87.
49. Конечно-элементное моделирование задач геомеханики и геофизики / А. Власов [и др.] // Вестник Московского государственного строительного университета. – 2012. – № 2. – С. 52–65.
50. Численные расчёты в геомеханике применительно к линейным сооружениям / А. Власов [и др.] // Вестник Московского государственного строительного университета. – 2012. – № 3. – С. 35–42.
51. *Savatorova V., Vlasov A., Talonov A.* Homogenization of Thermoelasticity Processes in Composite Materials with Periodic Structure of Heterogeneities // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 2012. – DOI: 10.1002/zamm.201200032.
52. *Власов А., Волков-Богородский Д.* Асимптотическое усреднение уравнений фильтрации Бринкмана в многофазных средах с периодической структурой // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т. 18, № 1. – С. 92–110.
53. *Власов А., Волков-Богородский Д., Яновский Ю.* Влияние размера включений на механические свойства эластомерных композитов // Доклады Академии наук. – 2012. – Т. 443, № 4. – С. 435–437.
54. Усреднение нестационарных уравнений фильтрации вязкого вещества в недеформируемой пористой среде / В. Саваторова [и др.] // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2013. – Т. 19, № 4. – С. 535–554.

2013

55. Savatorova V., Vlasov A. Modeling of viscous fluid filtration in porous media with cylindrical symmetry // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal. – 2013. – Vol. 4, no. 1. – P. 1–20.
 56. Savatorova V., Vlasov A., Talonov A. Homogenization of Thermoelasticity Processes in Composite Materials with Periodic Structure of Heterogeneities // ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 2013. – Vol. 93, no. 8. – P. 575–596. – DOI: 10.1002/zamm.201200032.
 57. Власов А., Волков-Богородский Д. Усреднение нелинейного уравнения теплопроводности при моделировании распространения тепла в композитных материалах периодической структуры // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2013. – Т. 19, № 2. – С. 163–180.
 58. Власов А., Волков-Богородский Д., Знаменский В. Численное моделирование задач геомеханики в условиях плотной городской застройки // Промышленное и гражданское строительство. – 2013. – № 9. – С. 41–43.
- 2014
59. Averaging the nonstationary equations of viscous substance filtration through a rigid porous medium / V. Savatorova [et al.] // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal. – 2014. – Vol. 5, no. 1. – P. 35–61.
 60. Численное моделирование строительства зданий с фундаментами глубокого заложения в условиях плотной городской застройки / А. Власов [и др.] // Вестник ПНИПУ "Строительство и архитектура". – 2014. – № 2. – С. 170–179.
 61. Власов А., Волков-Богородский Д. Параметрический метод асимптотического усреднения для нелинейных уравнений термоупругости // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т. 20, № 4. – С. 491–507.
- 2015
62. Brinkman's filtration of fluid in rigid porous media: multi scale analysis and investigation of effective permeability / V. Savatorova [et al.] // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal. – 2015. – Vol. 6, no. 3. – P. 239–264.
 63. Влияние криогенеза на развитие склоновых процессов степных территорий Прибайкалья (на примере о. Ольхон) / А. Хименков [и др.] // Геоэкология. – 2015. – № 6. – С. 535–543.
 64. Геотехнический расчет влияния реконструкции оборудования второй очереди главного корпуса ГРЭС на окружающие сооружения и инженерные коммуникации / А. Власов [и др.] // Научное обозрение. – 2015. – № 18. – С. 36–42.
 65. Криогенные и посткриогенные явления на острове Ольхон / А. Хименков [и др.] // Криосфера Земли. – 2015. – Т. XIX, № 4. – С. 54–63.
 66. Оценка механических свойств гиперупругих композитов с малыми добавками дисперсных наполнителей / А. Власов [и др.] // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т. 21, № 3. – С. 352–359.
 67. Углеводородные газы и криолитозона шельфа Арктики / Г. Перльштейн [и др.] // Арктика: Экономика и экология. – 2015. – 2 (18). – С. 35–44.

68. Численное моделирование строительства зданий, возводимых в глубоких котлованах, с учетом строительного водопонижения в условиях городской застройки / А. Власов [и др.] // Вестник гражданских инженеров. – 2015. – 3 (50). – С. 120–126.
- 2016
69. Multiscale Modeling of Gas Flow through Organic-Rich Shale Matrix / V. Savatorova [et al.] // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal. – 2016. – Vol. 7, no. 1. – P. 45–70.
70. Several Aspects of Geotechnic Modelling / A. Vlasov [et al.] // International Journal of Applied Engineering Research. – 2016. – Vol. 11, no. 3. – P. 1670–1675.
71. Влияние температуры на электрореологический эффект в суспензиях полиимидов / Н. Семенов [и др.] // Новые материалы и технологии в машиностроении. – 2016. – № 23. – С. 43–46.
72. Оценка механических свойств гиперупругих композитных материалов с малыми добавками минеральных дисперсных наполнителей. Часть 1. Аппроксимация потенциала гиперупругой матрицы / А. Власов [и др.] // Каучук и резина. – 2016. – № 6. – С. 6–9.
73. Полиимиды, проявляющие обратный электрореологический эффект / Н. Семенов [и др.] // Технология металлов. – 2016. – № 10. – С. 18–25.
74. Применение полиимida в качестве дисперсной фазы электрореологической суспензии / Н. Семенов [и др.] // Новые материалы и технологии в машиностроении. – 2016. – № 23. – С. 40–43.
75. Savatorova V., Talonov A., Vlasov A. Upscaling of the dual-porosity models for gas transport in organic-rich shales // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal. – 2016. – Vol. 7, no. 3. – P. 233–259.
76. Власов А., Волков-Богородский Д., Карнет Ю. Оценка механических свойств гиперупругих полимерных композитов с малыми добавками наноразмерных частиц наполнителей и учёт влияния их агрегации // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т. 22, № 2. – С. 213–224.
77. Саваторова В., Талонов А., Власов А. Использование метода многомасштабного усреднения для описания процессов массопереноса в геоматериалах органического происхождения // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т. 22, № 3. – С. 329–344.
78. Семенов Н., Власов А., Келбышева Е. Полиимиды, проявляющие обратный электрореологический эффект // Новые материалы и технологии в машиностроении. – 2016. – № 23. – С. 37–39.
- 2017
79. Assessing the mechanical properties of hyperelastic composite materials with small additions of disperse mineral fillers. Part 1. Approximation of the potential of the hyperelastic matrix / A. Vlasov [et al.] // International Polymer Science and Technology. – 2017. – Vol. 44, no. 8. – P. 29–32.
80. Polyimides Exhibiting a Negative Electrorheological Response / N. Semenov [et al.] // Russian Metallurgy (Metally). – 2017. – No. 13. – P. 1103–1108.
81. The effect of the polymer matrix orientation on the mechanical properties of polyvinyl chloride/boron nitride nanocomposites / G. Kozlov [et al.] //

- Nanoscience and Technology: An International Journal. – 2017. – Vol. 8, no. 3. – P. 193–201.
82. Газовые выбросы в криолитозоне как новый вид геокриологических опасностей / А. Хименков [и др.] // ГеоРиск. – 2017. – № 3. – С. 58–80.
83. Новая технология возведения сооружений на потенциально опасных оползневых склонах / А. Власов [и др.] // Вестник ПНИПУ "Строительство и архитектура". – 2017. – Т. 8, № 3. – С. 62–70.
84. Оценка механических свойств гиперупругих композитных материалов с малыми добавками минеральных дисперсных наполнителей. Часть 2. Реализация задачи на ячейке методом конечных элементов / А. Власов [и др.] // Каучук и резина. – 2017. – № 1. – С. 58–63.
85. Природные взрывные процессы в криолитозоне / А. Власов [и др.] // Наука и технологические разработки. – 2017. – Т. 96, № 3. – С. 41–56.
86. Развитие взрывных процессов в криолитозоне в связи с формированием Ямальского кратера / А. Хименков [и др.] // Арктика и Антарктика. – 2017. – № 4. – С. 13–37.
87. *Savatorova V., Talonov A., Vlasov A.* High-frequency approximation for plane wave propagation in elastic medium with periodic distribution of cracks // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal. – 2017. – Vol. 8, no. 4. – P. 339–354.
88. *Savatorova V., Talonov A., Vlasov A.* Low-frequency wave propagation in geological media with isolated cracks // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal. – 2017. – Vol. 8, no. 2. – P. 85–107.
- 2018
89. Effect of the phase state of a polymer matrix on the degree of reinforcement of polymer/organoclay nanocomposites / G. Kozlov [et al.] // Nanomechanics Science and Technology: An International Journal. – 2018. – Vol. 9, no. 2. – P. 155–163.
90. Interactions between polymers and carbon nanotubes and their impact on the properties of nanocomposites / G. Kozlov [et al.] // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal. – 2018. – Vol. 9, no. 3. – P. 239–246.
91. Natural Explosive Processes in the Permafrost Zone / A. Vlasov [et al.] // Seismic Instruments. – 2018. – Vol. 54, no. 6. – P. 631–641.
92. Применение задавливаемых свай при устройстве фундаментов зданий и сооружений, возводимых вблизи потенциально опасных оползневых склонов / А. Власов [и др.] // Наука и бизнес: пути развития. – 2018. – Т. 84, № 6. – С. 52–59.
93. Проблемы возведения зданий и сооружений вблизи потенциально опасных оползневых склонов и способы их решения / А. Власов [и др.] // Перспективы науки. – 2018. – Т. 105, № 6. – С. 65–70.
94. Флюидодинамические геосистемы в криолитозоне. 1 ЧАСТЬ: Криогидродинамические геосистемы / А. Хименков [и др.] // Арктика и Антарктика. – 2018. – № 2. – С. 1–19.
95. Флюидодинамические геосистемы в криолитозоне. 2 ЧАСТЬ: Криолитодинамические и криогазодинамические геосистемы / А. Хименков [и др.] // Арктика и Антарктика. – 2018. – № 2. – С. 48–70.

96. *Vlasov A., Volkov-Bogorodsky D.* Method of asymptotic homogenization of thermo-viscoelasticity equations in parametric space. (Part I) // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal. – 2018. – Vol. 9, no. 4. – P. 331–343.

97. *Басистов Ю., Власов А., Карнет Ю.* Динамическая нейронная сеть для моделирования вязкоупругих сред // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 377–391.

98. *Власов А., Волков-Богородский Д.* Асимптотическое усреднение уравнений термовязкоупругости с быстроосцилирующими коэффициентами // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 2. – С. 281–301.

2019

99. Crystallization of dispersively filled polymer nanocomposites / G. Kozlov [et al.] // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal. – 2019. – Vol. 10, no. 4. – P. 363–371.

100. Mechanism of growth of interfacial regions in polymer/carbon nanotube nanocomposites / I. Dolbin [et al.] // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal. – 2019. – Vol. 10, no. 3. – P. 213–220.

101. Взрывные процессы в области распространения многолетнемёрзлых пород – новый вид геокриологической опасности / А. Хименков [и др.] // Геоэкология. – 2019. – № 6. – С. 30–41.

102. Изучение напряжённого состояния и механизма деформирования массивов горных пород при образовании природно-техногенных карстовых провалов / Ю. Мамаев [и др.] // Геоэкология. – 2019. – № 1. – С. 46–59.

103. *Власов А., Волков-Богородский Д., Карнет Ю.* Аналитико-численный подход к оценке свойств эластомерных композитов на базе параметрического метода асимптотического усреднения // Каучук и резина. – 2019. – Т. 78, № 2. – С. 116–123.

2020

104. Conditions for the creation of high-modulus polymer/carbon nanotubes nanocomposites / G. Kozlov [et al.] // Nanoscience and Technology: An International Journal. – 2020. – Vol. 11, no. 3. – P. 275–282.

105. Relationship between the applied stress transfer and the nanofiller aggregation level for polymer/carbon nanotubes nanocomposites / G. Kozlov [et al.] // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal. – 2020. – Vol. 11, no. 4. – P. 129–135.

106. *Vlasov A., Volkov-Bogorodsky D.* Application of the asymptotic homogenization in a parametric space to the modeling of structurally heterogeneous materials // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2020. – DOI: 10.1016/j.cam.2020.113191.

107. *Власов А., Волков-Богородский Д., Корнёв Ю.* Влияние углеродных добавок на механические характеристики эпоксидного связующего // Известия РАН. Механика твёрдого тела. – 2020. – № 3. – С. 131–142.

2021

108. Reinforcing effects in elastomeric composites, filled with particles of mineral fillers, based on silicon dioxide and carbon / Y. V. Kornev [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 1942. – P. 012031.
109. Изменение структуры области деформаций подрабатываемой толщи горных пород при одноуровневой многокамерной отработке соляной залежи / Ю. Мамаев [и др.] // Геоэкология. Инженерная геология. Гидрогеология. Геокриология. – 2021. – № 1. – С. 32–39.
110. *Vlasov A., Volkov-Bogorodsky D.* Method of asymptotic homogenization of thermoviscoelasticity equations in parametric space Part II (practical) // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal. – 2021. – Vol. 12, no. 3. – P. 1–16.
111. *Власов А.* Сведение уравнений теории упругости со случайными коэффициентами на области с периодической структурой к усредненному уравнению теории упругости с постоянными коэффициентами. Эффективный тензор жесткости // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т. 27, № 3. – С. 309–322.

2022

112. Сравнительный анализ эффективности армирования полимерных нанокомпозитов 2D-нанонаполнителями на примере полиимид/Na⁺-монтмориллонит и поливиниловый спирт/оксид графена / Г. Козлов [и др.] // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2022. – Т. 28, № 2. – С. 247–254.
113. *Vlasov A., Volkov-Bogorodsky D., Savatorova V.* Calculation of the effective properties of thermoviscoelastic composites using asymptotic homogenization in parametric space // Mechanics of Time-Dependent Materials. – 2022. – Vol. 26, no. 3. – P. 565–591.
114. *Vlasov A., Volkov-Bogorodsky D., Savatorova V.* Using asymptotic homogenization in parametric space to determine effective thermo-viscoelastic properties of fibrous composites with interphase layer // Mathematics and Mechanics of Solids. – 2022. – 10812865221140526 (online), DOI: 10.1177/10812865221140526.
115. *Власов А., Прошин М., Исаикова Т.* Перспективы использования МКЭ-комплекса ANSYS и его строительного модуля CivilFEM в расчетах оснований сооружений, сложенных мерзлыми и оттаивающими грунтами // Научный вестник Арктики. – 2022. – № 12. – С. 16–22.

2023

116. Оценка эффективного тензора жесткости композитного материала с периодическим расположением центров включений со случайным радиусом / А. Власов [и др.] // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2023. – Т. 29, № 4. – С. 502–519.
117. *Власов А., Волков-Богородский Д., Уткин Ю.* Исследование механических свойств композитных сетчатых оболочек методом асимптотического усреднения // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2023. – Т. 29, № 2. – С. 247–259.

2024

118. Comparative analysis of the efficiency of micro- and nanofillers / G. Kozlov [et al.] // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal. – 2024. – Vol. 15, no. 4. – P. 35–42.

119. Effective stiffness tensor of composite materials with inclusions of random size and periodic location of their centers / A. Vlasov [et al.] // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal. – 2024. – Vol. 15, no. 4. – P. 63–75. – DOI: 10.1615/CompMechComputApplIntJ.2024052829.
120. Оценка эффективного тензора жесткости композитного материала периодической структуры со случайными модулями деформации (модулями деформации) включений / А. Власов [и др.] // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2024. – Т. 30, № 3. – С. 338–353.
- 2025
121. Моделирование углеродных нанотрубок (нановолокон) как макромолекулярных клубков – модель свободносоединеной цепи / Г. Козлов [и др.] // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2025. – Т. 31, № 1. – С. 74–81. – DOI: 10.33113/mkmk.ras.2025.31.01.06.
122. Власов А., Власов Д., Коваленко М. Полуплоскость с одномерным полубесконечным ребром жесткости: приложение к решению задачи о взаимодействии свай со скальным грунтом // Прикладная математика и механика. – 2025. – Т. 89, № 2. – С. 348–364. – DOI: 10.31857/S0032823525020105.
123. Власов А., Волков-Богородский Д. Аналитико-численный метод определения эффективных характеристик волокнистых и дисперсных материалов с промежуточным межфазным слоем // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2025. – Т. 31, № 2. – С. 265–292. – DOI: 10.33113/mkmk.ras.2025.31.02.07.
124. Власов А., Волков-Богородский Д. Масштабные эффекты волокнистых и дисперсных материалов с промежуточным межфазным слоем // Известия РАН. Механика твёрдого тела. – 2025. – № 5. – принята к печати.

Материалы конференций

1989

1. Власов А., Мерзляков В. Влияние анизотропии на температурные напряжения в промерзающих породах // Проблемы инженерно-геологических изысканий в криолитозоне. Тезисы докладов научно-практической конференции. – Магадан, 1989. – С. 74.

1991

2. Лебедев С., Власов А. Оптимизация выбора длины и расстановки свай в кусте // Механизированная безотходная технология возведения свайных фундаментов и свай заводской готовности. Третье Всесоюзное координационное совещание-семинар. – Владивосток : ДальНИИС, 1991. – С. 41–42.

1992

3. Власов А., Грязнова Е., Мнушикун М. Солифлюкционное течение склона и его взаимодействие со свайными фундаментами // Проблемы свайного фундаментостроения. Труды третьей международной конференции. Т. 1. – Пермь, 1992. – С. 109–113.

1993

4. *Vlasov A., Novikov V., Yanovsky Yu. G.* Structural modeling and numerical research interface layer at hybrid polymer composites // Advances in Structured and Heterogeneous Continua. Abstracts. – Moscow, Russia, 1993. – P. 96.
5. *Власов А., Мерзляков В.* Асимптотический метод осреднения деформационных характеристик трещиноватых скальных пород // X Международная конференция по механике горных пород. Тезисы докладов. – Москва, 1993. – С. 18–19.
6. *Власов А., Мерзляков В., Чжен В.* Асимптотический метод осреднения в расчете нелинейных деформационных характеристик скальных грунтов // Нелинейная механика грунтов. Труды IV Российской конференции с иностранным участием. Т. 1. – Санкт-Петербург, 1993. – С. 19–25.
1994
7. Object-oriented programming of finite element method for problems of studying composite materials / A. Vlasov [et al.] // Computer synthesis of structure and properties of advanced composites. Proceedings of the US-Russian workshop. – Moscow, Russia, 1994. – P. 161–171.
8. Progress in computational model by finite element method of viscoelastic heterogeneous continua properties. Object-oriented finite element programming for research of composite materials / A. Vlasov [et al.] // US-Russian workshop on computer synthesis of structure and properties of advanced composites. – Moscow, Russia, 1994. – P. 68–69.
1995
9. Object-oriented programming of finite element method for studying of the composite materials mechanical behavior / A. Vlasov [et al.] // Advances in Structured and Heterogeneous Continua. II International Symposium. Abstracts. – Moscow, Russia, 1995. – P. 53.
10. Влияние локальных фазовых переходов и фильтрации влаги на ползучесть пластично-мёрзлых грунтов / С. Ухов [и др.] // Механика грунтов и фундаментостроение. Труды Российской конференции по механике грунтов и фундаментостроению. Т. 4. – Санкт-Петербург, 1995. – С. 639–644.
11. *Vlasov A., Merzlyakov V.* Deformability parameters of stratified and jointed rock // Safety and Environmental Issues in Rock Engineering. EUROCK'93, ISRM International Symposium. – Lisboa, Portugal (published 1995) : A.A. Balkema, 1995. – С. 975–981.
12. *Vlasov A., Savatorova V., Talonov A.* Analytical methods of phase transition investigation in media with inhomogeneous structure // Advances in Structured and Heterogeneous Continua. II International Symposium. Abstracts. – Moscow, Russia, 1995. – P. 16.
13. *Vlasov A., Yanovsky Yu. G., Voronin A.* Computational investigation of the strength-stress behavior of heterogeneous composites. Consideration of interfacial effects // Advances in Structured and Heterogeneous Continua. II International Symposium. Abstracts. – Moscow, Russia, 1995. – P. 19.
1996
14. Некоторые основные процессы, определяющие реологическое поведение пластично-мёрзлых грунтов под нагрузкой / С. Ухов [и др.] // Материалы первой конференции геокриологов России. Т. 2. – Москва : МГУ им. М.В. Ломоносова, 1996. – С. 193–204.

1997

15. Плавление льда в несвязных мёрзлых грунтах, обусловленное локальными давлениями / С. Ухов [и др.] // Проблемы криологии Земли (фундаментальные и прикладные исследования). Международная конференция. – Пущино, 1997. – С. 260–261.
16. Учёт плавления льда в методе шарикового штампа / В. Мерзляков [и др.] // Проблемы криологии Земли (фундаментальные и прикладные исследования). Международная конференция. – Пущино, 1997. – С. 265–266.
17. Фильтрационная консолидация пластично-мёрзлых супесей / А. Власов [и др.] // Проблемы криологии Земли (фундаментальные и прикладные исследования). Международная конференция. – Пущино, 1997. – С. 266–267.
18. Власов А., Мерзляков В. Аналитическое описание поведения составного образца скального грунта под нагрузкой // Проблемы механики горных пород. Труды XI-й Российской конференции по механике горных пород. – Санкт-Петербург, 1997. – С. 307–313.
19. Власов А., Мерзляков В. Качественное поведение образца скальной породы под нагрузкой и количественная оценка трещинной пустотности // Вопросы математики, механики сплошных сред и применения математических методов в строительстве. – Москва, МГСУ, 1997. – С. 140–146.
20. Власов А., Мерзляков В., Ухов С. Метод асимптотического усреднения в применении к определению механических характеристик скальных грунтов // Проблемы механики горных пород. Труды XI-й Российской конференции по механике горных пород. – Санкт-Петербург, 1997. – С. 81–86.
21. Власов А., Рогозинский А., Ухов С. Определение угла дилатансии в скальных породах при сдвиге по трещине // Проблемы механики горных пород. Труды XI-й Российской конференции по механике горных пород. – Санкт-Петербург, 1997. – С. 87–92.

1998

22. Динамический баланс тепла при локальном плавлении льда под нагрузкой в мёрзлых песках / А. Власов [и др.] // Проблемы криологии Земли. Конференция, посвящённая 90-летию со дня рождения П.И. Мельникова. – Пущино, 1998. – С. 174–175.

1999

23. Власов А. О корректности определений тензоров концентрации напряжений и деформаций в методе асимптотического усреднения // Вопросы математики, механики сплошных сред и применения математических методов в строительстве. – Москва, МГСУ, 1999. – С. 162–168.
24. Мерзляков В., Власов А. Численный анализ результатов одного эксперимента с моделью, имитирующей скальную породу с системной трещиноватостью // Вопросы прикладной математики и вычислительной механики. – Москва, МГСУ, 1999. – С. 109–114.

2000

25. Vlasov A., Mnushkin M. The program for slope stability analysis by engineering methods // Geoeology and Computers. S.A. Yufin (ed.). Proceedings of the Third International Conference on Advances of Computer Methods in Geotechnical

- and Geoenvironmental Engineering. – Moscow, Russia : A.A. Balkema, 2000. – P. 373–376.
26. *Vlasov A., Mnushkin M., Yanovsky Y.* Object-oriented approach in programming of finite element method // Geocology and Computers. S.A. Yufin (ed.). Proceedings of the Third International Conference on Advances of Computer Methods in Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. – Moscow, Russia : A.A. Balkema, 2000. – P. 367–372.
- 2001
27. Numerical approach to generating constitutive models of jointed rock / A. Vlasov [et al.] // Rock Mechanics - a Challenge for Society. P. Sárkka & P. Eloranta (eds.). Proceedings of the ISRM Regional Symposium EUROCK 2001. – Espoo, Finland : A.A. Balkema, 2001. – P. 547–551.
28. О механизме ползучести «высокотемпературных» мёрзлых пород под действием внешней нагрузки / А. Власов [и др.] // Тезисы докладов: Консервация и трансформация вещества и энергии в криосфере Земли. Международная конференция. – Пущино, 2001. – С. 89–90.
29. *Vlasov A., Mnushkin M., Yanovsky Y.* Object-oriented programming of finite element method and its application for mechanics // EPMESC VIII. International Conference on Enhancement and Promotion of Computational Methods in Engineering and Science. – Shanghai, China : Shanghai San Lian, 2001. – P. 280–281.
30. *Vlasov A., Mnushkin M., Zaitcev A.* Object-oriented programming in application to engineering methods for slope stability analysis // EPMESC VIII. International Conference on Enhancement and Promotion of Computational Methods in Engineering and Science. – Shanghai, China : Shanghai San Lian, 2001. – P. 282–283.
31. *Власов А.* Метод асимптотического усреднения в определении механических свойств скальных оснований // Геотехника: Оценка состояния оснований и сооружений. Труды международной конференции. Т. 1. – Санкт-Петербург, 2001. – С. 9–15.
32. *Власов А., Брушков А., Мерзляков В.* Влияние тепловых процессов на фазовые переходы воды в мёрзлых грунтах и газовых гидратах // Сергеевские чтения. Вып. 3 / Материалы годичной сессии Научного Совета РАН по проблемам геоэкологии, инженерной геологии и гидрологии (22–23 марта 2001). – Москва : ГЕОС, 2001. – С. 86–90.
33. *Власов А., Брушков А., Мерзляков В.* К зависимости фазового равновесия грунтовой влаги и газовых гидратов от внешних параметров // Материалы Второй конференции геокриологов России. Т.1 (физико-химия и механика мёрзлых пород). – Москва : Изд-во Московского университета, 2001. – С. 25–30.
34. *Власов А., Мнушкин М.* Моделирование задач геомеханики на основе объектно-ориентированного подхода // Современные методы инженерных изысканий в строительстве. – Москва, МГСУ, 2001. – С. 152–166.
- 2002
35. Composite Heterostructures and Numerical Approaches to Modeling the Mechanical Properties of Theirs / Y. Yanovsky [et al.] // WCCM V: Fifth World Congress

- on Computational Mechanics (Book of Abstracts, Vol. II). – Vienna, Austria, 2002. – P. II-35.
36. Numerical research of influence of interface layer on the effective mechanical properties of matrix composites / A. Vlasov [et al.] // WCCM V: Fifth World Congress on Computational Mechanics (Book of Abstracts, Vol. II). – Vienna, Austria, 2002. – P. II-143.
37. *Vlasov A., Yufin S., Zimmermann T.* Method of asymptotic homogenization for evaluation of deformation and strength properties of layered rock // EUROCK 2002: Proceedings of the ISRM International Symposium on Rock for Mountainous Regions. – Funchal, Portugal : Sociedade Portuguesa de Geotecnica, 2002. – P. 727–736.
38. *Мерзляков В., Власов А.* К анализу режеляционного механизма относительного движения льда и твёрдого тела под действием внешней нагрузки // Экстремальные криосферные явления: фундаментальные и прикладные аспекты (Материалы международной конференции, тезисы докладов). – Пущино, 2002. – С. 178–179.
- 2003
39. Применение программного комплекса UWay к решению задач геомеханики / А. Власов [и др.] // Труды международной конференции по геотехнике, посвящённой 300-летию Санкт-Петербурга: Реконструкция исторических городов и геотехническое строительство. Т. 2. – Санкт-Петербург, 2003. – С. 305–309.
- 2004
40. Solving geomechanical problems with UWay FEM package / A. Vlasov [et al.] // Computational Methods in Engineering and Science. Proceedings of EPMESC VIII. – Taylor & Francis, 2004. – P. 453–461.
41. *Vlasov A., Yanovsky Y.* Numerical Modeling to Determine Constitutive Relations of Jointed Rock // Computational Mechanics (Abstracts of the 6th World Congress on Computational Mechanics & 2nd Asian-Pacific Congress on Computational Mechanics). – Beijing, China, 2004. – P. 628.
42. *Vlasov A., Yufin S., Kursova E.* Application of existing numerical models of continua for representing rock masses with stepping joint system // Rock Engineering: Theory and Practice (Proceedings of the ISRM Regional Symposium EUROCK 2004 & 53rd Geomechanics Colloquy) / ed. by W. Schubert. – Salzburg, Austria, 2004. – P. 733–738.
- 2005
43. Numerical Modeling of Jointed Rock Masses Using Existing Models of Continua / S. Yufin [et al.] // Alaska Rocks 2005: Proc. 40th U.S. Symposium on Rock Mechanics (USRMS). – Anchorage, AK, 2005. – Paper 760.
44. *Власов А., Мерзляков В., Талонов А.* Режеляционный механизм «фильтрационной консолидации» мёрзлых грунтов // Материалы третьей конференции геокриологов России. Т. 1. – Москва : Издательство Московского университета, 2005. – С. 17–23.

45. *Власов А., Яновский Ю.* Компьютерные технологии в механике композитов. Часть IV. Моделирование межфазных эффектов, напряжённо-деформированного состояния и эффективных свойств на базе объектно-ориентированного метода конечных элементов // Современные проблемы механики гетерогенных сред (под ред. Ю.Г. Яновского), т. III. – Москва : Российская академия наук, Институт прикладной механики, 2005. – С. 271–309.
2006
46. Numerical modeling of jointed rock masses / S. Yufin [et al.] // Numerics in Geotechnics & Structures. Th. Zimmermann & A. Truty (eds.) – Lausanne, Switzerland : ElmePress International, 2006. – Р. 115–128.
47. Хименков А., Власов А. Некоторые аспекты вероятностных подходов в оценке динамики криолитозоны // Теория и практика оценки состояния криосферы Земли и прогноз её изменений: Материалы международной конференции. Т. 1. – Тюмень : ТюмГНГУ, 2006. – С. 107–109.
48. Хименков А., Власов А. Неоднородности природной среды как фактор динамики криолитозоны // Сергеевские чтения. Вып. 8 / Материалы годичной сессии Научного Совета РАН по проблемам геоэкологии, инженерной геологии и гидрогеологии (23 марта 2006). – Москва : ГЕОС, 2006. – С. 358–362.
49. Хименков А., Власов А. Применение иерархических моделей к оценке динамики криолитозоны // Оценка и управление природными рисками. Материалы Всероссийской конференции «РИСК-2006». – Москва : Изд-во РУДН, 2006. – С. 31–33.
2008
50. Власов А., Мерзляков В. Приведение периодических задач на ячейке в методе асимптотического усреднения к краевым // Вопросы математики, механики сплошных сред и применения математических методов в строительстве (Сборник научных трудов). Т. 11. – Москва, МГСУ, 2008. – С. 133–144.
51. Власов А., Тимофеев В., Мнушкин М. Влияние прогноза изменения гидрологических условий на точность оценки зоны влияния нового строительства // Проблемы обеспечения экологической безопасности строительства (IV-е Денисовские чтения, 23 октября 2008 г.) – Москва, МГСУ, 2008. – С. 93–100.
2009
52. Моделирование задач геомеханики с помощью Simulia Abaqus / А. Власов [и др.] // Инженерные системы – 2009. Труды международной научно-практической конференции. Т. 1. – Москва : РУДН, 2009. – С. 97–111.
53. Моделирование прочностных свойств сред с учётом нанохарактеристик слоя в системе углеродные частицы – органический полимер / А. Власов [и др.] // Многомасштабное моделирование процессов и структур в нанотехнологиях. Сборник тезисов докладов. II Всероссийская конференция. – Москва, МИФИ, 2009. – С. 403–404.
54. Власов А., Саваторова В., Талонов А. Учёт нелинейной теплопроводности при моделировании термомеханического поведения композиционных материалов со слоистой структурой // Механика и наномеханика структурно-сложных и гетерогенных сред. Всероссийская конференция, приуроченная к 20-летию ИПРИМ РАН (Тезисы докладов). – Москва : ИПРИМ РАН, 2009. – С. 30.

2010

55. Геоэкологические аспекты оценки риска опасных процессов в криолитозоне / А. Хименков [и др.] // Сборник трудов, выполняемых по грантам Президиума РАН. – 2010.
56. Моделирование задач геомеханики / А. Власов [и др.] // Сборник трудов юбилейной конференции, посвящённой 80-летию кафедры механики грунтов, оснований и фундаментов (110-летию Н.А. Цытовича, 100-летию С.С. Вялова). – Москва, МГСУ, 2010. – С. 114–132.
57. Некоторые особенности геотехнического моделирования с помощью SIMULIA Abaqus / А. Власов [и др.] // Инженерные системы – 2010. Тезисы докладов международной научно-практической конференции. – Москва : РУДН, 2010. – С. 12.
58. Некоторые особенности геотехнического моделирования с помощью SIMULIA Abaqus / А. Власов [и др.] // Труды международной научно-практической конференции "Инженерные системы – 2010". – Москва : РУДН, 2010. – С. 78–88.
59. Волков-Богородский Д., Власов А. Аналитико-численный метод усреднения уравнений фильтрации Бринкмана в пористых и трещиноватых средах // Труды IV всероссийского симпозиума «Механика композиционных материалов и конструкций» (к 90-летию академика И.Ф. Образцова). – Москва : Альянстратом, 2010. – С. 81–97.
60. Мерзляков В., Власов А. Модель анизотропной среды с дилатансией // Вопросы математики, механики сплошных сред и применения математических методов в строительстве (Сборник научных трудов). Т. 12. – Москва, МГСУ, 2010. – С. 95–105.

2011

61. Усреднение нелинейного уравнения теплопроводности при моделировании распространения тепла в материалах со слоистой структурой / А. Власов [и др.] // Сборник трудов всероссийской конференции «Механика наноструктурированных материалов и систем». – Москва : ИПРИМ РАН, 2011. – С. 77–88.
62. Власов А., Волков-Богородский Д., Мнушкин М. Применение программного комплекса ABAQUS к расчету линейных сооружений в районах с суровыми климатическими условиями // Труды Международной научно-практической конференции «Инженерные системы – 2011». Т. I. – Москва : РУДН, 2011. – С. 43–49.
63. Волков-Богородский Д., Власов А. Асимптотическое усреднение уравнений фильтрации Бринкмана в «полупроницаемых» средах // Сборник трудов всероссийской конференции «Механика наноструктурированных материалов и систем». – Москва : ИПРИМ РАН, 2011. – С. 17–29.

2012

64. Некоторые характерные проблемы в решении задач геомеханики / А. Власов [и др.] // Механика грунтов в геотехнике и фундаментостроении: Материалы всероссийской научно-технической конференции. – Новочеркасск, 2012. – С. 58–64.
65. Нестационарная фильтрация сжимаемого баротропного вещества в недеформируемой пористой среде / В. Саваторова [и др.] // Труды IV всероссийского

симпозиума «Механика композиционных материалов и конструкций». Т. 1. – Москва : ИПРИМ РАН, 2012. – С. 214–230.

66. Численное моделирование задач геомеханики с использованием программы UWay / А. Власов [и др.] // Численные методы расчётов в практической геотехнике: Сборник статей научно-технической конференции. – Санкт-Петербург : СПбГАСУ, 2012. – С. 203–209.
67. Волков-Богородский Д., Власов А. Моделирование уравнений конвективного переноса тепла в структурно-неоднородных средах методом двухмасштабного усреднения // Труды IV всероссийского симпозиума «Механика композиционных материалов и конструкций». Т. 2. – Москва : ИПРИМ РАН, 2012. – С. 186–203.

2013

68. Геотехнический расчет влияния строительства общественно-жилого комплекса с подземной автостоянкой на окружающую застройку и коммуникации. Оценка эффективных свойств структурно-неоднородных материалов / А. Власов [и др.] // Труды Международного форума «Инженерные системы – 2013». – Москва : МАКС Пресс, 2013. – С. 165–181.
69. Реологическая модель и особенности напряженно-деформированного состояния региона активной сдвиговой разломной зоны на примере разлома Сан-Андреас. Статья 1. Разлом Сан-Андреас как тектонофизическая структура / Т. Романюк [и др.] // МОИП, отд. Геологич. Т. 88. – 2013. – С. 3–19.
70. Реологическая модель и особенности напряженно-деформированного состояния региона активной сдвиговой разломной зоны на примере разлома Сан-Андреас. Статья 2. Тектонофизическая модель литосферы региона разлома Сан-Андреас / Т. Романюк [и др.] // МОИП, отд. Геологич. Т. 88. – 2013. – С. 3–17.
71. Волков-Богородский Д., Власов А. Параметрический метод асимптотического усреднения для нелинейных уравнений термоупругости с быстроосциллирующими коэффициентами // Труды 2-ой Всероссийской конференции «Механика наноструктурированных материалов и систем». Т. 3. – Москва : ИПРИМ РАН, 2013. – С. 52–68.

2014

72. Реологическая модель и особенности напряженно-деформированного состояния региона активной сдвиговой разломной зоны на примере разлома Сан-Андреас. Статья 3. Моделирование напряженно-деформированного состояния литосферы методом конечных элементов / Т. Романюк [и др.] // МОИП, отд. Геологич. Т. 89. – 2014. – С. 3–26.

2015

73. Многомасштабное усреднение уравнений переноса газовой фазы в пористой среде / В. Саваторова [и др.] // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник материалов Всероссийской научной конференции с международным участием (к 95-летию академика И.Ф. Образцова). – Москва, 2015. – С. 544–545.
74. Оценка механических свойств гиперупругих композитов с малыми добавками дисперсных наполнителей / А. Власов [и др.] // Материалы всероссийской

конференции «Механика и наномеханика структурно-сложных и гетерогенных сред. Успехи, проблемы, перспективы». – Москва : ИПРИМ РАН, 2015. – С. 219–225.

75. Власов А., Волков-Богородский Д. Моделирование гиперупругих композитов с малыми добавками дисперсных наполнителей. Масштабные эффекты в нанокомпозитах // Труды Международного форума «Инженерные системы – 2015». – Москва, 2015.
76. Власов А., Волков-Богородский Д. Параметрическое усреднение физико-механических характеристик неоднородных материалов периодической структуры с нелинейными свойствами // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник материалов Всероссийской научной конференции с международным участием (к 95-летию академика И.Ф. Образцова). – Москва, 2015. – С. 508–510.
77. Саваторова В., Власов А., Талонов А. Реология сланцев: трехмасштабная модель транспорта газовой фазы в пористой среде // Материалы всероссийской конференции «Механика и наномеханика структурно-сложных и гетерогенных сред. Успехи, проблемы, перспективы». – Москва : ИПРИМ РАН, 2015. – С. 8–16.

2016

78. Yamal Craters: State of Knowledge and Wished In-situ Investigations / D. Sergeev [et al.] // Proceedings of the 11th International Conference on Permafrost (ICOP 2016), Potsdam (Session: Hazards and risks related to changing permafrost). – 2016. – Р. 997. – Extended Abstract #414, DOI: 10.2312/GFZ.LIS.2016.001.
79. Геоэкологические риски функционирования ведущих природно-технических комплексов на территории криолитозоны России / С. Сергеев [и др.] // Вопросы географии, сб. 142: География полярных регионов (отв. ред. В.М. Котляков). – Москва : Кодекс, 2016. – С. 57–75.
80. Моделирование распространения акустических волн в предварительно нагруженной среде с трещинами и порами / Е. Коссович [и др.] // Труды 6-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского (Том II). – Москва, 2016. – С. 110–116.
81. Численный метод оценки механических свойств наполненных резин с малыми добавками минеральных дисперсных наполнителей / А. Власов [и др.] // XXVII международный симпозиум «Проблемы шин, РТИ и эластомерных композитов» (сборник научных трудов). – Москва, 2016. – С. 100–113.
82. Власов А., Волков-Богородский Д. Параметрическое усреднение уравнений нелинейной теории упругости и деформационной теории пластичности // Труды 6-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского (Том II). – Москва, 2016. – С. 77–84.
83. Волков-Богородский Д., Власов А. Моделирование с помощью SIMULIA Abaqus физических процессов в структурно-неоднородных материалах на основе метода параметрического усреднения // Труды Международного форума «Инженерные системы – 2016». – Москва, 2016. – С. 151–177.

2017

84. Анализ эффективности берегоукрепительных мероприятий на Угличском водохранилище и предложения по их усовершенствованию / А. Остякова [и

- др.] // Всероссийская научная конференция с международным участием "Водные ресурсы: Новые вызовы и пути решения" (Сочи, 02–07 октября 2017 г.) – Сборник научных трудов. – Новочеркасск : Лик, 2017. – С. 260–266.
85. Мобильный многофункциональный изыскательский комплекс для экспресс-определения механических свойств грунтов / М. Королев [и др.] // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов 7-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. – Москва, 2017. – С. 346–348.
86. Расчетно-экспериментальные методы прогноза устойчивости характерных участков берегов Угличского водохранилища / А. Власов [и др.] // Всероссийская научная конференция с международным участием "Водные ресурсы: Новые вызовы и пути решения" (Сочи, 02–07 октября 2017 г.) – Сборник научных трудов. – Новочеркасск : Лик, 2017. – С. 137–142.
87. Эффективный изыскательский комплекс экспресс-определения механических свойств грунтов, слагающих берега водохранилищ, для прогноза их устойчивости / М. Королев [и др.] // Всероссийская научная конференция с международным участием "Водные ресурсы: Новые вызовы и пути решения" (Сочи, 02–07 октября 2017 г.) – Сборник научных трудов. – Новочеркасск : Лик, 2017. – С. 216–221.
88. Власов А. Усреднение характеристик механических свойств горных пород. Аналитико-численные методы // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов 7-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. – Москва, 2017. – С. 17–20.
89. Власов А., Волков-Богородский Д. Асимптотическое усреднение уравнений термовязкоупругости с быстроосцилирующими коэффициентами // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов 7-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. – Москва, 2017. – С. 277–280.
90. Власов А., Волков-Богородский Д. Многоуровневое усреднение волокнистых композитов // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов 7-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. – Москва, 2017. – С. 281–284.
91. Власов А., Волков-Богородский Д., Хименков А. Моделирование вязкоупругих и функционально-градиентных материалов с помощью Simulia Abaqus. Приложение к образованию воронок газовых выбросов в многолетнемёрзлых грунтах // Труды Международного форума «Инженерные системы – 2017». – Москва, 2017. – С. 154–165.
92. Власов А., Королев М. Перспективы развития геомеханики как системы // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов 7-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. – Москва, 2017. – С. 330–333.

93. Structural reorganizations in frozen grounds within the gas emission crater formation / A. Khimenkov [et al.] // Innovation and Discovery in Russian Science and Engineering: Natural Hazards and Risk Research in Russia. – Springer International Publishing, 2018. – P. 305–316.

94. Динамика флюидов как перспективное направление в геокриологии / А. Хименков [и др.] // Сборник докладов расширенного заседания Научного совета по криологии Земли РАН «Актуальные проблемы геокриологии» (15–16 мая 2018 г., МГУ им. М.В. Ломоносова). 2 (ч.5–9). – КДУ; Университетская книга, 2018. – С. 228–233.

2019

95. Scanning Probe Microscopy of Elastomers with Mineral Fillers / H. Valiev [et al.] // IntechOpen (Online First publication). – 2019. – DOI: 10.5772/intechopen.84554.

96. Данные микроскопии в исследованиях мембранный фильтруемости эритроцитов / Н. Снегирева [и др.] // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник тезисов 9-й Всероссийской научной конференции с международным участием (посвященной 30-летию ИПРИМ РАН). – 2019. – С. 88–89.

97. *Vlasov A., Zertsalov M., Vlasov D.* Influence of normal and shear stiffness on deformation characteristics of rock mass // Proceedings of the International Conference on Geotechnics Fundamentals and Applications in Construction: New Materials, Structures, Technologies and Calculations (GFAC 2019). – CRC Press/Balkema, 2019. – P. 413–419.

98. *Власов А., Зерцалов М., Власов Д.* О применимости метода асимптотического усреднения к оценке деформационных характеристик скальных массивов // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов 8-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. – Москва, 2019. – С. 316–328.

2020

99. Magnetostriction effects in silicone elastomers / E. Kelbysheva [et al.] // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering (International Conference of Young Scientists and Students "Topical Problems of Mechanical Engineering" – ToPME 2019). – 2020. – P. 012003.

100. Modification of structural properties of filled soil by the "geocomposite" method in the base of foundation slab / V. Znamensky [et al.] // Rock Mechanics for Natural Resources and Infrastructure Development. Full Papers. – London : CRC Press, 2020. – P. 2333–2340.

101. *Vlasov A., Zertsalov M., Vlasov D.* Anisotropic deformation model of jointed rock mass with dilatancy // Rock Mechanics for Natural Resources and Infrastructure Development. Full Papers. – London : CRC Press, 2020. – P. 575–582.

102. *Власов А., Королев М., Волков-Богородский Д.* Численные расчеты и численное моделирование в решении различных задач геомеханики. Возможности и проблемы // Обеспечение качества, безопасности и экономичности строительства. Практика. Проблемы. Перспективы. Инновации (Вторая совместная научно-практическая конференция ГБУ «ЦЭИИС» и ИПРИМ РАН, 12–13 декабря 2019 г.) – Сборник трудов. – Москва, 2020. – С. 36–6.

2021

103. Влияние состава и структуры на механические свойства перспективных эластомерных композитов с минеральными наполнителями на основе диоксида кремния и углерода / Ю. Корнев [и др.] // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов 11-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. – Москва : ИПРИМ РАН, 2021. – С. 70–76.
104. Исследование параметров структуры поверхности эластомерных композитов методом электронной и атомно-силовой микроскопии / Ю. Корнев [и др.] // Материалы XXII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСПС'2021). – Алушта : Изд-во МАИ, 2021. – С. 230–232.
105. Исследования эластомерных композитов с наполнителями на основе диоксида кремния / Ю. Корнев [и др.] // Объединенная конференция “Электронно-лучевые технологии и рентгеновская оптика в микроэлектронике” (КЭЛТ-2021). – Москва : ФУТУРИС ПРИНТ, 2021. – С. 177–179.
106. *Vlasov A., Volkov-Bogorodsky D.* Parametric Homogenization of the Equations of Nonlinear Elasticity and Deformational Plasticity to the Modeling of Structurally Heterogeneous Materials // International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering (ICCMSE 2020), AIP Conference Proceedings. Vol. 2343. – 2021. – P. 120006. – DOI: 10.1063/5.0047907.
107. *Vlasov A., Volkov-Bogorodsky D.* Parametric Homogenization of the Equations of Nonlinear Elasticity and Deformational Plasticity to the Modeling of Structurally Heterogeneous Materials // International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering (ICCMSE 2020), AIP Conference Proceedings. Vol. 2343. – 2021. – P. 120006.
108. *Королев М., Власов А.* Проблемы эксплуатации ответственных сооружений в криолитозоне // Механика Композиционных Материалов и Конструкций, Сложных и Гетерогенных Сред. Сборник трудов 11-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. – Москва : ИПРИМ РАН, 2021. – С. 346–355.

2022

109. Investigation of reinforcing effects in elastomeric composites with mineral fillers, based on silicon dioxide and carbon / Y. V. Kornev [et al.] // International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering (ICCMSE 2021), AIP Conference Proceedings. Vol. 2611. – 2022. – P. 010001.
110. Исследования композитов бутадин-стирольного каучука с микродисперсными неорганическими наполнителями / Ю. Корнев [и др.] // Материалы XIV Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. – Алушта : Изд-во МАИ, 2022. – С. 199–201.
111. *Vlasov A., Volkov-Bogorodsky D.* Modeling the Effective Properties of Fibrous Composite Materials with a Functionally Graded Interphase Layer Based on the Eshelby Problem // International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering (ICCMSE 2021), AIP Conference Proceedings. Vol. 2611. – 2022. – P. 010001.

112. *Власов А., Власов Д., Коваленко М.* Полуплоскость с полубесконечным ребром жесткости (приложение к решению задачи о взаимодействии свай со скальным грунтом) // Материалы XIV Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАГ'2022). – Алушта : Изд-во МАИ, 2022. – С. 177–179.
- 2024
113. Investigation of the asymmetric hollow fiber membranes structure using an atomic force microscopy / K. Valiev [et al.] // Third International Symposium on Materials Science and Technology (MST-III 2023), Proc. SPIE. Vol. 12986. – 2024. – 129861A. – DOI: 10.1117/12.3018142.
114. Изучение композитов на основе полиэтилена с частицами диоксида кремния / Х. Валиев [и др.] // Материалы 14-й Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. – 2024. – С. 43–47. – DOI: 10.33113/conf.mkmk.ras.2024.5.
115. Сорокин Г., Власов А. Оценка эффективного тензора жесткости композитного материала с периодическим расположением центров включений с одной или несколькими случайными характеристиками // Материалы 14-й Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. – 2024. – С. 140–144. – DOI: 10.33113/conf.mkmk.ras.2024.16.
- 2025
116. Study of polysulfone composites with silicon dioxide filler / Y. V. Kornev [et al.] // Proc. SPIE 13662, Fourth International Conference on Digital Technologies, Optics, and Materials Science (DTIEE 2025). – 2025. – 136620Y. – DOI: 10.1117/12.3072220.

В. Б. Пеньков, Л. В. Левина, М. Ю. Левин, В. В. Затонская

СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕРМОУПРУГИЕ СОСТОЯНИЯ МНОГОПОЛОСТНОГО ТЕЛА

Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия

Аннотация. Стационарное изотропное термоупругое поле описывается набором определяющих соотношений среды. Для линейных и кусочно-линейных граничных условий, в которых связаны в общем случае температурные и механические характеристики, предложена удобная классификация задач. Стого прописаны процедуры формирования сепарабельных базисов пространств внутренних и граничных состояний в задачах термостатики, эластостатики, термоэластостатики для областей произвольной геометрической конфигурации. Метод граничных состояний формирует бесконечную систему линейных уравнений относительно коэффициентов разложения решения в ряд Фурье. В качестве примера рассмотрена задача класса «1N», сочетающего граничные условия первой основной задачи упругости (поверхностные усилия) и условия Неймана для температурного поля, сформулированная для сферического слоя, ослабленного сферической полостью. Рассмотрены различные варианты сочетания геометрических параметров внешней границы, центральной полости, возмущающей полости. Проанализированы результаты, сделаны выводы.

Ключевые слова: термоэластостатика, метод граничных состояний, МГС, сферические полости, многополостность, краевые задачи термоупругости.

Пеньков Виктор Борисович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры общей механики; e-mail: vbprenkov@mail.ru;

Левина Любовь Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики; e-mail: satalkina_lyubov@mail.ru;

Левин Максим Юрьевич, доктор технических наук, профессор кафедры физики и биомедицинской техники; e-mail: lmu@list.ru;

Затонская Валентина Витальевна, студент кафедры прикладной математики; e-mail: zatonskaya.valentina@yandex.ru;



для цитирования: Пеньков В. Б., Левина Л. В., Левин Л. В., Затонская В. В. Стационарные термоупругие состояния многополостного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 4(66). С. 44–58. DOI: 10.37972/chgru.2025.66.4.003. EDN: HXWPMB

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

V. B. Penkov, L. V. Levina, M. Y. Levin, V. V. Zatonskaya

STATIONARY THERVOELASTIC STATES OF MULTI-CAVITY

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia

Abstract. A stationary isotropic thermoelastic field is described by a set of defining relations: 1) the Poisson equation relating the temperature field to volumetric heat sources; 2) Cauchy formulas; 3) Duhamel-Neumann law; 4) equilibrium equations. The linear resolving equations of Lame and Poisson allow us to decompose the solution into the sum of a partial solution and a solution to a problem with adjusted boundary conditions. In the case of volumetric factors of the polynomial type, the partial solution is written out exactly. The interest lies in solving a homogeneous problem. A convenient classification of problems is proposed for linear and piecewise linear boundary conditions in which temperature and mechanical characteristics are generally related. The procedures for forming separable bases of spaces of internal and boundary states in the problems of thermostatics, elastostatics, and thermoelastostatics for regions of arbitrary geometric configuration are strictly prescribed. In isomorphic Hilbert spaces of internal and boundary states the values of the scalar products coincide for isomorphic pairs of elements. The method of boundary states forms an infinite system of linear equations with respect to the coefficients of the Fourier series expansion of the solution. The choice of the size of the truncated basis is based on the Bessel inequality. The accuracy of the solution is estimated by the inconsistency of the constructed boundary state with boundary conditions. As an example, a problem of class "1N" is considered, combining the boundary conditions of the first basic elasticity problem (surface forces) and the Neumann conditions for a temperature field, formulated for a spherical layer weakened by a spherical cavity. Various combinations of geometric parameters of the outer boundary, the central cavity, and the perturbing cavity are considered. The results are analyzed and conclusions are done.

Keywords: thermoelastostatics, the method of boundary states, MBS, spherical cavities, multi-cavity, boundary value problems of thermoelasticity

Victor B. Penkov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of General Mechanics; **e-mail:** vbpenkov@mail.ru;

Lyubov V. Levina, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics; **e-mail:** satalkina_lyubov@mail.ru;

Maxim Y. Levin, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Physics and Biomedical Engineering; **e-mail:** lmuv@list.ru;

Valentina V. Zatonskaya, Student of the Department of Applied Mathematics; **e-mail:** zatonskaya.valentina@yandex.ru;



to cite this article: Penkov V.B., Levina L.V., Levin M.Y., Zatonskaya V.V. Stationary therovoelastic states of multi-cavity // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 4(66). p. 44-58. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.003

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Описание моделей термоупругих сред содержится в классических монографиях [1–3]. Исследования последнего времени в области статических и квазистатических сред посвящены разработкам эффективных численно-аналитических методов [4], проектированию форм для изготовления отливок изделий [5], применению функций комплексного переменного для анализа состояний тел с трещинами [6], средствам учета свойств анизотропии [7–9], неоднородности [10].

Работа посвящена исследованию влияния термических воздействий на напряженно-деформированное состояние (НДС) равновесной термоупругой среды и является развитием темы [11]. Круг задач, ведущих к достижению цели:

- 1) описание внутреннего состояния термоупругой среды и ему соответствующего граничного состояния;
- 2) формирование базиса пространства состояний двухполостного ограниченного тела;
- 3) развитие аппарата метода граничных состояний (МГС) на решение классических задач термоэластостатики (ТЕ-задач) многосвязных тел;
- 4) решение конкретных задач для сферического слоя со сферической полостью.

1. Уравнения стационарной термоупругости. Термоэластостатическое состояние 3D-тела V с границей ∂V описывается определяющими соотношениями [2], содержащими 16 уравнений:

$$T_{,ii} + \frac{1}{k}Q = 0, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T\delta_{ij}, \quad (3)$$

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0. \quad (4)$$

Уравнение Пуассона (1) отвечает за распределение температуры T во внутренних точках $x = \{x_1, x_2, x_3\} \in V$; здесь k — параметр температуропроводности, Q — объемная плотность тепловых источников. Соотношения Коши (2) выражают компоненты тензора деформаций ε_{ij} через составляющие вектора перемещений u_i линейной упругой изотропной среды. Закон Дюамеля-Неймана (3) обобщает закон Гука на предмет учета температурных деформаций: $\theta = \varepsilon_{kk}$ — объемная упругая деформация, λ, μ — упругие параметры Ламе, δ_{ij} — символ Кронекера, α — параметр температурного расширения среды. Уравнения равновесия (4) приведены при учете объемных сил X_i произвольной физической природы.

Частные решения, отвечающие регулярным силам X_i и теплоисточникам Q , строятся эффективно [12], поэтому неоднородные составляющие линейной системы уравнений (1)–(4) можно из рассмотрения исключить. Разрешающий набор дифференциальных уравнений при отсутствии неоднородных составляющих ($X_i = 0, Q = 0$) состоит из системы уравнений Ламе и уравнения Лапласа:

$$\begin{aligned} \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{j,ji} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_{,i} &= 0, \\ T_{,ii} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Это — замкнутая разрешающая система уравнений в частных производных эллиптического типа относительно температуры и перемещений.

Описываем температурное состояние тела избыточным набором согласованных характеристик, совокупность всех вариантов их наборов $\xi^T = \{T, T_{,i}\} \in \Xi^T$ образует термостатическое пространство внутренних состояний. Ему изоморфно пространство граничных состояний с элементами $\gamma^T = \{T, \frac{dT}{d\mathbf{n}}\} \in \Gamma^T$. Аналогичный подход используем для представления пространств состояний упругой среды: $\xi^E = \{u_i^E, \varepsilon_{ij}^E, \sigma_{ij}^E\} \in \Xi^E$, $\gamma^E = \{u_i^E, p_i^E\} \in \Gamma^E$. Символом E помечены характеристики состояний, отвечающих обобщенному закону Гука

$$\sigma_{ij}^E = \lambda \varepsilon_{kk}^E \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^E.$$

В целом характеристики состояния учитывают «приобретенные» температурные деформации $\varepsilon_{ij}^T = \alpha T \delta_{ij}$ и «потерянные» напряжения $\sigma_{ij}^T = -(3\lambda + 2\mu)\alpha T \delta_{ij}$:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^E + \varepsilon_{ij}^T, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^E + \sigma_{ij}^T.$$

Соответствующие граничные состояния имеют характеристики

$$\gamma = \{u_i^E, u_i^T, p_i^E, p_i^T, T, \frac{dT}{d\mathbf{n}}\} \in \Gamma, \quad \gamma^E = \{u_i^E, p_i^E\} \in \Gamma^E$$

2. Гильбертовы пространства состояний термоэластостатики. Пространства Ξ, Γ — гильбертовы со скалярными произведениями ($a, b > 0$):

$$\begin{aligned} (\xi^m, \xi^n)_\Xi &= a(\xi^{E(m)}, \xi^{E(n)})_E + b(\xi^{T(m)}, \xi^{T(n)})_T, \\ (\xi^{E(m)}, \xi^{E(n)})_E &= \int_V \sigma_{ij}^{E(m)} \varepsilon_{ij}^{E(n)} dV, \quad (\xi^{T(m)}, \xi^{T(n)})_T = \int_V T_{,i}^{(m)} T_{,i}^{(n)} dV \end{aligned} \quad (6)$$

— в пространстве внутренних состояний Ξ , и

$$\begin{aligned} (\gamma^m, \gamma^n)_\Gamma &= a(\gamma^{E(m)}, \gamma^{E(n)})_E + b(\gamma^{T(m)}, \gamma^{T(n)})_T, \\ (\gamma^{E(m)}, \gamma^{E(n)})_E &= \int_{\partial V} p_i^{(m)} u_i^{(n)} dS, \quad (\gamma^{T(m)}, \gamma^{T(n)})_T = \int_{\partial V} T^{(m)} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial n} dS \end{aligned} \quad (7)$$

— в пространстве граничных состояний Γ . Для изоморфных пар элементов пространств $\Xi \leftrightarrow \Gamma$ справедливо равенство

$$(\xi^{(m)}, \xi^{(n)})_\Xi = (\gamma^{(m)}, \gamma^{(n)})_\Gamma,$$

вытекающее из принципа возможных перемещений и свойств гармонических функций.

Скалярные произведения предназначены для ортогонализации базисов обоих пространств, которую можно проводить как в Ξ , так и в Γ . С практической точки зрения при наличии полостей рекомендуется производить ортогонализацию в пространстве Γ , поскольку элементы базиса в пространстве внутренних состояний содержат особые точки внутри каждой полости и при численном взятии интегралов это существенно сказывается на точности вычислений. На границах тела такие особенности отсутствуют.

Основой формирования регулярных базисов внутренних состояний для объектов, описываемых уравнениями эллиптического типа, служит набор однородных гармонических многочленов

$$\Phi_0^+ = \{1, x, y, z, xy, xz, yz, x^2 - y^2, x^2 - z^2, xyz, \dots, \varphi_j^+(x, y, z), \dots\}$$

Множество Φ_0^+ содержит один элемент порядка 0, три элемента порядка 2, $2m + 1$ элементов порядка $m = \text{ord } \varphi_j$, где через ord обозначен оператор взятия порядка многочлена. Оно является регулярным базисом функций, гармонических в ограниченной односвязной области V_0 .

Каждый элемент φ_j^+ множества Φ_0 порождает инверсию:

$$\varphi_j^- = \{\varphi_j^+(x, y, z) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{(2m+1)/2}\}, \quad \mathbf{r} = \{x, y, z\}, \quad \mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\} \in V_0,$$

являющуюся гармонической функцией вне полюса \mathbf{r}_0 и исчезающей на бесконечности.

Их набор образует базис гармонических функций Φ_0^- , регулярных во внешности полости V_0 : $V = \mathbb{R}^3 \setminus V_0$.

Ниже через $\bar{\Xi}$ будем обозначать сепарабельный базис пространства Ξ , через $\bar{\Xi}_N$ — алгебраический вектор размерности N , удержанный из базиса $\bar{\Xi}$.

Структура базиса гильбертова пространства Ξ^T определяется структурой области определения V :

- 1) односвязная ограниченная область $V = V_0$. Из списка Φ_0^+ исключён элемент, являющийся «нулём» пространства: $\bar{\Xi}_0^T = \bar{\Xi}_0^T = \Phi_0^+ \setminus \{\varphi_1^+\}$;
- 2) односвязная неограниченная область $V = \mathbb{R}^3 \setminus V_0$: $\bar{\Xi}_0^T = \Phi_0^-$;
- 3) n -полостная неограниченная область $V = \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{k=1}^n V_k$, где все полости V_k — непересекающиеся и каждая из них содержит опорную точку $\bar{r}_{0k} \in V_k$, участвующую при формировании инверсий: $\bar{\Xi}_0^T = \bigcup_{k=1}^n \Phi_k^-$, $\bar{r}_{0k} \in V_k$;
- 4) n -полостная ограниченная область $V = V_0 \setminus \bigcup_{k=1}^n V_k$: $\bar{\Xi}_0^T = \bar{\Xi}_0^T \cup \left(\bigcup_{k=1}^n \Phi_k^- \right)$.

Базис пространства Ξ^E формируется на основе общих решений системы уравнений Ламе [1], записываемых для изотропного однородного тела при отсутствии объемных сил:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{j,ii} = 0 \quad (8)$$

Весьма эффективным средством формирования базисов являются решения Аржаных-Слободянского [3] для односвязной внутренней и внешней по отношению к ∂V области соответственно

$$u_i = 4(1 - \nu)B_i + x_j B_{i,j} - x_i B_{j,j}, \quad u_i = 4(1 - \nu)B_i - (x_j B_j)_{,i},$$

где B_i — компонента гармонического вектора, $\nu = \lambda/(\lambda + \mu)/2$. Общие решения выражаются через векторы, составляемые из гармонических функций, поэтому каждая гармоническая функция порождает три внутренних состояния пространства Ξ^E .

Процесс формирования регулярного базиса Ξ^E в зависимых от структуры тела аналогичен таковому, описанному для Ξ^T , за исключением одного нюанса. А именно, в случае односвязного ограниченного тела процедура дифференцирования в формуле Коши приводит к понижению порядка выражения. На начальном участке используемых однородных многочленов это порождает три линейно-зависимых элемента, которые не могут входить в базис. Их исключение удобно производить автоматизировано, используя процедуру ортогонализации $(\xi^m, \xi^n)_\Xi$, выполняемую на любой простейшей геометрической 3D-области. После «чистки» и отбрасывания «нулевого» элемента (отвечающего $\varphi^+ = 1$) счётный базис Ξ_0^E определён. Иных отклонений не наблюдается.

Следовательно, каждый элемент пространства гармонических функций позволяет построить три элемента вида $\xi = \{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, 0, 0\} \in \Xi$ и один элемент вида $\xi = \{u_i^T, \varepsilon_{ij}^T, \sigma_{ij}^T, T, T_{,j}\} \in \Xi$, где символом T помечены частные решения от объёмных сил теплового характера.

После ортогонализации базиса, использования разложения Фурье

$$\xi = \sum_k c_k \xi^{(k)}, \quad \gamma = \sum_k c_k \gamma^{(k)} \quad (9)$$

и обработки граничных условий система уравнений (5) приводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье c_j :

$$\sum_{j=1}^N a_{kj} c_j = b_k, \quad N = \left| \Xi_N \right|, \quad (10)$$

где коэффициенты a_{kj} определяются через поверхностные интегралы от базисных элементов $\gamma^{(k)}, \gamma^{(j)}$, либо через объёмные интегралы от $\xi^{(k)}, \xi^{(j)}$, а правые части используют кроме $\gamma^{(k)}$ ещё и содержимое граничных условий.

Решение усеченной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (БСУ) проводится с учетом двух факторов: 1) насыщение суммы Бесселя; 2) невязка построенного граничного состояния с условиями на границе тела.

Классические варианты краевых задач ТЕ-среды исходят из формулирования ГУ для равновесной упругости и термостатики: «1», «2» означают соответственно первую и вторую задачи теории упругости по классификации Н.И. Мусхелишвили [13], «D», «N» – условия Дирихле и Неймана. Легко понимается смысл основных задач термоупругости, обозначаемых как «1D», «1N», «2D», «2N». Нетрудно понять смысл аббревиатуры смешанных задач «12D», «1DN» и др.

Настоящая работа является важным шагом к реализации общего подхода к решению основных и смешанных задач термоэластостатики с линейными и кусочно-линейными граничными условиями для однородной изотропной среды, но уже наблюдаются смежные исследования, ориентированные на анизотропные среды. В работе [9] метод граничных состояний применен для описания термоупругого состояния трансверсально-изотропного тела вращения, находящегося в осесимметричном поле установившихся температур.

3. Термоэластостатическое состояние сферического слоя со сферической полостью. Нижнеизложенное представлено в обезразмеренной форме. Шар радиуса $R_1 = 1$ содержит центральную полость радиуса $R_2 = \frac{1}{2}$ и “возмущающую” полость радиуса R_3 , расположенную в позиции $(0, 0, \frac{3}{4})$ (рис. 1). При исследовании влияния “возмущающую” полости рассматривались варианты $R_3 \in [\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}]$.

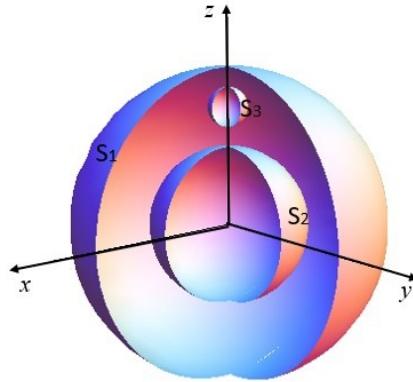


Рис. 1. Сферический слой со сферической полостью

Обе полости являются источниками тепла либо холода. Потоки тепла через S_1, S_2, S_3 полагаются равномерными с интенсивностями $T_{nk} = \frac{dT}{dn} \Big|_k$, $k \in \{1, 2, 3\}$. При вычислениях принимались значения $T_{n2} = \pm 4$, $T_{n3} = \pm 1$. Для обеспечения термобаланса принимались значения уровня термопотоков через внешнюю границу области равными $T_{m1} \in \{\pm \frac{65}{64}, \pm \frac{257}{256}, \pm \frac{265}{256}\}$ в соответствии с

вариантами для R_3 . Верхние знаки в T_{nk} отвечают источникам тепла, нижние — источникам холода. Значения тепловых потоков отвечают условию стационарности температурного поля в теле: количество тепла в теле V не меняется с течением времени и, следовательно, имеет место баланс температуры (1). Полагается отсутствие объемных теплоисточников ($Q = 0$).

Кроме тепловых воздействий полости оказывают на тело механические воздействия давлением интенсивности $p_0 = 1$. Внешняя граница свободна от нагрузки.

Набор граничных условий характеризует краевую задачу как задачу класса «1N»:

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = T_{nk}, \quad (x, y, z) \in S_k, \quad p = \begin{cases} 0, & (x, y, z) \in S_1, \\ p_0, & (x, y, z) \in S_2, \\ p_0, & (x, y, z) \in S_3. \end{cases} \quad (11)$$

Для проведения решения средствами МГС были сформированы и ортонормированы отрезки базисов пространств состояний $\vec{\Xi}^T$, $\vec{\Xi}^E$ количеством 180 и 35 единиц соответственно и выполнены решения задачи Неймана для уравнения Лапласа и первой основной задачи для уравнений Ламе. Суммирование механических характеристик привело к построению полей перемещений, деформаций, напряжений в упругом теле (параметры Ламе $\lambda = \mu = 1$ при коэффициенте Пуассона $\nu = \frac{1}{4}$, $\alpha = 0.2$).

На (рис. 2) представлены распределения температуры в обоих вариантах теплового воздействия для варианта $R_3 = \frac{1}{8}$; фрагменты осевых купор полей вблизи “возмущающей” полости показаны укрупненно (рис. 3).

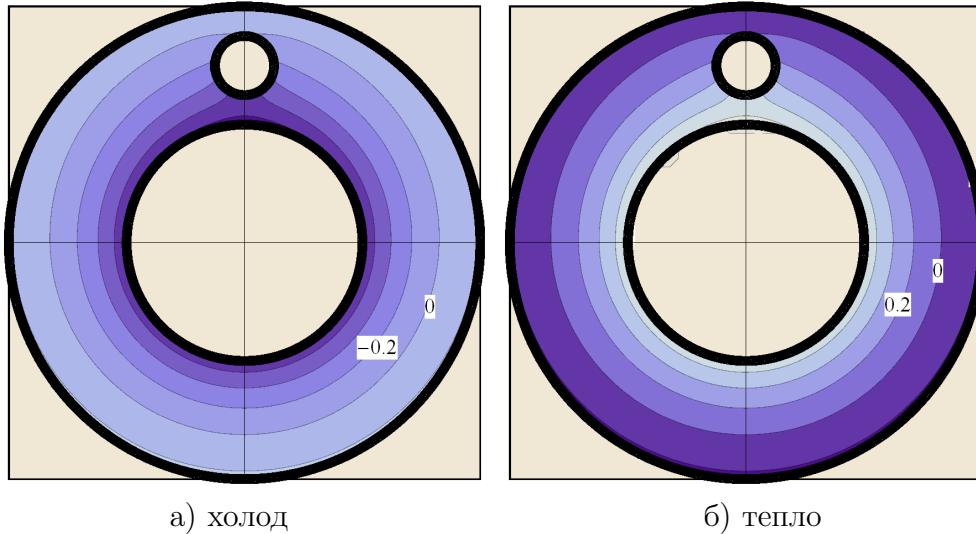


Рис. 2. Распределение температуры

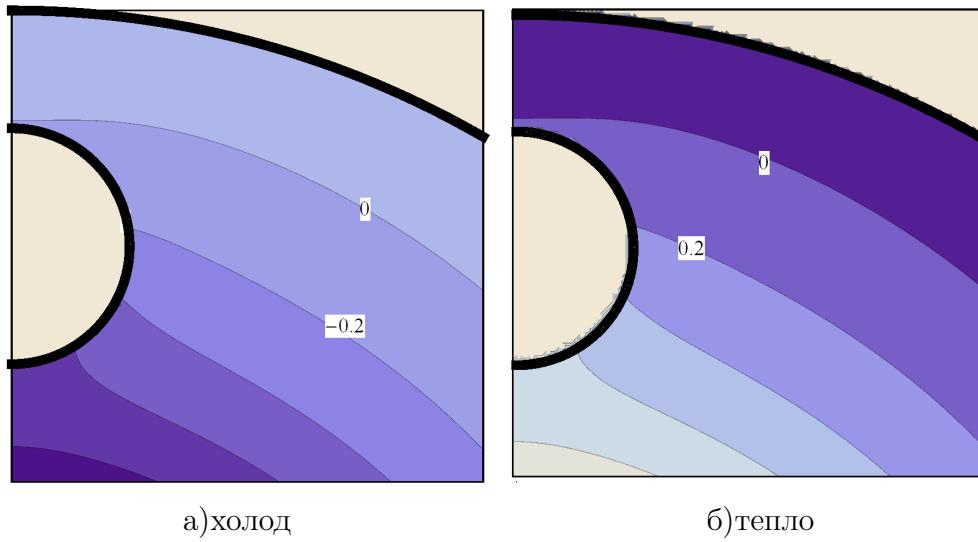


Рис. 3. Распределение температуры

Температурные поля от тепло- и хладоисточников имеют противоположные характеры. Эти же диаграммы в соответствующих масштабах отвечают характерам распределения “приобретенных” деформаций и «потерянных» напряжений. Фрагмент диаграммы, выделенной вблизи “возмущающей” полости, более качественно иллюстрирует окрестные температурные и напряженно-деформационные характеристики, обусловленные внешними тепловыми воздействиями.

В табл. 1, 2 для обоих вариантов тепловых воздействий приведены сечения, поясняющие распределение радиальных $\sigma_r = \sigma_{xx}|_{y=0}$, окружных $\sigma_\theta = \sigma_{yy}|_{y=0}$, осевых $\sigma_z = \sigma_{zz}|_{y=0}$, сдвиговых $\sigma_{rz} = \sigma_{xz}|_{y=0}$ напряжений в осесимметричном теле при различных значениях геометрического параметра “возмущающей” полости. Для качественной оценки влияния центральной полости на характер распределения напряжений в осевом сечении рассмотрен вариант тела с $R_2 = \frac{3}{16}$, $R_3 = \frac{1}{8}$ (столбец 4 в табл. 1, 2).

Анализ распределения напряжений в осевом сечении позволяет сделать общие выводы:

- 1) уменьшение диаметра “возмущающей” полости независимо от характера теплового воздействия приводит к заключениям:
 - на удалении от возмущающей полости поля напряжений корректируются слабо, а вблизи существенно варьируются;
 - уровень всех продольных напряжений меняется в соответствии с характером изменения R_3 ;
 - уровень сдвиговых напряжений снижается существенно в зонах, прилегающих к возмущающей полости.

- 2) изменение размера центральной полости приводит к существенному искажению полей напряжений. Характер полей напряжений почти не изменяется, за некоторыми исключениями, которые отмечены ниже;
- 3) радиальные напряжения σ_r вблизи экватора центральной полости при теплоисточниках имеют естественный характер: убывающее сжатие радиальных волокон при перемещении от полости к внешней границе; при охлаждении они незначительны. По-видимому, это вызвано наличием "возмущающей" полости. радиальные волокна в слое между полостями удлиняются слабо при теплоисточниках и весьма существенно при источниках холода. Воздействие хладосточников изменяет характер поля σ_r : уровень сжимающих радиальных напряжений значителен в областях, примыкающих к экваториальной плоскости;
- 4) поля окружных напряжений σ_θ получают существенные искажения воздействием "возмущающей" полости: при нагреве окружные волокна существенно удлиняются в слое между полостями, при охлаждении – между внешней границей и S_3 . Воздействие теплосточников при уменьшении размера центральной полости изменяет характер поля: вдоль толщины шарового слоя изменение напряжения не является монотонным, но содержит экстремальные значения (минимумы) примерно в средине слоя;
- 5) осевые напряжения σ_z – существенно сжимающие вблизи полюсов и слабо сжимающие при воздействии хладосточников. Вблизи экватора внешней границы он приобретают существенный растягивающий характер, но при охлаждающих воздействиях удлинения волокон незначительны. Вблизи оси симметрии тела между S_3 и S_1 осевые напряжения незначительны.
- 6) напряжения сдвига σ_{rz} имеют классический упругий характер. Они от температурных воздействий не зависят;
- 7) сопоставление полей напряжений, отвечающих различным значениям R_3 , свидетельствует о его существенном влиянии на НДС слоя между S_3 и S_1 : чем больше R_3 , тем значительнее искажения полей напряжений.

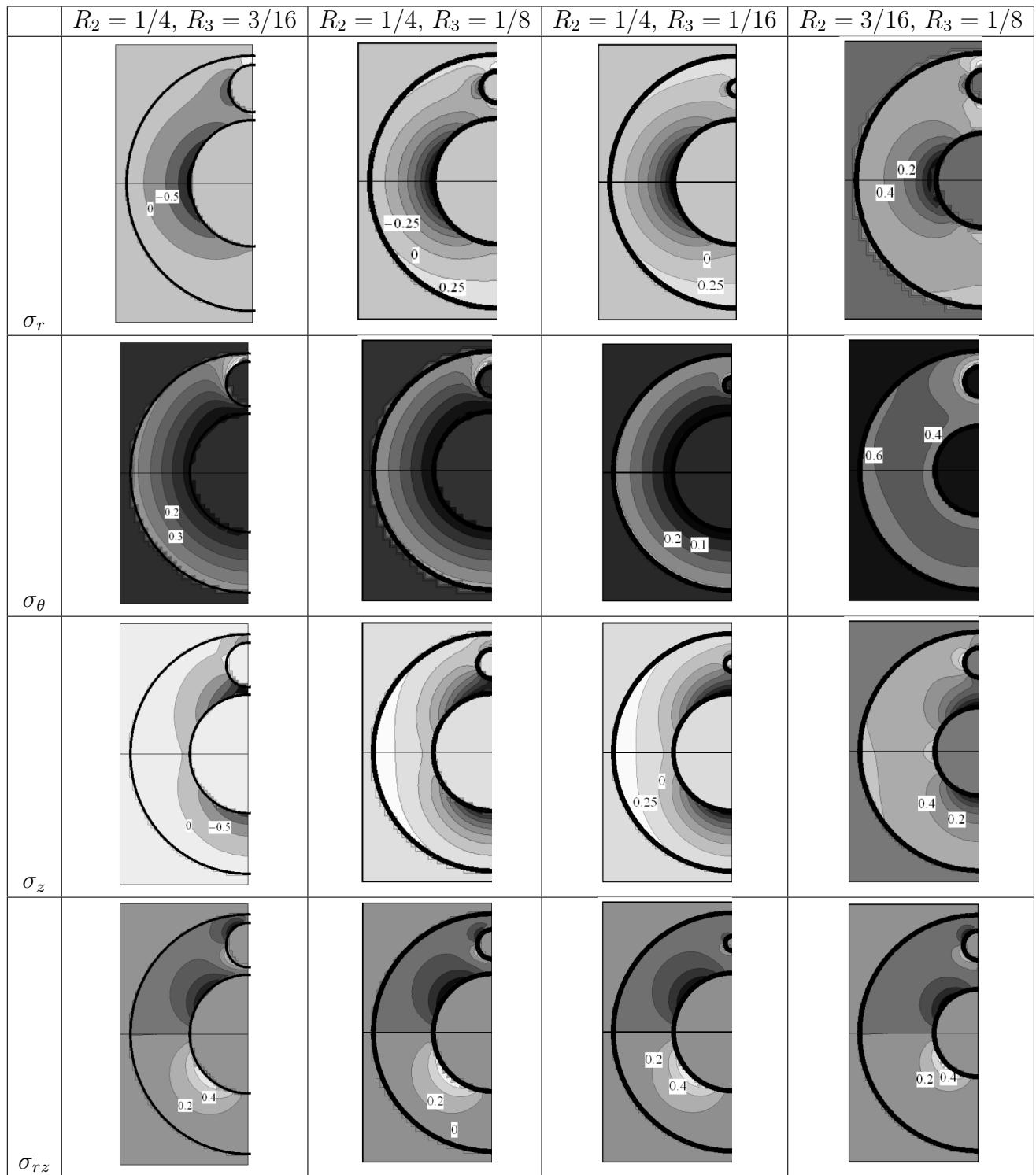


Таблица 1. Теплоисточники.

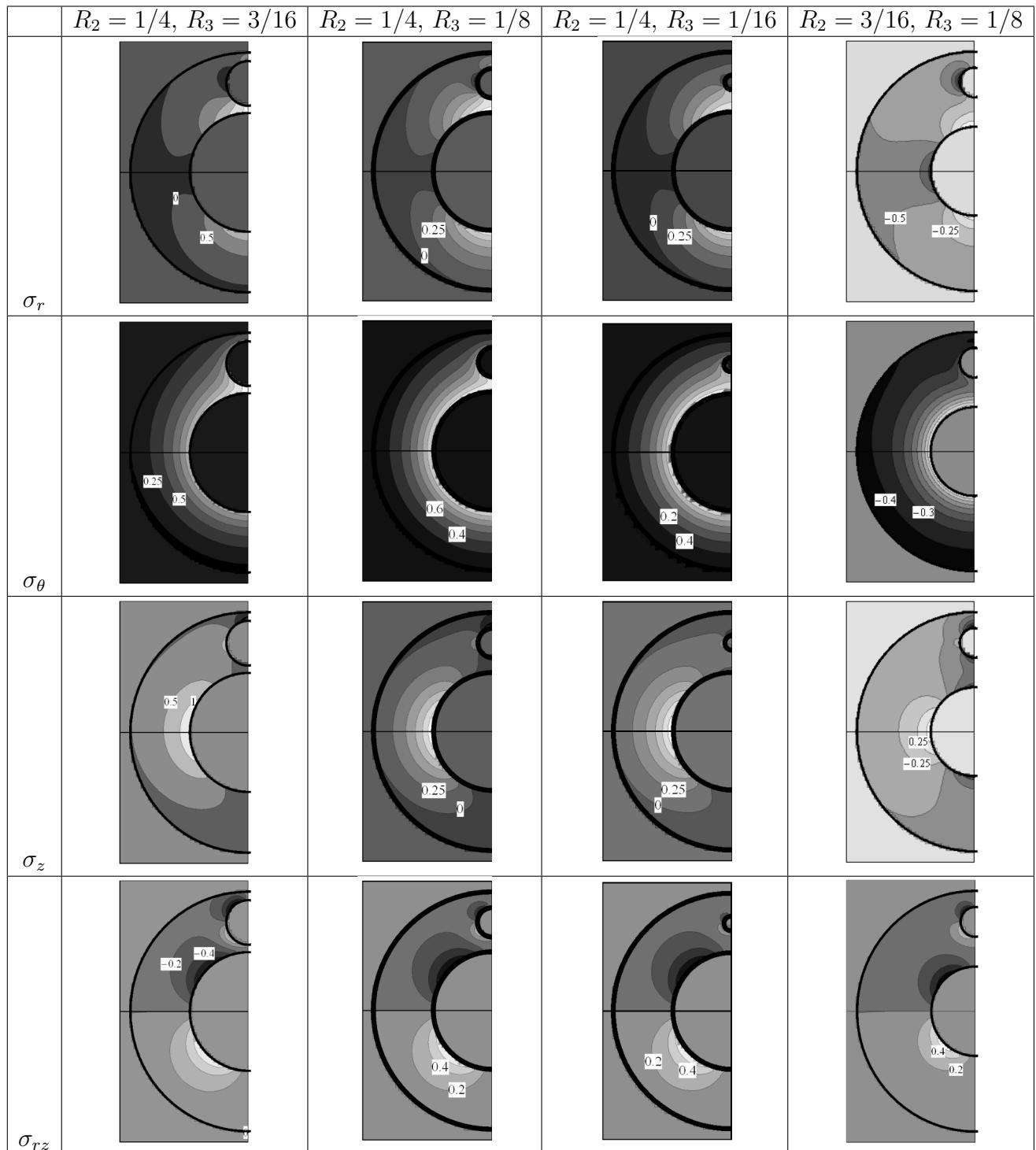


Таблица 2. Хладоисточники.

4. Заключение. Анализ состояния двухполостного шарового тела позволяют сделать ряд выводов.

- (1) Замкнутость системы определяющих соотношений (1)-(4) термоэластостатики многополостного тела определяет структуры пространств внутренних и граничных состояний.
- (2) Описан эффективный алгоритм формирования изоморфных счетных базисов гильбертовых пространств состояний ТЕ-статики многополостного тела. Равенство скалярных произведений изоморфных пар элементов пространств внутренних и граничных состояний позволяет эффективно проводить ортогонализацию их базисов $\bar{\Xi} \leftrightarrow \Gamma$.
- (3) Проведен анализ ТЕ-состояний двухполостного шара с двумя сферическими полостями. Результаты расчетов проиллюстрированы и проанализированы. Наблюдается существенное искажение характеристик внутренних состояний воздействием “возмущающей” полости малого диаметра при альтернативных вариантах температурных потоков через границы обеих полостей.
- (4) Размеры “возмущающей” полости оказывают существенное влияние на уровень интенсивности напряжений в теле вблизи внешней границы. Опасность разрушения локализуется в окрестности «верхнего» полюса шара.

Ближайшие перспективы исследований просматриваются в плане варьирования уровней температурных воздействий, в допущении температурных воздействий альтернативного характера (одна полость – нагревающая, вторая – охлаждающая), в варьировании распределения потоков от теплоисточников через границы тела, в отклонении в постановках задач от цилиндрической симметрии. Вызывают существенный интерес вопросы, связанные с постановкой и решением краевых задач в случаях, когда температурные и механические характеристики среды связаны на границах едиными соотношениями.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The authors' contributions are equal.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коваленко А. Основы термоупругости. – Киев : Наукова Думка, 1970. – 308 с.
2. Лурье А. Теория упругости. – М. : Наука, 1970. – 940 с.

3. Работников Ю. Механика деформируемого твердого тела. – М. : Наука, 1979. – 744 с.
4. Liu B. A High-Performance Boundary Element Method and Its Applications in Engineering : doctoral dissertation / Liu B. – Swansea : Swansea University, 2022.
5. Zwick F. Design of Inverse Molds in Pressure Casting Based on the Finite Element Method : doctoral dissertation / Zwick F. – Aachen : RWTH Aachen University, 2020.
6. Analytical Solution of the Temperature-Dependent Thermoelastic Problem Induced by Joule Heating and the Presence of an Elliptic Cavity / K. Xie [и др.] // Journal of Thermal Stresses. – 2024. – Т. 47, № 1. – С. 115–142.
7. Hematiyan M., Mohammadi M., Tsai C.-C. Method of Fundamental Solutions for Anisotropic Thermoelastic Problems // Applied Mathematical Modelling. – 2021. – Т. 95. – С. 200–218.
8. Kushnir R., Tokovyy Y., Boiko D. Direct Integration Method in Three-Dimensional Elasticity and Thermoelasticity Problems for Inhomogeneous Transversely Isotropic Solids: Governing Equations in Terms of Stresses // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics. – 2019. – № 1. – С. 102–105.
9. Modeling of thermoelastic asymmetric state of a transversely isotropic body of revolution / D. Ivanychev [и др.] // 6th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). – Lipetsk, Russian Federation, 2024. – С. 551–555. – DOI: 10.1109/SUMMA64428.2024.10803846.
10. Ebrahimi M., Balint D., Dini D. An Analytical Solution for Multiple Inclusions Subject to a General Applied Thermal Field // Journal of Thermal Stresses. – 2023. – Т. 46, № 11. – С. 1180–1198.
11. Иванычев Д. Метод граничных состояний в задачах теории упругости для анизотропных сред : диссертация / Иванычев Д.А. – Тула : ТулГУ, 2010.
12. Пеньков В., Левина Л. Метод опорного базиса построения частного решения линейного неоднородного операторного уравнения математической физики // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2022. – № 3. – С. 91–101.
13. Мусхелишвили Н. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М. : Наука, 1966. – 708 с.

REFERENCES

1. Kovalenko A. Fundamentals of Thermoelasticity. – Kyiv : Naukova Dumka, 1970. – 308 p.
2. Lur'e A. I. Teoriya uprugosti : Theory of elasticity. – М. : Nauka, 1970. – 940 p.
3. Rabotnov Y. N. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela : Mechanics of a deformable solid. – М. : Nauka, 1979. – 744 p.
4. Liu B. A High-Performance Boundary Element Method and Its Applications in Engineering : doctoral dissertation / Liu B. – Swansea : Swansea University, 2022.
5. Zwick F. Design of Inverse Molds in Pressure Casting Based on the Finite Element Method : doctoral dissertation / Zwick F. – Aachen : RWTH Aachen University, 2020.

6. Analytical Solution of the Temperature-Dependent Thermoelastic Problem Induced by Joule Heating and the Presence of an Elliptic Cavity / K. Xie [et al.] // Journal of Thermal Stresses. – 2024. – Vol. 47, no. 1. – P. 115–142.
7. Hematiyan M., Mohammadi M., Tsai C.-C. Method of Fundamental Solutions for Anisotropic Thermoelastic Problems // Applied Mathematical Modelling. – 2021. – Vol. 95. – P. 200–218.
8. Kushnir R., Tokovyy Y., Boiko D. Direct Integration Method in Three-Dimensional Elasticity and Thermoelasticity Problems for Inhomogeneous Transversely Isotropic Solids: Governing Equations in Terms of Stresses // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics. – 2019. – No. 1. – P. 102–105.
9. Modeling of thermoelastic asymmetric state of a transversely isotropic body of revolution / D. Ivanychev [et al.] // 6th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). – Lipetsk, Russian Federation, 2024. – P. 551–555. – DOI: 10.1109/SUMMA64428.2024.10803846.
10. Ebrahimi M., Balint D., Dini D. An Analytical Solution for Multiple Inclusions Subject to a General Applied Thermal Field // Journal of Thermal Stresses. – 2023. – Vol. 46, no. 11. – P. 1180–1198.
11. Ivanychev D. A. Metod granichnyh sostoyanij v zadachah teorii uprugosti dlya anizotropnyh sred : The method of boundary states in problems of elasticity theory for anisotropic media : PhD thesis / Ivanychev D. A. – Tula : TulGU, 2010.
12. Pen'kov V. B., Levina L. V. Metod opornogo bazisa postroeniya chastnogo resheniya linejnogo neodnorodnogo operatornogo uravneniya matematicheskoy fiziki : The method of the reference basis for constructing a partial solution of a linear inhomogeneous operator equation of mathematical physics // Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika. – 2022. – No. 3. – P. 91–101.
13. Muskhelishvili N. I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti : Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. – M. : Nauka, 1966. – 708 p.

Д. О. Евтихов¹, И. Л. Савостьянова^{1,2} С. И. Сенашов^{1,2}.

КРУЧЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ, НАХОДЯЩЕГОСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЯ, ЛИНЕЙНО МЕНЯЮЩЕГОСЯ ВДОЛЬ ОБРАЗУЮЩЕЙ

¹ Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева, Красноярск, Россия

² Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

Аннотация. В работе построены законы сохранения для системы уравнений, описывающих кручение упругопластического стержня, находящегося под действием давления, линейно меняющегося вдоль образующей. Отсюда найдены компоненты тензора напряжений σ_{xz}, σ_{yz} , которые по приведенным формулам позволяют определить упругопластическую границу в рассматриваемом стержне. В результате работы созданы программы для ЭВМ, позволяющие найти упругопластическую границу стержня. Приведены результаты работы программы с различными значениями крутящего параметра a и параметра λ , для стержней профиля типа "дватавр".

Ключевые слова: Задача кручения упругопластического стержня, стержень, находящийся под действием давления, упругопластическая граница, законы сохранения.

Евтихов Денис Олегович, аспирант кафедры информационных экономических систем; e-mail: evtikhov_do@sibsau.ru; AuthorID: 1036711

Савостьянова Ирина Леонидовна, зам. директора НОЦ Институт космических исследований и высоких технологий; зав. учебно-исследовательской лабораторией фундаментальной и прикладной механики; e-mail: ruppa@inbox.ru; AuthorID: 742389

Сенашов Сергей Иванович, профессор кафедры информационных экономических систем; профессор кафедры математического моделирования и процессов управления; e-mail: Sen@sibsau.ru; AuthorID: 214483



для цитирования: Евтихов Д. О., Савостьянова И. Л., Сенашов С. И. Кручение упругопластического стержня, находящегося под действием давления, линейно меняющегося вдоль образующей // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 4(66). С. 69. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.004. EDN: HLPHTV

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

D. O. Evtikhov¹, I. L. Savostyanova^{1,2}, S. I. Senashov^{1,2}.

TORSION OF AN ELASTOPLASTIC ROD UNDER A PRESSURE VARYING LINEARLY ALONG THE ORIGIN

¹Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia

²Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia

Abstract. The authors constructed conservation laws for a system of equations describing the torsion of an elastoplastic rod under pressure that varies linearly along the generatrix. The authors found the components of the stress tensor σ_{xz}, σ_{yz} , which, using the above formulas, make it possible to determine the elastoplastic boundary in the rod under consideration. The authors have created computer programs that make it possible to find the elastic-plastic boundary of the rod. The results of the program's operation with different values of the torque parameter a and the parameter λ for the rods of the "I-beam" type profile are presented.

Keywords: The problem is the torsion of an elastoplastic rod, a rod under pressure, an elastoplastic boundary, conservation laws.

Denis O. Evtikhov, Scientific Researcher; e-mail: evtikhov_do@sibsau.ru; AuthorID: 1036 711

Irina L. Savostyanova, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; e-mail: ruppa@inbox.ru; AuthorID: 742389

Sergey I. Senashov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; e-mail: Sen@sibsau.ru; AuthorID: 214483



to cite this article: Evtikhov D. O., Savostyanova I. L., Senashov S. I. Torsion of an elastoplastic rod under a pressure varying linearly along the origin // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 4(66). p. 69. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.004

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. В предлагаемой работе для решения задач МДТТ используются законы сохранений дифференциальных уравнений. Использование законов сохранения позволяет свести нахождение компонент тензора напряжений в каждой точке к контурному интегралу по границе рассматриваемой области, что дает возможность построить упругопластическую границу. При этом предполагается, что граница является кусочно - гладкой. Упругопластические задачи, в силу их практической важности, уже давно изучаются механиками. Основной проблемой, которая возникает при решении таких задач, является нахождение упругопластической границы. Условие пластичности накладывает дополнительную связь и это, по словам Г. П. Черепанова [1], упрощает задачу; с другой стороны возникает новый неизвестный элемент – упругопластическая граница, затрудняющая решение. В настоящее время решения упругопластических задач продолжает оставаться в центре внимания исследователей. Появляются новые аналитические подходы к решению этих задач, совершенствуются численные методы. Проведем краткий обзор таких работ. В [2] с помощью законов сохранения решена задача о кручении упругопластического стержня, армированного упругими волокнами. Для решения задачи используются законы сохранения. В работе [3] рассмотрен упругопластический коробчатый брус, который изгибаются поперечной силой. Предполагается, что деформации в стержне упругопластические и боковая поверхность его свободна от напряжений. Центр тяжести поперечного сечения не совпадает с точкой приложения силы. С помощью законов сохранения построено точное решение, описывающее напряженное состояние этой конструкции. Напряженное состояние вычисляется в каждой точке рассмотренной фигуры с помощью интегралов по внешним контурам поперечного сечения. В [4] исследуется упругопластическое кручение многослойного стержня. Стержень состоит из нескольких слоев. Упругие свойства слоев различны, но коэффициент пластичности у всех слоев одинаков. В статье построены законы сохранения, которые позволили вычислить компоненты тензора напряжений с помощью контурных интегралов по границе слоев. В работе [5] рассматривается упругопластическое кручение анизотропного трехслойного цилиндрического стержня некругового поперечного сечения. Внутренний слой стержня находится в упругопластическом состоянии, два внешних слоя полностью пластические. Предполагается пластическая анизотропия. Параметры анизотропии каждого слоя различны. В работе [6] рассмотрено решение задачи определения упругопластического состояния тяжелого пространства, ослабленного отверстием эллиптической формы. Материал среды обладает свойствами анизотропии. Решение задачи выполнялось методом малого параметра. Кручение двухслойного стержня коробчатого сечения рассмотрено в [7]. В статье [8] численными методами рассчитывается напряженно-деформированное состояние связующего композиционных материалов. Расслоения стальных труб при сложном нагружении моделируются в [9]. Упругопластический анализ круговой трубы, вывернутой наизнанку, проведен в [10]. В статье [11] изучается влияние типа плоской задачи для упругопластического адгезионного слоя на значение

J -интегралов. В [12] в рамках одной модели больших упругопластических деформаций рассматривается нестационарная динамика среды, не связанная с дополнительным накоплением пластических деформаций к уже имеющимся. Показано, что в общем случае каждая из упругих волн может сопровождаться скачкообразным поворотом пластических деформаций. В работе [13] изучен процесс производства необратимых деформаций во вращающемся цилиндре, изготовленном из материала с упругими, вязкими и пластическими свойствами.

Постановка задачи. Имеется упругопластический стержень постоянного поперечного сечения, который находится под действием линейного гидростатического давления и пары сил, которые скручивают его вокруг центральной оси, совпадающей с осью oz .

Предполагаем, что выполнены следующие условия:

$$\sigma_x = -\lambda_z + C, \sigma_y = -\lambda_z + C, \sigma_z = -\lambda_z + C, \tau_{xy} = 0, \tau_{xz} = u(x, y), \tau_{yz} = v(x, y). \quad (1)$$

В этом случае уравнения, описывающие упругую деформацию в стационарном случае, имеют вид:

$$u_x + v_y = \lambda, v_x - u_y = 2a. \quad (2)$$

Система (2) состоит из уравнения равновесия и уравнения совместности упругих деформаций. В пластической области система имеет вид:

$$u_x + v_y = \lambda, u^2 + v^2 = k^2. \quad (3)$$

Здесь $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ – компоненты тензора напряжений, $\lambda, k, a = G\theta$ – постоянные, G – модуль упругости, θ – угол кручения, k – постоянная пластичности, равная пределу текучести при чистом сдвиге.

Предполагается, что боковая поверхность стержня свободна от напряжений и находится в пластическом состоянии, поэтому систему (1) следует решить со следующими граничными условиями:

$$u n_1 + v n_2|_L = 0, u^2 + v^2 = k^2. \quad (4)$$

Здесь n_1, n_2 – компоненты вектора внешней нормали к кусочно-гладкому внешнему контуру L , ограничивающему конечную область S .

Замечание 1. Если $a = 0$, то задача (4) для системы уравнений (2) с точностью до обозначений совпадает с задачей А [1]. В [1] показано, что в этом случае для задачи (2) – (4) решение существует и единственno, если стержень имеет овальное сечение и $\frac{-1}{\lambda} > \frac{k}{GR_{min}}$, где R_{min} – минимальный радиус кривизны кривой L .

Замечание 2. Случай, когда $\lambda = 0, a \neq 0$, соответствует классическому случаю упругопластического кручения и рассматриваться не будет. Рассмотрению его посвящена работа [1].

Для удобства запишем уравнения (2) в виде:

$$F_1 = u_x + v_y - \lambda = 0, F_2 = -u_y + v_x + 2a = 0. \quad (5)$$

Решим краевую задачу (2), (4) с помощью законов сохранения.

Законы сохранения системы уравнений:

Определение. Законом сохранения для системы уравнений (2) назовем выражение вида:

$$A_x + B_y = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2 \quad (6)$$

где ω_1, ω_2 – линейные дифференциальные операторы, одновременно не равные тождественно нулю /

$$A = \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, B = \alpha^2 u + \beta^2 v + \gamma^2. \quad (7)$$

где $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i$ – некоторые гладкие функции, зависящие только от x, y .

Замечание 3. Более общее определение закона сохранения, подходящее для произвольных систем уравнений, можно найти в [14].

Из (6) с учетом (7), получаем:

$$\begin{aligned} \alpha_x^1 u + \alpha^1 u_x + \beta_x^1 v + \beta^1 v_x + \gamma_x^1 + \alpha_y^2 u + \alpha^2 u_y + \beta_y^2 v + \beta^2 v_y + \gamma_y^2 = \\ = \omega_1 (u_x + v_y - \lambda) + \omega_2 (-u_y + v_x + 2a) \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) следует:

$$\begin{aligned} \alpha_x^1 + \alpha_y^2 = 0, \beta_x^1 + \beta_y^2 = 0, \alpha^1 = \omega_1, \\ \beta^1 = \omega_2, \alpha^2 = -\omega_2, \beta^2 = \omega_1, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = \lambda \omega_1 + 2a \omega_2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\alpha^1 = \beta^2, \alpha^2 = -\beta^1 \quad (9)$$

Поэтому:

$$\alpha_x^1 - \beta_y^1 = 0, \alpha_y^1 - \beta_x^1 = 0, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = -\lambda \alpha^1 + 2a \beta^1 \quad (10)$$

Из приведённых формул следует, что система уравнений (2) допускает бесконечно много законов сохранения; далее будут приведены только те, которые позволяют решить поставленную задачу.

Поскольку сохраняющийся ток имеет вид:

$$A = \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, B = -\beta^1 u + \alpha^1 v + \gamma^2.$$

Из (6) по формуле Грина получаем:

$$\iint_S (A_x + B_y) dx dy = \oint_L -Ady + Bdx = 0, \quad (11)$$

где S – область, ограниченная кривой L .

Решение задачи (2), (4). Для нахождения значений u, v внутри области S , необходимо построить решения системы (10), имеющие особенности в произвольной точке $(x_0, y_0) \in S$.

Первое из таких решений имеет вид

$$\begin{aligned}
 \alpha^1 &= \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\
 \beta^1 &= -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\
 \gamma^1 &= -2\alpha \operatorname{arctg} \frac{x - x_0}{y - y_0}, \quad \gamma^2 = -\lambda \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - x_0}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

В точке $(x_0, y_0) \in S$ функции α^1, β^1 имеют особенности, поэтому окружим эту точку окружностью:

$$\varepsilon : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2.$$

Тогда из формулы (11) получаем:

$$\oint_L -Ady + Bdx + \oint_{\varepsilon} -Ady - Bdx = 0, \tag{13}$$

Вычислим последний интеграл в формуле (13). Имеем:

$$\begin{aligned}
 \oint_{\varepsilon} -Ady - Bdx &= \oint_{\varepsilon} - \left(\frac{u(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - \frac{v(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \gamma^1 \right) dy + \\
 &+ \left(-\frac{u(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - \frac{v(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \gamma^2 \right) dx. \tag{14}
 \end{aligned}$$

Введем новые координаты $x - x_0 = \varepsilon \cos \phi, y - y_0 = \varepsilon \sin \phi$, получаем:

$$\begin{aligned}
 \oint_{\varepsilon} -Ady - Bdx &= \int_0^{2\pi} [-(ucos\phi + vsin\phi)cos\phi - (usin\phi + vcos\phi)sing\phi] d\phi = \\
 &= - \int_0^{2\pi} ud\phi = -2\pi u(x_0, y_0). \tag{15}
 \end{aligned}$$

Последнее равенство получено по теореме о среднем при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для окончательного построения решения найдем значения u, v на границе L . Из формулы (13) получаем

$$2\pi u = \oint_L -(-\alpha^1 n_2 + \beta^2 n_1 + \gamma^1) dy + (\beta^1 n_2 + \alpha^1 n_1 + \gamma^2) dx. \tag{16}$$

Второе решение системы уравнений (10) возьмем в виде:

$$\begin{aligned}
 \alpha^1 &= \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\
 \beta^1 &= \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\
 \gamma^1 &= -\lambda \operatorname{arctg} \frac{x - x_0}{y - y_0}, \quad \gamma^2 = 2\alpha \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - x_0}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Проделав выкладки, аналогичные выкладкам, проделанным с решением (12), получаем:

$$2\pi v = \oint_L -(-\alpha^1 n_2 + \beta^2 n_1 + \gamma^1) dy + (\beta^1 n_2 + \alpha^1 n_1 + \gamma^2) dx. \tag{18}$$

На основе приведенных выше формул нами были созданы программы для ЭВМ программном пакете Maple. Результаты расчета некоторых из данных программ представлены далее.

На рисунке 1 представлено изменение упругопластических границ прокатного профиля *H*-образного сечения, с значением крутящего параметра $a = -1.6$ и различными значениями λ .

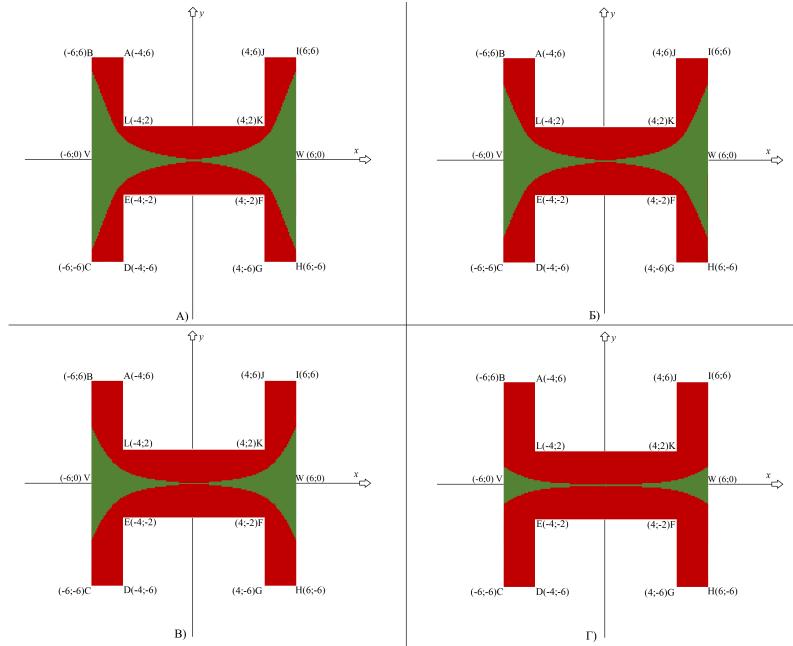


Рис. 1. Упругопластическая граница профиля *H*-образного сечения, при значении крутящего параметра $a = -1.6$ и значениями λ , в А) $\lambda = -0.6$; Б) $\lambda = -1.0$ В) $\lambda = -1.6$ Г) $\lambda = -3.0$.

На рисунке 2 представлено изменение упругопластических границ прокатного профиля *H*-образного сечения, с значением крутящего параметра $a = -2.0$ и различными значениями λ .

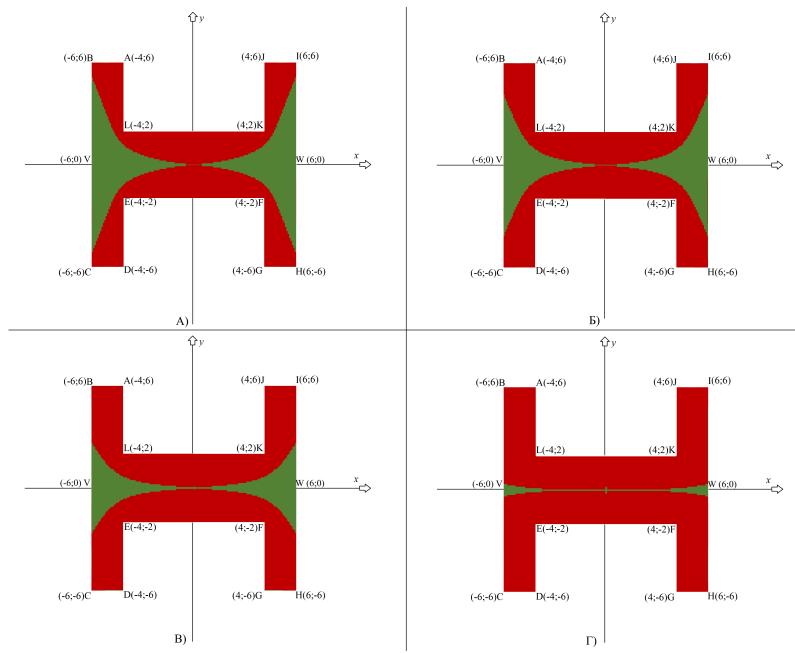


Рис. 2. Упругопластическая граница профиля Н-образного сечения, при значениии крутящего параметра $a = -2.0$ и значениями λ , в А) $\lambda = -0.6$; Б) $\lambda = -1.0$ В) $\lambda = -1.6$ Г) $\lambda = -3.0$.

Заключение. В работе построены законы сохранения для системы уравнений (2), описывающей кручение упругопластического стержня, находящегося под действием давления, линейно меняющегося вдоль образующей. Используя построенные законы сохранения, найдены компоненты тензора напряжений σ_{xz}, σ_{yz} . Формулы (15) и (17) позволяют определить упругопластическую границу в рассматриваемом стержне. Созданы программы для ЭВМ, позволяющие найти упругопластической границы исследуемого стержня. В заключение работы приведены результаты работы программы с различными значениями крутящего параметра a и параметра λ , для стержней профиля типа "дутавр".

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. 100%.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. 100%.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упруго-пластическая задача. – Новосибирск : Федеральное государственное унитарное предприятие "Академический научно-издательский, производственно-полиграфический и книгораспространительский центр "Наука", 1983. – 238 с. – EDN: XXGCWN.
2. Евтихов Д. О. Упругопластическая граница скручиваемого стержня, армированного волокнами // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2024. – 4(62). – С. 53–61. – DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.004. – EDN: SANGJY.
3. Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Изгиб упруго-пластического бруса коробчатого сечения // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2024. – 1(59). – С. 107–114. – DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.006. – EDN: EBWYKU.
4. Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Упруго-пластическое кручение многослойного стержня // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2023. – 2(56). – С. 28–35. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.003. – EDN: AASYUM.
5. Щеглова Ю. Д. Метод возмущений при определении поля перемещений трехслойного анизотропного цилиндрического стержня некругового поперечного сечения при упругопластическом кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2023. – 4(58). – С. 5–13. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.001. – EDN: BEWLEY.
6. Матвеев С. В., Матвеева А. Н., Александров А. Х. Упругопластическое состояние анизотропной среды, ослабленной горизонтальной эллиптической полостью с учетом силы тяжести // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2023. – 1(55). – С. 46–51. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.006. – EDN: MWIBIT.
7. Сенашов С. И., Савостьянова И. Л., Власов А. Ю. Кручение двухслойного упругого стержня с коробчатым сечением // Прикладная механика и техническая физика. – 2024. – Т. 65, 3(385). – С. 161–168. – DOI: 10.15372/PMTF202315404. – EDN: MTLSU.
8. Ракин С. И. Расчет напряженно-деформированного состояния связующего волокнистых композитов // Прикладная механика и техническая физика. – 2024. – Т. 65, 2(384). – С. 127–137. – DOI: 10.15372/PMTF202114917. – EDN: EQPBHD.
9. Кургузов В. Д. Моделирование расслоения стальных труб при сложном нагружении // Прикладная механика и техническая физика. – 2023. – Т. 64, 6(382). – С. 155–167. – DOI: 10.15372/PMTF202315317. – EDN: MSBBSX.
10. Севастьянов Г. М. Упруго-пластический анализ круговой трубы, вывернутой наизнанку // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2024. – № 3. – С. 34–50. – DOI: 10.31857/S1026351924030039. – EDN: UIILGM.
11. Влияние типа плоской задачи для тонкого упругопластического адгезионного слоя на значение J-интеграла / В. Э. Богачева [и др.] // Прикладная механика

- и техническая физика. – 2023. – Т. 64, 6(382). – С. 168–175. – DOI: 10.15372/PMTF202315316. – EDN: OAEWUF.
12. Рагозина В. Е., Дудко О. В. Некоторые свойства упругой динамики среды с предварительными большими необратимыми деформациями // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2019. – Т. 22, 1(77). – С. 90–103. – DOI: 10.33048/SIBJIM.2019.22.109. – EDN: KZDXDL.
 13. Фирсов С. В., Прокудин А. Н., Буренин А. А. Ползучесть и пластическое течение во вращающемся цилиндре с жестким включением // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2019. – Т. 22, 4(80). – С. 121–133. – DOI: 10.33048/SIBJIM.2019.22.412. – EDN: LZHISH.
 14. Vinogradov A. M. Local symmetries and conservation laws // Acta Applicandae Mathematicae. – 1984. – Vol. 2, no. 1. – P. 21–78. – DOI: 10.1007/BF01405491. – EDN: ZYJNIF.

REFERENCES

1. Annin B. D., Cherepanov G. P. The elastic-plastic problem. – Novosibirsk : Federal State Unitary Enterprise “Academic scientific-publishing, production-polygraphic, book distribution center ‘Nauka’”, 1983. – 238 c. – EDN: XXGCWN. – In Russian.
2. Evtikhov D. O. Elastoplastic boundary of a fiber-reinforced torsional rod // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I.Y. Yakovlev. Series: Mechanics of Limit State. – 2024. – 4(62). – С. 53–61. – DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.004. – EDN: SANGJY. – In Russian.
3. Senashov S. I., Savostyanova I. L. Bending of an elastic-plastic bar of box section // Bulletin of I.Y. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. – 2024. – 1(59). – С. 107–114. – DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.006. – EDN: EBWYKU. – In Russian.
4. Senashov S. I., Savostyanova I. L. Elastic-plastic torsion of a multilayer rod // Bulletin of I.Y. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. – 2023. – 2(56). – С. 28–35. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.003. – EDN: AASYUM. – In Russian.
5. Shcheglova Y. D. The method of perturbations in determining the displacement field of a three-layer anisotropic cylindrical rod of non-circular cross-section under elastoplastic torsion // Bulletin of I.Y. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. – 2023. – 4(58). – С. 5–13. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.001. – EDN: BEWLEY. – In Russian.
6. Matveev S. V., Matveeva A. N., Alexandrov A. K. Elastoplastic state of an anisotropic medium weakened by a horizontal elliptical cavity taking into account gravity // Bulletin of I.Y. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. – 2023. – 1(55). – С. 46–51. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.006. – EDN: MWIBIT. – In Russian.
7. Senashov S. I., Savostyanova I. L., Vlasov A. Y. Torsion of a two-layer elastic rod with a box section // Applied Mechanics and Technical Physics. – 2024. – Т. 65, 3(385). – С. 161–168. – DOI: 10.15372/PMTF202315404. – EDN: MTLSLU. – In Russian.

8. *Rakin S. I.* Calculation of the stress-strain state of the binder of fiber composites // Applied Mechanics and Technical Physics. – 2024. – Т. 65, 2(384). – С. 127–137. – DOI: 10.15372/PMTF202114917. – EDN: EQPBHD. – In Russian.
9. *Kurguzov V. D.* Modeling of steel pipe delamination under complex loading // Applied Mechanics and Technical Physics. – 2023. – Т. 64, 6(382). – С. 155–167. – DOI: 10.15372/PMTF202315317. – EDN: MSBBSX. – In Russian.
10. *Sevastyanov G. M.* Elastic-plastic analysis of a circular tube turned inside out // Izvestia of the Russian Academy of Sciences. Solid State Mechanics. – 2024. – № 3. – С. 34–50. – DOI: 10.31857/S1026351924030039. – EDN: UIILGM. – In Russian.
11. Influence of the type of the plane problem for a thin elastoplastic adhesive layer on the value of the J-integral / V. E. Bogacheva [и др.] // Applied Mechanics and Technical Physics. – 2023. – Т. 64, 6(382). – С. 168–175. – DOI: 10.15372/PMTF202315316. – EDN: OAEWUF. – In Russian.
12. *Ragozina V. E., Dudko O. V.* Some properties of elastic dynamics of a medium with preliminary large irreversible deformations // Siberian Journal of Industrial Mathematics. – 2019. – Т. 22, 1(77). – С. 90–103. – DOI: 10.33048/SIBJIM.2019.22.109. – EDN: KZDXDL. – In Russian.
13. *Firsov S. V., Prokudin A. N., Burenin A. A.* Creep and plastic flow in a rotating cylinder with a rigid inclusion // Siberian Journal of Industrial Mathematics. – 2019. – Т. 22, 4(80). – С. 121–133. – DOI: 10.33048/SIBJIM.2019.22.412. – EDN: LZHISH. – In Russian.
14. *Vinogradov A. M.* Local symmetries and conservation laws // Acta Applicandae Mathematicae. – 1984. – Vol. 2, no. 1. – P. 21–78. – DOI: 10.1007/BF01405491. – EDN: ZYJNIF.

Р. И. Непершин

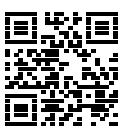
ОСЕВОЕ СДАВЛИВАНИЕ ЦИЛИНДРА ШТАМПОМ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Московский государственный технологический университет “СТАНКИН”,
Москва, Россия

Аннотация. Приведено численное моделирование нестационарного процесса осевого пластического сдавливания круглого цилиндра в штампе с гладкой криволинейной границей на основе гиперболических уравнений для напряжений и скоростей идеальной пластичности при осевой симметрии. Рассматривается гладкая вогнуто-выпуклая граница верхнего и нижнего штампа, при которой пластическое течение на конечной стадии непрерывно по всему объему деформируемого цилиндра. На начальной стадии происходит заполнение полости штампа на вогнутом участке границы над торцом цилиндра, которое моделируется пластическим сдвигом ребра цилиндра. Затем происходит пластическое сдавливание цилиндра без скольжения по вогнутой границе штампа с образованием жестких и пластических зон, переходящее в непрерывное пластическое течение и скольжение по всей границе штампа при приближении к конечной стадии деформирования. Моделирование представляет интерес для оценки предельной нагрузки при осевом сдавливании цилиндра штампами с криволинейной границей и штамповке деталей типа тел вращения с криволинейной образующей.

Ключевые слова: осевое сдавливание цилиндра, гладкая криволинейная граница штампа, жесткопластическое тело, осевая симметрия, гиперболические уравнения, линии скольжения, скорости течения, контактные напряжения, предельная нагрузка, штамповка деталей типа тел вращения.

Непершин Ростислав Иванович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры систем пластического деформирования; e-mail: nepershin_ri@rambler.ru; AuthorID: 109974



для цитирования: Непершин Р.И. Осевое сдавливание цилиндра штампом с криволинейной гладкой границей // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 4(66). С. 70–91. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.005. EDN: FNYEUY

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

R. I. Nepershin,

AXIAL COMPRESSION OF CYLINDER BY THE DIES WITH SMOOTH CURVILINEAR BOUNDARY

Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia

Abstract. Computer simulation of the rigid-plastic cylinder non-steady axial plastic compression by the dies with smooth curvilinear boundaries is presented using hyperbolic differential equations of the axial symmetry plastic flow the stress and velocity fields. Final stage of cylinder plastic deformation by upper and lower dies with smooth concave-convex boundary and continuous velocity field is considered.

Filling of the die cavity on concave boundary is simulated by the plastic shear of cylinder rib, followed by cylinder plastic compression without slip on concave contact boundary and generation of rigid and plastic regions with tangent velocity discontinues and singularities at the angular points on the die boundary. With approach to the final deformation stage the rigid regions are decreased with plastic slip on convex and concave die boundaries with continuous stress and velocity fields. The computer simulation can be used for the limit loads estimation in the case of cylinder plastic axial compression by the dies with curvilinear smooth boundary, and forging of the parts with curved profiles on technological pressure equipment.

Keywords: cylinder axial plastic compression, curved smooth dies, ideal plasticity, axial symmetry strain, hyperbolic equations, slip lines, velocities, contact stresses, limit load, die forging, axial symmetry part, curved generation.

Rostislav I. Nepershin, Doctor of Technical Sciences, Professor; e-mail: nepershin_ri@rambler.ru; AuthorID: 109974



to cite this article: Nepershin P. I. Axial compression of cylinder by the dies with smooth curvilinear boundary // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 4(66). p. 70–91. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.005

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. В массовом и крупносерийном производстве деталей типа тел вращения в машиностроении экономически целесообразной является объемная штамповка на механических и гидравлических прессах осевым пластическим сдавливанием цилиндрической заготовки [1, 2]. При этом важной проблемой является повышение усталостной прочности и износостойкости штампов при высоких циклических нагрузках на инструмент. Применение профиля переменного сечения при снижении толщины по радиусу целесообразно для деталей машин с высокой угловой скоростью вращения.

Численное моделирование нестационарных процессов при плоской деформации и осевой симметрии на основе гиперболических уравнений теории идеальной пластичности [3] при сдавливании жесткопластического цилиндра и шара плоскими плитами с изменением области пластического течения до образования тонкой полосы и тонкого диска приведено в [4, 5]. Нестационарное пластическое течение при поперечном сдавливании длинного цилиндра в штампе с гладким криволинейным профилем при плоской деформации рассмотрено в [6].

В настоящей работе рассматривается гладкий выпукло-вогнутый профиль штампа на конечной стадии осевого пластического сдавливания цилиндрической заготовки с целью снижения контактных напряжений и нагрузки на инструмент при более однородной пластической деформации по сравнению с традиционной объемной штамповкой с выдавливанием металла в тонкий облой. Моделирование основано на математической теории идеальной пластичности при условии полной пластичности Треска при осевой симметрии численным решением гиперболических уравнений для напряжений и скоростей [3] с изменением жестких и пластических зон при пластическом формоизменении цилиндрической заготовки с отношением высоты к диаметру больше единицы ограниченным условием устойчивости при осевом сжатии.

Преимуществом численных алгоритмов на основе гиперболических уравнений идеальной пластичности являются высокая скорость вычислений вследствие решения системы четырех алгебраических уравнений в узловых точках линий скольжения при аппроксимации дифференциальных уравнений конечными разностями; определение пластических и жестких зон, зависящих от граничных условий задачи, корректная оценка концентрации напряжений и скоростей пластического течения в окрестности угловых точек пересечения границы штампа со свободной боковой границей пластической области и оценка деформации сдвига вдоль жесткопластических границ. Основной физической константой модели жесткопластического тела является напряжение текучести σ_Y , которое при условии пластичности Треска определяет касательное напряжение сдвига $k = \sigma_Y/2$ вдоль линий скольжения. Упрочнение при холодной пластической деформации и скорости деформации при высоких температурах могут быть учтены по средней накопленной деформации и скорости деформации в пластической области [7, 8].

1. Основные уравнения Напряжения и скорости перемещений принимаем безразмерными, отнесенными к напряжению текучести σ_Y , и к вертикальной скорости перемещения штампа V относительно горизонтальной плоскости симметрии полости штампа. В рассматриваемом процессе осевого сдавливания круглого цилиндра жесткими штампами имеет место пластическое течение при осевой симметрии и положительной радиальной скорости V_r ; при этом условие полной пластичности в главных напряжениях имеет вид [3]

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = \sigma_1, \quad (1)$$

где σ_1 и σ_2 – главные напряжения на плоскости r, z и σ_3 – окружное напряжение σ_θ в цилиндрических координатах r, z, θ . При условиях (1) дифференциальные уравнения равновесия для напряжений и скоростей относятся к гиперболическому типу [3]. Линии скольжения на плоскости r, z , среднее напряжение σ , угол наклона касательной φ линии скольжения ξ к оси r и проекции вектора скорости V_ξ, V_η на линиях скольжения определяются дифференциальными соотношениями:

$$\frac{dz}{dr} = \operatorname{tg} \varphi, \quad d\sigma - d\varphi = \frac{1}{2} \frac{dr + dz}{r} \quad \text{на } \xi, \quad (2)$$

$$\frac{dz}{dr} = -\operatorname{ctg} \varphi, \quad d\sigma + d\varphi = \frac{1}{2} \frac{dr - dz}{r} \quad \text{на } \eta, \quad (3)$$

$$dV_\xi - V_\eta d\varphi = -\frac{1}{2} \frac{V_\xi dr - V_\eta dz}{r} \quad \text{на } \xi, \quad (4)$$

$$dV_\eta + V_\xi d\varphi = -\frac{1}{2} \frac{V_\xi dz + V_\eta dr}{r} \quad \text{на } \eta. \quad (5)$$

Напряжения и скорости в координатах r, z, θ связаны с σ, φ, V_ξ и V_η уравнениями:

$$\sigma_r = \sigma - \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \sigma_z = \sigma + \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \sigma_\theta = \sigma + \frac{1}{2}, \quad \tau_{rz} = \frac{1}{2} \cos 2\varphi, \quad (6)$$

$$V_r = V_\xi \cos \varphi - V_\eta \sin \varphi, \quad V_z = V_\eta \cos \varphi + V_\xi \sin \varphi. \quad (7)$$

Вследствие необратимости пластической деформации диссипативная функция в пространстве главных напряжений и скоростей деформаций $D = \sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3$ положительна и равна нулю в жесткой области.

Уравнения (4), (5) на линиях скольжения при осевой симметрии удовлетворяют условию пластической несжимаемости, которое в цилиндрических координатах определяется дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{V_r}{r} = 0, \quad (8)$$

из которого следует интегральное условие сохранения объема при деформации жесткопластического тела.

2. Криволинейная граница штампа Границу штампа на конечной стадии сдавливания цилиндра вычисляем по условию непрерывности поля напряжений и скоростей в пластической области при отсутствии жестких зон и контактного трения. Плоскость симметрии $z = 0$ принимаем неподвижной; верхняя и нижняя части штампа перемещаются относительно этой плоскости по оси z со скоростью $V = \mp 1$.

На рис. 1 показана гладкая вогнуто-выпуклая граница и линии скольжения в первом квадранте плоскости осевого сечения r, z . Граница ACD и пластическая область определяются двумя параметрами – радиусом r_A на выходе из пластической области и углом наклона касательной $-\alpha_C$ в точке перегиба C . За единицу длины принимаем полутолщину профиля границы $h = z_A$ в точке A . В областях ABB_1 и ODE линии скольжения прямые с углом наклона ξ линий скольжения $\varphi = -\pi/4$ и $\sigma = \text{const}$, что следует из уравнений (2) и (3). Из условия $\sigma_r = 0$, $\sigma_z = -1$ на AB_1 и первого уравнения (1) находим $\sigma = -1/2$ в области ABB_1 и $\sigma = \sigma_E$ в области ODE , где σ_E – среднее напряжение в точке E , известное после вычисления линий скольжения в области BCE .

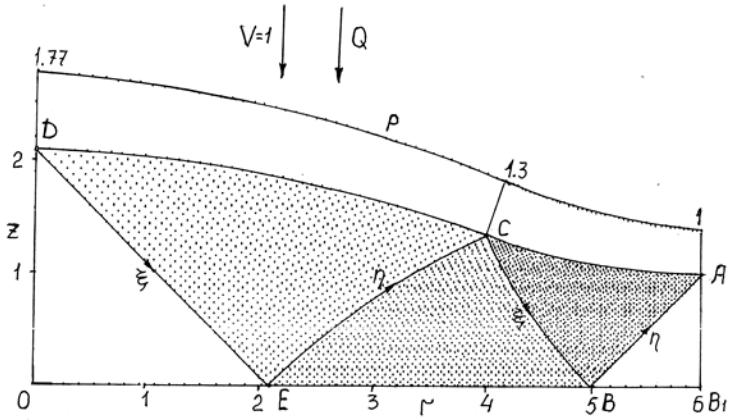


Рис. 1. Линии скольжения, граница штампа и контактное давление p при осевом сдавливании цилиндра. $R_A = 5.995$, $\alpha_C = 0.3491$, $H = 2.106$, $q = 1.281$, $Q = 144.7$

Границу ACD и линии скольжения вычисляем при изменении угла наклона касательной α с постоянным шагом $\Delta\alpha = \alpha_C/(N - 1)$, где N – число точек на выпуклой границе AC и на вогнутой границе CD . На линии скольжения AB задаем N точек с постоянным шагом $\Delta z = 1/(N - 1)$ по оси z . Первую точку границы AC около точки A находим на пересечении прямой, проходящей через точку A со средним углом наклона касательной $-1/2\Delta\alpha$, с прямой, проходящей через точку линии скольжения AB около точки A и средним углом наклона касательной к ξ линии скольжения $-1/2(\pi/2 + \Delta\alpha)$ при условии $\varphi = -(\Delta\alpha + \pi/4)$ на гладкой границе AC . Значение σ в найденной точке границы AC находим

из конечно-разностной аппроксимации второго уравнения (2). Затем выполняем цикл вычислений регулярных точек прямой η линии скольжения с углом φ от найденной точки границы AC до первой точки ξ линии скольжения BC около точки B решением системы конечно-разностных уравнений, аппроксимирующих уравнения (2) и (3) [8]. Выполняя вычисления от найденной точки границы AC и η линии скольжения, находим последующие точки на границе AC с прямыми η линии скольжения и ортогональными к ним ξ линиями скольжения в области ABC .

Линии скольжения в области BCE находим решением смешанной задачи при известных значениях r, z, σ, φ на ξ линии скольжения BC и условиях $z = 0, \varphi = -\pi/4$ на BE с использованием конечно-разностной аппроксимации уравнений (3) на η линиях скольжения. В области CED с прямыми ξ линиями скольжения, пересекающими вогнутую гладкую границу CD под углом $\varphi = -(\pi/4 + \alpha)$, вычисляем точки границы CD и линии скольжения η ортогональные к ξ линиями скольжения по алгоритму аналогичному области ABC с использованием известных значений r, z, σ, φ на η линии скольжения CE при изменении угла α от $-\alpha_C$ в точке перегиба C до нуля в точке D с постоянным шагом $\Delta\alpha$ между точками границы CD . Полутолщина профиля $H = z_D$ на оси симметрии z определяется по координате $r_D = \varepsilon$ на оси r , так как уравнения (2)–(5) применимы при $r > 0$. Значение ε порядка 10^{-4} получаем корректировкой радиуса r_A точки A в исходных данных вычислительной программы при заданном угле наклона профиля $-\alpha_C$ в точке перегиба C .

Дифференциальные уравнения (2) и (3) при $\varphi = \text{const}$ на прямых линиях скольжения η в области ABC и на прямых линиях скольжения ξ в области CED имеют вид

$$d\sigma = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{tg} \varphi) \frac{dr}{r} \quad \text{на } \xi, \quad d\sigma = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{ctg} \varphi) \frac{dr}{r} \quad \text{на } \eta, \quad (9)$$

и значения σ на этих линиях скольжения находим интегрированием уравнений (9)

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 + \frac{1}{2}(1 + \operatorname{tg} \varphi) \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \quad \text{на } \xi, \\ \sigma &= \sigma_0 + \frac{1}{2}(1 + \operatorname{ctg} \varphi) \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \quad \text{на } \eta, \end{aligned} \quad (10)$$

где r_0 – координаты r точек на η линии скольжения CE и на ξ линии скольжения BC , в которых известны значения среднего напряжения σ_0 . При $\varphi = -\pi/4$ из уравнений (10) следует однородное напряженное состояние $\sigma_0 = \sigma_E$ в области ODE и $\sigma_0 = -1/2$ в области ABB_1 . Распределение нормального давления $p = 1/2 - \sigma$ на гладкой границе ACD находим по уравнениям (10) и в точках пересечения прямых ξ и η линий скольжения с этой границей. Силу Q и среднее давление q , действующие на штамп, находим интегрированием распределения давления p на границе ACD :

$$Q = 2\pi \int_0^{r_A} p(r) r dr, \quad q = Q / (\pi r_A^2). \quad (11)$$

Интегралы, определяющие зависимость объема полости штампа от координат r_i точек границы ACD , заданной табличной функцией $z(r_i)$:

$$\Omega(r) = 2\pi \int_0^r z(r) r dr, \quad (12)$$

записываем в массив данных на границе ACD и используем при вычислении перемещения s границы штампа ACD из условия равенства объема цилиндра объему полости штампа при задании координаты $r_i = r_A$ свободной боковой границы деформируемого цилиндра в верхнем пределе интеграла (12). При заданном отношении $a = H_0/R_0$ из интеграла (12) находим радиус R_0 и полувысоту H_0 цилиндра при заполненной полости штампа в конце осевого сдавливания цилиндра:

$$R_0 = \sqrt[3]{\frac{\Omega(r_A)}{\pi a}}, \quad H_0 = aR_0. \quad (13)$$

На рис. 1 показаны линии скольжения и распределение давления p на границе ACD на конечной стадии осевого сдавливания цилиндра для параметров $r_A = 5.995$, $\alpha_C = 0.3491$ при $N = 45$ и $r_D = 1.78 \times 10^{-5}$. При $a = 2$ и $r_A = 5.995$ из уравнений (12) и (13) находим начальные размеры цилиндра $R_0 = 2.915$, $H_0 = 5.831$. Численные значения давления p на границе ACD приведены в табл. 1. Силу $Q = 144.7$ и среднее давление $q = 1.281$ находим из уравнений (11) численным интегрированием.

Поле скоростей на конечной стадии сдавливания цилиндра в штампе с гладкой границей ACD находим интегрированием дифференциальных уравнений (4), (5) для скоростей V_ξ , V_η с граничными условиями на границе ACD и на осях симметрии r и z .

Из уравнений (7) при $V_r = 0$, $V_z = -1$, $\varphi = -(\pi/4 + \alpha)$ на границе ACD и $\varphi = -\pi/4$ на осях симметрии находим:

$$V_\xi/V_\eta = -\operatorname{tg}(\pi/4 + \alpha) \quad \text{на } ACD, \quad (14)$$

$$V_\xi = -V_\eta \text{ при } r = 0, \quad V_\xi = V_\eta \text{ при } z = 0. \quad (15)$$

В областях ODE и ABB_1 (рис. 1) при $\varphi = -\pi/4$ скорости V_r и V_z определяются линейными зависимостями от координат r и z , которые удовлетворяют уравнению (8) и граничным условиям для скоростей V_r и V_z на осях симметрии и на границе AB_1 при $r = r_A$:

$$V_r = \frac{1}{2} \frac{r}{H}, \quad V_z = -\frac{z}{H}, \quad 0 \leq r \leq H, \quad \text{в области } ODE, \quad (16)$$

$$V_r = \frac{1}{2} \frac{r}{h}, \quad V_z = -\frac{z}{h}, \quad r_A - h \leq r \leq r_A, \quad \text{в области } ABB_1, \quad (17)$$

где $h = 1$ – единица длины.

Граничные условия для скоростей V_ξ и V_η на ξ линии скольжения DE , определяемой уравнением $z = H - r$, $0 \leq r \leq H$, находим подстановкой (16) и

r	z	p	r	z	p
0.000	2.106	1.774	3.661	1.476	1.344
0.242	2.100	1.688	3.819	1.423	1.328
0.465	2.088	1.660	3.974	1.369	1.311
0.679	2.072	1.636	4.093	1.326	1.298
0.885	2.054	1.615	4.219	1.283	1.281
0.987	2.043	1.605	4.303	1.256	1.269
1.186	2.020	1.585	4.432	1.218	1.251
1.382	1.995	1.566	4.518	1.194	1.239
1.573	1.968	1.548	4.649	1.161	1.220
1.762	1.938	1.530	4.780	1.130	1.200
1.948	1.905	1.513	4.913	1.103	1.179
2.131	1.871	1.495	5.002	1.087	1.165
2.311	1.835	1.478	5.091	1.072	1.151
2.488	1.796	1.461	5.181	1.058	1.137
2.663	1.756	1.444	5.316	1.040	1.115
2.836	1.714	1.427	5.451	1.026	1.093
3.006	1.670	1.411	5.587	1.015	1.070
3.173	1.624	1.394	5.723	1.006	1.047
3.338	1.576	1.377	5.859	1.002	1.024
3.501	1.527	1.361	5.995	1.000	1.000

Таблица 1. Давление p на границе ACD (рис.1). $R_A = 5.995$, $H = 2.106$, $h = 1$, $\alpha_C = 0.3491$

$\varphi = -\pi/4$ в (7):

$$V_\xi = \frac{\frac{1}{2}r + z}{\sqrt{2}H}, \quad V_\eta = \frac{\frac{1}{2}r - z}{\sqrt{2}H}. \quad (18)$$

На рис. 2 показан годограф скоростей на плоскости V_r, V_z в пластической области $ABEDC$ (рис. 1), полученный численным интегрированием уравнений (4), (5) от линии скольжения DE до линии скольжения AB с граничными условиями (14), (15), (18). Координаты r, z и углы φ находим численным интегрированием уравнений (2), (3) при известных значениях r, z, σ, φ на границе ACD и $\varphi = -\pi/4$ на оси r .

В области EDC решаем смешанную задачу для скоростей с граничными условиями (18) на ξ линии скольжения DE и (14) на границе DC . Скорости V_ξ, V_η в точках границы DC находим по конечно-разностной аппроксимации уравнений (3) и (5) при известных значениях $r, z, \varphi, V_\xi, V_\eta$ в ближайшей к границе точке на ξ линии скольжения DE , начиная от окрестности точки D . Затем выполняем циклы вычислений в регулярных узлах соседней ξ линии скольжения до η линии скольжения EC . Выполняя аналогичные вычисления от найденной линии скольжения ξ и следующей точки на границе DC , находим скорости V_ξ, V_η в

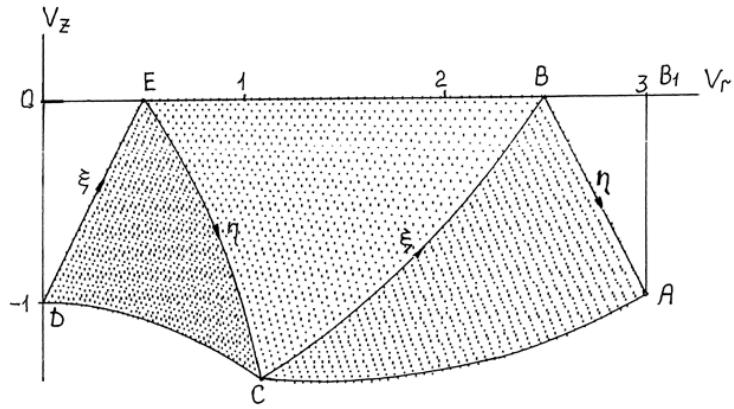


Рис. 2. Годограф скоростей в пластической области с линиями скольжения на рис. 1.

области EDC и на η линии скольжения EC , отображая их на плоскость годографа скоростей V_r, V_z по уравнениям (7).

Поле скоростей в области BCE находим решением смешанной задачи при конечно-разностной аппроксимации уравнений (4), (5) и известных скоростях V_ξ, V_η на линии скольжения EC с условием $V_\xi = V_\eta$ на оси r . В области ABC поле скоростей находим численным решением смешанной задачи для уравнений (4), (5) при известных скоростях на линии скольжения BC и условии (14) на границе AC , аналогично с областью EDC .

В областях ABC и CED прямые линии скольжения η и ξ (рис. 1) отображаются на годографе скоростей также прямыми линиями; скорости по направлению главного напряжения σ_1 возрастают и по направлению σ_2 снижаются при положительной диссипативной функции во всей пластической области. В сечениях $r = \text{const}$ в области с выпуклой границей AC скорости быстро возрастают. Отклонение скорости V_{rA} на границе $r = r_A$ от значения $\frac{1}{2}r_A$ в первом уравнении (17) равно 6×10^{-3} .

Пластическая область при осевом сдавливании цилиндра изменяется; процесс деформирования является нестационарным с изменением длины границы контакта штампа с деформируемым цилиндром. Линии скольжения и поле скоростей, приведенные на рис. 1 и 2 имеют место на конечной стадии сдавливания цилиндра при заполнении полости штампа до объема тела вращения с криволинейной образующей ACD . Сила Q , среднее давление q и контактные напряжения на границе штампа существенно снижаются по сравнению с объемной штамповкой с истечением металла в тонкий слой (облой). Однородная пластическая деформация и минимальное давление $q = 1$ имеют место только при сдавливании цилиндра идеально гладким плоским штампом при $\alpha_C = 0$ при формообразовании диска постоянной толщины.

При малых углах α_C в точке перегиба границы ACD пластическое сдавливание цилиндра приближается к конечной форме с непрерывными полями напряжений и скоростей с использованием одного профиля границы штампа при малом перемещении s границы штампа по оси $-z$. Деформирование цилиндра при больших углах α_C возможно с изменением профилей границы штампа по переходам от малых углов α_C до заданного конечного значения. На рис. 3 приведены гладкие границы штампа, вычисленные для углов α_C от 0.1745 (10°) до 0.6981 (40°) с шагом 5° по условию сохранения объема деформируемого цилиндра с отношением высоты к диаметру $a = 2$ для штампа с конечным углом $\alpha_C = 0.6981$. В табл. 2 приведены значения максимальной H и минимальной h полутолщины профилей штампов и среднего давления q в зависимости от угла α_C при $h = 1$ для профиля с углом $\alpha_C = 0.6981$.

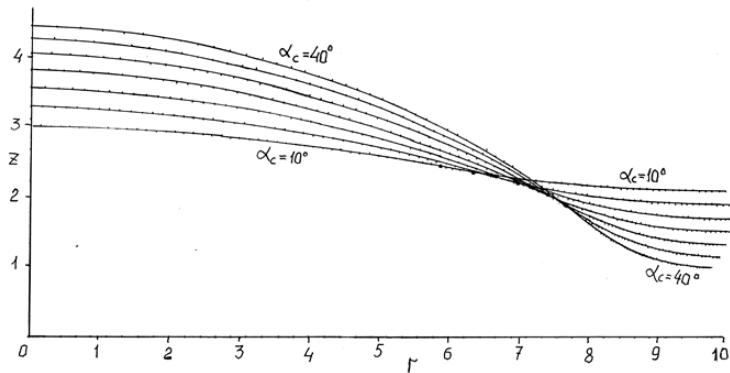


Рис. 3. Границы штампа с углами наклона касательной в точках перегиба (•): $\alpha_C = 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ, 35^\circ, 40^\circ$.

α_C	H	h	q
0.6981	4.449	1.000	1.742
0.6109	4.264	1.154	1.610
0.5236	4.053	1.322	1.489
0.4363	3.818	1.502	1.379
0.3491	3.563	1.692	1.281
0.2618	3.292	1.888	1.195
0.1745	3.012	2.085	1.120

Таблица 2. Зависимости H , h и среднего давления q профилей штампа (рис.3) от угла α_C в точках перегиба.

3. Сдавливание цилиндра штампом с криволинейной границей.

Ниже приведено моделирование нестационарного процесса осевого сдавливания цилиндра с отношением высоты к диаметру $a = 2$ штампом с гладкой вогнуто-выпуклой границей с постоянным углом $\alpha_C = -0.3491$ в точке перегиба и значениями $H = 2.106$, $r_A = 5.995$ на конечной стадии деформирования цилиндра при $R_0 = 2.915$, $H_0 = 5.830$ (рис. 1). Объем верхней полости штампа $\Omega(r_A) = 155.7$ равен объему цилиндра с размерами R_0 и H_0 .

Первая стадия. На рис. 4 показаны:

- начальная граница штампа при контакте с ребром цилиндра в точке A_0 ;
- граница штампа при перемещении s от начальной границы с заполнением полости над торцом цилиндра;
- начальная форма цилиндра и граница штампа при заполнении полости в конце сдавливания цилиндра.

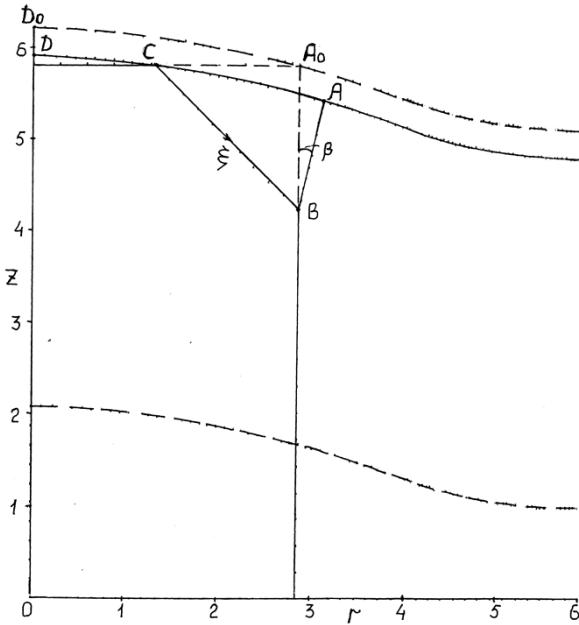


Рис. 4. Сдавливание ребра цилиндра на первой стадии ($s = 0.309$, $R_0 = 2.915$, $H_0 = 5.831$). (---) Границы штампа при $s = 0$ и $s^* = 4.136$.

Параметры последней приведены выше. Заполнение полости над торцом цилиндра заканчивается в конце первой стадии при перемещении s_1 . Конечное перемещение s^* при заполнении полости штампа на конечной стадии определяется равенством:

$$s^* = H_0 + s_1 - H.$$

Начальную границу A_0D_0 находим по координатам $z_{A_0} = H_0$ и $r_{A_0} = R_0$ точки контакта A_0 из неравенства $r_{i+1} > R_0 > r_i$, где r_i – известные координаты

точек границы штампа в конечном положении. Координату z_0 на этой границе находим линейной интерполяцией в интервале $z_{i+1} > z_0 > z_i$. Сдвигая конечную границу штампа по оси z в начальное положение, находим координату z_{D_0} точки D_0 и перемещение s_1 :

$$z_{D_0} = H + H_0 - z_0, \quad s_1 = H - z_0. \quad (19)$$

При перемещении границы штампа $0 < s < s_1$ из начального положения A_0D_0 происходит деформация сдвигом ребра цилиндра по ξ линии скольжения BC при $\tau = 0.5$, $\sigma_1 = 0$ и $\sigma_2 = -1$. Сила Q и давление q на линии сдвига BC равны:

$$Q = \pi(R_1^2 - r_C^2), \quad q = 1. \quad (20)$$

Координату r_C точки C пересечения границы цилиндра $z = H_0$ с границей штампа AD при перемещении s находим интерполяцией в интервале $r_{i+1} > r_C > r_i$, где i и $i + 1$ – номера точек границы AD , удовлетворяющие неравенству $z_{i+1} > H_0 > z_i$. При $s < s_1$ давление по сечению цилиндра $q_1 = (1 - r_C^2/R_0^2) < 1$, и область ниже линии скольжения BC остается жесткой. Первая стадия переходит в сдавливание цилиндра при однородном напряженном состоянии сжатия с жесткой областью ограниченной линией скольжения ξ и вогнутой границей контакта AD при $s = s_1$, $r_C = 0$, $q_1 = 1$.

На первой стадии область ABC возрастает от нуля в точке A_0 при $s = 0$ до максимальной величины при $s = s_1$ и $r_C = 0$ при заполненной полости штампа над торцом цилиндра. При $0 < s < s_1$ происходит выдавливание материала на границу цилиндра $r = R_0$ с увеличением границы контакта AC , которое зависит от перемещения s и определяется равенством объема цилиндра Ω_1 над границей контакта AC и объема Ω_2 материала смещенного на границу $r = R_0$, которые определяются уравнениями:

$$\Omega_1 = \pi(R_0^2 - r_C^2)(s + z_0) + \Omega(r_C) - \Omega(R_0), \quad (21)$$

$$\Omega_2 = \pi h(R_0 + \frac{1}{3}h)(a - s), \quad h = r_A - R_0, \quad a = R_0 - r_C, \quad (22)$$

где координата $z_0(R_0)$ и объемы $\Omega(r_C)$, $\Omega(R_0)$ в правой части (21) определяются интегралами (12) при вычислении границы штампа при конечном перемещении s^* . Границу AB принимаем линейной с углом наклона β к оси z . Из уравнений (21) и (22) находим квадратное уравнение для переменной h :

$$h^2 + 3R_0h - 3c = 0, \quad c = \frac{(R_0^2 - r_C^2)(s + z_0) - 2(\Omega(R_0) - \Omega(r_C))/\pi}{a - s}. \quad (23)$$

Координаты точек A , B и угол β определяются равенствами:

$$r_A = R_0 + h, \quad r_B = R_0, \quad z_B = H_0 - R_0 + r_C,$$

$$\beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{h}{z_A - z_B} \right).$$

Координату z_A находим линейной интерполяцией в интервале $z_{i+1} > z_A > z_i$ между точками $i + 1$ и i смещенной границы штампа при $r_{i+1} > r_A > r_i$. Угол β уменьшается при увеличении перемещения s . На рис. 4 угол β равен 0.220

при $s = 0.309$. В конце первой стадии $r_A = 3.162$, $z_A = 5.352$, $z_B = 2.915$, $\beta = 0.101$ при $s_1 = 0.412$ в конце первой стадии, и $s^* = 4.136$ на конечной стадии деформирования цилиндра.

Вторая стадия Вторая стадия с заполненной полостью над торцом цилиндра начинается при перемещении $s > s_1$. При переходе ко второй стадии на участке $0 < z < z_B$ цилиндра с радиусом R_0 имеет место однородное напряженное состояние $\sigma_2 = -1$ и $\sigma_1 = \sigma_3$ (рис. 4). На участке $z_B < z < z_A$ до точки контакта A с границей штампа при $s = s_1$ материал остается жестким с жесткопластической границей по линии скольжения ξ , проходящей через точку B с углом наклона $\varphi = -\pi/4$. При $s > s_1$ жесткопластическая граница перемещается по границе AB к точке A и отделяет область пластического течения с однородным напряженным состоянием сжатия цилиндрической части от жесткой области, ограниченной вогнутой границей штампа AD . При малой кривизне границы AD в окрестности оси z и уменьшении начального радиуса цилиндра R_0 при $a > 1$ объем полости над торцом цилиндра мал; координата r_A точки A близка к R_0 и смещение жесткопластической границы в точку A происходит при малом превышении $s > s_1$. Вычисления поля скоростей в пластической области с однородным напряженным состоянием сжатия со свободной границей ортогональной к оси r показывают малое искривление этой границы, которое не приводит к существенному изменению напряжений и скоростей в пластической области.

Граница контакта AD на второй и последующих стадиях сдавливания цилиндра при перемещении s по оси $-z$ от начальной границы A_0D_0 (рис. 4) определяется уравнением:

$$z(s, r) = z(r) + H_0 - H - s + s_1, \quad (24)$$

где $z(r)$ – уравнение границы при конечном положении штампа на рис. 1, и $H = z(0)$. Объем деформируемого цилиндра с границей контакта AD и свободной вертикальной границей AB при известном радиусе r_A точки контакта A находим интегрированием уравнения (24) с верхним пределом r_A в интеграле (12):

$$\Omega(s) = \Omega(r_A) + \frac{1}{2}\pi r_A^2 (H_0 - H - s + s_1), \quad (25)$$

где $\Omega(r_A)$ – известный интеграл равный объему полости штампа в конечном положении. Из уравнения (25) и условия сохранения объема цилиндра $\pi R_0^2 H_0$ находим перемещение штампа s при увеличении радиуса контакта $r_A = r_i$ в точках i границы AD , заданной табличной функцией $z(r_i)$:

$$s(r_A) = s_1 + \frac{2\Omega(r_A)}{\pi r_A^2} + H_0 \left[1 - \left(\frac{R_0}{r_A} \right)^2 \right] - H. \quad (26)$$

При отношениях $z_A/r_A > 1$ на второй стадии давление $q = 1$ и сила $Q = \pi r_A^2$.

На рис. 5 показаны линии скольжения при перемещении $s = 1.067$ с координатами точки A $r_A = 3.173$, $z_A = 4.695$. Жесткая область ACD ограничена вогнутой границей контакта AD и прямой η линией скольжения AC . В пластической

области со свободной вертикальной границей AB имеет место однородное напряженное состояние $\sigma = -0.5$, $\varphi = -\pi/4$ и прямые линии скольжения ξ и η . Поле скоростей в пластической области находим численным интегрированием уравнений (4) и (5) которые при $\varphi = -\pi/4$ имеют вид:

$$dV_\xi = -\frac{1}{2}(V_\xi + V_\eta)/r \quad \text{на } \xi, \quad (27)$$

$$dV_\eta = -\frac{1}{2}(V_\xi + V_\eta)/r \quad \text{на } \eta. \quad (28)$$

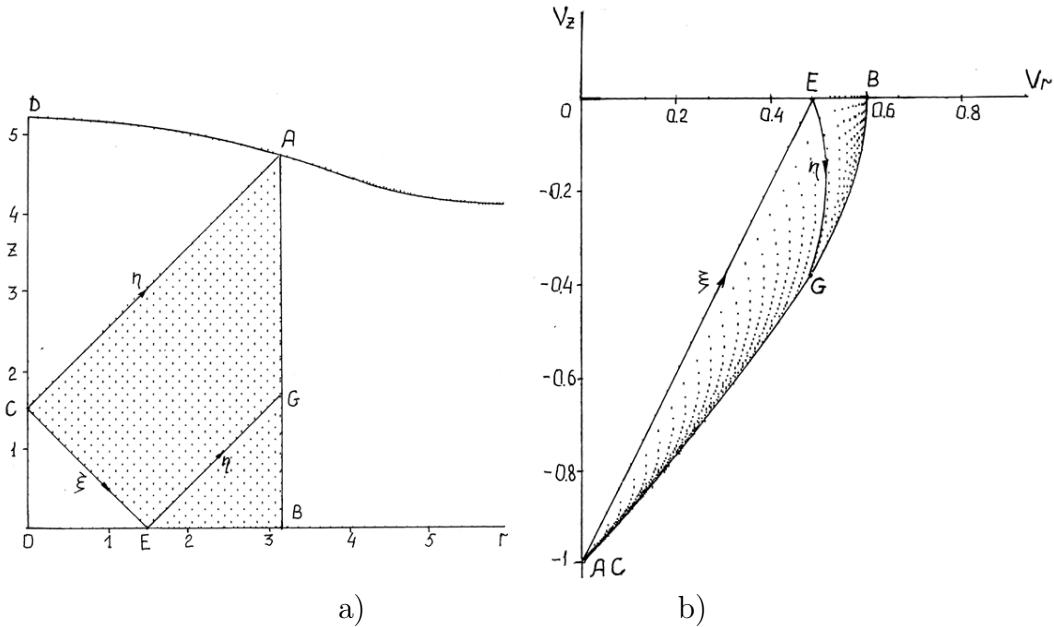


Рис. 5. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б) на второй стадии сдавливания цилиндра. Параметры: $s = 1.067$, $r_A = 3.173$, $z_A = 4.695$

В области OCE скорости V_r и V_z определяются линейными зависимостями от координат r, z при условиях $V_r = 0$ на OC и $V_z = 0$ на OE :

$$V_r = \frac{1}{2}r/z_C, \quad V_z = -z/z_C, \quad 0 \leq r \leq r_E, \quad 0 \leq z \leq z_C. \quad (29)$$

Из уравнений (7) и (29) при $\varphi = -\pi/4$ находим скорости V_ξ , V_η на линии скольжения CE :

$$V_\xi = \frac{V_r - V_z}{\sqrt{2}}, \quad V_\eta = \frac{V_r + V_z}{\sqrt{2}}. \quad (30)$$

Жесткая область выше линии скольжения AC перемещается со скоростью $V_z = -1$, $V_r = 0$; из уравнений (7) при $\varphi = -\pi/4$ на AC находим $V_\xi = 1/\sqrt{2}$, $V_\eta = -1/\sqrt{2}$. Скорости в области $ACEG$ находим численным интегрированием уравнений (27), (28) при конечно-разностной аппроксимации с граничными условиями на линиях скольжения AC и CE . Скорости в области BEG находим

решением смешанной задачи для уравнений (27), (28) с известными значениями скоростей на линии скольжения EG и условием $V_\xi = V_\eta$ на оси r .

Годограф скоростей показан на рис. 5б с обозначениями областей линий скольжения на рис. 5а. В области OCE скорости определяются уравнениями (29) с наклонной границей CE . Линия скольжения AC отображается совпадающими точками A и C при $V_z = -1$. Границные условия на AC и CE определяют поле скоростей в области $ACEG$ с линейным изменением скоростей на участке AG и криволинейным участком BG границы AB . Диссипативная функция в пластической области положительна.

В табл. 3 показаны скорости V_r на границе AB . На участке AG скорость V_r зависит от граничного условия на линии скольжения AC и увеличивается от нуля в точке A до 0.488 в точке G ; на участке BG изменение скорости V_r зависит от граничных условий на линии скольжения CE и на оси r . При приращении перемещения $\Delta s = 0.258$ максимальное радиальное перемещение точки B равно 0.155 при $\Delta r_B = 0.08$. Относительное максимальное отклонение $\Delta r_B/r_B$ границы AB на рис. 5а от криволинейной равно 0.025. Вторая стадия заканчивается при $r_A/z_A = 1$ и область OCE на рис. 5а стягивается в точку O . Равенство $r_A = z_A$ в рассматриваемом примере выполняется при перемещении $s_2 = 2.0$.

Таблица 3. Скорости V_r на свободной границе AB (рис. 5а). $s = 1.067$, $r_A = 3.173$, $z_A = 4.695$.

z	V_r	z	V_r	z	V_r	z	V_r
4.695	0.000	3.425	0.147	2.156	0.389	1.031	0.571
4.536	0.007	3.267	0.176	1.998	0.422	0.873	0.583
4.377	0.020	3.108	0.204	1.839	0.455	0.714	0.593
4.219	0.036	2.949	0.233	1.680	0.488	0.555	0.600
4.060	0.054	2.791	0.263	1.349	0.540	0.397	0.606
3.901	0.075	2.632	0.294	1.507	0.519	0.238	0.609
3.743	0.098	2.474	0.325	1.190	0.557	0.079	0.611
3.584	0.123	2.315	0.357				

Третья стадия. Третья стадия начинается при $s > s_2$ и отношении координат $r_A/z_A > 1$ точки A границы AB . На рис. 6а показаны форма деформированного цилиндра и линии скольжения при перемещении $s = 3.031$ и $r_A/z_A = 1.765$. В области ABC линии скольжения ортогональны при напряженном состоянии $\sigma = -0.5$ и $\varphi = -\pi/4$. Линии скольжения в области ACE находим решением уравнений (2), (3) с известными φ и σ на η линии скольжения AC и на вырожденной ξ линии в точке A с углом веера ψ , где правая часть второго соотношения (2) равна нулю, φ и σ уменьшаются с шагом $\Delta\varphi = 0.01$. Линию скольжения EO находим решением смешанной задачи в области CEO при $0 < r_O < 0.02$ в центре O . Силу $Q = 59.3$ и среднее давление $q = 1.061$ находим интегрированием

распределения давления $p = -\sigma + 0.5$ на отрезке OB оси r . В точке A угол веера ψ меньше угла наклона касательной $\alpha_A = 0.317$ при отсутствии скольжения на границе контакта со штампом. Жесткопластическая граница совпадает с η линией скольжения AE .

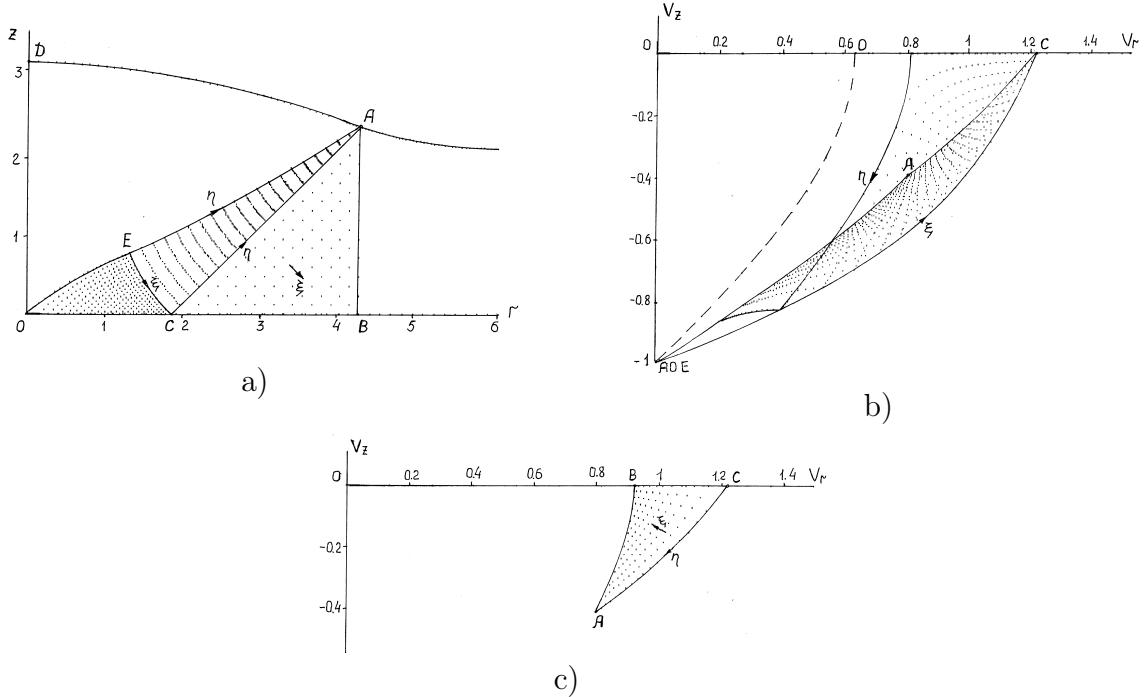


Рис. 6. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б), (с) на третьей стадии сдавливания цилиндра. $s = 3.031$, $r_A = 4.129$, $z_A = 2.39$.

На рис. 6б показан годограф скоростей в пластической области $AEOC$ (рис. 6а). Скорости находим интегрированием уравнений (4) и (5) при условиях $V_\xi = -\sin \varphi$, $V_\eta = -\cos \varphi$ на границе AE и $V_\xi = V_\eta$ на оси r , при вычислении линий скольжения от границы AE к линии скольжения AC , так как уравнения (4) и (5) содержат угол φ . В области EOC решаем смешанную задачу для уравнений (4) и (5) при $r > 0$ с граничными условиями на EO и OC . В окрестности центра O при $r \rightarrow 0$ имеет место сингулярность поля скоростей вследствие скачка граничных условий при переходе от жесткопластической границы к оси r , где скорости V_r , V_z зависят от полярного угла β с центром в точке O [9]:

$$V_r = \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{\cos 2\beta}}{\cos \beta}, \quad V_z = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\cos 2\beta}}{\sin \beta} - 1, \quad 0 \leq \beta \leq \pi/4 \quad (31)$$

В области AEC решаем задачу Гурса с граничными условиями на AE и известными значениями V_ξ , V_η на линии скольжения EC . Скорости (31) около центра O показаны на рис. 6б штриховой линией. На η линии скольжения около жесткопластической границы AE происходит изменение скоростей V_η близкое

к разрывному вследствие сингулярности (31). Вдоль ξ линии скольжения EC изменяется знак кривизны η линий скольжения (рис. 6а), что приводит к угловым точкам при отображении η линий скольжения на плоскости годографа (рис. 6б). Скорости по направлениям главного напряжения σ_1 положительны и возрастают; скорости по направлениям главного напряжения σ_2 отрицательны. Вследствие больших отрицательных значений σ_2 и малых значений $\sigma_1 = \sigma_3$ диссипативная функция в пластической области положительна.

Поле скоростей в области ABC с однородным напряженным состоянием $\sigma_2 = -1$, $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$ и прямыми линиями скольжения при $\varphi = -\pi/4$ на рис. 6а находим численным решением уравнений (27), (28) с известными значениями V_ξ , V_η на линии скольжения AC и условии $V_\xi = V_\eta$ на оси r . Годограф скоростей в области ABC показан на рис. 6с. Главные скорости пластической деформации ε_1 и ε_2 этой области отрицательны, но при нулевых значениях σ_1 и σ_3 диссипативная функция $D = \sigma_2 \varepsilon_2$ положительна. Среднее отклонение скорости $V_r = 0.883$ границы AB по интегральному условию сохранения объема от значений 0.794 в точке A и 0.925 в точке B на годографе скоростей равно 0.065; при малом перемещении штампа Δs кривизна границы AB незначительна.

Угол веера ψ в точке A (рис. 6а) увеличивается при увеличении перемещения s . При $\psi = |\alpha_A|$ в окрестности точки A появляется скольжение по гладкой выпуклой границе штампа, и пластическое течение переходит в четвертую стадию. Равенство $\psi = |\alpha_A|$ в конце третьей стадии в рассматриваемом примере выполняется при $s_3 = 3.272$.

Четвертая стадия. Четвертая стадия начинается при скольжении по гладкой выпуклой границе контакта. На рис. 7 показаны линии скольжения и годограф скоростей при перемещении $s = 3.369$. На дуге AA_1 границы контакта имеет место скольжение с изменением угла α наклона касательной от -0.262 в точке A до -0.309 в точке A_1 . Линии скольжения (рис. 7а) находим численным интегрированием уравнений (2) и (3) с условиями $\sigma = -1/2$, $\varphi = -\pi/4$ на линии скольжения AC , углом веера линий скольжения $\psi = 0.262$ в точке A , $\varphi = -\pi/4$ на оси r и $\varphi = -(\alpha + \pi/4)$ на границе скольжения AA_1 .

Поле скоростей (рис. 7б) находим численным интегрированием уравнений (4) и (5) с вычислениями линий скольжения и скоростей V_ξ , V_η от жесткопластической границы OEA_1 до линии скольжения AC с граничными условиями $V_\xi = -\sin \varphi$, $V_\eta = -\cos \varphi$ на OEA_1 , $V_\xi = V_\eta$ на оси r и (14) на границе AA_1 . Скорости в окрестности центра O определяются уравнениями (31). Скорости в области ABC находим интегрированием уравнений (27) и (28) с известными значениями V_ξ , V_η на AC аналогично с третьей стадией деформирования. Диссипативная функция в пластической области положительна. Силу $Q = 75.6$ и среднее давление $q = 1.156$ находим интегрированием распределения нормального давления $p = -\sigma + 0.5$ на отрезке OB оси r (рис. 7а).

Скачок скорости V_η вдоль η линии скольжения ближайшей к жесткопластической границе OEA_1 вследствие сингулярности (31) в окрестности центра O

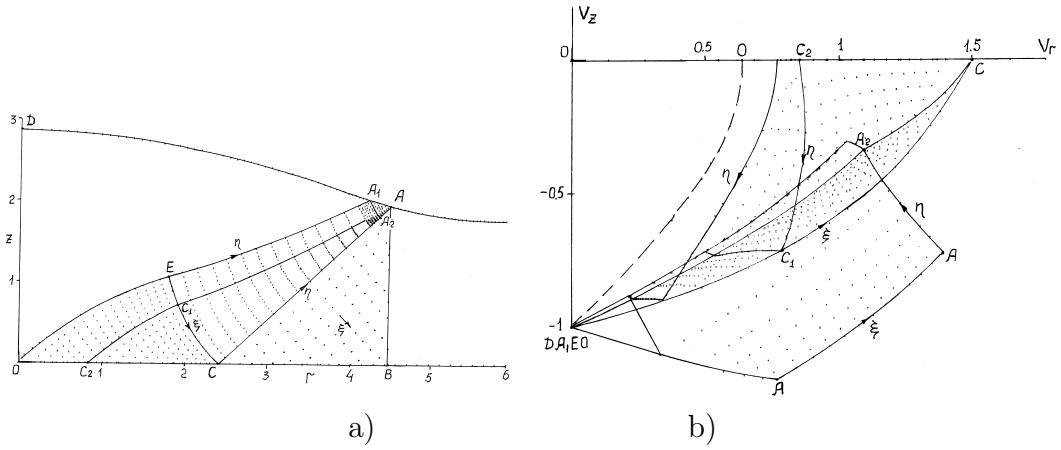


Рис. 7. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б) на четвертой стадии сдавливания цилиндра. $s = 3.369$, $r_A = 4.562$, $z_A = 1.951$.

приводит к скачку скорости V_ξ в точке A_1 на контактной границе, и распространяется вдоль ξ линии скольжения A_1A_2 с выходом на свободную границу AB в области ABC (рис. 7а). С увеличением границы скольжения AA_1 скачок скорости вдоль линии скольжения A_1A_2 непрерывно смещается от точки A к точке C , изменения кривизну свободной границы AB аналогично сдавливанию цилиндра при плоской деформации [4].

При перемещении $s > 3.573$ пластическое скольжение переходит на вогнутую границу штампа с изменением жесткопластических границ, линий скольжения и поля скоростей. На рис. 8 показаны линии скольжения и годограф скоростей при перемещении границы штампа $s = 3.742$. Линии скольжения в области $ABFA_1$ (рис. 8а) при скольжении на выпуклой дуге контакта до точки перегиба A_1 находим по алгоритму пластической области приведенной на рис. 7а. В области OFG имеет место однородное напряженное состояние при $\sigma = \sigma_F$, $\varphi = -\pi/4$ и прямая ξ линия скольжения FG . В области A_1FGM линии скольжения ξ , ортогональные к известной η линии скольжения FA_1 , также прямые при положительной диссипативной функции и скольжении по вогнутой границе A_1M . Линии скольжения в этой области находим численным интегрированием уравнений (2) и (3) при известных значениях σ и φ на FG и FA_1 и $\varphi = \text{const}$ в уравнениях (2). Точки η линий скольжения на границе A_1M находим на пересечении касательной к η линии скольжения в ближайшей точке к границе A_1M с касательной к границе A_1M в интервалах $\alpha_i < \alpha < \alpha_{i+1}$ углов наклона касательной содержащих точки пересечения. На вогнутой границе скольжения A_1M при $\alpha > -0.3491$ нормальное давление и касательное напряжение, приведенные в табл. 4, находим по формулам $p = -(\sigma + 1/2 \sin 2\beta)$, $\tau = 1/2 \cos 2\beta$, где $\beta = (\varphi - \alpha) < -\pi/4$. При увеличении перемещения s жесткая область GDM уменьшается, граница скольжения A_1M увеличивается, угол $\beta \rightarrow -\pi/4$.

и $\tau \rightarrow 0$. Силу $Q = 107.9$ и среднее давление $q = 1.325$ находим интегрированием распределения давления $p = -\sigma + 1/2$ на отрезке $0 < r < r_A$ оси r .

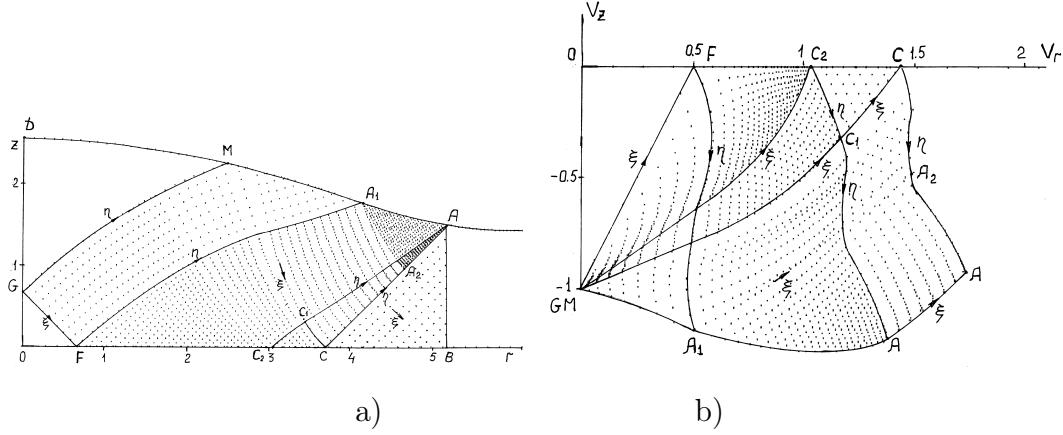


Рис. 8. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б) на четвертой стадии сдавливания цилиндра. $s = 3.742$, $r_A = 5.091$, $z_A = 1.467$.

Таблица 4. Давление p и напряжение τ на границе скольжения A_1M (рис. 8а)

r	z	p	$-\tau$
3.917	1.785	1.384	0.127
3.734	1.847	1.370	0.151
3.543	1.909	1.353	0.177
3.344	1.970	1.331	0.204
3.133	2.031	1.304	0.234
2.908	2.091	1.269	0.226
2.677	2.149	1.283	0.272

Скорости в области OFG определяются уравнениями $V_r = 1/2r/z_G$, $V_z = -z/z_G$. Поле скоростей в области A_1FGM (рис. 8б) находим интегрированием уравнений (4) и (5) с условиями $V_\xi = V_\eta = (V_r + V_z)/\sqrt{2}$ на ξ линии скольжения GF , $V_\xi = -\sin \varphi$, $V_\eta = -\cos \varphi$ на η линии скольжения GM и $V_\eta = V_\xi \operatorname{tg} \varphi + \cos \alpha / \cos \varphi$ на границе скольжения A_1M . Поле скоростей в области FA_1AC и ABC находим по алгоритму вычислений в пластической области на рис. 7б при известных скоростях V_ξ , V_η на η линии скольжения FA_1 и скольжении по выпуклой границе контакта A_1A . Поле скоростей во всей пластической области непрерывно вследствие непрерывности скоростей в области OFG и на линии скольжения GF . Жесткая область GMD при $s \rightarrow 4.136$ стягивается в точку D при непрерывном пластическом течении в заполненной полости штампа на конечной стадии деформирования (рис. 1 и 2).

На рис. 9 показаны зависимости силы Q и среднего давления q при осевом сдавливании цилиндра от перемещения границы штампа s относительно плоскости симметрии $z = 0$ до конечного значения $s^* = 4.136$. При $s < 3.27$ до начала пластического течения по границе штампа давление q близко к единице. При $s > 3.57$ давление q и сила Q при начальном скольжении по вогнутой границе штампа повышаются по сравнению со скольжением по гладкой границе вследствие появления контактных касательных напряжений. При $s \rightarrow s^*$ скольжение по вогнутой границе приближается к точке D , контактные касательные напряжения снижаются до нуля при $Q = 144.7$ и $q = 1.281$ на рис. 1.

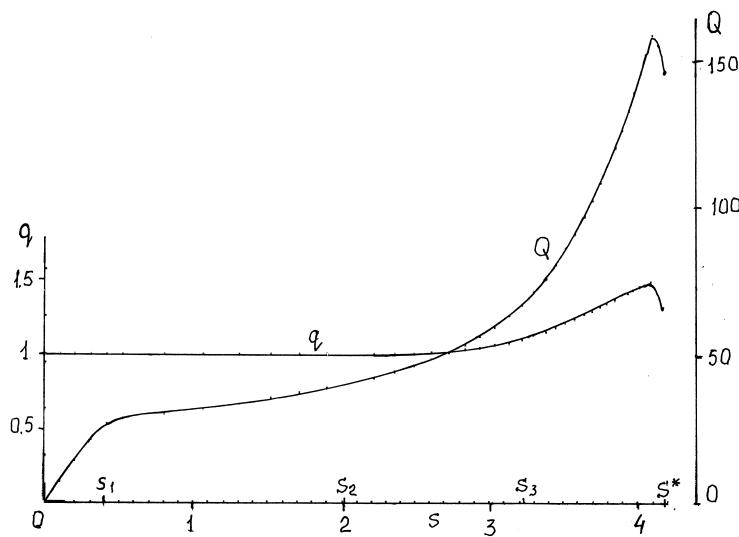


Рис. 9. Зависимости среднего давления q и силы Q от перемещения s при сдавливании цилиндра. s_1, s_2, s_3, s^* — перемещения в конце стадий 1 — 4.

4. Заключение. При массовом производстве деталей типа тел вращения с криволинейной формой образующей целесообразной является штамповка на высокопроизводительных прессах при условии высокой циклической прочности и износостойкости штампов. В этих процессах для заполнения сложной формы полости применяют эффект повышения давления в полости штампа при течении металла в тонкий слой (облой) вследствие быстрого увеличении силы на конечной стадии деформирования при сдавливании тонкого пластического слоя.

В представленной работе приведен алгоритм численного построения гладкой выпукло-вогнутой границы штампа на конечной стадии осевого сдавливания цилиндра, при которой пластическая деформация происходит без образования

жестких зон и приближается к однородной при существенном снижении давления на штамп по сравнению с облойной штамповкой. Толщина профиля деформированной заготовки снижается по радиусу, что представляет интерес для штамповки деталей с высокой угловой скоростью вращения. Выпукло-вогнутый профиль границы штампа изменяется при сдавливании цилиндра вследствие нестационарного пластического течения. Вычислены профили границы штампов в случае многопозиционной штамповки детали с гладким криволинейным профилем на конечной стадии деформирования.

Приведен пример моделирования нестационарного процесса осевого сдавливания цилиндра с отношением высоты к диаметру больше единицы в штампе с гладкой выпукло-вогнутой границей, вычисленной для конечной стадии деформирования. На первой стадии происходит заполнение полости штампа над торцом цилиндра пластическим сдвигом ребра цилиндра. На второй стадии происходит сдавливание высокого цилиндра при однородном напряженном состоянии осевого сжатия и неоднородном поле скоростей с образованием жесткой области на вогнутой границе контакта. При отношении радиуса к высоте свободной границы больше единицы пластическое течение определяется линиями скольжения с жесткопластической границей проходящей через центр полости штампа и скольжением по границе контакта. При приближении к конечной стадии жесткая область на вогнутой границе контакта уменьшается, и пластическое течение происходит по всей полости штампа с непрерывным полем скоростей и низким давлением на штамп по сравнению с облойной штамповкой.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. 100%.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. 100%

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Машиностроение. Энциклопедия. Т. III-2. Технология заготовительных производств. – М : Машиностроение, 1996. – 736 с.
2. Машиностроение. Энциклопедия. Т. VI-4. Машины и оборудование кузнечно-штамповочного и литейного производства. – М. : Машиностроение, 2005. – 926 с.
3. Ишилинский А., Ивлев Д. Математическая теория пластичности. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.
4. Непершин Р. Пластическое сдавливание цилиндра плоскими плитами // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. – 2020. – 1 (43). – С. 101–120.

5. *Nepershin P.* Сдавливание жесткопластической сферы плоскими штампами // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. – 2018. – 1 (35). – С. 26–38.
6. *Nepershin P.* Поперечное сдавливание цилиндра штампом с криволинейной гладкой границей // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. – 2024. – 3 (61). – С. 55–71. – DOI: 10.37972/chgpu.2024.61.3.005. – EDN: NDFLCK.
7. *Druryanov B., Nepershin R.* Problems of Technological Plasticity. – Amsterdam : Elsevier, 1994. – 426 c.
8. *Nepershin R.* Applied Problems of Plasticity. – Moscow : MSTU STANKIN, 2016. – 310 c.
9. *Shield R.* On the plastic flow of metals under condition of axial symmetry // Proc. Roy. Soc., ser. A. – 1955. – Т. 233, № 1193. – С. 267–287.

REFERENCES

1. Machinery Engineering. Encyclopedia. Vol. III-2. Technology of Workpiece Manufacture. – Moscow : Mashinostroenie, 1996. – 736 p. – (In Russian).
2. Machinery Engineering. Encyclopedia. Vol. VI-4. Machines and Equipment of Forging-Stamping and Casting Manufacture. – Moscow : Mashinostroenie, 2005. – 926 p. – (In Russian).
3. *Ishlinskii A. Y., Ivlev D. D.* Mathematical Theory of Plasticity. – Moscow : Fizmatlit, 2001. – 704 p. – (In Russian).
4. *Nepershin R. I.* Cylinder Plastic Compression by the Flat Plates // Vestnik I.Ya. Yakovlev ChSPU. Series of Mechanical Limit State. – 2020. – 1 (43). – P. 101–120. – DOI: 10.37972/chgpu.2020.43.1.012. – (In Russian).
5. *Nepershin R. I.* Compression of Rigid-Plastic Sphere by Flat Dies // Vestnik I.Ya. Yakovlev ChSPU. Series of Mechanical Limit State. – 2018. – 1 (35). – P. 26–38. – (In Russian).
6. *Nepershin R. I.* Cylinder Transverse Compression by the Dies with Curvilinear Smooth Boundary // Vestnik Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost. – 2024. – 3 (61). – P. 55–71. – DOI: 10.37972/chgpu.2024.61.3.005. – EDN: NDFLCK. – (In Russian).
7. *Druryanov B. A., Nepershin R. I.* Problems of Technological Plasticity. – Amsterdam : Elsevier, 1994. – 426 p.
8. *Nepershin R. I.* Applied Problems of Plasticity. – Moscow : MSTU "STANKIN", 2016. – 310 p.
9. *Shield R. T.* On the Plastic Flow of Metals Under Condition of Axial Symmetry // Proc. Roy. Soc., ser. A. – 1955. – Vol. 233, no. 1193. – P. 267–287.

А. И. Сумин¹, Р. С. Сумина^{1,2}, А. Л. Фролов¹, О. А. Фролова²

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ МАТЕРИАЛОВ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ МЕХАНИЧЕСКИХ И ТЕПЛОВЫХ НАГРУЗОК

¹Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная
академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж, Россия

²Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В данной работе исследуется потеря устойчивости материалов под действием механических и тепловых нагрузок. Математическая модель построена на основе общей теории устойчивости нелинейно-вязкоупругих тел по отношению к конечным возмущениям. Выписана нелинейная краевая задача с переменными коэффициентами, касающейся конечных возмущений, возникающих при деформировании вязкоупругой среды. Получено аналитическое решение в виде разложения в ряд Бубнова-Галеркина по собственным функциям. Системы уравнений для определения соответствующих коэффициентов решены численно. Количество членов ряда ограничено на основе теории бифуркаций и методов исследования динамических диссипативных систем. Определена область устойчивости относительно допустимых начальных возмущений при изменении значений параметров нагрузки. Показано, что в области начальных возмущений в результате конечного числа бифуркаций, процесс деформирования сохраняет устойчивость и наблюдается иерархия устойчивых равновесных состояний.

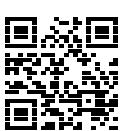
Ключевые слова: устойчивость, нелинейно-вязкоупругое тело, динамические системы, функция Ляпунова, странный аттрактор.

Сумин Александр Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики; e-mail: sumin_ai@mail.ru

Сумина Рита Семеновна, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры математики; e-mail: rsumina@mail.ru

Фролов Александр Леонидович, кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математики; e-mail: al-frol@yandex.ru

Фролова Оксана Александровна, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий; e-mail: oksanafrola@yandex.ru



для цитирования: Сумин А. И., Сумина Р. С., Фролов А. Л., Фролова О. А. Математическое моделирование потери устойчивости материалов под действием механических и тепловых нагрузок // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 4(66). С. 92–102. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.006. EDN: FJJDRY

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

A. I. Sumin¹, R. S. Sumina^{1,2}, A. L. Frolov¹, O. A. Frolova²

MATHEMATICAL MODELING OF LOSS OF STABILITY OF MATERIALS UNDER THE INFLUENCE OF MECHANICAL AND THERMAL LOADS

¹*I. Military Training and Research Center of the Air Force "Air Force Academy named after Professor N.E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarin Voronezh, Russia*

²*I.N. Voronezh State University, Voronezh, Russia*

Abstract. In this paper, the loss of stability of materials under the influence of mechanical and thermal loads is investigated. The mathematical model is based on the general theory of stability of nonlinear viscoelastic bodies with respect to finite perturbations. A nonlinear boundary value problem with variable coefficients is written out concerning finite perturbations arising from the deformation of a viscoelastic medium. An analytical solution is obtained in the form of a Bubnov-Galerkin expansion in terms of eigenfunctions. The systems of equations for determining the corresponding coefficients are solved numerically. The number of terms of the series is limited based on the theory of bifurcations and methods of studying dynamic dissipative systems. The area of stability relative to the permissible initial disturbances is determined when changing the values of the load parameters. It is shown that in the region of initial disturbances as a result of a finite number of bifurcations, the deformation process remains stable and a hierarchy of stable equilibrium states is observed.

Keywords: Keywords: stability, nonlinear viscoelastic body, dynamical systems, Lyapunov function, strange attractor.

Alexander I. Sumin, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; e-mail: sumin_ai@mail.ru;

Rita S. Sumina, Candidate of Technical Sciences, Docent; e-mail: rsumina@mail.ru

Alexander L. Frolov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor; e-mail: al-frol@yandex.ru

Oksana A. Frolova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences; e-mail: oksanafrola@yandex.ru



to cite this article: Sumin A. I., Sumina R. S., Frolov A. L., Frolova O. A. Mathematical modeling of loss of stability of materials under the influence of mechanical and thermal loads // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 4(66). p. 92–102. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.006

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Теория устойчивости деформируемых систем активно применяется во многих областях промышленности и строительства. Развитие исследований, связанных с разработкой новых композиционных материалов с требуемыми эксплуатационными параметрами, построение моделей изменения свойств материалов для различного вида нагрузок и т.п.

Решение проблемы устойчивости композиционных материалов в условиях конечных возмущений имеет важное значение для оценки надежности материала при различных нагрузках с известными параметрами.

Развитие теории упругой устойчивости при конечных возмущениях является важным шагом в понимании динамических систем. Эта теория позволяет установить связь между упругой устойчивостью, общей теорией кинематической устойчивости и теорией бифуркаций. Одним из важных следствий является то, что точность 3D-линеаризованной теории устойчивости может быть оценена как для малых, так и для конечных деформаций.

Построение конечной последовательности точек бифуркации показывает, что, в отличие от классических теорий устойчивости, определяющих единственную точку бифуркации, всегда существует область устойчивых равновесных состояний.

Эта иерархия представляет собой набор состояний, каждое из которых может быть устойчивым в зависимости от величины и направления приложенной нагрузки. Таким образом, в процессе анализа устойчивости композиционных материалов важно учитывать не только пороговые значения нагрузок, при которых происходит потеря устойчивости, но и динамику перехода между этими состояниями. Важное значение имеет также влияние микроструктуры материала на его устойчивость. На уровне отдельных волокон, слоев и их взаимодействий можно наблюдать сложные механические эффекты, которые могут оказывать значительное влияние на общее поведение композита под нагрузкой. Это требует разработки более сложных математических моделей и численных методов, способных учитывать эти аспекты.

Кроме того, для практического применения теории устойчивости в инженерной практике необходимо учитывать влияние внешних факторов, таких как температура, влажность и условия эксплуатации. Эти факторы могут изменять механические свойства материалов и, следовательно, влиять на их устойчивость.

Разработка эффективных методов прогнозирования устойчивости композиционных материалов в условиях конечных возмущений будет способствовать созданию более надежных и долговечных конструкций. Это, в свою очередь, значительно повысит безопасность и эффективность применения таких материалов в различных сферах, включая авиацию, автомобилестроение и строительство.

Таким образом, дальнейшие исследования в области устойчивости композиционных материалов имеют ключевое значение для совершенствования существующих моделей и разработки новых подходов, которые позволяют более точно

предсказывать поведение этих материалов под действием различных нагрузок.

Основная часть. Рассмотрим состояние тела под действием механических и тепловых нагрузок по истечении времени достаточного для окончания процессов ползучести и релаксации [1]. При термомеханическом возмущении тело перейдет в состояние, которое характеризуется:

$$u' = \overset{\circ}{u} + u, \quad E' = \overset{\circ}{E} + E, \quad \theta' = \overset{\circ}{\theta} + \theta, \quad S' = \overset{\circ}{S} + S, \dots,$$

где u' – вектор перемещений с начальным состоянием $\overset{\circ}{u} = \{\overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2, \overset{\circ}{u}_3\}$ и возмущением u ; E' – тензор деформаций с начальным состоянием $\overset{\circ}{E}$ и возмущением E ; θ' – температура и т.д. Начальные состояния не зависят от времени, т.е. характеризуют положение равновесия [2].

Декартовы координаты естественного состояния в начальный момент времени совпадают с материальными: $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$.

В рамках этих представлений уравнение энергии в возмущениях получается из [3], [4] отbrasыванием диссипативной функции и записывается в виде

$$\rho_R \dot{\theta} \dot{\eta} + h_{Ri,i} = 0. \quad (1)$$

Уравнения движения и граничные условия останутся в том же виде. Соответствующие соотношения [1, 3] записутся так

$$S = S^\infty + \int_{-\infty}^t \left[G^{(1)}(0, \xi - \xi'; \overset{\circ}{E}, \overset{\circ}{\theta}) \frac{\partial E(\tau')}{\partial \tau'} + G^{(2)}(0, \xi - \xi'; \overset{\circ}{E}, \overset{\circ}{\theta}) \frac{\partial \theta(\tau')}{\partial \tau'} \right] d\tau', \quad (2)$$

$$\eta = \eta^\infty + \int_{-\infty}^t G^{(2)}(0, \xi - \xi'; \overset{\circ}{E}, \overset{\circ}{\theta}) \frac{\partial \theta(\tau')}{\partial \tau'} d\tau'. \quad (3)$$

Определяющим соотношением для теплового потока будет

$$-h_R = \overset{\circ}{M} \left(\overset{\circ}{E}, \overset{\circ}{\theta} \right) g_R. \quad (4)$$

Соотношения для возмущений тензора напряжений можно переписать в виде

$$S^\infty = S^\infty(1) + S^\infty(2) + \dots + S_H. \quad (5)$$

Количество слагаемых в (5) конкретизируется заданием формы упругого потенциала, а соотношение S_H примет вид

$$S_H = S^\infty + \int_{-\infty}^t \left[G^{(1)}(0, q - q'; \overset{\circ}{E}, \overset{\circ}{\theta}) \frac{\partial E(\tau')}{\partial \tau'} + G^{(2)}(0, q - q'; \overset{\circ}{E}, \overset{\circ}{\theta}) \frac{\partial \theta(\tau')}{\partial \tau'} \right] d\tau'. \quad (6)$$

Распределение температур имеет вид

$$\theta = \theta \left(t, \overset{\circ}{E}, \overset{\circ}{\theta}, \xi_k \right). \quad (7)$$

Для задачи (1-6) запишем вариационную задачу метода Бубнова-Галеркина.

Предположим, что в теле отсутствуют массовые и поверхностные силы, тогда вариационные уравнения после необходимых преобразований примут следующий вид

$$\int_V \left[\left(\delta_{ik} + \ddot{u}_{i,k} \right) T_{*kj} + \dot{T}_{*kj} u_{i,k} + T_{*kj} u_{i,k} \right] \delta u_{i,j} dV + \rho_R \int_V \ddot{u}_i \delta u_i dV = 0. \quad (9)$$

Решение нелинейной краевой задачи (9)

$$u_i(\xi_k, t) = \sum_{n,m} f_{nm}(t) \cdot \varphi_{inm}(\xi_k), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad m = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где $f_{nm}(t)$ – неопределенные коэффициенты, зависящие от времени, $\varphi_{inm}(\xi_k)$ – формы перегибов, удовлетворяющие геометрическим граничным условиям для u_i и соответствующие линеаризованной задаче.

В качестве вариаций δu_i примем выражения

$$\delta u_i = \sum_{n,m} \varphi_{inm}(\xi_k) \cdot \delta f_{nm}(t). \quad (11)$$

Из (9)-(11), используя произвольность вариаций для каждого момента времени получим

$$\begin{aligned} \int_V \left[\left(\delta_{ik} + \ddot{u}_{i,k} \right) T_{*kj} + \dot{T}_{*kj} u_{i,k} + T_{*kj} u_{i,k} \right] \varphi_{inm,j} \delta f_{nm} dV + \\ + \rho_R \int_V \varphi_{inm} \delta f_{nm} dV = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Вполне очевидно, что при конкретизации потенциала возмущения компонент тензора напряжений выражаются через возмущения перемещений, а соотношения (5) представимы в форме

$$S_{ij}^\infty(1) = f_{nm} S_{ijnm}, \quad S_{ij}^\infty(2) = f_{nm} f_{kl} S_{ijnmkl}, \quad (13)$$

где $T_* = \rho_R S$.

Или

$$S^\infty(1) = f^{(1)} S^{(1)}, \quad S^\infty(2) = f^{(1)} f^{(2)} S^{(2)}, \quad S^\infty(3) = f^{(1)} f^{(2)} f^{(3)} S^{(3)} \quad (14)$$

при обозначениях $f_{nm} = f^{(1)}$, $f_{kl} = f^{(2)}$, $S_{ijnm} = S^{(1)}$, $S_{ijnmkl} = S^{(2)}$.

Компоненты тензора деформаций в (12) с учетом введенных обозначений

$$\begin{aligned} E_{mn}(1) &= \frac{1}{2} f_{ij} \left(\varphi_{mij,n} + \varphi_{nij,m} + \ddot{u}_{k,m} \varphi_{kij,n} + \varphi_{kij,m} \ddot{u}_{k,m} \right), \\ E_{mn}(2) &= \frac{1}{2} f_{ij} f_{kl} \varphi_{rij,m} \varphi_{rij,n}. \end{aligned}$$

Производная по времени от компонент тензора деформаций

$$\dot{E}_{mn}(1) = \frac{1}{2} \dot{f}_{ij} (\varphi_{mij,n} + \varphi_{nij,m}).$$

Выражение для возмущений температуры (7) и его производная

$$\theta(t, \overset{\circ}{E}, \overset{\circ}{\theta}, \xi_k) = \theta^{(1)}(t) \psi^{(1)} \left(\overset{\circ}{E}, \overset{\circ}{\theta}, \xi_k \right),$$

$$\dot{\theta}(t, \overset{\circ}{E}, \overset{\circ}{\theta}, \xi_k) = \dot{\theta}^{(1)}(t) \psi^{(1)} \left(\overset{\circ}{E}, \overset{\circ}{\theta}, \xi_k \right).$$

Из (6) получим

$$S_H = \int_{-\infty}^t \left[G^{(1)} \dot{f}^{(1)} E^{(0)} + G^{(2)} \dot{\theta}^{(1)} \psi^{(1)} \right] d\tau', \quad (15)$$

где

$$E_{ijmn}^{(0)} = \frac{1}{2} (\varphi_{mij,n} + \varphi_{nij,m}),$$

$$E_{ijmn}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\varphi_{mij,n} + \varphi_{nij,m} + \overset{\circ}{u}_{k,m} \varphi_{kij,n} + \varphi_{kij,m} \overset{\circ}{u}_{k,n} \right),$$

$$E_{ijmnkl}^{(2)} = \frac{1}{2} \varphi_{rij,m} \varphi_{nkl,r}.$$

С учетом (12) и (15) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} A \dot{f}^{(1)} + B \left(\dot{f}^{(1)} \right) + C \left(\dot{f}^{(1)} \right) f^{(1)} + D \left(\dot{f}^{(1)} \right) + L \left(\dot{\theta}^{(1)} \right) f^{(1)} + \\ + \dots + K_1 f^{(1)} + K_2 f^{(1)} f^{(2)} + K_3 f^{(1)} f^{(2)} f^{(3)} + \dots = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где коэффициенты имеют следующий вид:

$$A = \rho_k \int_V \dot{f}^{(1)} \phi^{(1)} \phi^{(1)T} dV,$$

$$B \left(\dot{f}^{(1)} \right) = \int_{-\infty}^t \dot{f}^{(1)}(\tau) \int_V \left[\left(I + \overset{\circ}{H} \right) E^{(0)} H^{(1)} \right] dV G^{(1)} d\tau,$$

$$D \left(\dot{\theta}^{(1)} \right) = \int_{-\infty}^t \dot{\theta}^{(1)}(\tau) \int_V \left[\left(I + \overset{\circ}{H} \right) \psi^{(1)} H^{(1)} \right] dV G^{(2)} d\tau,$$

$$C \left(\dot{f}^{(1)} \right) = \int_{-\infty}^t \dot{f}^{(1)}(\tau) \int_V \left[E^{(0)} H^{(1)} H^{(1)} \right] dV G^{(2)} d\tau,$$

$$L \left(\dot{\theta}^{(1)} \right) = \int_{-\infty}^t \dot{\theta}^{(1)}(\tau) \int_V \left[\psi^{(1)} H^{(1)} \right] dV G^{(2)} d\tau,$$

$$K_1 = \int_V \left[\left(I + \overset{\circ}{H} \right) S^{(1)} + \overset{\circ}{S} H^{(1)} \right] H^{(1)} dV,$$

$$K_2 = \int_V \left[\left(I + \overset{\circ}{H} \right) S^{(2)} + S^{(1)} H^{(1)} \right] H^{(1)} dV,$$

$$K_3 = \int_V \left[\left(I + \overset{\circ}{H} \right) S^{(3)} + S^{(2)} H^{(1)} \right] H^{(1)} dV,$$

...

Количество слагаемых в (16) и вид коэффициентов определяется заданием формы упругого потенциала. Перепишем систему (16) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} A \dot{f} \dot{f} + \frac{1}{2} K_1 f f + \frac{1}{3} K_2 f f f + \frac{1}{4} K_3 f f f f + \dots + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^t B(\dot{f}) \dot{f} d\tau + \int_{-\infty}^t C(\dot{f}) \dot{f} d\tau + \int_{-\infty}^t D(\dot{\theta}) \dot{f} d\tau + \int_{-\infty}^t L(\dot{\theta}) f \dot{f} d\tau \right] = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Запишем аддитивную свертку

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} A \dot{f} \dot{f} + \frac{1}{2} K_1 f f + \frac{1}{3} K_2 f f f + \frac{1}{4} K_3 f f f f + \dots + \\ + \int_{-\infty}^t B(\dot{f}) \dot{f} d\tau + \int_{-\infty}^t C(\dot{f}) \dot{f} d\tau + \int_{-\infty}^t D(\dot{\theta}) \dot{f} d\tau + \int_{-\infty}^t L(\dot{\theta}) f \dot{f} d\tau. \end{aligned}$$

Дифференцируя Π , получим систему уравнений для начальных возмущений и их скоростей

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{f}} \right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial f} \right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\theta}} \right)_0 = 0, \quad (18)$$

относительно которых которой нулевое решение (16) будет устойчиво.

Функцию Π представим в виде суммы пяти слагаемых, где

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} A \dot{f} \dot{f} + \frac{1}{2} K_1 f f + \frac{1}{3} K_2 f f f + \frac{1}{4} K_3 f f f f + \dots, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \int_{-\infty}^t B(\dot{f}) \dot{f} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \int_V \left[\left(I + \overset{\circ}{H} \right) E^{(0)} H^{(1)} \right] dV G^{(1)} \dot{f}(\tau_1) \dot{f}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Pi_3 &= \int_{-\infty}^t C(\dot{f}) \dot{f} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \int_V \left[\left(I + \overset{\circ}{H} \right) E^{(1)} H^{(1)} \right] dV G^{(1)} \dot{f}(\tau_1) \dot{f}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \Pi_4 &= \int_{-\infty}^t D(\dot{\theta}) \dot{f} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \int_V \left[(I + \overset{\circ}{H}) \psi^{(1)} H^{(1)} \right] dV G^{(2)} \dot{\theta}(\tau_1) \dot{f}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \Pi_5 &= \int_{-\infty}^t L(\dot{\theta}) \dot{f} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \int_V (\psi^{(1)} H^{(1)} H^{(1)} dV) \dot{\theta}(\tau_1) f(\tau_1) \dot{f}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (23)$$

Функция (19) получена в [5]. Функции (20)-(23) ядерные полилинейные формы, конкретный вид ядер которых определяется из экспериментов.

Для нахождения областей относительно амплитуд начальных возмущений получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{f}} \right)_0 &= A \dot{f}(0) + B(\dot{f}(0)) \dot{f}(0) + C(\dot{f}(0)) f(0) \dot{f}(0) + \\ &+ D(\dot{\theta}(0)) f(0) \dot{f}(0) + L(\dot{\theta}(0)) f(0) \dot{f}(0) + \dots = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial f} \right)_0 = K_1 f(0) + K_2 f(0) f(0) + K_3 f(0) f(0) f(0) + K_4 f(0) f(0) f(0) f(0) + \dots = 0.$$

Система уравнений (24) была решена численно с заданными начальными деформациями и фиксированными скоростями деформаций. Размер области устойчивости и количество членов ряда (10) определены на основании метода, основанного на исследовании динамических систем с режимом странного аттрактора [5–7]. Отмечено, что динамическая стохастичность возникает после определенной последовательности бифуркаций, приводящих к хаотическому поведению системы [8, 9]. Для вязкоупругого тела получены точки бифуркации, представляющие следы решения, попавшего в область притяжения странного аттрактора. Также были уточнены графические зависимости величин параметров нагрузки от размерности странного аттрактора, полученные в [4, 6].

Заключение. При применении описанного выше подхода решены задачи устойчивости нелинейно-вязкоупругих материалов. Показано, что с увеличением параметра нагрузки наблюдается снижение размерности странного аттрактора, которое указывает на наличие определенных структурных переходов в материале, происходящих под воздействием внешних нагрузок. Такие переходы могут быть связаны с изменением: упругости, пластичности и прочности. Это

влияет на поведение материала при различных условиях воздействия, а также позволяет прогнозировать устойчивость материалов в условиях нагрузки. Данное исследование может быть востребовано при разработке новых композитных материалов способных выдержать высокие нагрузки без потери прочности. Уменьшение размерности странного аттрактора применимо при численном моделировании для сокращения времени вычислений и повышении точности результатов.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. А. И. Сумин постановка задачи, написание аннотации и заключения, согласование финальной версии рукописи, А. Л. Фролов написание введения и обзор литературы по теме статьи, Р. С. Сумина и О. А. Фролова выполнение расчетов и написание текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. A. I. Sumin setting the task, writing an abstract and conclusion, agreeing on the final version of the manuscript, A. L. Frolov writing an introduction and literature review on the topic of the article, R. S. Sumina and O. A. Frolova performing calculations and writing the text of the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карнаухов В. Г., Гуменюк Б. П. Термомеханика предварительно деформированных вязкоупругих тел. – Киев : Наук. думка, 1990. – 304 с.
2. Rivlin R. S., Shield R. T. General theory of small elastic deformation superposed on finite elastic deformation // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1952. – Vol. 211. – P. 128–154.
3. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. – Москва : Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 288 с.
4. Спорыхин А. Н., Сумин А. И. Иерархия устойчивых состояний в механике нелинейных сред. – Воронеж : Воронежский Государственный Университет, 1999. – 210 с.
5. Рюэль Д., Такенс Ф. О природе турбулентности. Странные аттракторы // О природе турбулентности. Странные аттракторы / под ред. Я. Г. Синай, Л. П. Шильников. – Москва : Мир, 1981. – С. 117–151.
6. Сумин А. И., Спорыхин А. Н. Нелинейная динамика в задачах устойчивости механике сложных сред. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. – 173 с.
7. Takens F. Detecting strange attractor in turbulence // Dynamical Systems and Turbulence. – Springer-Verlag, 1981. – P. 366–381.
8. Синай Я. Г. Стохастичность динамических систем // Нелинейные волны. – Москва : Наука, 1979. – С. 192–211.

9. *Farmer J. D., Ott E., Yorke J. A.* The Dimension of Chaotic Attractors // *Physica* D. – 1983. – Vol. 7, no. 1–3. – P. 153–180.

REFERENCES

1. *Karnaughov V. G., Gumenyuk B. P.* Thermomechanics of predeformed viscoelastic bodies. – Kyiv : Nauk. Dumka, 1990. – 304 p.
2. *Green A. E., Rivlin R. S., Shield R. T.* General theory of small elastic deformation superposed on finite elastic deformation // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1952. – Vol. 211. – P. 128–154.
3. *Ilyushin A. A.* Continuum mechanics. – Moscow : Publishing house Mosk. University, 1978. – 288 p.
4. *Sporykhin A. N., Sumin A. I.* Hierarchy of stable states in the mechanics of nonlinear media. – Voronezh : Voronezh State University, 1999. – 210 p.
5. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence. Strange attractors // On the Nature of Turbulence. Strange Attractors / ed. by Y. G. Sinai, L. P. Shilnikov. – Moscow : Mir, 1981. – P. 117–151.
6. *Sumin A. I., Sporykhin A. N.* Nonlinear dynamics in problems of stability in the mechanics of complex media. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. – 173 p.
7. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence // Dynamical Systems and Turbulence. – Springer-Verlag, 1981. – P. 366–381.
8. *Sinai Y. G.* Stochasticity of dynamic systems // Nonlinear Waves. – Moscow : Nauka, 1979. – P. 192–211.
9. *Farmer J. D., Ott E., Yorke J. A.* The Dimension of Chaotic Attractors // Physica D. – 1983. – Vol. 7, no. 1–3. – P. 153–180.

А. Г. Акопян, О. А. Капленко, Г. Г. Ягудаев

ПРЕДЕЛЬНОЕ ПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ КОМПОЗИТНОГО КОНИЧЕСКОГО ЛИСТА

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет
(МАДИ), Северокавказский филиал, Лермонтов, Россия

Аннотация. Работа посвящена изучению предельного состояния при совместном изгибе с растяжением пластически ортотропного длинного листа в виде сектора конической трубы. Определены величины предельных растягивающего усилия и изгибающего момента.

Ключевые слова: композиты, предельное пластическое состояние, конический лист, сферически ортотропный, изгиб, растяжение.

Акопян Ашот Гаврошевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры автомобильных дорог и автомобильного транспорта; e-mail: manakofoto@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0002-2921-5334>

Капленко Ольга Александровна, кандидат технических наук, доцент кафедры автомобильных дорог и автомобильного транспорта; e-mail: olya-oite@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0001-8203-8210>

Ягудаев Геннадий Григорьевич, кандидат технических наук, доцент, директор; e-mail: gena_yagudaev@mail.ru



для цитирования: Акопян А. Г., Капленко О. А., Ягудаев Г. Г. Предельное пластическое состояние композитного конического листа // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 4(66). С. 103–111. DOI: 10.37972/chgpru.2025.66.4.007. EDN: FBMFOD

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

A. G. Hakobyan, O. A. Kaplenko, G. G. Yagudaev

LIMIT PLASTIC STATE OF COMPOSITE CONICAL SHEET

Moscow Automobile and Road Engineering State Technical University (MADI), North Caucasus Branch, Lermontov, Stavropol Territory, Russia

Abstract. The work is devoted to the study of the limit state during joint bending with stretching of a plastically orthotropic long sheet shaped as a sector of a conical pipe. The values of the limiting tensile force and bending moment are determined.

Keywords: composites, ultimate plastic state, conical sheet, spherically orthotropic, bending, stretching

Ashot G. Hakobyan, Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Highways and Motor Transport; e-mail: manakofoto@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0002-2921-5334>

Olga A. Kaplenko, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Highways and Motor Transport; e-mail: olya-oite@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0001-8203-8210>

Gennady G. Yagudaev, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Director; e-mail: gena_yagudaev@mail.ru



to cite this article: Hakobyan A. G., Kaplenko O. A., Yagudaev G. G. Limit plastic state of composite conical sheet // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 4(66). p. 103–111.
DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.007

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Композитные материалы обладают анизотропией, потому что их свойства зависят от направления и расположения компонентов. Композитные материалы имеют высокую прочность, жесткость, легкость, износостойкость и термостойкость.

Стеклопластики, являются характерными представителями композитов. Эти современные материалы находят широкое применение при изготовлении элементов конструкции в различных отраслях техники: в самолетостроении, в космической и ракетной технике. В автомобильной промышленности всё больше применяются композитные материалы. Композиционные материалы в конструкциях, требующих наибольшего упрочнения, характеризуются расположением армирующих волокон по направлению приложенной нагрузки. Цилиндрические изделия и другие тела вращения (например, сосуды высокого давления), в основе которых лежат композиционные материалы, армируют волокнами, ориентируя их в продольном и поперечном направлениях. В технике широкое распространение получили волокнистые композиционные материалы, армированные высокопрочными и высокомодульными непрерывными волокнами, в которых армирующие элементы несут основную нагрузку, тогда как матрица передаёт напряжения волокнам. Волокнистые композиционные материалы, как правило, анизотропны.

Исходя из этого решения, полученное в данной работе может быть применено, как рекомендации к повышению прочности композитных изделий.

Вопросы теории изгиба пластиически анизотропного плоского листа рассмотрены в работах [1–5]. Пластическое состояние анизотропных цилиндрических тел изучен в работах [6–13]. В работах [14–16] изучено предельное состояние анизотропных сферических тел.

В настоящей работе рассматривается предельное состояние сферически ортотропного листа в виде сектора длинной конической трубы под совместным воздействием распределенных изгибающих моментов и растягивающих усилий, приложенных на осевых торцевых сечениях (рис. 1). Надо определить закон изменения этих сил вдоль образующих.

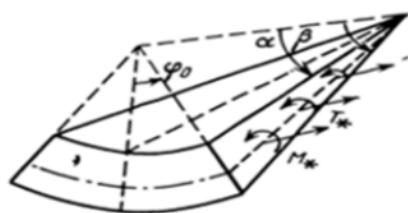


Рис. 1. Схема конического листа

Принимается, материал конического листа подчиняется соотношениям идеального жестко пластического тела Мизеса-Хилла [17] и направления армирующих волокон материала совпадают с осями сферической системы координат.

1. Определяющие соотношения с учетом анизотропии. Соотношения теории анизотропного идеального жестко пластического течения в сферических координатах в обычных обозначениях имеют вид:

дифференциальные уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \tau_{r\theta} \cot \theta) = 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [(\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \cot \theta + 3\tau_{r\theta}] = 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2\tau_{\theta\varphi} \cot \theta + 3\tau_{r\varphi}) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

условие текучести Мизеса-Хилла [17]

$$\begin{aligned} F_0 (\sigma_\theta - \sigma_\varphi)^2 + G_0 (\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + H_0 (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 2L_0 \tau_{\theta\varphi}^2 + 2M_0 \tau_{r\varphi}^2 + \\ + 2N_0 \tau_{r\theta}^2 = 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Зависимости между компонентами тензора скоростей деформации, скоростей перемещения и напряжений

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \Omega_0 [H_0 (\sigma_r - \sigma_\theta) + G_0 (\sigma_r - \sigma_\varphi)] \quad (3)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \Omega_0 [F_0 (\sigma_\theta - \sigma_\varphi) + H_0 (\sigma_\theta - \sigma_r)]$$

,

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} + \frac{v}{r} \cot \theta = \Omega_0 [G_0 (\sigma_\varphi - \sigma_r) + F_0 (\sigma_\varphi - \sigma_\theta)],$$

$$2\gamma_{\theta\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{w}{r} \cot \theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 2L_0 \tau_{\theta\varphi} \Omega_0$$

$$2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 2N_0 \tau_{r\theta} \Omega_0$$

$$2\gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} = 2M_0 \tau_{r\varphi} \Omega_0$$

Компоненты напряжений удобно представить в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\theta + \frac{1}{\Omega} (F \varepsilon_r - G \varepsilon_\theta), \\ \sigma_\varphi = \sigma_\theta - \frac{1}{\Omega} [H \varepsilon_r + (G + H) \varepsilon_\theta], \\ \tau_{\theta\varphi} = \frac{L}{\Omega} \gamma_{\theta\varphi}, \quad \tau_{r\varphi} = \frac{M}{\Omega} \gamma_{r\varphi}, \quad \tau_{r\theta} = \frac{N}{\Omega} \gamma_{r\theta}, \\ \Omega = \sqrt{(F + H) \varepsilon_r^2 + 2H \varepsilon_r \varepsilon_\theta + (H + G) \varepsilon_\theta^2 + 2L \gamma_{\theta\varphi}^2 + 2M \gamma_{r\varphi}^2 + 2N \gamma_{r\theta}^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где введены обозначения

$$F = \frac{F_0}{\Delta}, \quad G = \frac{G_0}{\Delta}, \quad H = \frac{H_0}{\Delta}, \quad L = L_0^{-1}, \quad M = M_0^{-1}, \quad N = N_0^{-1}$$

$$\Delta = F_0 G_0 + H_0 G_0 + H_0 F_0$$

С учетом этих обозначений получается переход от Ω_0 к Ω .

2. Решение исходных уравнений. Поле скоростей перемещений ищем в виде

$$u = 0, \quad v = 3r(A \cot \theta - \frac{B}{\sin \theta} - C \cos \varphi) \quad (5)$$

$$w = 3r(A\varphi \sin \theta + C \cos \theta \sin \varphi) \quad A, B, C --const$$

Тогда отличные от нуля компоненты скоростей деформации будут

$$\varepsilon_\varphi = -\varepsilon_\theta = \frac{3}{\sin^2 \theta} (A - B \cos \theta)$$

Соответствующие компоненты напряжения определяются из уравнений (1 и (4)

$$\sigma_r = \sigma_\theta - \nu \frac{G}{\sqrt{G + H}}, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta - \nu \sqrt{G + H} \quad , \quad (6)$$

$$\sigma_\theta = -H - \nu \sqrt{G + H} \ln \sin \theta, \quad \nu = sign \varepsilon_\theta$$

Из условия отсутствия нагрузки на внутренней поверхности $\theta = \alpha$, для зоны сжатия следует

$$\sigma_r = \sigma_\theta - \frac{G}{\sqrt{G + H}}, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta - \sqrt{G + H} \quad (7)$$

$$\sigma_\theta = -\sqrt{G + H} \ln \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} \quad \alpha \leq \theta \leq \gamma$$

где $\theta = \gamma$ нейтральная поверхность слоя.

Для зоны растяжения, используя условие отсутствия нагрузки на внешней поверхности $\theta = \beta$, определим

$$\sigma_r = \sigma_\theta + \frac{G}{\sqrt{G + H}} \quad , \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta + \sqrt{G + H} \quad (8)$$

$$\sigma_\theta = -\sqrt{G + H} \ln \frac{\sin \beta}{\sin \theta} \quad \gamma \leq \theta \leq \beta$$

Для определения положения нейтральной поверхности используем условие непрерывности σ_θ на $\theta = \gamma$ что дает

$$\sin \gamma = \sqrt{\sin \alpha \sin \beta} \quad (9)$$

Предельный изгибающий момент относительно оси $\theta = 0$, приходящийся на единицу длины вдоль r , будет

$$M_* = r^2 \int_{\alpha}^{\beta} \sigma_\varphi \sin \theta d\theta \quad (10)$$

Подставляя в (10) значение σ_φ для соответствующей зоны из (7) и (8), и вычисляя, получим

$$M_* = 2\sqrt{G+H}r^2 \ln \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \quad (11)$$

Изгибающие моменты относительно осей, перпендикулярных к оси $\theta = 0$ и лежащих в осевых торцевых сечениях $\varphi = \pm\varphi_0$, равны

$$M_* = r^2 \int_{\alpha}^{\beta} \sigma_\varphi \cos \theta d\theta \quad (12)$$

Докажем, что эти моменты равны нулю. Действительно, из второго уравнения равновесия (1) для рассматриваемого случая можно выразить σ_φ через σ_θ следующим образом

$$\sigma_\varphi \cos \theta = (\sigma_\theta \sin \theta)$$

Подставляя это выражение в (12) получаем

$$M_* = r^2 \sigma_\theta \sin \theta \int_{\alpha}^{\beta} \cos^2 \theta d\theta = 0,$$

так как внешняя и внутренняя поверхности конического листа свободны от нагрузок.

Предельное растягивающее усилие в торцевых сечениях $\varphi = \pm\varphi_0$ приходящееся на единицу длины вдоль r будет

$$T_* = r \int_{\alpha}^{\beta} \sigma_\varphi d\theta = r \sqrt{G+H} \left[\int_{\gamma}^{\beta} \left(1 - \ln \frac{\sin \beta}{\sin \theta} \right) d\theta - \int_{\alpha}^{\gamma} \left(1 + \ln \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} \right) d\theta \right]$$

3. Выводы. Проведено численное исследование растягивающего усилия для листов разных толщин, при следующих значениях параметров

$$\alpha = 15^\circ, \beta = 25^\circ, 30^\circ, 35^\circ, 40^\circ; r = 10\text{cm}, G = 1,5k^2, H = 0,5k^2$$

и приведено в виде графика (рис. 2).

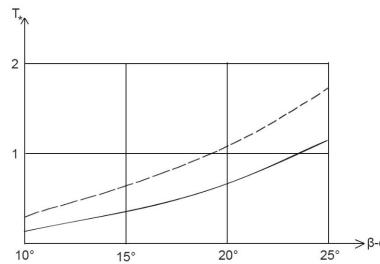


Рис. 2. График растягивающего усилия для листов разных толщин

Для сравнения пунктирной линией представлена зависимость предельного растягивающего усилия от толщины в случае анизотропного материала, что показывает насколько может увеличиваться несущая способность анизотропного композитного материала.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Авторы внесли равный вклад в проведение исследований и написание рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. The work was carried out within the framework of the initiative research.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The authors made an equal contribution to the research and writing of the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The work was carried out within the framework of the initiative research.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ширшов А. А. Пластический изгиб листа из анизотропного материала при больших деформациях // Известия вузов. Машиностроение. – 1969. – № 10. – С. 148–152.
2. Матченко Н. М., Митяев А. Г., Фейгин С. Д. Пластический изгиб широкой анизотропной полосы // Исследования в области пластичности и обработки металлов давлением. – Тула : ТПИ, 1978. – С. 67–70.
3. Максимова Л. А. О сжатии плиты из идеально-пластического анизотропного материала // Проблемы механики: сборник статей к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. – Москва : Физматлит, 2003. – С. 520–523.
4. Рыбакова Т. Н. О сдавливании анизотропного идеально-пластического слоя // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковleva. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – 2(8). – С. 585–587.
5. Ершов Л. В., Ивлев Д. Д., Романов А. В. Об обобщении решения Прандтля о сжатии пластического слоя шероховатыми плитами // Современные проблемы механики и авиации. – Москва : Машиностроение, 1982. – С. 137–144.
6. Миронов Б. Г., Козлова Л. С. Кручение сектора анизотропного кругового кольца при действии переменного давления // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковleva. – 2010. – 4(68). – С. 132–136.
7. Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. Предельное состояние трансляционно анизотропных стержней при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – Т. 1, № 19. – С. 132–139.
8. Olszak W., Zahorski S. A non-homogenous orthotropic circular segment as an elastic-plastic problem // Arch. Mech. Stos. – 1959. – Vol. 11, no. 4. – P. 409–419.
9. Olszak W., Zahorski S. Elastisch-plastische Biegung des nicht-homogenen orthotropen Bogenstreifens // Österr. Ing.-Arch. – 1959. – Vol. 13, no. 2. – P. 106–120.

10. Ильин Д. В. Предельное состояние слоя, сжатого жёсткими сферическими поверхностями // Известия НАИ ЧР. – Чебоксары, 2000. – № 4. – С. 29–33.
11. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.
12. Балашикова А. В. Сжатие пространственного идеально-пластического слоя при трансляционной анизотропии Мизеса-Хилла // В мире научных открытий. – Красноярск, 2013. – 6(42). – С. 261–271.
13. Хромов А. И., Козлова О. В. Деформация полого цилиндра при одноосном растяжении // Прогрессивные технологии в машиностроении. Т. 2. – Комсомольск-на-Амуре : КнАГТУ, 2000. – С. 15–18. – Сб. 1, ч. 3.
14. Акопян А. Г. Предельное состояние пластически анизотропной конической трубы // Известия АН Армянской ССР. Механика. – 1985. – Т. 38, № 1. – С. 20–32.
15. Акопян А. Г. Внедрение жесткого конуса в пластически ортотропное полупространство // Прикладная механика и техническая физика. – 1991. – № 5. – С. 159–163.
16. Задоян М. А. Пространственные задачи теории пластичности. – Москва : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. – 384 с.
17. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – Москва : Гостехиздат, 1956. – 407 с.

REFERENCES

1. Shirshov A. A. Plastic bending of a sheet of anisotropic material under large deformations // Izvestiya VUZ-ov, Mashinostroenie. – 1969. – No. 10. – P. 148–152.
2. Matchenko N. M., Mityaev A. G., Feygin S. D. Plastic bending of a wide anisotropic band // Research in the field of plasticity and metal processing by pressure. – Tula : TPI, 1978. – P. 67–70.
3. Maximova L. A. On the compression of a plate made of an idealplastic anisotropic material // Problems of mechanics: a collection of articles dedicated to the 90th anniversary of the birth of A. Y. Ishlinsky. – Moscow : Fizmatlit, 2003. – P. 520–523.
4. Rybakova T. N. On the compression of an anisotropic ideal plastic layer // Bulletin of the I. Ya. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of the limit state. – 2010. – 2(8). – P. 585–587.
5. Ershov L. V., Ivlev D. D., Romanov A. V. On generalization of Prandtl's solution on compression of a plastic layer by rough plates // Modern problems of mechanics and aviation. – Moscow : Mashinostroenie, 1982. – P. 137–144.
6. Mironov B. G., Kozlova L. S. Torsion of a sector of an anisotropic circular ring under the action of variable pressure // Bulletin of the I. Ya. Yakovlev ChSPU. – 2010. – 4(68). – P. 132–136.
7. Mironov B. G., Mitrofanova T. V. The limiting state of translationally anisotropic rods during torsion // Bulletin of the I. Ya. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of the limit state. – 2014. – Vol. 1, no. 19. – P. 132–139.
8. Olszak W., Zahorski S. A non-homogenous orthotropic circular segment as an elastic-plastic problem // Arch. Mech. Stos. – 1959. – Vol. 11, no. 4. – P. 409–419.

9. *Olszak W., Zahorski S.* Elastisch-plastische Biegung des nicht-homogenen orthotropen Bogenstreifens // Österr. Ingr.-Arch. – 1959. – Vol. 13, no. 2. – P. 106–120.
10. *Ilyin D. V.* The limiting state of a layer compressed by rigid spherical surfaces // Izvestiya NANI CR. – Cheboksary, 2000. – No. 4. – P. 29–33.
11. *Bykovtsev G. I., Ivlev D. D.* Theory of plasticity. – Vladivostok : Dalnauka Publ., 1998. – 528 p.
12. *Balashnikova A. V.* Compression of the spatial ideoplastic layer under translational Mises-Hill anisotropy // In the world of scientific discoveries. – Krasnoyarsk, 2013. – 6(42). – P. 261–271.
13. *Khromov A. I., Kozlova O. V.* Deformation of a hollow cylinder under uniaxial tension // Progressive Technologies in Mechanical Engineering. Vol. 2. – Komsomolsk-on-Amur : KnAGTU, 2000. – P. 15–18. – Collection 1, Part 3.
14. *Akopyan A. G.* Limiting state of a plastically anisotropic conical tube // News of the Academy of Sciences of the Armenian SSR. Mechanics. – 1985. – Vol. 38, no. 1. – P. 20–32.
15. *Akopyan A. G.* The introduction of a rigid cone into a plastically orthotropic half-space // Applied Mechanics and Technical Physics. – 1991. – No. 5. – P. 159–163.
16. *Zadoyan M. A.* Spatial problems of the theory of plasticity. – Moscow : Nauka. Phys.-mat. lit., 1992. – 384 p.
17. *Hill R.* Mathematical theory of plasticity. – Moscow : Gostekhizdat, 1956. – 407 p.

А. Ю. Смолин^{1,2}, Г. М. Еремина^{1,2}

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ ОСТЕОНОВ ПРИ МЕХАНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

¹Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, Россия

²Томский государственный университет, Томск, Россия

Аннотация. Численно исследовано влияние уровня и направления внешнего низкоинтенсивного импульсного энергетического воздействия, имитирующего ударно-волновую терапию, на напряжённо-деформированное состояние системы остеонов для оценки условий, способствующих резорбции или ремоделированию костной ткани. Моделирование выполнено методом подвижных клеточных автоматов с реализованной в нём моделью пороупругого тела Био. Геометрия остеона представлена в виде многослойного цилиндра с переменной проницаемостью ламелей. Проведена валидация модели одиночного остеона, показавшая хорошее соответствие литературным данным по распределению давления флюида. Для анализа условий структурной перестройки использовались критерии, основанные на значениях среднего напряжения, интенсивности сдвиговых деформаций и давления внутритканевой жидкости. Установлено, что анизотропия эффективных упругих модулей системы остеонов для крайних случаев ориентации (вдоль и поперёк их оси) не превышает 15–20 %, что обосновывает допустимость использования изотропных моделей на макроуровне. Показано, что при воздействии, направленном перпендикулярно оси остеонов, с плотностью потока энергии (ППЭ) 0,05–0,1 мДж/мм² в 80 % объёма гаверсова канала создаётся давление, способствующее миграции стволовых клеток, а в области ламелей возникают средние напряжения (0,04–0,2 МПа), необходимые для запуска остеогенеза. При направлении воздействия вдоль остеонов аналогичный эффект наблюдается лишь в 30 % объёма канала. Выявлено, что превышение ППЭ более 0,25 мДж/мм² приводит к возникновению критических напряжений, провоцирующих разрушение по границам остеонов. Сделан вывод, что наиболее предпочтительным для стимуляции ремоделирования является экстракорпоральное воздействие, направленное перпендикулярно поверхности кости, в среднем диапазоне интенсивностей.

Ключевые слова: остеон, механические напряжения, компьютерное моделирование, механорегуляция, терапия механическим воздействием.

Смолин Алексей Юрьевич, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник; e-mail: asmolin@ispms.ru; <https://orcid.org/0000-0003-0213-1701>; AuthorID: 203461

Еремина Галина Максимовна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник; e-mail: anikeeva@ispms.ru; <https://orcid.org/0000-0003-3346-367X>; AuthorID: 676130



для цитирования: Смолин А. Ю., Еремина Г. М. Моделирование напряжённо-деформированного состояния системы остеонов при механическом воздействии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 4(66). С. 112–141. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.008. EDN: ABEIYQ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

A. Y. Smolin^{1,2}, G. M. Eremina^{1,2}

SIMULATION OF THE STRESS AND STRAIN STATE OF THE OSTEON SYSTEM UNDER MECHANICAL IMPACT

¹*Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russia*

²*Tomsk State University, Tomsk, Russia*

Abstract. This study aims to numerically investigate the influence of low-intensity pulsed mechanical impact, simulating extracorporeal shockwave therapy, on the stress and strain state of the osteon system in cortical bone tissue. The focus is on assessing the mechanical conditions that trigger either bone resorption or remodeling processes. A three-dimensional structural-mechanical model of a single osteon and an osteon conglomerate was developed using the movable cellular automaton method. This particle mechanics approach incorporated a poroelastic constitutive model based on Biot's theory to account for the interstitial fluid in the bone matrix. The osteon was represented as a multi-layered cylinder with depth-dependent permeability of the lamellae. The validation of the single osteon model demonstrated good agreement with reference data for pore pressure distribution. The analysis of remodeling conditions was based on thresholds for mean stress, equivalent shear strain, and interstitial fluid pressure. The calculated anisotropy of the effective elastic moduli for the osteon system between extreme orientations (parallel and perpendicular to the osteon axis) was found to be less than 20 %, justifying the use of isotropic models at the macroscale. Simulations revealed that the pulsed mechanical impact with an energy flux density (EFD) of 0.05–0.1 mJ/mm² applied perpendicularly to the osteon axis induced adequate fluid pressure for stem cell migration in 80 % of the Haversian canal volume. Concurrently, mean stress levels (0.04–0.2 MPa) conducive to osteoblast differentiation were generated in the lamellar region. In contrast, loading parallel to the osteon axis produced this beneficial environment in only 30 % of the canal volume. EFD levels exceeding 0.25 mJ/mm² generated critical tensile stresses, potentially leading to microdamage at the osteon boundaries. As a conclusion, the findings suggest that the extracorporeal application of the mechanic impact, directed perpendicular to the bone surface at a medium intensity range, is the most effective protocol for promoting targeted bone regeneration.

Keywords: osteon, mechanical stresses, computer simulation, mechano-regulation, mechanic impact based therapy.

Alexey Y. Smolin, Doctor of Physics and Mathematics, Professor; e-mail: asmolin@ispms.ru; <https://orcid.org/0000-0003-0213-1701>; AuthorID: 203461

Galina M. Eremina, Candidate of Physics and Mathematics Scientific Researcher; e-mail: anikeeva@ispms.ru; <https://orcid.org/0000-0003-3346-367X>; AuthorID: 676130



to cite this article: Smolin A. Y., Eremina G. M. Simulation of the Stress and Strain State of the Osteon System Under Mechanical Impact // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 4(66). p. 112–141. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.008

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Остеон является структурной единицей костной ткани на мезоуровне и представляет собой объект цилиндрической формы, в центральной части которого находится гаверсов канал с кровеносными сосудами и нервами, вокруг которого расположены пластинчатые структуры (ламели), упорядоченные в спиралевидную форму. В пластинах остеона, основу которых составляет внеклеточный матрикс, расположена система лакун с остеоцитами, связанными между собой через канальцы.

В диафизарных частях длинных трубчатых костей гаверсовы каналы направлены вдоль вертикальной оси [1–3]. Данное расположение остеонов даёт анизотропию упругих свойств на макроуровне с коэффициентом до 1,5. Однако в областях с максимальным искривлением поверхности (например, в эпифизарных частях трубчатых костей) остеоны направлены вдоль этой поверхности или имеют разупорядоченную структуру, в результате чего коэффициент анизотропии уменьшается и находится в диапазоне 0,9–1,1 [4]. Разупорядоченность в направлении остеонов также отмечается и в диафизарных областях при дегенеративных изменениях различного типа [5].

Остеон является важным элементом костной ткани, поскольку через гаверсовы каналы поступают питательные вещества и стволовые клетки, способные к дальнейшей дифференцировке. Определение фенотипа стволовых клеток происходит вблизи поверхности гаверсова канала. Стоит отметить, что напряжённо-деформированное состояние на макроуровне и мезоуровне играет существенную роль в процессах структурной перестройки костных тканей, под которой будем понимать такие процессы как резорбция и ремоделирование костной ткани.

На основе анализа публикаций можно сформулировать некоторые закономерности между определённым уровнем объёмных сжимающих и растягивающих напряжений, а также сдвиговых деформаций, и запуском сигнала, приводящего к активации различных клеточных факторов для определения фенотипа стволовых клеток [6, 7]. Малый уровень среднего напряжения в костной ткани способствует запуску сигналов для дифференцировки остеокластов, способствующих резорбции костной ткани [8]. Среднее напряжение в диапазоне от 0,003 до 0,2 МПа способствует дифференцировке стволовых клеток в незрелые клетки костных тканей (остеобласти). При среднем напряжении более 0,2 МПа и сдвиговой деформации более 5 % происходит запуск процессов, регулирующих дифференцировку на клетки фиброзной и хрящевой ткани [9], что является, в свою очередь, негативным вариантом структурной перестройки костной ткани, приводящей к некрозу и склерозу тканей опорно-двигательного аппарата. Оценка условий для миграции здоровых стволовых клеток может быть определена по давлению внутритканевой жидкости («давления флюида в порах» для порупругих моделей). Так миграция стволовых клеток и поступление питательных веществ происходят при величине давления внутритканевой жидкости в диапазоне от 20 кПа до 2 МПа, при этом оптимальным является значение 68 кПа

[10]. Существуют также модели, способные описывать процессы ремоделирования во времени, однако их основным недостатком является применимость только в условиях длительных постоянных нагрузок [11].

В качестве инструментов компьютерного моделирования костных тканей преимущественно используются коммерческие пакеты программ Ansys и Abaqus, а также частные программные продукты, написанные, в том числе, в пакете Matlab. Основные направления численного моделирования механического поведения остеонов включают в себя исследование факторов влияния мезоструктуры на разрушение костной ткани [12, 13], массопереноса в системе остеонов [14, 15], анализ динамики процессов деформирования на основе многоуровневого моделирования [16]. Разрушение кортикальной ткани на мезоуровне моделируется с помощью усовершенствованного метода конечных элементов. Гаверсовы каналы в случае использования упругой модели моделируется как пустое пространство. Так при односторонней структуре остеонов (гаверсовы каналы направлены вдоль одной оси) на мезоуровне установлено, что разрушение идёт вдоль цементных линий между остеонами [17]. В работах [18, 19] показано, что при неравномерном распределении остеонов (близком к физиологическому) разрушение может идти в разных направлениях: вдоль цементной линии, вдоль зоны соединения колец остеонов, а также через гаверсов канал. Существуют работы [20], в которых исследуются влияние особенностей микроструктуры (ориентация остеоцитов) на разрушение остеонов. В настоящее время большое внимание уделяется численному исследованию сопротивления разрушению на мезоуровне в бионических материалах для локальной замены костной ткани [21]. Для исследования эффективных упругих свойств костной ткани на макроуровне используются упругие [22], вязкоупругие [23] и пороупругие модели с явным учётом структуры на мезоуровне.

Применение моделей диффузии для описания процессов ремоделирования является одним из главных в имитационном моделировании этих процессов в костной ткани на микроскопическом и мезоскопическом уровнях [24, 25]. Основным недостатком таких моделей является сложность в определении входных параметров модели. Для исследования процессов ремоделирования при механической стимуляции на основе анализа напряжённо-деформированного состояния, как и процессов разрушения, также используются модели, основанные на методах механики сплошной среды. В качестве основных моделей используют пороупругие модели [26]. В случае неявного учёта гаверсовых каналов используются как изотропные [27], так и анизотропные пороупругие модели [28–30]. Работы по численному исследованию процессов ремоделирования костной ткани с явным учётом структуры остеонов строятся преимущественно на основе изотропной пороупругой модели [27, 31] и ортотропной пороупругой модели [32–34].

В настоящее время активно развиваются методы моделирования, основанные на дискретном представлении материала. Данные методы используется преимущественно для исследования напряжённо-деформированного состояния

композиционных материалов со сложной иерархической структурой [35, 36]. В работе [37] на основе полевой теории и методаperiодинамики представлена модель образования трещины и её залечивания в кортикалльной кости на мезоуровне. Критерием разрушения служило расстояние между соседними узлами. Показана защитная роль цементного слоя вокруг остеона, позволяющая уводить трещину от гаверсова канала. В работе [38] на основе бессеточного метода радиальной интерполяции естественного соседа проведено численное исследование процессов ремоделирования губчатой ткани бедренной кости в условиях статической нагрузки. Далее этот бионический алгоритм был развит для оптимизации внутренней геометрии ответственных деталей [39]. В работе [40] с помощью метода сглаженных частиц исследовано ремоделирование кортикалльной ткани на плоском мезоскопическом образце из нескольких остеонов при статической нагрузке. В качестве критерия структурной перестройки использовался параметр сдвиговой деформации по Мизесу. В работах [41, 42] на основе бессеточного метода интегрального уравнения локальных границ исследовано количество стволовых клеток, прибывших для дальнейшей дифференциации в зону костной мозоли вокруг перелома при постоянной нагрузке.

Для стимулирования процессов ремоделирования костной ткани и срастания переломов применяют методики внешней механической стимуляции. Одним из активно развивающихся направлений является фокусированная ударно-волновая терапия [43]. При этом следует иметь в виду, что несбалансированное ремоделирование костной ткани может вызывать микроразрушение, которое в свою очередь является предвестником так называемого стрессового перелома.

Анализ упомянутых литературных данных показал, что в основном работы по численному исследованию напряжённо-деформированного состояния костных тканей с целью прогнозирования условий для их структурной перестройки выполнены при статических нагрузках. Однако большинство методик стимуляции процессов ремоделирования твёрдых тканей опорно-двигательного аппарата предполагает использование динамических нагрузок. Поэтому целью данной работы является численное исследование влияния уровня и направления внешнего энергетического воздействия (механической стимуляции) на напряжённо-деформированное состояние остеона и системы остеонов, в результате которого появляется возможность оценить возникающие условия, способствующие либо ремоделированию, либо резорбции костной ткани. Для исследования использовался дискретный подход к описанию костных тканей с реализованной в нём моделью пороупругого тела.

1. Метод моделирования. В данной работе в качестве инструмента для численного исследования применялся метод подвижных клеточных автоматов, основанный на дискретном подходе к описанию механического поведения материалов [44]. Как известно, биологические материалы представляют собой двухфазные среды, состоящие из твёрдого каркаса и флюида. Модель двухфазной среды, реализованная в методе подвижных клеточных автоматов, строится на

предположении о том, что каждый дискретный элемент среды (подвижный клеточный автомат) представляет собой пористую структуру, заполненную флюидом, рассматриваемую неявно (рис. 1).

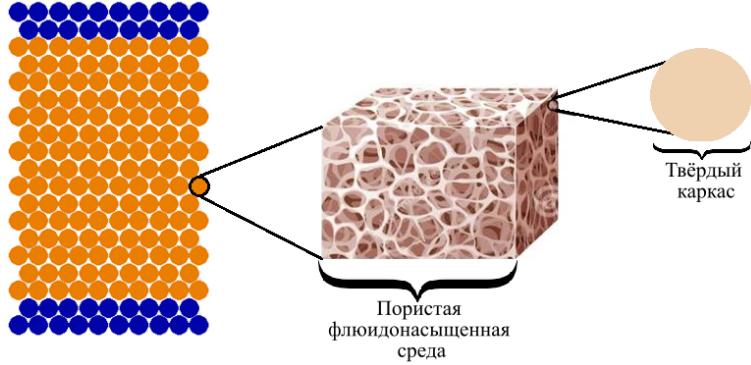


Рис. 1. Представление материала в пороупругой модели метода подвижных клеточных автоматов

1.1. Основные положения. В методе ПКА материал рассматривается как набор дискретных элементов (клеточных автоматов), которые взаимодействуют между собой в соответствии с определёнными правилами многочастичного взаимодействия и могут изменять своё пространственное положение, ориентацию и состояние. В работе [44] авторами метода было показано, что построенные правила многочастичного взаимодействия позволяют описывать деформационное поведение такой системы элементов как изотропного упругопластического тела в рамках вычислительной механики частиц. Движение системы дискретных элементов описывается уравнениями Ньютона-Эйлера:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_i \frac{d^2 \mathbf{R}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i^\Omega + \sum_{j=1}^{N_j} \mathbf{F}_{ij}^{\text{pair}} \\ \hat{J}_i \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N_j} \mathbf{M}_{ij} \end{array} \right. , \quad (1)$$

где \mathbf{R}_i , $\boldsymbol{\omega}_i$, m_i and \hat{J}_i — радиус-вектор, скорость вращения, масса и момент инерции автомата i ; $\mathbf{F}_{ij}^{\text{pair}}$ — парная сила механического взаимодействия автоматов i и j ; \mathbf{F}_i^Ω — объёмно-зависящая сила, действующая на автомат i и обусловленная взаимодействием его соседей с другими автоматами. В последнем уравнении $\mathbf{M}_{ij} = q_{ij}(\mathbf{n}_{ij} \times \mathbf{F}_{ij}^{\text{pair}}) + \mathbf{K}_{ij}$, здесь q_{ij} — расстояние от центра i -го автомата до точки его взаимодействия с j -м автоматом; $\mathbf{n}_{ij} = (\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i)/r_{ij}$ — единичный вектор ориентации пары $i-j$; r_{ij} — расстояние между центрами автоматов; \mathbf{K}_{ij} — момент сопротивления взаимному вращению автоматов пары $i-j$.

Детальное описание вычисления сил взаимодействия для упругопластического тела приведено в [44].

Предполагается, что автоматы деформируются однородно. Тогда компоненты тензора напряжений в автомате постоянны и могут быть вычислены с помощью процедуры осреднения:

$$\bar{\sigma}_{i,\alpha\beta} = \frac{1}{V_i} \sum_{j=1}^{N_j} q_{ij} n_{ij,\alpha} F_{ij,\beta}, \quad (2)$$

где α и β обозначают оси X, Y, Z лабораторной системы координат; V_i — объём автомата i ; $n_{ij,\alpha}$ — α -компоненты единичного вектора \mathbf{n}_{ij} ; $F_{ij,\beta}$ — β -компоненты полной силы, действующей в точке взаимодействия между автоматами i и j .

1.2. Реализация пороупрогои модели материала. Воздействие жидкой фазы (флюида), содержащейся в поровом пространстве дискретного элемента, на его напряжённое состояние описывается на основе линейной модели пороупругости. Для описания переноса флюида в поровом пространстве элемента оно рассматривается как проницаемое (сеть взаимосвязанных пор и каналов). Материал твёрдого каркаса, вообще говоря, может также быть пористым (микропоры). Однако, ввиду того, что объёмная доля микропор и их размеры для биологических материалов пренебрежимо малы по сравнению с порами макро и мезо уровней, то будем рассматривать материал каркаса дискретных элементов сплошным, однородным и изотропным. Поэтому справедливо следующее упрощение модели пороупругости, основанной на соотношениях Био [45]

$$K_s = K'_s = K''_s, \quad (3)$$

где K'_s — эффективный микроскопический модуль объёмного сжатия материала каркаса в дренированном (сухом) состоянии; K''_s — эффективный микроскопический модуль объёмного сжатия материала каркаса в недренированном состоянии (микропоры полностью насыщены флюидом); K_s — микроскопический модуль объёмного сжатия материала каркаса.

Значение порового давления флюида в объёме автомата рассчитывается на основе соотношений модели пороупругости Био с использованием текущего значения порового объёма [45]. При этом флюид полагается сжимаемым и описывается с помощью линейного уравнения состояния

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{P - P_0}{K_f} \right), \quad (4)$$

где ρ и P — текущие значения плотности и давления флюида в поровом пространстве; ρ_0 и P_0 — значения плотности и давления флюида при атмосферных условиях; K_f — модуль объёмного сжатия флюида.

В модели Био поровое давление влияет только на диагональные компоненты тензора напряжений. Поэтому необходимо модифицировать только соотношения для приращения центральных сил взаимодействия (формула (13) в [44]):

$$\Delta F_{ij}^{\text{pair},n} = 2G_i \left(\Delta \varepsilon_{ij} - \frac{a_i \Delta P_i}{3K_{d,i}} \right) + \left(1 - \frac{2G_i}{3K_{d,i}} \right) \Delta \sigma_i^{\text{mean}}, \quad (5)$$

где G_i и $K_{d,i}$ — модуль сдвига и эффективный модуль объёмного сжатия дренированного (сухого) материала автомата i ; σ_i^{mean} — среднее напряжение (гидростатическое давление с обратным знаком) в этом автомате, вычисляемое по формуле

$$\sigma_i^{\text{mean}} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}, \quad (6)$$

a — коэффициент Био, определяемый как

$$a = 1 - \frac{K_d}{K_s}. \quad (7)$$

Предполагается, что в процессе перераспределения флюида в поровом пространстве материала (фильтрации) определяющая роль принадлежит градиенту порового давления флюида, или с учётом (4) — его плотности. В пренебрежении гравитационными эффектами уравнение фильтрации в поровом пространстве моделируемого материала (набора автоматов) может быть записано следующим образом:

$$\varphi \frac{\partial \rho}{\partial t} = K_f \nabla \left[\frac{k}{\eta} \nabla \rho \right], \quad (8)$$

где η — вязкость флюида; k — коэффициент проницаемости твёрдого каркаса; φ — его пористость.

Особенностями морфологического строения мягких тканей (хрящи, мениск, ткани межпозвоночного диска) являются низкие значения их упругих модулей и малая проницаемость, что препятствует свободному поступлению стволовых клеток извне. В свою очередь, это отрицательно сказывается на восстановлении суставов при их деградации. Хорошая проницаемость костного матрикса обеспечивает практически бесперебойное поступление стволовых клеток для их дальнейшей дифференцировки. Поэтому для оценки возможности структурной перестройки костных тканей в большинстве случаев достаточным является определение обычных параметров напряжённо-деформированного состояния твёрдого тела. Для оценки структурной перестройки мягких тканей необходима совместная оценка напряжений и деформаций твёрдого матрикса и параметров движения биологической жидкости в нём. Поэтому для данных задач необходимо применять такие модели механики, которые позволяют корректно описывать механическое поведение мягких тканей как двухфазных сред.

Большинство мягких тканей, таких как сосуды, артерии и т.д. можно определить как малосжимаемые твёрдые тела, наполненные флюидом, т.к. они удовлетворяют соответствующим критериям согласно модели Био. В этой модели под малосжимаемым твёрдым телом понимается тело, в котором упругий модуль

сжатия матрикса на макроуровне значительно ниже упругих констант матрикса и флюида на микроуровне:

$$\frac{K_d}{K'_s} \ll 1, \quad \frac{K_d}{K''_s} \ll 1, \quad \frac{K_d}{K_f} \ll 1. \quad (9)$$

В большинстве случаев численного решения задач пороупрости использование упругих параметров дренированного каркаса, полученных экспериментально и удовлетворяющих вышеописанным условиям, не представляется возможным вследствие неустойчивости численных схем. Поэтому для описания тела как несжимаемого выполняется ряд модификаций модели Био, описанных в работе [45]. Так, модификация модели Био для насыщенного флюидом несжимаемого твёрдого тела предполагает стремление к бесконечности модуля объёмного сжатия недренированного материала, а в качестве модуля объёмного сжатия дренированного тела принимается максимально возможное значение. Методика расчёта максимально возможного упругого параметра мягких материалов была предложена в 60-х годах XX века Хашином и Штрикманом и применена для расчёта упругих модулей композитов [46]. На основании рассмотрения материала как микроскопически и макроскопически изотропного была построена верхняя возможная граница для определения дренированного упругого модуля каркаса:

$$\frac{K_d}{K_s} \leq 1 - \frac{3\varphi}{2\varphi}, \quad (10)$$

где φ — пористость. Получаемое из этого соотношения значение K_d может быть использовано для расчёта приращения центральных сил взаимодействия по формуле (5).

1.3. Критерии структурной перестройки костных тканей. В данной работе под структурной перестройкой понимаются процессы разрушения, деградации и регенерации костной ткани.

В качестве критерия разрушения используется пороговое значение сдвиговых напряжений σ_s

$$\sigma_{ij}^{\text{eq}} = \sigma_s, \quad (11)$$

где σ_{ij}^{eq} — значение интенсивности напряжений по Мизесу, определяемое вторым инвариантом девиатора тензора напряжений в точке взаимодействия автоматов i и j [44]. В случае выполнения критерия разрушения, пара автоматов i и j переходит из состояния «связанная» в состояние «несвязанная». При этом автоматы несвязанной пары не сопротивляются взаимному удалению дуг от друга (растяжению), но сопротивляются сжатию. Сопротивление такой пары сдвигу ограничено коэффициентом трения и величиной взаимного сжатия.

В качестве условий для структурной перестройки, приводящей к деградации и регенерации костной ткани, используются значения следующих величин: средних напряжений σ^{mean} (гидростатическое давление), эквивалентных сдвиговых деформаций ε^{eq} и давления внутритканевой жидкости в порах P (с его

помощью оценивается миграция стволовых клеток для их дальнейшей дифференцировки). Обозначая через T_1 резорбцию костной ткани (дифференцировка стволовых клеток в остеокласты), а через T_2 регенерацию костной ткани (дифференцировка стволовых клеток в остеобласты), условия для этих двух типов перестройки, приведённые в работе [10], будут иметь следующий вид (давление и напряжения приведены в паскалях):

$$\left. \begin{array}{l} |\sigma^{\text{mean}}| \in [0; 3 \times 10^3] \\ \varepsilon^{\text{eq}} \in [0; 4 \times 10^{-4}] \\ P \in [20; 2 \times 10^6] \end{array} \right\} \rightarrow T_1 \quad (12)$$

$$\left. \begin{array}{l} |\sigma^{\text{mean}}| \in [3 \times 10^3; 2 \times 10^5] \\ \varepsilon^{\text{eq}} \in [4 \times 10^{-4}; 5 \times 10^{-2}] \\ P \in [20; 2 \times 10^6] \end{array} \right\} \rightarrow T_2 \quad (13)$$

2. Структурно-механическая модель остеона. Большинство моделей остеонов, используемых для оценки напряжённо-деформированного состояния и миграции стволовых клеток, построены преимущественно с использованием пороупругой модели Био в рамках методов континуальной механики [47]. Как показал обзор литературы, первые модели остеона представляли собой однородный изотропный цилиндрический образец, рассматриваемый при статической нагрузке. Но, поскольку в направлении, перпендикулярном гаверсову каналу, проницаемость пластин изменяется, то в дальнейших исследованиях остеон стали рассматривать как многослойный цилиндр, и исследования сосредотачивались на изучении влияния проницаемости слоёв остеона на его напряжённо-деформированное состояние при заданной нагрузке [48]. В более поздних работах моделировалась циклическая нагрузка на многослойный остеон [49].

В основе структурно-механической модели остеона, разработанной в данной работе, лежит геометрия, представляющая собой совокупность цилиндрических слоёв (ламелей), в центре которых располагался гаверсов канал (рис. 2). Геометрические размеры и пороупругие параметры соответствующих материалов взяты из литературных данных [50]. Внутренний диаметр остеона (диаметр гаверсова канала) составлял $A=100$ мкм, внешний диаметр остеона равен $B=300$ мкм, высота $H=150$ мкм, каждый из пяти цилиндрических слоёв имел толщину 20 мкм (рис. 2) [32].

Пороупругие параметры материала приведены в табл. 1 и взяты из литературы [51, 52], при этом исходили из предположения, что наименьшей проницаемостью обладает слой вблизи гаверсова канала [32]. Гаверсов канал моделировался как пороупругий материал со свойствами артерии, аналогично работе [53].

Для валидации модели задавалось периодическое сжимающее нагружение вдоль оси остеона при средней скорости деформации $0,58 \text{ с}^{-1}$ и частоте 20 Гц, что соответствует физиологической активности [32]. Границные условия представлены на рис. 2 и реализованы путём задания вертикальных скоростей автоматам верхнего слоя образца и нулевых скоростей автоматам нижнего слоя, при этом боковые поверхности образца были свободными.

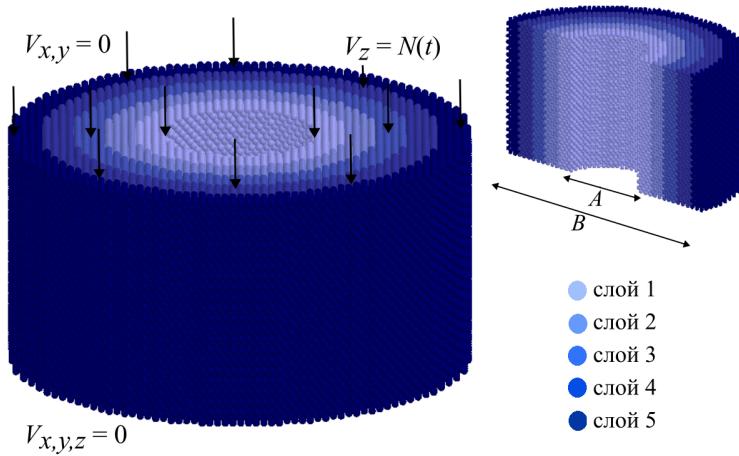


Рис. 2. Вид модельного образца остеона с указанием слоёв и схемой нагружения

Тип ткани	ρ_d , кг/м ³	K_d , МПа	K_s , МПа	ν_s	φ
Ламели	1850	14000	17000	0,3	0,325
Интерстициальный матрикс (ИМ)	1850	18300	20000	0,3	0,3
Гаверсов канал (ГК)	1000	2300	2300	0,45	0,9
Послойное изменение проницаемости ламелей $k \times 10^{18}$, м ²					
Слой 1	Слой 2	Слой 3	Слой 4	Слой 5	Матрикс
0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,0
Прочность материалов остеона, МПа					
Тип ткани	Ламели	Матрикс	Ламели-Матрикс		
σ_s	76	72	70		

Таблица 1. Пороупругие параметры костной ткани на мезоуровне

На рис. 3 представлена зависимость давления флюида в порах от расстояния от центра остеона при установившемся движении внутритканевой жидкости в конце расчёта. Полученные данные свидетельствуют о том, что при постепенном удалении от центра максимум порового давления флюида сосредоточен в центральных слоях остеона. Полученные картины распределения соответствуют данным, представленным в работе [32]. Результаты валидации по этому параметру показали, что разработанная структурно-механическая модель позволяет корректно описывать механическое поведение остеона при динамическом механическом воздействии.

3. Влияние ориентации остеонов на эффективные механические характеристики костной ткани на мезоуровне. Кортикальная костная

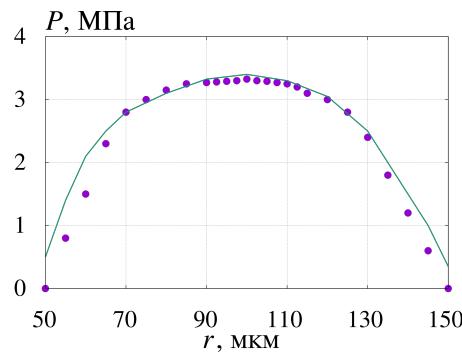


Рис. 3. Зависимость давления флюида в порах (МПа) от расстояния от центра остеона: точки — литературные данные, кривая — расчётные

ткань представляет собой конгломерат остеонов [51]. Важной задачей является исследование влияния ориентации остеонов на анизотропию свойств кортикальной костной ткани на мезоуровне. Для этого были построены модельные образцы кубической формы, состоящие из интерстициального матрикса с расположеннымными в нём остеонами, как показано на рис. 4. В каждом модельном образце содержалось четыре остеона, но с различной ориентацией их оси относительно оси Z для каждого образца. Так рассматривалось три случая. Первый случай подразумевал идеализированный вариант, когда остеоны ориентированы вдоль оси Z (рис. 4, а). Второй подразумевал физиологическое отклонение ориентации остеонов от вертикальной оси на 5° [54] (рис. 4, б). Третий характеризовался максимальным отклонением ориентации остеонов — перпендикулярно оси Z (рис. 4, в).

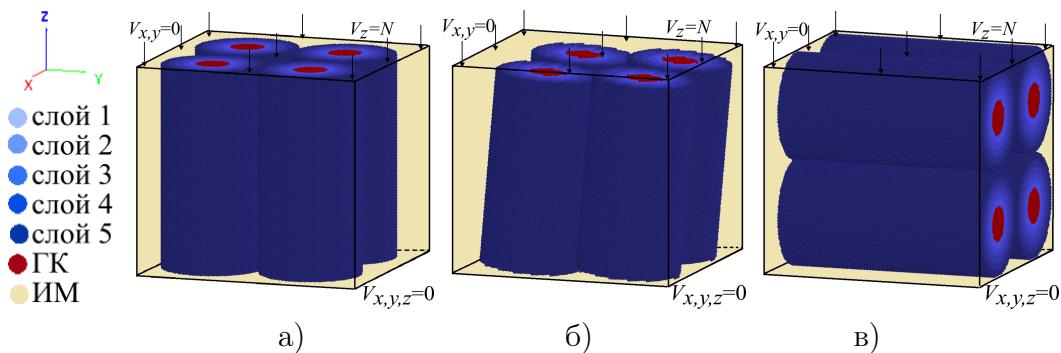


Рис. 4. Модельные образцы костной ткани с различной ориентацией остеонов относительно оси Z: а) 0° , б) 5° , в) 90°

Разрушение задавалось по критерию интенсивностей напряжений согласно литературным данным [52]. Наличие цементной линии на границе остеонов явно не рассматривалось, однако оно учитывалось через уменьшение прочности

на границе между ламелями и окружающим их интерстициальным матриксом (Ламели-Матрикс в табл. 1).

Рассматривалось два типа нагружения: одноосное сжатие вдоль оси Z и сдвиг вдоль оси X . Сжатие моделировалось аналогично рассмотренному выше примеру одиночного остеона, только в данном случае скорость автоматов верхнего слоя плавно нарастала до максимального значения $V = 0,04$ м/с, а затем оставалась постоянной (это обеспечивало квазистатический режим процесса сжатия до момента начала разрушения). Для сдвигового нагружения скорость автоматов верхнего слоя была направлена вдоль оси X , в этом же направлении для боковых поверхностей задавались периодические граничные условия.

Полученные результаты моделирования представлены на рис. 5 и свидетельствуют о том, что анизотропия эффективных упругих свойств, определяемая как отношение эффективных модулей сжатия (наклон диаграммы нагружения, аппроксимированной линейной функцией) в крайних случаях ориентации остеонов 90° (E_\perp) и 0° (E_\parallel) относительно оси нагружения, не превышает $E_\perp/E_\parallel = 1,15$. В случае сдвига отношение эффективных модулей сдвига имеет тот же порядок ($G_\perp/G_\parallel = 1,14$). Полученные данные позволяют утверждать, что использование изотропной модели для описания механического поведения кортикальной костной ткани является вполне допустимым для макроскопических моделей костей человека, где явно выделяются кортикальная и губчатая ткани. Аналогичные соотношения по прочности на сжатие также описаны в работе [55].

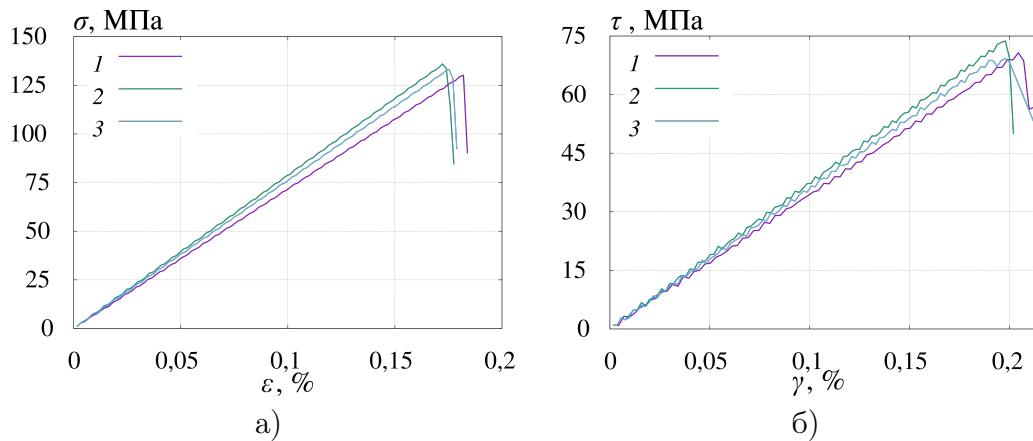


Рис. 5. Диаграммы одноосного сжатия (а) и сдвига (б) модельных образцов с различной ориентацией остеонов относительно оси нагружения: 1 – 0° , 2 – 5° , 3 – 90°

4. Исследование напряжённо-деформированного состояния костной ткани на мезоуровне при динамическом воздействии. Большинство работ по численному исследованию механического поведения структурной единицы костной ткани посвящено статическим нагрузкам [56, 57]. Однако, как

указывалось выше, большинство методик стимуляции процессов ремоделирования костных тканей предполагает использование динамических нагрузок при которых в них распространяются упругие волны.

Основной характеристикой интенсивности акустической волны является плотность потока энергии (ППЭ) E_{efd} , которую можно выразить через произведение интенсивности акустической волны I на характерное время положительного давления T_{pp} [58]

$$E_{\text{efd}} \equiv I \cdot T_{\text{pp}}. \quad (14)$$

Согласно [59] T_{pp} можно определить как 90 % от времени положительного давления в импульсе. Интенсивность является характеристикой акустического импеданса среды, что даёт следующее выражение для расчёта плотности потока энергии:

$$E_{\text{efd}} = \frac{v \rho c T_{\text{pp}}}{2}, \quad (15)$$

где v — скорость частиц среды, ρ — её плотность, c — скорость звука в ней.

В работе [60] показано, что регенеративный эффект терапии, основанной на внешнем энергетическом воздействии, наблюдается при плотности потока энергии более 0,1 мДж/мм². Поэтому в настоящей работе исследовался эффект импульсного энергетического воздействия низкой интенсивности в диапазоне ППЭ от 0,03 до 0,17 мДж/мм². Рассматривались два варианта направления распространения генерируемых волн. Первый вариант предполагал воздействие, направленное перпендикулярно гаверсовым каналам, которое имеет место при экстракорпоральной методике установки аппликатора. Второй вариант, реализуемый при инвазивной методике, предполагал направление вдоль ориентации остеонов и под углом 5° к их оси. Второй вариант возможен также при дегенеративных изменениях костных тканей, которые характеризуются локальными поворотами остеонов [61].

Границные условия при моделировании внешнего энергетического воздействия соответствовали принятой выше схеме нагружения (рис. 6, а): нижний слой автоматов образца жёстко закреплён, а автоматам верхнего слоя задаётся скорость, направленная вдоль вертикальной оси, величина которой определяется частотой и энергией воздействия по формуле (15).

В данных расчётах задавалось 10 импульсов. Пример зависимости давления на поверхности воздействия от времени для ППЭ 0,05 мДж/мм² приведён на рис. 6, б. Данные по распределению гидростатического давления, давления флюида в порах и эквивалентных деформаций, полученные при моделировании воздействия интерпретировались согласно условиям для структурной перестройки, представленным в работе [10] и записанным в виде соотношений (12)–(13).

Анализ результатов моделирования малоинтенсивного нагружения (ППЭ до 0,05 мДж/мм²) показал, что в случае механической стимуляции, направленной перпендикулярно оси гаверсовых каналов, уровень среднего напряжения в первой ламели и давления флюида в порах гаверсова канала и первой ламели удовлетворяет соотношению (12) и оказывается недостаточным для запуска

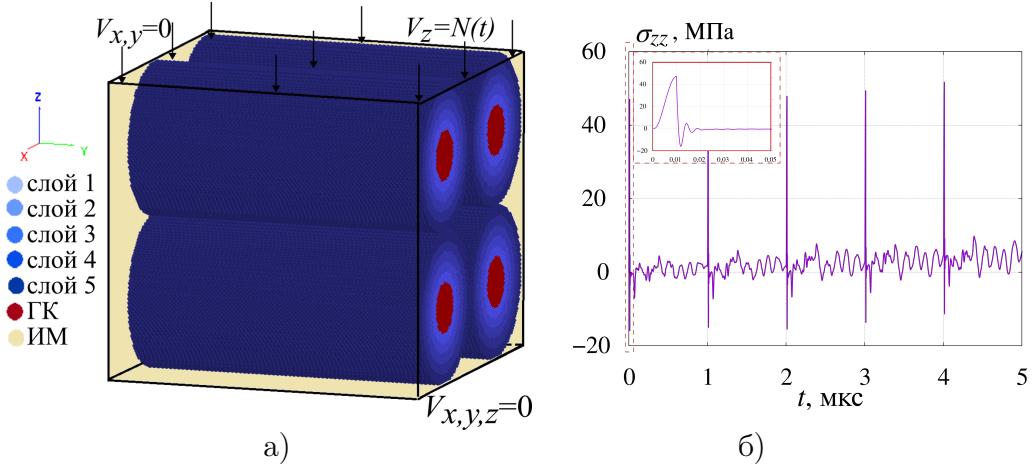


Рис. 6. Условия нагружения системы остеонов: а) граничные условия при моделировании энергетического воздействия; б) зависимость контактного давления на поверхности нагружения от времени

положительной структурной перестройки, и, следовательно, может способствовать деградации костной ткани (дифференцировка остеокластов). Анализ давления флюида в порах показал, что условия для миграции стволовых клеток (более 20 кПа) вдоль гаверсова канала создаются в доле, составляющей менее 20 % от объёма канала.

При среднеинтенсивном воздействии ($0,05\text{--}0,1 \text{ мДж}/\text{мм}^2$) уровень напряжений и деформаций (среднее напряжение в диапазоне $0,04\text{--}0,2 \text{ МПа}$, интенсивность деформации менее 1 %) во внутренней ламели сигнализирует о запуске процесса дифференцировки остеобластов, что способствует росту костной ткани (рис. 7, а). Анализ давления флюида в порах при ППЭ $0,05 \text{ мДж}/\text{мм}^2$ показал, что условия для миграции стволовых клеток создаются вдоль гаверсова канала в 80 % его объёма, оптимальные условия для переноса клеток (около 68 кПа) создаются в 40 % объёма гаверсова канала (рис. 7, б). Дальнейшее увеличение ППЭ воздействия ($0,1 \text{ мДж}/\text{мм}^2$) приводит к увеличению доли объёма гаверсова канала, в котором создаются условия для миграции стволовых клеток. Полученные максимальные величины выходных параметров соответствуют критериям (13) для запуска процессов ремоделирования. При высокointенсивном нагружении ($\geq 0,25 \text{ мДж}/\text{мм}^2$) наблюдаются условия для разрушения тканей на границе остеонов (растягивающие напряжения более 5 МПа).

Анализ результатов моделирования в случае направления нагрузки параллельно ориентации гаверсовых каналов, а также с отклонением от него на 5° показал, что значения параметров для структурной перестройки в образце находятся примерно на том же уровне, что и при воздействии поперёк гаверсовых каналов (рис. 8, 9), однако локализация их максимумов изменяется. В случае

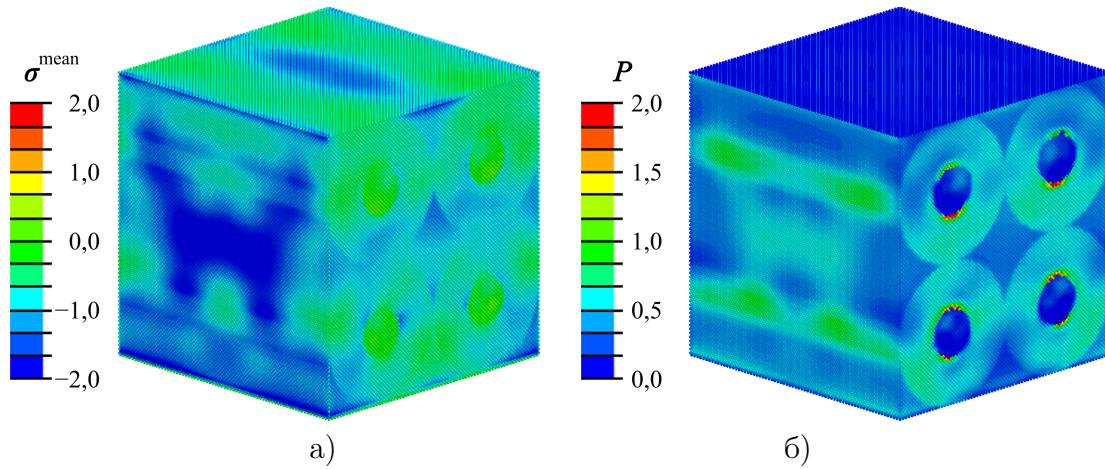


Рис. 7. Распределение среднего напряжения (а) и давления флюида в порах (б) в системе остеонов, ориентированных перпендикулярно направлению нагрузки, при энергетическом воздействии с плотностью потока энергии 0,05 мДж/мм² (МПа)

малоинтенсивного нагружения эти значения по прежнему удовлетворяют соотношению (12), что говорит о возможной деградации костной ткани (дифференцировка остеокластов). Давление флюида вдоль гаверсовых каналов при таком направлении нагрузки в целом ниже, чем в случае направления перпендикулярно каналам (рис. 8, б, 9, б), и в случае малоинтенсивного нагружения позволяет говорить о создании условий для миграции стволовых клеток в менее чем 10 % их объёма.

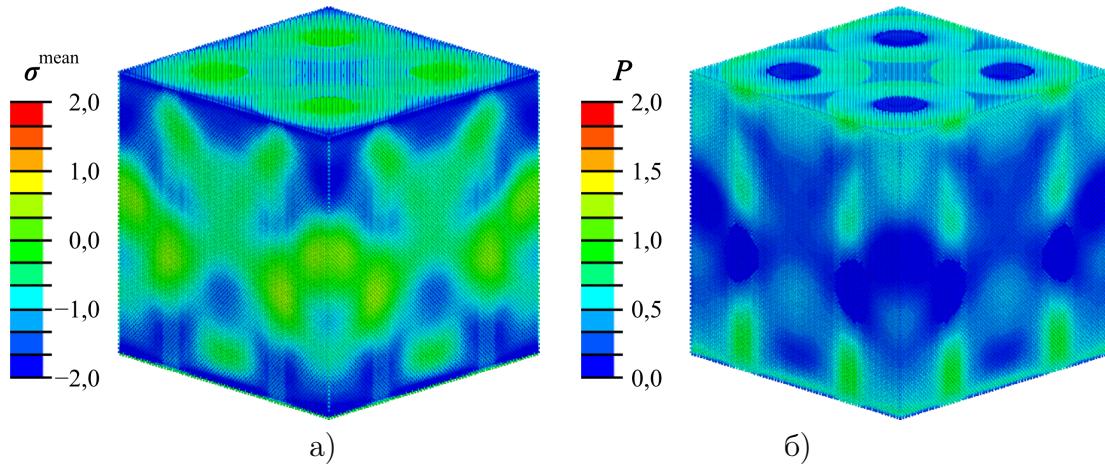


Рис. 8. Распределение среднего напряжения (а) и давления флюида в порах (б) в системе остеонов, ориентированных параллельно направлению нагрузки, при энергетическом воздействии с плотностью потока энергии 0,05 мДж/мм² (МПа)

При среднеинтенсивном воздействии ($0,05\text{--}0,1\text{ мДж/мм}^2$) значения параметров для структурной перестройки в первой ламели сигнализируют о запуске процесса дифференцировки стволовых клеток в остеобласты (рис. 8, а, 9, а). Анализ давления флюида в гаверсовых каналах при ППЭ $0,05\text{ мДж/мм}^2$ позволяет говорить о создании условий для миграции стволовых клеток в 30 % их объёма (рис. 8, б, 9, б). При высокointенсивном нагружении ($\geq 0,25\text{ мДж/мм}^2$) по прежнему наблюдаются условия для разрушения тканей на границе остеонов (по цементной линии).

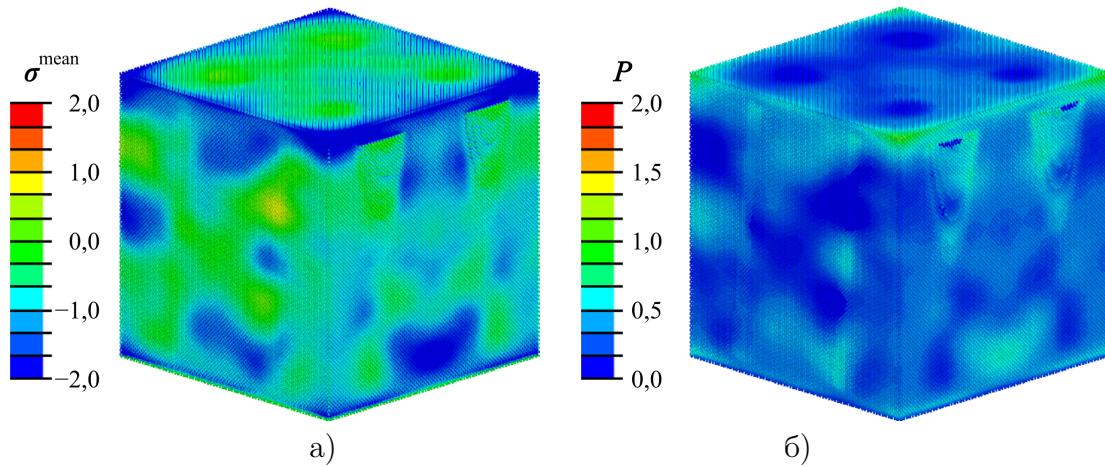


Рис. 9. Распределение среднего напряжения (а) и давления флюида в порах (б) в системе остеонов, ориентированных с отклонением в 5° относительно направления нагрузки, при энергетическом воздействии с плотностью потока энергии $0,05\text{ мДж/мм}^2$ (МПа)

5. Заключение. Разработана трёхмерная численная модель одиночного остеона и системы остеонов на основе метода подвижных клеточных автоматов, где составляющие модель материалы рассматриваются как пороупругие тела. Геометрически остеон представлен как система цилиндрических слоёв (ламелей) с различными проницаемостями. Система остеонов располагалась внутри интерстициального матрикса со своими пороупругими характеристиками. В результате моделирования одноосного сжатия и простого сдвига с различной ориентацией направления нагрузки относительно оси гаверсовых каналов получены эффективные модули сжатия и сдвига системы остеонов. Показано, что отличие упругих модулей в разных направлениях не превышает 20 %.

Численно исследовано напряжённо-деформированное состояние системы остеонов при внешнем импульсном энергетическом воздействии с различной ориентацией оси гаверсовых каналов относительно направления воздействия. Результаты анализа полей напряжений и деформаций проинтерпретированы с позиций их влияния на дифференцировку остеобластов и остеокластов и их

роли в процессе ремоделирования костной ткани, что позволило оценить тенденции в создании условий для структурных перестроек в костной ткани на мезоуровне.

В случае энергетического воздействия на систему остеонов, расположенных перпендикулярно направлению нагружения, с ППЭ 0,05–0,1 мДж/мм² максимум давления флюида в порах наблюдается в остеоне на поверхности гаверсова канала в 80 % от его объёма, что способствует миграции стволовых клеток для их дальнейшей дифференцировки. В случае энергетического воздействия на систему остеонов, расположенных параллельно и под углом 5° относительно направления нагружения, максимум давления жидкости в порах также наблюдается на поверхности гаверсова канала и способствует миграции стволовых клеток для их дальнейшей дифференцировки в 30 % от его объёма. Для всех рассмотренных вариантов ориентации системы остеонов относительно направления нагружения необходимый уровень среднего напряжения для дифференцировки стволовых клеток в клетки костной ткани наблюдается в зоне пластинчатой структуры остеона. Дальнейшее увеличение плотности потока энергии воздействия приводит к возникновению критических состояний с уровнем всестороннего растяжения, характерного для разрушения модельных образцов вдоль наружной границы остеонов.

Таким образом, анализ результатов проведённых исследований показал, что для терапии, основанной на энергетическом воздействии, предпочтительным является стандартный тип воздействия перпендикулярно ориентации остеонов в среднем диапазоне его интенсивности.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. А. Ю. Смолин написание текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, Г. М. Еремина обзор литературы по теме статьи, проведение численных расчётов, редактирование текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН, тема FWRW-2021-0006.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. A. Y. Smolin writing the text of the manuscript, agreeing on the final version of the manuscript, G. M. Eremina reviewing the literature on the topic of the article, conducting numerical simulations, editing the text of the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was performed according to the Government Research Assignment for the ISPMS SB RAS (Project FWRW-2021-0006).

ЛИТЕРАТУРА

1. Modeling deformation-induced fluid flow in cortical bone's canalicular-lacunar system / S. Gururaja, H. J. Kim, C. C. Swan, [et al.] // Annals of Biomedical Engineering. – 2005. – Vol. 33. – P. 7–25. – DOI: 10.1007/s10439-005-8959-6.

2. Effect of lamellae thickness on the stress distribution in single osteon with the presence of lacunae / A. A. Ismail, R. Daud, A. K. Junoh, [et al.] // Materials Today: Proceedings. – 2019. – Vol. 16. – P. 2170–2178. – DOI: 10.1016/j.matpr.2019.06.107.
3. Liu Y., Li A., Chen B. Effects of structure characteristics of osteocyte lacunae on squeeze damage resistance of osteons // Cells Tissues Organs. – 2020. – Vol. 208, no. 3/4. – P. 142–147. – DOI: 10.1159/000505135.
4. The course of osteons in the compact bone of the human proximal femur with clinical and biomechanical significance / V. Báča [et al.] // Surgical and Radiologic Anatomy. – 2007. – Vol. 29, no. 3. – P. 201–207. – DOI: 10.1007/s00276-007-0192-6.
5. The impact of age, mineralization, and collagen orientation on the mechanics of individual osteons from human femurs / C. J. Collins, M. Kozyrev, M. Frank, [et al.] // Materialia. – 2020. – Vol. 9. – P. 100573. – DOI: 10.1016/j.mtla.2019.100573.
6. Cellular mechanotransduction in health and diseases: from molecular mechanism to therapeutic targets / X. Di, X. Gao, L. Peng, [et al.] // Signal Transduction and Targeted Therapy. – 2023. – Vol. 8. – P. 282. – DOI: 10.1038/s41392-023-01501-9.
7. Adachi T., Kameo Y. Computational Biomechanics of Bone Adaptation by Remodeling // Multiscale Mechanobiology of Bone Remodeling and Adaptation. Vol. 578 / ed. by P. Pivonka. – Cham : Springer, 2018. – P. 231–257. – (CISM International Centre for Mechanical Sciences). – DOI: 10.1007/978-3-319-58845-2_5.
8. Takito J., Nonaka N. Osteoclasts at Bone Remodeling: Order from Order // Syncytia: Origin, Structure, and Functions. Vol. 71 / ed. by M. Kloc, A. Uosef. – Cham : Springer, 2024. – (Results and Problems in Cell Differentiation). – DOI: 10.1007/978-3-031-37936-9_12.
9. Prendergast P. J., Checa S., Lacroix D. Computational Models of Tissue Differentiation // Computational Modeling in Biomechanics / ed. by S. De, F. Guilak, R. K. M. Mofrad. – Dordrecht : Springer, 2010. – DOI: 10.1007/978-90-481-3575-2_12.
10. Wang M., Yang N. Three-dimensional computational model simulating the fracture healing process with both biphasic poroelastic finite element analysis and fuzzy logic control // Scientific Reports. – 2018. – Vol. 8, no. 1. – P. 6744. – DOI: 10.1038/s41598-018-25229-7.
11. Alias M. A., Buenzli P. R. Osteoblasts infill irregular pores under curvature and porosity controls: a hypothesis-testing analysis of cell behaviours // Biomechanics and Modeling in Mechanobiology. – 2018. – Vol. 17. – P. 1357–1371. – DOI: 10.1007/s10237-018-1031-x.
12. Gustafsson A., Wallin M., Isaksson H. The influence of microstructure on crack propagation in cortical bone at the mesoscale // Journal of Biomechanics. – 2020. – Vol. 112. – P. 110020. – DOI: 10.1016/j.jbiomech.2020.110020.
13. Phase-field simulation of crack growth in cortical bone microstructure: parameter identification and comparison against experiments / J. Carlsson, O. Karlsson, H. Isaksson, [et al.] // Biomechanics and Modeling in Mechanobiology. – 2025. – Vol. 24, no. 2. – P. 599–613. – DOI: 10.1007/s10237-025-01929-8.

14. Numerical simulation on mass transfer in the bone lacunar-canalicular system under different gravity fields / H. Wang, J. Wang, L. Lyu, [et al.] // Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering. – 2024. – Vol. 27, no. 4. – P. 478–488. – DOI: 10.1080/10255842.2023.2187738.
15. *Sharma N., Kumar R.* Computer Modelling of Loading-Induced Fluid Motion in 3D Osteon Model // Advances in Mechanical and Materials Technology. EMSME 2020 / ed. by K. Govindan, H. Kumar, S. Yadav. – Singapore : Springer, 2022. – (Lecture Notes in Mechanical Engineering). – DOI: 10.1007/978-981-16-2794-1_108.
16. Multiscale dynamics analysis of lumbar vertebral cortical bone based on the Abaqus submodel finite element method / C. Ju, K. Yang, Q. Yang, [et al.] // Scientific Reports. – 2025. – Vol. 15. – P. 6861. – DOI: 10.1038/s41598-025-91918-9.
17. *Jonvaux J., Hoc T., Budyn E.* Analysis of micro fracture in human Haversian cortical bone under compression // International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. – 2012. – Vol. 28, no. 9. – P. 974–998. – DOI: 10.1002/cnm.2478.
18. An interface damage model that captures crack propagation at the microscale in cortical bone using XFEM / A. Gustafsson [et al.] // Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials. – 2019. – Vol. 90. – P. 556–565. – DOI: 10.1016/j.jmbbm.2018.09.045.
19. *Pérez-Cano F., Parra-Cabrera G., Jiménez-Delgado J. J.* An approach to microscopic cortical bone fracture simulation: Enhancing clinical replication // International Journal of Computational Intelligence Systems. – 2024. – Vol. 17. – P. 102. – DOI: 10.1007/s44196-024-00486-9.
20. *Liu Y., Chen B., Yin D.* Effects of direction and shape of osteocyte lacunae on resisting impact and micro-damage of osteon // Journal of Materials Science: Materials in Medicine. – 2017. – Vol. 28. – P. 38. – DOI: 10.1007/s10856-017-5850-6.
21. Bionic design based on micro-nano structure of osteon and its low-velocity impact damage behavior / Y. Liu, A. Li, Y. Li, [et al.] // Bioresources and Bioprocessing. – 2022. – Vol. 9. – P. 115. – DOI: 10.1186/s40643-022-00600-9.
22. *Hamed E., Lee Y., Jasiuk I.* Multiscale modeling of elastic properties of cortical bone // Acta Mechanica. – 2010. – Vol. 213. – P. 131–154. – DOI: 10.1007/s00707-010-0326-5.
23. The multiscale meso-mechanics model of viscoelastic cortical bone / Y. Chen, R. Wu, B. Yang, [et al.] // Biomechanics and Modeling in Mechanobiology. – 2022. – Vol. 21. – P. 1713–1729. – DOI: 10.1007/s10237-022-01615-z.
24. How osteons form: A quantitative hypothesis-testing analysis of cortical pore filling and wall asymmetry / S. G. D. Hegarty-Cremer, X. G. Borggaard, C. M. Andreasen, [et al.] // Bone. – 2024. – Vol. 180. – P. 116998. – DOI: 10.1016/j.bone.2023.116998.
25. Symmetry breaking and effects of nutrient walkway in time-dependent bone remodeling incorporating poroelasticity / L. Esposito [et al.] // Biomechanics and Modeling in Mechanobiology. – 2022. – Vol. 21, no. 3. – P. 999–1020. – DOI: 10.1007/s10237-022-01573-6.
26. Computational Modeling of Extravascular Flow in Bone / M. L. K. Tate, R. Steck, [et al.] // Computational Modeling in Biomechanics / ed. by S. De, F. Guilak,

- R. K. M. Mofrad. – Dordrecht : Springer, 2010. – DOI: 10.1007/978-90-481-3575-2_10.
- 27. Numerical study of interstitial fluid flow behavior in osteons under dynamic loading / T. Liu [et al.] // BMC Musculoskeletal Disorders. – 2025. – Vol. 26, no. 1. – P. 187. – DOI: 10.1186/s12891-025-08425-1.
 - 28. Micromechanically based poroelastic modeling of fluid flow in Haversian bone / C. C. Swan [et al.] // Journal of Biomechanical Engineering. – 2003. – Vol. 25, no. 1. – P. 25–37. – DOI: 10.1115/1.1535191.
 - 29. Mathematically modeling fluid flow and fluid shear stress in the canaliculi of a loaded osteon / X. Wu, N. Wang, Z. Wang, [et al.] // BioMedical Engineering OnLine. – 2016. – Vol. 15, no. 2. – P. 149. – DOI: 10.1186/s12938-016-0267-x.
 - 30. Effect of rotation and magnetic field on wave propagation in a cylindrical poroelastic bone / S. M. Abo-Dahab, A. M. Abd-Alla, G. A. Yahya, [et al.] // Mechanics of Solids. – 2024. – Vol. 59. – P. 2395–2406. – DOI: 10.1134/S0025654424604798.
 - 31. Poroelastic evaluation of fluid movement through the lacunocanicular system / G. C. Goulet [et al.] // Annals of Biomedical Engineering. – 2009. – Vol. 37. – P. 1390–1402. – DOI: 10.1007/s10439-009-9706-1.
 - 32. A multi-layered poroelastic slab model under cyclic loading for a single osteon / Y. Chen, W. Wang, S. Ding, [et al.] // BioMedical Engineering OnLine. – 2018. – Vol. 17, no. 1. – P. 97. – DOI: 10.1186/s12938-018-0528-y.
 - 33. Pérez M. T., García-Aznar M. Á. The role of fluid flow on bone mechanobiology: mathematical modeling and simulation // Computational Geosciences. – 2021. – Vol. 25. – P. 823–830. – DOI: 10.1007/s10596-020-09945-6.
 - 34. Effects of osteocyte orientation on loading-induced interstitial fluid flow and nutrient transport in bone / W. Yu, H. Liu, X. Huo, [et al.] // Acta Mechanica Sinica. – 2023. – Vol. 39. – P. 622332. – DOI: 10.1007/s10409-022-22332-x.
 - 35. Zhang L. W., Ademiloye A. S., Liew K. M. Meshfree and particle methods in biomechanics: Prospects and challenges // Archives of Computational Methods in Engineering. – 2019. – Vol. 26. – P. 1547–1576. – DOI: 10.1007/s11831-018-9283-2.
 - 36. Discrete numerical modeling of macro-mesoscopic mechanical behaviors of Longmaxi shale under high temperature / F. Sun, H. Cao, Z. Liu, [et al.] // Mechanics of Solids. – 2025. – DOI: 10.1134/S0025654425600795. – advance online publication.
 - 37. Deng Q., Chen Y., Lee J. D. An investigation of the microscopic mechanism of fracture and healing processes in cortical bone // International Journal of Damage Mechanics. – 2008. – Vol. 18, no. 5. – P. 491–502. – DOI: 10.1615/critrevbiomedeng.v32.i56.10.
 - 38. Belinha J., Dinis L. M. J. S., Natal Jorge R. M. The analysis of the bone remodelling around femoral stems: A meshless approach // Mathematics and Computers in Simulation. – 2015. – Vol. 121. – P. 64–94. – DOI: 10.1016/j.matcom.2015.09.002.
 - 39. Oliveira C., Pais A., Belinha J. Extending the meshless natural-neighbour radial-point interpolation method to the structural optimization of an automotive part using a bi-evolutionary bone-remodelling-inspired algorithm // Mathematics. – 2025. – Vol. 13, no. 2. – P. 178. – DOI: 10.3390/math13020178.

40. Using smooth particle hydrodynamics to investigate femoral cortical bone remodelling at the Haversian level / J. W. Fernandez, R. Das, P. W. Cleary, [et al.] // International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. – 2013. – Vol. 29, no. 1. – P. 129–143. – DOI: 10.1002/cnm.2503.
41. A meshless Local Boundary Integral Equation (LBIE) method for cell proliferation predictions in bone healing / K. N. Grivas, M. G. Vavva, E. J. Sellountos, [et al.] // 2013 35th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC). – Osaka, Japan, 2013. – P. 2676–2679. – DOI: 10.1109/EMBC.2013.6610091.
42. A meshless LBIE/LRBF method for solving the nonlinear Fisher equation: Application to bone healing / K. N. Grivas, M. G. Vavva, E. J. Sellountos, [et al.] // Computer Modeling in Engineering & Sciences. – 2015. – Vol. 105, no. 2. – P. 87–122. – DOI: 10.3970/cmes.2015.105.087.
43. Current concepts of shockwave therapy in stress fractures / C. Leal [et al.] // International Journal of Surgery. – 2015. – Vol. 24, Pt B. – P. 195–200. – DOI: 10.1016/j.ijsu.2015.07.723.
44. A mathematical model of particle–particle interaction for discrete element based modeling of deformation and fracture of heterogeneous elastic–plastic materials / S. G. Psakhie, E. V. Shilko, A. S. Grigoriev, [et al.] // Engineering Fracture Mechanics. – 2014. – Vol. 130. – P. 96–115. – DOI: 10.1016/j.engfracmech.2014.04.034.
45. *Detournay E., Cheng A. H.-D.* Fundamentals of Poroelasticity // Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects, Vol. II, Analysis and Design Method. – 1993. – Chap. 5. P. 113–171. – DOI: 10.1016/B978-0-08-040615-2.50011-3.
46. *Hashin Z., Shtrikman S.* Note on a variational approach to the theory of composite elastic materials // Journal of the Franklin Institute. – 1961. – Vol. 271. – P. 336–341. – DOI: 10.1016/0016-0032(61)90032-1.
47. *Ramchand S. K., Seeman E.* The influence of cortical porosity on the strength of bone during growth and advancing age // Current Osteoporosis Reports. – 2018. – Vol. 16. – P. 561–572. – DOI: 10.1007/s11914-018-0478-0.
48. *Rémond A., Naili S., Lemaire T.* Interstitial fluid flow in the osteon with spatial gradients of mechanical properties: A finite element study // Biomechanics and Modeling in Mechanobiology. – 2008. – Vol. 7, no. 6. – P. 487–495. – DOI: 10.1007/s10237-007-0111-0.
49. *Rémond A., Naili S.* Transverse isotropic poroelastic osteon model under cyclic loading // Mechanics Research Communications. – 2005. – Vol. 32, no. 6. – P. 645–655. – DOI: 10.1016/j.mechrescom.2004.10.003.
50. *Wu X., Chen W.* A hollow osteon model for examining its poroelastic behaviors: Mathematically modeling an osteon with different boundary cases // European Journal of Mechanics - A/Solids. – 2013. – Vol. 40, no. 1. – P. 34–49. – DOI: 10.1016/j.euromechsol.2012.12.005.
51. *Nguyen V., Lemaire T., Naili S.* Numerical study of deformation-induced fluid flows in periodic osteonal matrix under harmonic axial loading // Comptes Rendus Mécanique. – 2009. – Vol. 337, no. 5. – P. 268–276. – DOI: 10.1016/j.crme.2009.06.033.

52. Osteon interfacial strength and histomorphometry of equine cortical bone / R. F. Bigley [et al.] // Journal of Biomechanics. – 2006. – Vol. 39, no. 9. – P. 1629–1640. – DOI: 10.1016/j.jbiomech.2005.05.006.
53. Li T., Wang X., Yotov I. Non-Newtonian and poroelastic effects in simulations of arterial flows // arXiv preprint. – 2020. – DOI: 10.48550/arXiv.2010.14072. – EDN: 2010.14072.
54. Reisinger A. G., Pahr D. H., Zysset P. K. Principal stiffness orientation and degree of anisotropy of human osteons based on nanoindentation in three distinct planes // Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials. – 2011. – Vol. 4, no. 8. – P. 2113–2127. – DOI: 10.1016/j.jmbbm.2011.07.010.
55. Turner C. H., Wang T., Burr D. B. Shear strength and fatigue properties of human cortical bone determined from pure shear tests // Calcified Tissue International. – 2001. – Vol. 69, no. 6. – P. 373–378. – DOI: 10.1007/s00223-001-1006-1.
56. Extracorporeal shock wave therapy induces alveolar bone regeneration / S. Sathishkumar, A. Meka, D. Dawson, [et al.] // Journal of Dental Research. – 2008. – Vol. 87, no. 7. – P. 687–691. – DOI: 10.1177/154405910808700703.
57. Mäkelä J. T., Huttu M. R., Korhonen R. K. Structure-function relationships in osteoarthritic human hip joint articular cartilage // Osteoarthritis and Cartilage. – 2012. – Vol. 20, no. 11. – P. 1268–1277. – DOI: 10.1016/j.joca.2012.07.016.
58. Cleveland R. O., McAtee J. A. Physics of Shock-Wave Lithotripsy // Smith's Textbook of Endourology. – Wiley-Blackwell, 2012. – P. 527–558. – DOI: 10.1002/9781444345148.ch49.
59. Loske A. M. Medical and Biomedical Applications of Shock Waves. – Cham : Springer, 2007. – (Shock Wave and High Pressure Phenomena). – DOI: 10.1007/978-3-319-47570-7.
60. An automated analysis of intracortical porosity in human femoral bone across age / M. S. Stein, S. A. Feik, C. D. Thomas, [et al.] // Journal of Bone and Mineral Research. – 1999. – Vol. 14, no. 4. – P. 624–632. – DOI: 10.1359/jbmr.1999.14.4.624.
61. Does 3D orientation account for variation in osteon morphology assessed by 2D histology? / C. Hennig [et al.] // Journal of Anatomy. – 2015. – Vol. 227, no. 4. – P. 497–505. – DOI: 10.1111/joa.12357.

REFERENCES

1. Modeling deformation-induced fluid flow in cortical bone's canalicular-lacunar system / S. Gururaja, H. J. Kim, C. C. Swan, [et al.] // Annals of Biomedical Engineering. – 2005. – Vol. 33. – P. 7–25. – DOI: 10.1007/s10439-005-8959-6.
2. Effect of lamellae thickness on the stress distribution in single osteon with the presence of lacunae / A. A. Ismail, R. Daud, A. K. Junoh, [et al.] // Materials Today: Proceedings. – 2019. – Vol. 16. – P. 2170–2178. – DOI: 10.1016/j.matpr.2019.06.107.
3. Liu Y., Li A., Chen B. Effects of structure characteristics of osteocyte lacunae on squeeze damage resistance of osteons // Cells Tissues Organs. – 2020. – Vol. 208, no. 3/4. – P. 142–147. – DOI: 10.1159/000505135.
4. The course of osteons in the compact bone of the human proximal femur with clinical and biomechanical significance / V. Báča [et al.] // Surgical and Radiologic

- Anatomy. – 2007. – Vol. 29, no. 3. – P. 201–207. – DOI: [10.1007/s00276-007-0192-6](https://doi.org/10.1007/s00276-007-0192-6).
5. The impact of age, mineralization, and collagen orientation on the mechanics of individual osteons from human femurs / C. J. Collins, M. Kozyrev, M. Frank, [et al.] // *Materialia*. – 2020. – Vol. 9. – P. 100573. – DOI: [10.1016/j.mtla.2019.100573](https://doi.org/10.1016/j.mtla.2019.100573).
 6. Cellular mechanotransduction in health and diseases: from molecular mechanism to therapeutic targets / X. Di, X. Gao, L. Peng, [et al.] // *Signal Transduction and Targeted Therapy*. – 2023. – Vol. 8. – P. 282. – DOI: [10.1038/s41392-023-01501-9](https://doi.org/10.1038/s41392-023-01501-9).
 7. *Adachi T., Kameo Y.* Computational Biomechanics of Bone Adaptation by Remodeling // *Multiscale Mechanobiology of Bone Remodeling and Adaptation*. Vol. 578 / ed. by P. Pivonka. – Cham : Springer, 2018. – P. 231–257. – (CISM International Centre for Mechanical Sciences). – DOI: [10.1007/978-3-319-58845-2_5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-58845-2_5).
 8. *Takito J., Nonaka N.* Osteoclasts at Bone Remodeling: Order from Order // *Syn-cytia: Origin, Structure, and Functions*. Vol. 71 / ed. by M. Kloc, A. Uosef. – Cham : Springer, 2024. – (Results and Problems in Cell Differentiation). – DOI: [10.1007/978-3-031-37936-9_12](https://doi.org/10.1007/978-3-031-37936-9_12).
 9. *Prendergast P. J., Checa S., Lacroix D.* Computational Models of Tissue Differentiation // *Computational Modeling in Biomechanics* / ed. by S. De, F. Guilak, R. K. M. Mofrad. – Dordrecht : Springer, 2010. – DOI: [10.1007/978-90-481-3575-2_12](https://doi.org/10.1007/978-90-481-3575-2_12).
 10. *Wang M., Yang N.* Three-dimensional computational model simulating the fracture healing process with both biphasic poroelastic finite element analysis and fuzzy logic control // *Scientific Reports*. – 2018. – Vol. 8, no. 1. – P. 6744. – DOI: [10.1038/s41598-018-25229-7](https://doi.org/10.1038/s41598-018-25229-7).
 11. *Alias M. A., Buenzli P. R.* Osteoblasts infill irregular pores under curvature and porosity controls: a hypothesis-testing analysis of cell behaviours // *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*. – 2018. – Vol. 17. – P. 1357–1371. – DOI: [10.1007/s10237-018-1031-x](https://doi.org/10.1007/s10237-018-1031-x).
 12. *Gustafsson A., Wallin M., Isaksson H.* The influence of microstructure on crack propagation in cortical bone at the mesoscale // *Journal of Biomechanics*. – 2020. – Vol. 112. – P. 110020. – DOI: [10.1016/j.jbiomech.2020.110020](https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2020.110020).
 13. Phase-field simulation of crack growth in cortical bone microstructure: parameter identification and comparison against experiments / J. Carlsson, O. Karlsson, H. Isaksson, [et al.] // *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*. – 2025. – Vol. 24, no. 2. – P. 599–613. – DOI: [10.1007/s10237-025-01929-8](https://doi.org/10.1007/s10237-025-01929-8).
 14. Numerical simulation on mass transfer in the bone lacunar-canalicular system under different gravity fields / H. Wang, J. Wang, L. Lyu, [et al.] // *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*. – 2024. – Vol. 27, no. 4. – P. 478–488. – DOI: [10.1080/10255842.2023.2187738](https://doi.org/10.1080/10255842.2023.2187738).
 15. *Sharma N., Kumar R.* Computer Modelling of Loading-Induced Fluid Motion in 3D Osteon Model // *Advances in Mechanical and Materials Technology. EMSME 2020* / ed. by K. Govindan, H. Kumar, S. Yadav. – Singapore : Springer, 2022. – (Lecture Notes in Mechanical Engineering). – DOI: [10.1007/978-981-16-2794-1_108](https://doi.org/10.1007/978-981-16-2794-1_108).

16. Multiscale dynamics analysis of lumbar vertebral cortical bone based on the Abaqus submodel finite element method / C. Ju, K. Yang, Q. Yang, [et al.] // *Scientific Reports.* – 2025. – Vol. 15. – P. 6861. – DOI: [10.1038/s41598-025-91918-9](https://doi.org/10.1038/s41598-025-91918-9).
17. *Jonvaux J., Hoc T., Budyn E.* Analysis of micro fracture in human Haversian cortical bone under compression // *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering.* – 2012. – Vol. 28, no. 9. – P. 974–998. – DOI: [10.1002/cnm.2478](https://doi.org/10.1002/cnm.2478).
18. An interface damage model that captures crack propagation at the microscale in cortical bone using XFEM / A. Gustafsson [et al.] // *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials.* – 2019. – Vol. 90. – P. 556–565. – DOI: [10.1016/j.jmbbm.2018.09.045](https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2018.09.045).
19. *Pérez-Cano F., Parra-Cabrera G., Jiménez-Delgado J. J.* An approach to microscopic cortical bone fracture simulation: Enhancing clinical replication // *International Journal of Computational Intelligence Systems.* – 2024. – Vol. 17. – P. 102. – DOI: [10.1007/s44196-024-00486-9](https://doi.org/10.1007/s44196-024-00486-9).
20. *Liu Y., Chen B., Yin D.* Effects of direction and shape of osteocyte lacunae on resisting impact and micro-damage of osteon // *Journal of Materials Science: Materials in Medicine.* – 2017. – Vol. 28. – P. 38. – DOI: [10.1007/s10856-017-5850-6](https://doi.org/10.1007/s10856-017-5850-6).
21. Bionic design based on micro-nano structure of osteon and its low-velocity impact damage behavior / Y. Liu, A. Li, Y. Li, [et al.] // *Bioresources and Bioprocessing.* – 2022. – Vol. 9. – P. 115. – DOI: [10.1186/s40643-022-00600-9](https://doi.org/10.1186/s40643-022-00600-9).
22. *Hamed E., Lee Y., Jasiuk I.* Multiscale modeling of elastic properties of cortical bone // *Acta Mechanica.* – 2010. – Vol. 213. – P. 131–154. – DOI: [10.1007/s00707-010-0326-5](https://doi.org/10.1007/s00707-010-0326-5).
23. The multiscale meso-mechanics model of viscoelastic cortical bone / Y. Chen, R. Wu, B. Yang, [et al.] // *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology.* – 2022. – Vol. 21. – P. 1713–1729. – DOI: [10.1007/s10237-022-01615-z](https://doi.org/10.1007/s10237-022-01615-z).
24. How osteons form: A quantitative hypothesis-testing analysis of cortical pore filling and wall asymmetry / S. G. D. Hegarty-Cremer, X. G. Borggaard, C. M. Andreasen, [et al.] // *Bone.* – 2024. – Vol. 180. – P. 116998. – DOI: [10.1016/j.bone.2023.116998](https://doi.org/10.1016/j.bone.2023.116998).
25. Symmetry breaking and effects of nutrient walkway in time-dependent bone remodeling incorporating poroelasticity / L. Esposito [et al.] // *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology.* – 2022. – Vol. 21, no. 3. – P. 999–1020. – DOI: [10.1007/s10237-022-01573-6](https://doi.org/10.1007/s10237-022-01573-6).
26. Computational Modeling of Extravascular Flow in Bone / M. L. K. Tate, R. Steck, [et al.] // *Computational Modeling in Biomechanics* / ed. by S. De, F. Guilak, R. K. M. Mofrad. – Dordrecht : Springer, 2010. – DOI: [10.1007/978-90-481-3575-2_10](https://doi.org/10.1007/978-90-481-3575-2_10).
27. Numerical study of interstitial fluid flow behavior in osteons under dynamic loading / T. Liu [et al.] // *BMC Musculoskeletal Disorders.* – 2025. – Vol. 26, no. 1. – P. 187. – DOI: [10.1186/s12891-025-08425-1](https://doi.org/10.1186/s12891-025-08425-1).
28. Micromechanically based poroelastic modeling of fluid flow in Haversian bone / C. C. Swan [et al.] // *Journal of Biomechanical Engineering.* – 2003. – Vol. 25, no. 1. – P. 25–37. – DOI: [10.1115/1.1535191](https://doi.org/10.1115/1.1535191).

29. Mathematically modeling fluid flow and fluid shear stress in the canaliculi of a loaded osteon / X. Wu, N. Wang, Z. Wang, [et al.] // BioMedical Engineering OnLine. – 2016. – Vol. 15, no. 2. – P. 149. – DOI: 10.1186/s12938-016-0267-x.
30. Effect of rotation and magnetic field on wave propagation in a cylindrical poroelastic bone / S. M. Abo-Dahab, A. M. Abd-Alla, G. A. Yahya, [et al.] // Mechanics of Solids. – 2024. – Vol. 59. – P. 2395–2406. – DOI: 10.1134/S0025654424604798.
31. Poroelastic evaluation of fluid movement through the lacunocanicular system / G. C. Goulet [et al.] // Annals of Biomedical Engineering. – 2009. – Vol. 37. – P. 1390–1402. – DOI: 10.1007/s10439-009-9706-1.
32. A multi-layered poroelastic slab model under cyclic loading for a single osteon / Y. Chen, W. Wang, S. Ding, [et al.] // BioMedical Engineering OnLine. – 2018. – Vol. 17, no. 1. – P. 97. – DOI: 10.1186/s12938-018-0528-y.
33. Pérez M. T., García-Aznar M. Á. The role of fluid flow on bone mechanobiology: mathematical modeling and simulation // Computational Geosciences. – 2021. – Vol. 25. – P. 823–830. – DOI: 10.1007/s10596-020-09945-6.
34. Effects of osteocyte orientation on loading-induced interstitial fluid flow and nutrient transport in bone / W. Yu, H. Liu, X. Huo, [et al.] // Acta Mechanica Sinica. – 2023. – Vol. 39. – P. 622332. – DOI: 10.1007/s10409-022-22332-x.
35. Zhang L. W., Ademiloye A. S., Liew K. M. Meshfree and particle methods in biomechanics: Prospects and challenges // Archives of Computational Methods in Engineering. – 2019. – Vol. 26. – P. 1547–1576. – DOI: 10.1007/s11831-018-9283-2.
36. Discrete numerical modeling of macro-mesoscopic mechanical behaviors of Longmaxi shale under high temperature / F. Sun, H. Cao, Z. Liu, [et al.] // Mechanics of Solids. – 2025. – DOI: 10.1134/S0025654425600795. – advance online publication.
37. Deng Q., Chen Y., Lee J. D. An investigation of the microscopic mechanism of fracture and healing processes in cortical bone // International Journal of Damage Mechanics. – 2008. – Vol. 18, no. 5. – P. 491–502. – DOI: 10.1615/critrevbiomedeng.v32.i56.10.
38. Belinha J., Dinis L. M. J. S., Natal Jorge R. M. The analysis of the bone remodelling around femoral stems: A meshless approach // Mathematics and Computers in Simulation. – 2015. – Vol. 121. – P. 64–94. – DOI: 10.1016/j.matcom.2015.09.002.
39. Oliveira C., Pais A., Belinha J. Extending the meshless natural-neighbour radial-point interpolation method to the structural optimization of an automotive part using a bi-evolutionary bone-remodelling-inspired algorithm // Mathematics. – 2025. – Vol. 13, no. 2. – P. 178. – DOI: 10.3390/math13020178.
40. Using smooth particle hydrodynamics to investigate femoral cortical bone remodelling at the Haversian level / J. W. Fernandez, R. Das, P. W. Cleary, [et al.] // International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. – 2013. – Vol. 29, no. 1. – P. 129–143. – DOI: 10.1002/cnm.2503.
41. A meshless Local Boundary Integral Equation (LBIE) method for cell proliferation predictions in bone healing / K. N. Grivas, M. G. Vavva, E. J. Sellountos, [et al.] // 2013 35th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC). – Osaka, Japan, 2013. – P. 2676–2679. – DOI: 10.1109/EMBC.2013.6610091.

42. A meshless LBIE/LRBF method for solving the nonlinear Fisher equation: Application to bone healing / K. N. Grivas, M. G. Vavva, E. J. Sellountos, [et al.] // Computer Modeling in Engineering & Sciences. – 2015. – Vol. 105, no. 2. – P. 87–122. – DOI: 10.3970/cmes.2015.105.087.
43. Current concepts of shockwave therapy in stress fractures / C. Leal [et al.] // International Journal of Surgery. – 2015. – Vol. 24, Pt B. – P. 195–200. – DOI: 10.1016/j.ijsu.2015.07.723.
44. A mathematical model of particle–particle interaction for discrete element based modeling of deformation and fracture of heterogeneous elastic–plastic materials / S. G. Psakhie, E. V. Shilko, A. S. Grigoriev, [et al.] // Engineering Fracture Mechanics. – 2014. – Vol. 130. – P. 96–115. – DOI: 10.1016/j.engfracmech.2014.04.034.
45. *Detournay E., Cheng A. H.-D.* Fundamentals of Poroelasticity // Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects, Vol. II, Analysis and Design Method. – 1993. – Chap. 5. P. 113–171. – DOI: 10.1016/B978-0-08-040615-2.50011-3.
46. *Hashin Z., Shtrikman S.* Note on a variational approach to the theory of composite elastic materials // Journal of the Franklin Institute. – 1961. – Vol. 271. – P. 336–341. – DOI: 10.1016/0016-0032(61)90032-1.
47. *Ramchand S. K., Seeman E.* The influence of cortical porosity on the strength of bone during growth and advancing age // Current Osteoporosis Reports. – 2018. – Vol. 16. – P. 561–572. – DOI: 10.1007/s11914-018-0478-0.
48. *Rémond A., Naili S., Lemaire T.* Interstitial fluid flow in the osteon with spatial gradients of mechanical properties: A finite element study // Biomechanics and Modeling in Mechanobiology. – 2008. – Vol. 7, no. 6. – P. 487–495. – DOI: 10.1007/s10237-007-0111-0.
49. *Rémond A., Naili S.* Transverse isotropic poroelastic osteon model under cyclic loading // Mechanics Research Communications. – 2005. – Vol. 32, no. 6. – P. 645–655. – DOI: 10.1016/j.mechrescom.2004.10.003.
50. *Wu X., Chen W.* A hollow osteon model for examining its poroelastic behaviors: Mathematically modeling an osteon with different boundary cases // European Journal of Mechanics - A/Solids. – 2013. – Vol. 40, no. 1. – P. 34–49. – DOI: 10.1016/j.euromechsol.2012.12.005.
51. *Nguyen V., Lemaire T., Naili S.* Numerical study of deformation-induced fluid flows in periodic osteonal matrix under harmonic axial loading // Comptes Rendus Mécanique. – 2009. – Vol. 337, no. 5. – P. 268–276. – DOI: 10.1016/j.crme.2009.06.033.
52. Osteon interfacial strength and histomorphometry of equine cortical bone / R. F. Bigley [et al.] // Journal of Biomechanics. – 2006. – Vol. 39, no. 9. – P. 1629–1640. – DOI: 10.1016/j.jbiomech.2005.05.006.
53. *Li T., Wang X., Yotov I.* Non-Newtonian and poroelastic effects in simulations of arterial flows // arXiv preprint. – 2020. – DOI: 10.48550/arXiv.2010.14072. – EDN: 2010.14072.
54. *Reisinger A. G., Pahr D. H., Zysset P. K.* Principal stiffness orientation and degree of anisotropy of human osteons based on nanoindentation in three distinct planes // Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials. – 2011. – Vol. 4, no. 8. – P. 2113–2127. – DOI: 10.1016/j.jmbbm.2011.07.010.

55. *Turner C. H., Wang T., Burr D. B.* Shear strength and fatigue properties of human cortical bone determined from pure shear tests // *Calcified Tissue International*. – 2001. – Vol. 69, no. 6. – P. 373–378. – DOI: 10.1007/s00223-001-1006-1.
56. Extracorporeal shock wave therapy induces alveolar bone regeneration / S. Sathishkumar, A. Meka, D. Dawson, [et al.] // *Journal of Dental Research*. – 2008. – Vol. 87, no. 7. – P. 687–691. – DOI: 10.1177/154405910808700703.
57. *Mäkelä J. T., Huttu M. R., Korhonen R. K.* Structure-function relationships in osteoarthritic human hip joint articular cartilage // *Osteoarthritis and Cartilage*. – 2012. – Vol. 20, no. 11. – P. 1268–1277. – DOI: 10.1016/j.joca.2012.07.016.
58. *Cleveland R. O., McAtee J. A.* Physics of Shock-Wave Lithotripsy // *Smith's Textbook of Endourology*. – Wiley-Blackwell, 2012. – P. 527–558. – DOI: 10.1002/9781444345148.ch49.
59. *Loske A. M.* Medical and Biomedical Applications of Shock Waves. – Cham : Springer, 2007. – (Shock Wave and High Pressure Phenomena). – DOI: 10.1007/978-3-319-47570-7.
60. An automated analysis of intracortical porosity in human femoral bone across age / M. S. Stein, S. A. Feik, C. D. Thomas, [et al.] // *Journal of Bone and Mineral Research*. – 1999. – Vol. 14, no. 4. – P. 624–632. – DOI: 10.1359/jbmr.1999.14.4.624.
61. Does 3D orientation account for variation in osteon morphology assessed by 2D histology? / C. Hennig [et al.] // *Journal of Anatomy*. – 2015. – Vol. 227, no. 4. – P. 497–505. – DOI: 10.1111/joa.12357.

А.Р.Халиулова, Д.В.Иванов

ВЛИЯНИЕ ОБЛУЧЕНИЯ НА БИОМЕХАНИКУ РАЗЛИЧНЫХ СТРУКТУР ОРГАНИЗМА

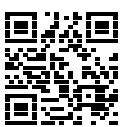
Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия

Аннотация. Облучение является одним из самых результативных методов воздействия в медицине. Данный метод позволяет влиять на глубоко расположенные ткани, не нарушая целостность организма. Однако излучение отличается разрушительным действием на структуры организма, при этом нарушается функция органа и меняются его биомеханические свойства. В работе собраны результаты различных исследований из 15 стран, направленных на оценку влияния облучения на механические свойства тканей организма человека и животных. В изученных работах присутствовали сведения о механических свойствах кожи, роговицы, кости, сухожилий. Для различных структур критическими являются дозы облучения в диапазоне 25-35 кГр. Однако для достижения максимального эффекта необходимы большие дозы, при этом во избежание необратимых изменений в тканях комплексно используются различные химические вещества и фармакологические препараты. Таким образом, возможно сохранение структуры и функции органа или ткани при достижении оптимального эффекта от лечения. Стоит обратить внимание на то, что облучение может оказывать как положительное, так и отрицательное воздействие на биологические ткани. Таким образом, проблема оценки воздействия облучения на ткани и органы нуждается в дальнейшем изучении вследствие технического развития и применения новых медицинских технологий и приборов

Ключевые слова: облучение, биологические ткани, механические свойства тканей, модуль упругости, жесткость, твердость

Иванов Дмитрий Валерьевич, доктор физико-математических наук; ведущий научный сотрудник образовательно-научного института наноструктур и биосистем, начальник лаборатории систем поддержки принятия врачебных решений; **e-mail:** ivanovdv.84@ya.ru; **https://orcid.org/0000-0003-1640-6091**; AuthorID: 201794

Халиулова Алсу Рафаилевна, студент; **e-mail:** alihaliulova@yandex.ru
https://orcid.org/0009-0000-6565-0440



для цитирования: Халиулова А.Р., Иванов Д.В. Влияние облучения на биомеханику различных структур организма // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 4(66). С. 142–156. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.009. EDN: TWJGXDX

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

A.R.Khaliulova, D.V. Ivanov

THE EFFECT OF RADIATION ON THE BIOMECHANICS OF VARIOUS BODY STRUCTURES

¹*Saratov National Research State University named after N.G. Chernyshevsky, Saratov, Russia*

Abstract. Radiation is one of the most effective methods of exposure in medicine. This method allows you to influence deeply located tissues without violating the integrity of the body. However, radiation has a destructive effect on the structures of the body, while the function of the organ is disrupted and its biomechanical properties change. The paper contains the results of various studies from 15 countries aimed at assessing the effects of radiation on the mechanical properties of human and animal body tissues. The studied papers contained information on the mechanical properties of skin, cornea, bone, tendons. Radiation doses in the range of 25-35 kGy are critical for various structures. However, large doses are needed to achieve maximum effect, while various chemicals and pharmacological preparations are used comprehensively to avoid irreversible changes in tissues. Thus, it is possible to preserve the structure and function of an organ or tissue while achieving the optimal effect of treatment. It is worth paying attention to the fact that radiation can have both positive and negative effects on biological tissues. Thus, the problem of assessing the effects of radiation on tissues and organs needs to be further studied due to the technical development and application of new medical technologies and devices.

Keywords: irradiation, biological tissues, mechanical properties of tissues, modulus of elasticity, stiffness, hardness

Dmitry V. Ivanov, Doctor of Physico-Mathematical Sciences; e-mail: ivanovdv.84@ya.ru; <https://orcid.org/0000-0003-1640-6091>; AuthorID: 201794

Alsou R. Khaliulova, student; e-mail: alihaliulova@yandex.ru; <https://orcid.org/0009-0000-6565-0440>



to cite this article: A.R.Khaliulova, D.V. Ivanov The effect of radiation on the biomechanics of various body structures // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 4(66). p. 142–156. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.009

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Развитие современных технических и естественных наук сопровождается изучением влияния различного рода излучений на те или иные объекты. Излучение активно используют для изучения различных свойств объектов, в том числе и живых. Под излучением далее будем понимать передачу энергии в форме волн или частиц через пространство или через материальную среду. В то же время, облучение – это процесс, при котором происходит влияние излучения на объект.

Кроме того, при процедуре облучения происходит фиксация нескольких показателей – целевой дозы, диапазона доз, температуры облучения и других.

Для обозначения мощности поглощенной дозы излучения используют единицу измерения Грэй (Гр) или же внесистемную единицу мощности Рад (рад). Поглощенная доза представляет собой отношение энергии, поглощенной веществом, к массе этого вещества. Целевая доза – это доза, которую гипотетически получит ткань. Но целевая доза, как правило, это минимальная доза, которая будет получена тканью, так как в условиях эксперимента вся ткань может получить дозы более высокие, чем целевая. Так, если заявлено воздействие в 25 кГр (2,5 Мрад), то, скорее всего, материалы были подвергнуты воздействию не менее 25 кГр или выше. Диапазон доз отражает минимальную и максимальную дозу облучения и является более надежным способом передать объекту дозу облучения. Предварительная обработка объекта играет определенную роль в воздействии на ткань. Это может быть воздействие химических веществ и физическое воздействие, предусмотренное методом облучения.

При изучении физиологии и морфологии клеток и тканей важны механические характеристики этих объектов. Науке известны большинство таких характеристик. Но все чаще в медицине применяются методы, связанные с облучением. Кроме того, есть такие типы излучения, которые действуют на живые системы, в том числе и на человека, в обычной жизни. В связи с этим появляется необходимость изучения влияния излучения на организм человека, в том числе и на биомеханические показатели.

Цель работы: обобщить литературные данные, которые касаются изучения действия облучения на структуры живых организмов.

Материалы и методы. Поиск статей был осуществлен с использованием материалов поисковых систем КиберЛенинка и PubMed по ключевым словам «биомеханика» и «облучение». Затем были выбраны статьи, выпущенные в период с 2010 по 2025 год. Поиск выдал выборку из 2241 статьи, которые затем фильтровались следующим образом. Первично статьи оценивались по названию и аннотации, при этом из выборки были исключены статьи, не содержащие сведений об облучении и (или) о биомеханическом исследовании. В итоге обзор были включены 20 отечественных и зарубежных статей.

Затем проводился второй этап анализа статей с прочтением их полного текста и внесения в таблицу 1 информации из них. Данные в таблице 1 распределялись по столбцам «Год», «Страна», «Вид облучения», «Цель облучения»,

«Объект» и «Биомеханический показатель». Столбцы «Год» и «Страна» содержат информацию о году и стране выпуска исследования. В столбце «Вид облучения» находятся сведения о типе или методе излучения, использованном в работе. В столбец «Цель облучения» была внесена краткая информация о цели процедуры облучения. Столбец «Объект» содержит информацию о материале, структуре, ткани или органе, который подвергся воздействию. Под термином «Биомеханический показатель» понимается информация о механическом параметре, измеряемом в биомеханическом эксперименте.

Большая часть работ посвящена влиянию облучения на элементы опорно-двигательной системы [1—15]. Также проанализированы работы, посвященные оценке влияния излучения на глазной аппарат [1, 3] и кожу [16—18].

Результаты и обсуждение. В работах присутствовало различное наименование излучений, стоит отметить, что в работе [7] типы волн и их характеристики не уточнялись. Удалось отобрать основные использованные типы излучения. Под электромагнитным излучением понимается воздействие, возникающее в результате колебаний электрического и магнитного полей. В итоге появляются различные виды волн – ультрафиолетовые и инфракрасные, рентгеновские и радиоволны, а также гамма-излучение и др. Большую часть этих волн человеческий глаз не воспринимает, но при этом переизбыток дозы излучения может привести к серьезным проблемам. Ультрафиолетовое излучение отличается высокой химической активностью, опасно для кожи и глаз, но тем не менее именно этот вид излучения чаще всего используют в лечении данных органов. Инфракрасные волны [10] излучает любое нагретое тело, при этом лучи не видимы глазу и могут глубоко проникать в ткани.

Стоит отметить также использование такого устройства как лазер [19]. Его преимущество состоит в том, что создается когерентный высококонцентрированный луч, использующийся сегодня в различных областях.

Одна из разновидностей электромагнитного излучения – гамма-излучение – используется в литературе чаще всего [1—3, 5, 6, 8, 9, 11—14, 18]. Оно характеризуется высокой энергией и длиной волны и возникает в результате распада радиоактивных элементов. Стоит отметить, что данный тип волн может проникать почти через любые материалы. Данный тип излучения в некоторых работах использовался как метод лучевой терапии. Также были использованы высокочастотная вибрация, бета-излучение и др.

Влияние излучения на различные структуры было изучено с разными целями. Многие авторы анализируют влияние излучения на изменение различных свойств объектов. С помощью излучения проводили стерилизацию имплантов [7, 8], изучали способы оптимизации лечения и хирургических операций. Исследования проводились на трупном материале, на группах людей или животных.

Среди механических показателей биологических объектов, то чаще всего исследовались такие показатели как жестокость, прочность и модуль Юнга. Также рассчитывались вязкость, упругость, напряжения, деформации тканей и некоторые другие.

1. Воздействие облучения на кожу. Вероятнее всего, первым органом, который подвергается воздействию излучения, является кожа. Несмотря на наличие липидного и ороговевшего слоев на кожном покрове, различные виды лучей проходят глубоко сквозь кожу и воздействуют на нее. Наиболее часто кожа человека подвержена действию ультрафиолетовых лучей в естественных условиях, они же часто применяются для лечения различных заболеваний кожных покровов. Известно, что ультрафиолетовое излучение ускоряет процесс старения, соответственно изменяются механические свойства кожи. Но данные изменения пока недостаточно изучены. Некоторые исследователи считают, что к изменениям механических свойств кожи приводят в том числе изменение структуры миРНК и белков, регулирующих пролиферацию и апоптоз клеток. Облучение делает кожу более слабой и жесткой. Фибриллы коллагена уменьшаются в диаметре, а экспрессия соответствующих генов (miR-34) увеличивается. Также облученная кожа демонстрирует меньшую деформацию в ответ на нагрузку и меньшую упругость [17]. Стоит отметить, что изменения начинают проявляться при облучении UVA дозировкой 1200 Дж/см² или UVB 1600 Дж/см². При этом увеличивается плотность коллагеновых пучков, но не изменяется их извитость, от которой зависят механические изменения микроструктур [16].

Одним из наиболее распространенных вариантов лечения онкологических заболеваний является лучевая терапия. Современные методы позволяют производить лечение местно, снижая нагрузку на другие области тела и системы органов, однако свести системное действие лучевой терапии к нулю пока не представляется возможным, что приводит к соответствующим осложнениям, в том числе и к таким патологическим процессам как радиационно-индуцированный фиброз кожного покрова. Данное осложнение меняет механические характеристики кожного покрова, что может повлиять, например, на результаты пост-хирургической реконструкции у пациентов с раком молочной железы [18]. При сравнении облученной и необлученной кожи результат гистологического исследования показал атрофию эпидермиса, утолщение дермы и признаки отложения толстого, дезорганизованного коллагена во внеклеточном матрице облученной кожи. Данные признаки приводили к повышению жесткости облученной кожи.

2. Воздействие облучения на глаза. Роговица и кожа характеризуются общим эктодермальным происхождением. Существует классификация типов кожи (4 фототипа), в основе которой лежат визуальные параметры – цвет кожи и глаз. Есть данные, что у пациентов с I и II фототипами (меланодефицитные типы) риск эпителиального дефекта после лазерного кератомилеза (эксимер-лазерное вмешательство) был в 10 раз выше, чем с другими типами. Соответственно выше риск ослабления механических свойств роговицы [20]. В чистом виде облучение негативно влияет на механические свойства роговицы и изменяет структуру коллагена. Для того, чтобы избежать такого действия проводится кросслинкинг роговицы – профилактический метод повышения качества коллагена с использованием рибофлавина при использовании ультрафиолетового

А-облучения. Это повышает стабильность роговицы и способствует формированию коллагеновых комплексов и спивок с протеогликанами [19].

3. Воздействие облучения при стерилизации. Излучение часто используется в современной медицине для стерилизации трансплантатов и полимеров, используемых в тканевой инженерии. В данных целях часто используют гамма-излучение, которое преобразует воду в гидроксили, расщепляющие ДНК патогенов. При этом наиболее распространенная доза поглощения 25 кГр. Так при стерилизации биосовместимых полимеров, которые используются для изготовления каркасов микрофиламентов в инженерии, микроволнами оптимальная температура – 31°C. Однако после стерилизации наблюдается снижение модуля упругости, при этом кристаллическая структура не меняется [12].

В медицинской практике облучение используется для стерилизации аллотрансплантатов, в том числе сухожилий и связок, так как есть вероятность передачи инфекции от донора к реципиенту, например, ВИЧ-инфекции. Для инактивации вируса используются высокие дозы гамма-облучения (более 50 кГр). Однако, стоит заметить, что такой метод стерилизации приводит к ухудшению биомеханических свойств, так как расщепляются полипептидные цепи коллагеновых волокон путем высвобождения свободных радикалов, которые расщепляют коллаген. Чтобы преодолеть действие свободных радикалов можно использовать аскорбат, который поглощает эти радикалы и защищает при облучении не выше 25 кГр [7].

Костная ткань также может выступать в роли аллотрансплантата. При стерилизации ее также обрабатывают с помощью различных доз излучения. Это может стать причиной снижения ее прочностных свойств и приводить к снижению усталостной прочности при высоких нагрузках с увеличением дозы облучения до 15 кГр и устойчивости к распространению усталостных трещин в аллотрансплантате кортикальной кости [14]. Однако было выяснено, что влияние облучения на костные структуры и на сухожилия отличаются. Так, последовательное электронное облучение сухожилия (по 3,4 кГр, суммарно 34 кГр) привело к меньшему снижению циклической прочности на разрыв в сравнении с единоразовым облучением электрическим лучом сухожилия дозой 34 кГр [15] (табл.3). При этом электронный пучок приводит к меньшей деформации и большей жесткости образца, чем гамма-излучение. Однако схожий эксперимент с костной тканью не показал значимых различий между последовательным и единоразовым облучением одинаковой дозой (15 кГр) [15], вероятно, из-за сравнительно низкой дозы облучения.

4. Воздействие облучения на элементы опорно-двигательного аппарата. В исследовании [10] были рассмотрены сухожилия короткой и длинной малоберцовой мышц, которые были облучены дозой 1,5–2,5 Мрад. Для сухожилия короткой мышцы не было найдено статистически значимых различий между облученной и необлученной группой по среднему пределу прочности,

Группа	Деформация (%)	Циклическая прочность на разрыв (мм)	Нагрузка на разрушении (Н)	Жесткость (Н/мм)
Контрольная группа	2.9 ± 1.1	0.2 ± 0.1	1.499 ± 352	239 ± 92
Облучение Ebeam 34 kGy	3.4 ± 1.1	0.5 ± 0.4	1.024 ± 204	216 ± 63
Облучение Ebeam fraction. 34 kGy	2.9 ± 1.5	0.3 ± 0.2	1.327 ± 305	254 ± 111
Облучение Gamma 34 kGy	4.6 ± 2.0	0.6 ± 0.4	827 ± 209	178 ± 48

Таблица 1. Результаты биомеханических свойств соответствующих групп [15] (в формате среднее значение ± стандартное отклонение)

деформации и удлинению при максимальной нагрузке. При этом были выявлены отличия в жесткости облученной и необлученной групп (табл. 2). Для сухожилия длинной мышцы таких различий найдено не было.

PB									
Необлученная					Облученная				
а	б	в	г	д	а	б	в	г	д
1.457	75.7	8.6	22.0	225.0	936	48.6	18.5	46.0	65.5
1.323	93.6	8.6	22.0	250.0	1.087	91.5	12.2	31.0	131.6
1.545	61.5	8.0	20.0	245.5	1.480	67.0	10.3	26.0	262.5
1.513	68.5	13.1	33.0	218.2	1.545	80.3	10.7	27.0	235.7
1.910	115.1	12.0	30.0	303.0	1.771	70.5	14.0	35.0	187.5
1.318	93.2	8.9	22.0	233.3	1.308	92.5	11.2	28.0	168.4
1.334	69.3	12.9	32.0	150.0	1.102	57.3	17.4	44.0	82.3
1.485 ± 209.3	82.4 ± 19.0	10.3 ± 2.3	25.8 ± 5.6	232.1 ± 45.7	1.318 ± 296.9	72.5 ± 16.6	13.5 ± 3.3	33.7 ± 8.3	161.9 ± 74.0
PL									
2.106	95.3	18.6	46.5	189.7	1.864	84.4	13.8	34.5	193.3
1.889	75.2	11.1	27.7	316.7	2.201	99.6	19.0	47.5	183.3
2.307	104.4	24.0	60.0	166.7	2.756	124.8	15.4	38.5	283.3
2.064	93.4	20.4	51.0	190.5	1.872	97.3	17.7	44.2	153.3
2.092	83.2	13.1	32.7	216.7	1.921	67.7	15.6	39.0	165.1
2.091 ± 148.7	90.3 ± 11.3	17.4 ± 5.3	43.6 ± 13.2	216.1 ± 59.0	2.122 ± 380.0	94.8 ± 21.0	16.3 ± 2.0	40.8 ± 5.1	195.7 ± 51.4

Таблица 2. Результаты исследования короткой (PB) и длинной (PL) малоберцовой мышцы (названия столбцов: а - максимальная сила (Н), б - напряжение (МПа), в - удлинение (мм), г - максимальная деформация (%), д - жесткость (Н/мм) [10]

В исследованиях было отмечено, что ослабление структур сухожилий после облучения происходило при дозе в 25 кГр или 2,5 Мрад [1, 11]. Выявлено, что при воздействии 15 кГр увеличивается интерстициальное пространство сухожилий, а при 25 кГр интерстициальное пространство еще больше увеличивается. При этом коллагеновые волокна скручиваются и становятся неупорядоченными. Это приводит к уменьшению (по сравнению со свежезамороженными образцами) максимального напряжения, и вязкоупругости, что увеличивает вероятность разрыва при растяжении внешней силой. Значения предельной нагрузки для 25 кГр также уменьшаются (возможен разрыв) [8].

Было обнаружено, что свежие сухожилия значительно отличаются по предельной нагрузке, жесткости и пределу прочности по сравнению с образцами, прошедшими различную химическую или механическую обработку. Сухожилия, которые прошли обработку гамма-облучением и подверглись циклу замораживание–оттаивание, показали значительное снижение предельной нагрузки, предела прочности и жесткости. Не рекомендуется применять гамма-облучение (25 кГр) и повторяющиеся циклы замораживания–оттаивания (4 цикла) при обработке сухожилий аллотрансплантата [9].

Эксперимент на образцах поясничных позвонков животных показал снижение толщины трабекулярного слоя кости после облучения дозой 5 кГр и неизменность кортикального слоя кости. Также изменялось распределение нагрузки в эксперименте с аксиальными сжимающими нагрузками от трабекулярного центра в кору позвонков. После облучения снижалась жесткость костной структуры, хоть и разница была незначительной по сравнению с контрольной группой (2045 ± 142 против 2185 ± 225 Н/мм). Совокупность данных факторов говорит об изменениях микроструктуры позвонков при облучении и снижении их механических показателей, в частности жесткости на 6,4% [13]. По сравнению с контрольной группой объем кости от общего объема ткани (Tb.BV/TV) после облучения уменьшился на 22,1%, однако толщина трабекул (Tb.Th) увеличилась на 4,8%, а толщина коры позвонков (Ct.Th) практически не изменилась.

Дозы облучения выше 25-34 кГр оказывали эффект снижения механических свойств костной ткани. Подобное действие объясняется снижением качества коллагена, так как облучение увеличивает неферментативное сшивание в кости, что делает материал более хрупким. Ранее было выяснено, что облучение приводит к фрагментации коллагена при высоких дозах, а это ведет к снижению его пластических свойств. От подобных изменений кость защищает предварительная обработка рибозой [3]. Стоит отметить, что при гамма-облучении губчатой кости не происходит значительное изменение пористости образцов и при одноосном нагружении характеристики ткани не изменяются [5] (табл.3). Не было обнаружено различий в модуле Юнга или пределе текучести между облученными и контрольными образцами (табл. 3). Стерилизация не повлияла на предельную деформацию, предел прочности.

Лучевая терапия может также оказывать опосредованное влияние на распределение напряженно-деформированное состояние кости, что может привести к

Свойство	Контрольная группа образцов (n=14)	Облученные образцы (n=12)
Модуль Юнга (МПа)	1764 ± 1482	1483 ± 1307
Предел текучести (МПа)	10.92 ± 8.10	8.88 ± 7.32
Макс. деформация (%)	1.00 ± 0.12	0.95 ± 0.10
Предел прочности (МПа)	9.27 ± 8.50	6.23 ± 3.48

Таблица 3. Механические параметры образцов костей, облученных дозой гамма-излучения, 29.45 ± 0.15 кГр при одноосном сжатии [5] (в формате среднее значение ± стандартное отклонение)

ошибкам в биомеханическом исследовании, построении моделей и предоперационном планировании. В результате построения пространственной биомеханической модели проксимального отдела бедренной кости было определено, что после облучения увеличиваются напряжения в области шейки бедренной кости, что может стать фактором повышенного риска перелома (табл.4) [6].

Группа	Эквивалентное напряжение по Мизесу (МПа)	Перемещения (мм)
Pre-H1	7.34 ± 2.49	1.06±0.46
Post-H1	9.05 ± 3.10	1.27±0.69
Pre-H2	14.61± 4.14	0.63± 0.19
Post-H2	17.25±4.36	0.81±0.23
Pre-H3	19.51±5.75	2.38±0.90
Post-H3	23.94±6.84	3.13±1.34
Pre-H4	14.75± 5.15	2.16± 0.81
Post-H4	18.04± 6.40	2.82±1.21
Pre-H5	21.57± 5.43	1.92±0.58
Post-H5	25.39±6.60	2.61±0.80

Таблица 4. Результаты моделирования напряженно-деформированного состояния проксимального отдела бедра (в моделях до и после облучения) [6] (в формате среднее значение ± стандартное отклонение)

5. Воздействие облучения на опухоли. При использовании ионизирующего излучения при лечении опухолей нарушается васкуляризация костной ткани. Однако при облучении костной ткани дозой ионизирующего излучения в 30 Гр и после гипербарической оксигенации (ГБО) увеличивается доступ кислорода и улучшается васкуляризация. В исследовании [2] использовалось 4 стратегии облучения и ГБО: noIRnoHBO — большеберцовая кость без облучения и ГБО-терапии; IRnoHBO — большеберцовая кость, подвергнутая ионизирующему облучению без ГБО-терапии; noIRHBO — большеберцовая кость без

облучения и подвергнутая ГБО-терапии; IRHBO — большеберцовая кость, подвергнутая ионизирующему облучению и ГБО-терапии. Были взяты примерно одинаковые по длине, переднезадней и медиально-латеральной толщине образцы большеберцовой кости. Выявлено, что при воздействии ионизирующего излучения без ГБО сокращается изгибная прочность и жесткость кости (табл. 5) [2].

Показатели/ Группы	noIRnoHBO	noIRHBO	IRnoHBO	IRHBO
Длина (проксимально- дистальная)	37.67 ± 1.59	37.00 ± 0.95	35.30 ± 1.36	34.80 ± 1.22
Толщина (переднезадняя)	3.00 ± 0.15	2.91 ± 0.30	2.81 ± 0.22	2.76 ± 0.23
Толщина (медиально- латеральная)	2.29 ± 0.16	2.21 ± 0.18	2.15 ± 0.17	2.09 ± 0.14
Прочность на изгиб (Н/мДж)	58.60 ± 14.69	73.37 ± 23.86	45.66 ± 18.30	59.66 ± 19.46
Жесткость (Н/мм)	129.10 ± 19.45	120.75 ± 8.97	89.06 ± 13.96	106.00 ± 13.95
Соотношение амидов	2.56 ± 0.29	2.41 ± 0.44	2.04 ± 0.44	1.82 ± 0.34
Амид I + II/ Гидроксиапатит	0.43 ± 0.14	0.36 ± 0.10	0.34 ± 0.06	0.29 ± 0.08
Амид III + Коллаген/ Гидроксиапатит	3.57 ± 1.31	4.75 ± 1.31	1.93 ± 0.42	1.53 ± 0.31

Таблица 5. Результаты оценки механических параметров костей до и после воздействия излучения [2] (в формате среднее значение ± стандартное отклонение)

В группе IRnoHBO прочность при изгибе была ниже, чем в группах noIRnoHBO и IRHBO. Кроме того, в группе noIRHBO прочность при изгибе была выше, чем в группах noIRnoHBO и IRHBO. Жесткость костей при изгибе в группе IRnoHBO оказалась ниже, чем в группах noIRnoHBO и IRHBO, однако в группе noIRHBO статистической разницы по сравнению с группами IRHBO и noIRHBO выявлено не было. Все это говорит о том, что ГБО оказывает положительное влияние не только на костную ткань, подвергнутую радиации, но и на обычную кость, а значит может быть способом укрепления костей при различных заболеваниях костной ткани.

При удалении первичной опухоли костной ткани происходит иссечение значительного объема материала. Однако если окружающая опухоль костная ткань

является нормальной, ее стараются сохранить и облучают экстракорпоральным путем рентгеновскими лучами. При этом даже при воздействии дозы в 300 Гр на кость ее механические свойства значительно не изменяются. Соответственно, можно использовать достаточно высокие дозы облучения, чтобы снизить риск рецидива [4].

Вывод. В результате удалось собрать обобщенные данные, которые касаются влияния различных методов облучения на механические свойства тканей, а соответственно на структурные и функциональные характеристики органов и тканей. Несмотря на важность изучения эффектов излучения на живые структуры, работ, посвященных этой теме, крайне мало. В основном они касаются влияния облучения на элементы опорно-двигательного аппарата, но важно также изучение влияния на кровь и нервную систему, которые оказывают сильнейшее влияние на работу организма.

Другой причиной важности изучения проблемы влияния излучения на механические свойства тела человека является широкий спектр возможностей использования данного явления при лечении и диагностике различных заболеваний. К сожалению, подобные исследования также крайне редки и почти не встречаются среди отечественных авторов. Данная тема недостаточно освещена и требует дальнейшего изучения. При дальнейшем изучении данной темы возможно изменение стандартов и методик лечения и диагностики в медицине, а также требований безопасности к условиям работы с излучением.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Д. В. Иванов написание текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, А. Р. Халиулова обзор литературы по теме статьи, редактирование текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена в рамках Государственного задания FSRR-2023-0009.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. D. V. Ivanov writing the text of the manuscript, agreeing on the final version of the manuscript, A. R. Khaliulova reviewing the literature on the topic of the article, editing the text of the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The work was carried out within the framework of the State Assignment FSRR-2023-0009.

ЛИТЕРАТУРА

1. Effects of (60) Co gamma radiation dose on initial structural biomechanical properties of ovine bone-patellar tendon-bone allografts / K. C. McGilvray [et al.] // Cell Tissue Bank. – 2011. – Vol. 2. – P. 89–98.
2. The effect of hyperbaric oxygen therapy on bone macroscopy, composition and biomechanical properties after ionizing radiation injury / L. H. F. Junior [et al.] // Radiat Oncol. – 2020. – Vol. 15. – P. 951–958.

3. γ -Irradiation sterilized bone strengthened and toughened by ribose pre-treatment / T. L. Willett [et al.] // J Mech Behav Biomed Mater. – 2015. – Vol. 44. – P. 147–155.
4. The mechanical effects of extracorporeal irradiation on bone / S. Gupta [et al.] // Bone Joint J. – 2015. – Vol. 8. – P. 1151–1156.
5. Irradiation does not modify mechanical properties of cancellous bone under compression / C. J. Hernandez [et al.] // Clin Orthop Relat Res. – 2012. – Vol. 470. – P. 2488–2495.
6. Alterations in femoral neck strength following pelvic irradiation. A finite element analysis of simulated eccentric forces using bone density data derived from CT / V. M. Almendros-Abellán [et al.] // Bone. – 2021. – Vol. 145. – P. 116–125.
7. Fractionation of 50 kGy electron beam irradiation: effects on biomechanics of human flexor digitorum superficialis tendons treated with ascorbate / W. Wei [et al.] // J Biomech. – 2012. – Vol. 64, no. 4. – P. 658–661.
8. Effects of Chemical Sterilization and Gamma Irradiation on the Biochemical and Biomechanical Properties of Human Tendon Allografts: In Vitro Study / H. R. Zhang [et al.] // Orthop Surg. – 2022. – Vol. 14. – P. 2657–2668.
9. Effects of gamma irradiation and repetitive freeze–thaw cycles on the biomechanical properties of human flexor digitorum superficialis tendons / D. Ren [et al.] // J Biomech. – 2012. – Vol. 45. – P. 252–256.
10. Effects of gamma irradiation on the biomechanical properties of peroneus tendons / C. M. Aguilera [et al.] // Open Access J Sports Med. – 2016. – Vol. 7. – P. 123–127.
11. Maximum load to failure of high dose versus low dose gamma irradiation of anterior cruciate ligament allografts: A meta-analysis / A. C. DiBartola [et al.] // Knee. – 2016. – Vol. 23. – P. 755–762.
12. Evaluation of Biomechanical and Chemical Properties of Gamma-Irradiated Polycaprolactone Microfilaments for Musculoskeletal Tissue Engineering Applications / L. Rojas-Rojas [et al.] // Int J Biomater. – 2022. – Vol. 1. – P. 21–29.
13. Radiation-induced changes in load-sharing and structure–function behavior in murine lumbar vertebrae / T. Wu [et al.] // Comput Methods Biomed Engin. – 2024. – Vol. 10. – P. 1278–1286.
14. The influence of radiation-induced collagen chain fragmentation, crosslinking, and sequential irradiation on the high-cycle fatigue life of human cortical bone / D. B. Crocker [et al.] // J Mech Behav Biomed Mater. – 2024. – Vol. 160. – P. 106–121.
15. Fractionation of high-dose electron beam irradiation of BPTB grafts provides significantly improved viscoelastic and structural properties compared to standard gamma irradiation / A. Hoburg [et al.] // Knee Surg Sports Traumatol Arthrosc. – 2011. – Vol. 19. – P. 1955–1961.
16. *Ittycheri A., Lipsky Z. W., Hookway T. A.* Ultraviolet light induces mechanical and structural changes in full thickness human skin // J Mech Behav Biomed Mater. – 2023. – Vol. 143. – P. 105–115.
17. Skin Biomechanics and miRNA Expression Following Chronic UVB Irradiation / B. N. Blackstone [et al.] // Adv Wound Care (New Rochelle). – 2020. – Vol. 9. – P. 379–389.
18. Single-cell transcriptional analysis of irradiated skin reveals changes in fibroblast subpopulations and variability in caveolin expression / L. E. Kameni [et al.] // Radiat Oncol. – 2024. – Vol. 19. – P. 82–93.

19. Иомдина Е. Н. Биомеханические аспекты кераторефракционной хирургии и корнеального кросслинкинга // Российская педиатрическая офтальмология. – 2015. – Т. 4. – С. 32–37.
20. Влияние эксимерлазерных вмешательств на биомеханические свойства роговицы пациентов с различными фототипами кожи / Э. Ф. Тазиева [и др.] // Медицинский вестник Башкортостана. – 2019. – Т. 3. – С. 58–60.

REFERENCES

1. Effects of (60) Co gamma radiation dose on initial structural biomechanical properties of ovine bone-patellar tendon–bone allografts / K. C. McGilvray [et al.] // Cell Tissue Bank. – 2011. – Vol. 2. – P. 89–98.
2. The effect of hyperbaric oxygen therapy on bone macroscopy, composition and biomechanical properties after ionizing radiation injury / L. H. F. Junior [et al.] // Radiat Oncol. – 2020. – Vol. 15. – P. 951–958.
3. γ -Irradiation sterilized bone strengthened and toughened by ribose pre-treatment / T. L. Willett [et al.] // J Mech Behav Biomed Mater. – 2015. – Vol. 44. – P. 147–155.
4. The mechanical effects of extracorporeal irradiation on bone / S. Gupta [et al.] // Bone Joint J. – 2015. – Vol. 8. – P. 1151–1156.
5. Irradiation does not modify mechanical properties of cancellous bone under compression / C. J. Hernandez [et al.] // Clin Orthop Relat Res. – 2012. – Vol. 470. – P. 2488–2495.
6. Alterations in femoral neck strength following pelvic irradiation: A finite element analysis of simulated eccentric forces using bone density data derived from CT / V. M. Almendros-Abellán [et al.] // Bone. – 2021. – Vol. 145. – P. 116–125.
7. Fractionation of 50 kGy electron beam irradiation: effects on biomechanics of human flexor digitorum superficialis tendons treated with ascorbate / W. Wei [et al.] // J Biomech. – 2012. – Vol. 64, no. 4. – P. 658–661.
8. Effects of Chemical Sterilization and Gamma Irradiation on the Biochemical and Biomechanical Properties of Human Tendon Allografts: In Vitro Study / H. R. Zhang [et al.] // Orthop Surg. – 2022. – Vol. 14. – P. 2657–2668.
9. Effects of gamma irradiation and repetitive freeze–thaw cycles on the biomechanical properties of human flexor digitorum superficialis tendons / D. Ren [et al.] // J Biomech. – 2012. – Vol. 45. – P. 252–256.
10. Effects of gamma irradiation on the biomechanical properties of peroneus tendons / C. M. Aguilera [et al.] // Open Access J Sports Med. – 2016. – Vol. 7. – P. 123–127.
11. Maximum load to failure of high dose versus low dose gamma irradiation of anterior cruciate ligament allografts: A meta-analysis / A. C. DiBartola [et al.] // Knee. – 2016. – Vol. 23. – P. 755–762.
12. Evaluation of Biomechanical and Chemical Properties of Gamma-Irradiated Polycaprolactone Microfilaments for Musculoskeletal Tissue Engineering Applications / L. Rojas-Rojas [et al.] // Int J Biomater. – 2022. – Vol. 1. – P. 21–29.
13. Radiation-induced changes in load-sharing and structure–function behavior in murine lumbar vertebrae / T. Wu [et al.] // Comput Methods Biomech Biomed Engin. – 2024. – Vol. 10. – P. 1278–1286.

14. The influence of radiation-induced collagen chain fragmentation, crosslinking, and sequential irradiation on the high-cycle fatigue life of human cortical bone / D. B. Crocker [et al.] // J Mech Behav Biomed Mater. – 2024. – Vol. 160. – P. 106–121.
15. Fractionation of high-dose electron beam irradiation of BPTB grafts provides significantly improved viscoelastic and structural properties compared to standard gamma irradiation / A. Hoburg [et al.] // Knee Surg Sports Traumatol Arthrosc. – 2011. – Vol. 19. – P. 1955–1961.
16. *Ittycheri A., Lipsky Z. W., Hookway T. A.* Ultraviolet light induces mechanical and structural changes in full thickness human skin // J Mech Behav Biomed Mater. – 2023. – Vol. 143. – P. 105–115.
17. Skin Biomechanics and miRNA Expression Following Chronic UVB Irradiation / B. N. Blackstone [et al.] // Adv Wound Care (New Rochelle). – 2020. – Vol. 9. – P. 379–389.
18. Single-cell transcriptional analysis of irradiated skin reveals changes in fibroblast subpopulations and variability in caveolin expression / L. E. Kameni [et al.] // Radiat Oncol. – 2024. – Vol. 19. – P. 82–93.
19. *Iomdina E. N.* Biomechanical aspects of keratorefractive surgery and corneal crosslinking // Rossiiskaya Pediatriceskaya Oftal'mologiya. – 2015. – Vol. 4. – P. 32–37.
20. The effect of excimer laser interventions on the biomechanical properties of the cornea in patients with different skin phototypes / E. F. Tazieva [et al.] // Meditsinskiy Vestnik Bashkortostana. – 2019. – Vol. 3. – P. 58–60.

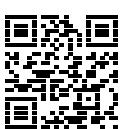
ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ СТАЛИ МАРКИ Р110

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Аннотация. В данной статье представлен вывод определяющих соотношений для линейно-вязкоупругого изотропного тела для описания ползучести стали группы прочности Р110, используемой при производстве нефтегазовых труб. Используя обобщенный закон Гука и теорию наследственности Больцмана, учитывается зависимость механического поведения материала от времени. Полученные тензорные соотношения сводятся к одномерному случаю, что является важным шагом для практического применения, в частности, для аппроксимации релаксационного модуля в вязкоупругой модели Максвелла–Вихерта в случае одноосного растяжения. При этом в работе сформулированы основные допущения, принятые при использовании указанной модели и переходе к одномерному случаю нагружения. Построенная таким образом механическая модель может применяться для металлов, работающих при высоких температурах, в частности – для труб нефтегазового сортамента с премиальными резьбовыми соединениями. Герметичность таких соединений обеспечивает специальный конструктивный элемент – радиальное уплотнение, на герметизирующие характеристики которого существенное влияние оказывает ползучесть металла при эксплуатации в высокотемпературных скважинах при длительном нагружении. В рамках исследования в лаборатории НИТУ МИСИС были проведены испытания на ползучесть материала муфтовой заготовки резьбового соединения, произведенной из стали группы прочности Р110. С помощью метода Монте–Карло для построенной модели вязкоупругости были подобраны коэффициенты, позволяющие описать полученные кривые ползучести с достаточной точностью. Построенная модель с учетом введенных допущений позволяет прогнозировать ресурс премиальных резьбовых соединений, работающих в условиях длительного нагружения в высокотемпературных скважинах.

Ключевые слова: ползучесть, теория наследственности, вязкоупругость, нефтегазовые трубы

Стрелков Кирилл Сергеевич, аспирант лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: ks.strelkov@yandex.ru; <https://orcid.org/0009-0001-9203-9599>



для цитирования: Стрелков К. С. Теоретическое и экспериментальное исследование ползучести стали марки Р110 // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 4(66). С. 157-165. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.010. EDN: WNAWIJ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

THEORETICAL AND EXPERIMENTAL STUDY OF CREEP IN P110 GRADE STEEL

I. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

Abstract. This article presents a detailed derivation of the constitutive relations for a linear viscoelastic isotropic model to describe the creep of P110 steel used in the production of oil and gas tubular goods (OCTG). Using the generalized Hooke's law and the hereditary Boltzmann relations, the time dependence of the material's mechanical behavior is taken into account. The resulting tensor relations are reduced to a one-dimensional case, an important step for practical application, in particular, for approximating the relaxation modulus in the Maxwell–Wiechert viscoelastic model in case of uniaxial tension. Furthermore, the paper formulates the key assumptions adopted in using this model. The mechanical model can be applied to metals operating at high temperatures, in particular to oil and gas tubular goods with premium threaded connections. The sealability of the connections is provided by a special design element — a radial seal, the sealing characteristics of which are significantly affected by metal creep during operation in high-temperature wells under prolonged loading. As part of the study, creep tests were conducted at the NUST MISIS laboratory on the coupling blank of a threaded connection made from P110 grade steel. Model coefficients were obtained to approximate the experiment creep curves using Monte–Carlo method. The resulting model with assumptions introduced allows for predicting the service life of premium threaded connections operating under prolonged load in high-temperature wells.

Keywords: creep, theory of heredity, viscoelasticity, OCTG.

Kirill S. Strelkov, Scientific Researcher; e-mail: ks.strelkov@yandex.ru;
<https://orcid.org/0009-0001-9203-9599>



to cite this article: Strelkov K. S. Theoretical and Experimental Study of Creep in P110 Grade Steel // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 4(66). p. 157-165. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.010

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Материалы труб, используемых при строительстве нефтегазовых скважин в условиях высоких температур и длительной эксплуатации, демонстрируют сложное механическое поведение, которое не может быть адекватно описано классической теорией упругости. В таких условиях в резьбовые соединения в скважине может возникнуть явление ползучести. Понимание и точное моделирование такого поведения имеет решающее значение для проектирования и анализа резьбовых соединений класса "Премиум" [1, 2]. Игнорирование явления ползучести может привести к некорректной оценке ресурса конструкции с точки зрения герметичности, что, в свою очередь, может стать причиной аварий на месторождениях.

Целью данной статьи является применение теории линейной вязкоупругости для сплава группы прочности Р110 с аппроксимацией релаксационного модуля рядами Прони, используя данные испытаний на ползучесть.

1. Вывод соотношений между напряжениями и деформациями на основе теории вязкоупругости В рамках линейной вязкоупругости используется принцип суперпозиции Больцмана и соотношение между напряжениями и деформациями [3]:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t C_{ijkl}(t-s) \frac{d\varepsilon_{kl}(s)}{ds} ds, \quad (1)$$

где $\sigma_{ij}(t)$ — компоненты тензора напряжений, t — текущее время нагружения, s — прошедшее время нагружения, $C_{ijkl}(t-s)$ — функция релаксации, $\varepsilon_{kl}(s)$ — компоненты тензора малых деформаций.

В классической теории упругости для изотропного материала связь между компонентами тензора напряжений σ_{ij} и компонентами тензора деформаций ε_{ij} описывается обобщенным законом Гука. В тензорной форме обобщенный закон Гука для упругого изотропного тела имеет вид [4]:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \quad (2)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ — объемная деформация, μ и λ — параметры Ламе.

Разложим компоненты тензора деформаций ε_{ij} на девиаторную и шаровую части:

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \quad (3)$$

где e_{ij} — компоненты девиатора деформаций, а $\frac{1}{3}\varepsilon_{kk}$ — средняя объемная деформация.

Параметр Ламе связан с модулем объемного сжатия K и модулем сдвига G следующим соотношением [4]:

$$\lambda = K - \frac{2}{3}G \quad (4)$$

Выразив компоненты девиатора деформации через (3) и используя выражение (4), приходим к следующему соотношению между напряжениями и деформациями, полученному из (2):

$$\sigma_{ij} = 2Ge_{ij} + K\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \quad (5)$$

Подставив выражение (5) в выражение (1), получим окончательный вид интегрального соотношения между напряжениями и деформациями в теории наследственности:

$$\sigma_{ij} = 2 \int_0^t G(t-s) \frac{e_{ij}}{ds} ds + \delta_{ij} \int_0^t K(t-s) \frac{d\varepsilon_{kk}}{ds} ds \quad (6)$$

где $G(t-s)$ — ядро сдвиговой релаксации, $K(t-s)$ — ядро объемной релаксации.

Рассмотрим случай одноосного растяжения, что соответствует описываемым далее испытаниям на ползучесть. В такой постановке, учитывая, что $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$, выражение (6) преобразуется в:

$$\sigma_{zz} = \int_0^t E(t-s) \frac{\varepsilon_{zz}}{ds} ds \quad (7)$$

где релаксационный модуль выражается через модуль сдвига и модуль объемного сжатия с учетом временной зависимости следующим образом [3]:

$$E(t) = \frac{9K(t)G(t)}{3K(t) + G(t)} \quad (8)$$

2. Аппроксимация функции релаксации рядами Прони и переход к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ). Функцию $E(t)$ удобно аппроксимировать дискретной суммой экспонент, где каждое слагаемое соответствует элементу обобщенной модели Максвелла [3, 5]:

$$E(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^n E_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right), \quad (9)$$

где E_∞ — длительный модуль упругости, E_i — модули релаксации для характерных времен релаксации τ_i , n — число экспоненциальных слагаемых.

В таком случае интегральное соотношение сводится к следующему виду:

$$\sigma(t) = E_\infty \varepsilon(t) + \sum_{i=1}^n \sigma_i(t), \quad (10)$$

где введены компоненты

$$\sigma_i(t) = \int_0^t E_i e^{-(t-s)/\tau_i} \frac{d\varepsilon(s)}{ds} ds. \quad (11)$$

Возьмём производную по времени от (??). Тогда, применив правило Лейбница для дифференцирования интеграла, получим следующее ОДУ первого порядка

для компонент σ_i :

$$\tau_i \frac{d\sigma_i}{dt} + \sigma_i = E_i \frac{d\varepsilon(t)}{dt}. \quad (12)$$

Уравнение (12) в дальнейшем используется в конечно-элементном пакете.

3. Определение параметров функции релаксации в рядах Прони на основе испытаний на ползучесть. В случае испытаний на ползучесть, когда $\sigma_{zz} = \text{const}$, а $\varepsilon_{zz}(t)$ представляет собой набор данных с экстензометром, выражение (10) сводится к форме:

$$\sigma_{zz} = E(t)\varepsilon_{zz}(t), \quad (13)$$

Выражение (9) можно привести к виду:

$$E(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^n E_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) = E_0 - \sum_{i=1}^n m_i E_0 \left[1 - \exp\left(\frac{t}{\tau_i}\right)\right] \quad (14)$$

где E_0 – мгновенный модуль упругости, $m_i = E_i/E_0$ – параметр Прони.

Тогда комбинируя уравнения (13) и (14), получим следующее выражение:

$$\sum_{i=1}^n m_i E_0 \left[1 - \exp\left(\frac{t}{\tau_i}\right)\right] = E_0 - \frac{\sigma_{zz}}{\varepsilon_{zz}(t)} \quad (15)$$

откуда для набора времен испытаний t_i можно получить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n m_i E_0 \left[1 - \exp\left(\frac{t_1}{\tau_i}\right)\right] = E_0 - \frac{\sigma_{zz}}{\varepsilon_{zz}(t_1)} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n m_i E_0 \left[1 - \exp\left(\frac{t_n}{\tau_i}\right)\right] = E_0 - \frac{\sigma_{zz}}{\varepsilon_{zz}(t_n)} \end{cases} \quad (16)$$

Систему уравнений (16) можно записать в виде компонент тензоров:

$$E_0 T_{ij} m_j = e_j \quad (17)$$

где тензоры безразмерных параметров Прони и изменения мгновенного модуля имеют следующий вид:

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \dots \\ m_n \end{pmatrix}, \mathbf{e} = \begin{pmatrix} E_0 - \frac{\sigma_{zz}}{\varepsilon_{zz}(t_1)} \\ \dots \\ E_0 - \frac{\sigma_{zz}}{\varepsilon_{zz}(t_n)} \end{pmatrix}.$$

Из уравнения (17) на основе экспериментальных данных для заданной температуры можно получить неизвестные параметры m_j .

Для построения вязкоупругой модели, были проведены испытания в лаборатории «Гибридные наноструктурные материалы» НИТУ МИСИС. Для данных испытаний в АО «Выксунский металлургический завод» из муфтовой заготовки

для нарезки резьбового премиального соединения были изготовлены образцы. Полученные образцы и испытательная машина Instron представлены на Рис. 1.

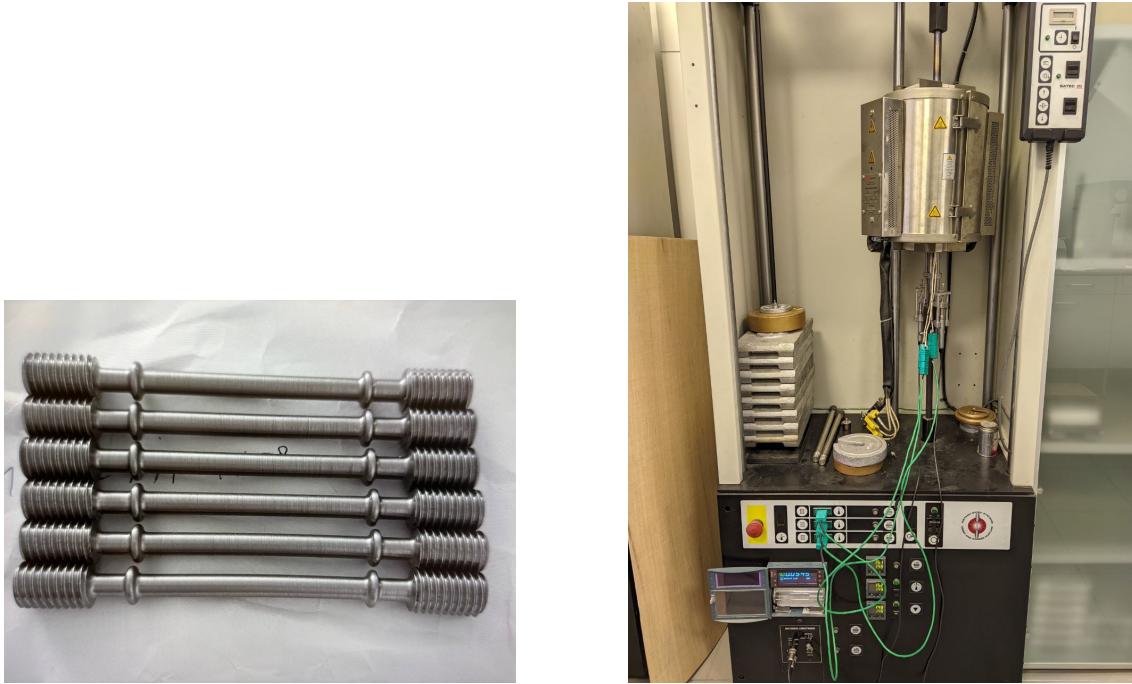


Рис. 1. Испытательные образцы и оборудование

На Рис. 2 приведены экспериментальные кривые ползучести и кривые, полученные при моделировании испытаний на ползучесть с использованием модели Максвелла–Вихерта. Все кривые были получены при напряжениях, равных 95% предела текучести материала муфты, что соответствует уровню напряжений в испытаниях резьбовых соединений, указанному в стандарте испытаний резьбовых соединений [6]. Видно, что полученное решение позволяет описать ползучесть для трех разных температур. При этом для того, чтобы учесть масштабный фактор, возможное проявление нелинейной ползучести, а также погрешности испытательного оборудования, в левую часть уравнения (17) был введен калибровочный коэффициент $\alpha = 1,06$. Окончательный вид уравнения:

$$\alpha E_0 T_{ij} m_j = e_j \quad (18)$$

Для решения уравнения (18), выбор оптимальных точек экспериментальных кривых осуществлялся при помощи метода Монте–Карло с целевой функцией среднеквадратичной ошибки. Пример реализации подбора оптимальных точек данным методом для кривой, соответствующей температуре 350°C, представлен на Рис. 3. Для этого случая достаточно 6 точек, дающих минимальное значение среднеквадратичной ошибки аппроксимации $2,93 \cdot 10^{-9}$. Дальнейшее увеличение числа точек не влияет на качество аппроксимации.

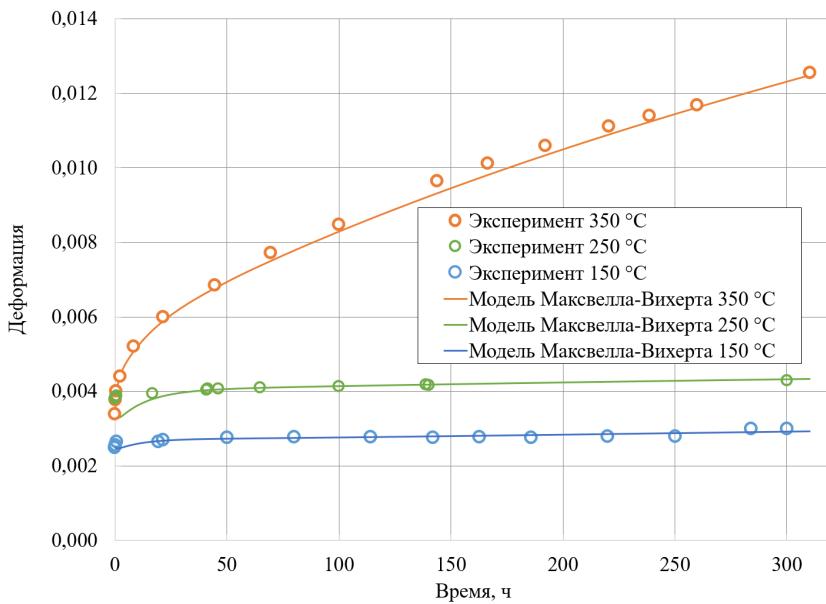


Рис. 2. Сравнение кривых ползучести для испытаний и моделирования.

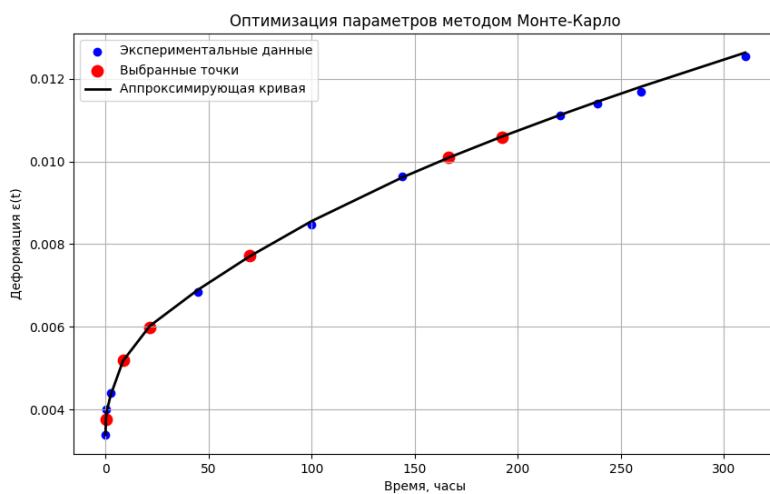


Рис. 3. Подбор оптимальных точек для аппроксимации кривой ползучести методом Монте-Карло для температуры 350 °C.

Заключение. В работе был представлен подробный вывод определяющих соотношений для линейного вязкоупругого изотропного тела, в основе которого стоит обобщенный закон Гука и принцип суперпозиции Больцмана. Было

показано, как тензорные соотношения, описывающие связь между напряжениями и деформациями, могут быть адаптированы для учета временной зависимости, характерной для вязкоупругих материалов и использованы для моделирования процесса ползучести. Полученные соотношения были сведены к одномерному случаю, что позволяет моделировать кривые ползучести, полученные в ходе проведенного испытания. В этом контексте был введен релаксационный модуль $E(t)$, который описывает поведение материала при одноосном растяжении-сжатии. Для удобства численного моделирования и анализа экспериментальных данных было подробно рассмотрено представление релаксационного модуля в виде рядов Прони. Было проведено моделирование испытаний и осуществлен подбор параметров, описывающих кривые ползучести с достаточной точностью. Полученные результаты можно применять в том числе для прогнозирования герметичности резьбовых соединений класса «Премиум», используемых при строительстве современных нефтегазовых скважин. Дальнейшие исследования могут быть направлены на учет температурной зависимости и нелинейных эффектов, что позволит еще более точно моделировать поведение материалов в подобных условиях эксплуатации.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. К. С. Стрелков написание текста рукописи, обзор литературы по теме статьи, проведение экспериментов.

Конфликт интересов. Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Исследование выполнено по теме государственного задания (государственный регистрационный номер 124012500437-9).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. K. S. Strelkov writing the text of the manuscript, reviewing the literature on the topic of the article, conducting experiments.

Competing interests. The author declare that they have no competing interests.

Funding. The study was carried out on the topic of the state assignment (state registration number 124012500437-9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Technological Improvements in OCTG Premium Casing Connections and Advancements in Design Paradigms to Address the Challenges Present During the Exploitation of Unconventional Hydrocarbon Resources: A Critical Review / O. Grijalva Meza [et al.] // Abu Dhabi International Petroleum Exhibition & Conference (ADIPEC). – Society of Petroleum Engineers. Abu Dhabi, UAE, 2016. – P. 3–5. – DOI: 10.2118/183199-MS.
2. Merliahmad M. Casing Connection Selection for Geothermal Applications Using Input From HPHT and Thermal Wells Testing Protocols // SPE/GRC Workshop: High-Temperature and Corrosion in Drilling and Production—Exploring Geothermal and Oil and Gas Synergies. – 2017. – P. 5–6.
3. Кристенсен Р. М. Введение в теорию вязкоупругости. – Москва : Мир, 1974. – 340 с.
4. Демидов С. П. Теория упругости. – Москва : Высшая школа, 1979. – 432 с.

5. *Findley W. N., Lai J. S., Onaran K.* Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials: With an Introduction to Linear Viscoelasticity. – Dover Publications, Inc., 1989. – 364 p.
6. ГОСТ Р ИСО 13679-2023: Трубы стальные обсадные и насосно-компрессорные для нефтяной и газовой промышленности. Методы испытаний резьбовых соединений. – 2023. – Национальный стандарт Российской Федерации.

REFERENCES

1. Technological Improvements in OCTG Premium Casing Connections and Advancements in Design Paradigms to Address the Challenges Present During the Exploitation of Unconventional Hydrocarbon Resources: A Critical Review / O. Grigalva Meza [et al.] // Abu Dhabi International Petroleum Exhibition & Conference (ADIPEC). – Society of Petroleum Engineers. Abu Dhabi, 2016. – P. 3–5. – DOI: 10.2118/183199-MS.
2. *Merliahmad M.* Casing Connection Selection for Geothermal Applications Using Input From HPHT and Thermal Wells Testing Protocols // SPE/GRC Workshop: High-Temperature and Corrosion in Drilling and Production—Exploring Geothermal and Oil and Gas Synergies. – 2017. – P. 5–6.
3. *Christensen R.* Introduction in Theory of Viscoelasticity. – Moscow : Mir, 1974. – 340 p.
4. *Demidov S. P.* Theory of Elasticity. – Moscow : High School, 1979. – 432 p.
5. *Findley W. N., Lai J. S., Onaran K.* Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials with an Introduction to Linear Viscoelasticity. – New York : Dover Publications, Inc., 1989. – 364 p.
6. Steel casing and tubing pipes for the oil and gas industry. Test methods for threaded connections. – 2023.

Б. Д. Аннин¹, С. И. Сенашов², И. Л. Савостьянова²

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО КРУЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ С ПОМОЩЬЮ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

¹Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

²Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, Красноярск, Россия

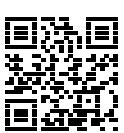
Аннотация. В данной работе строится граница между упругой и пластической областями в скручиваемом упругопластическом стержне. Приведены формулы, выведенные с помощью законов сохранения, которые позволяют построить упругопластическую границу для стержней с произвольной гладкой границей.

Ключевые слова: упругопластическая граница, кручение стержня, точное решение, законы сохранения

Аннин Борис Дмитриевич, доктор физико-математических наук, академик РАН, профессор; e-mail: annin@hydro.nsc.ru; AuthorID: 10

Сенашов Сергей Иванович, профессор кафедры информационных экономических систем; профессор кафедры математического моделирования и процессов управления; e-mail: Sen@sibsau.ru; AuthorID: 214483

Савостьянова Ирина Леонидовна, зам. директора НОЦ Институт космических исследований и высоких технологий; зав. учебно-исследовательской лабораторией фундаментальной и прикладной механики; e-mail: ruppa@inbox.ru; AuthorID: 742389



для цитирования: Аннин Б.Д., Сенашов С.И., Савостьянова И. Л. Решение задачи упругопластического кручения стержня с помощью законов сохранения // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 4(66). С. 166–172. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.011. EDN: VVSDCV

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

B. D. Annin¹, S. I. Senashov², I. L. Savostyanova²

SOLVING THE PROBLEM OF ELASTIC PLASTIC ROD TORSION

¹*Lavrentiev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia*

²*Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia*

Abstract. The authors derive formulas for calculating the boundary between elastic and plastic regions in a twisted elastoplastic rod. The authors made their formulas using conservation laws. These formulas allow us to construct an elastoplastic boundary for rods with an arbitrary smooth boundary as a result.

Keywords: elastic-plastic boundary, rod torsion, exact solution, conservation laws

Boris D. Annin, Dr. Sci. Phys. & Math., Academician of the Russian Academy of Sciences, Professor; e-mail: annin@hydro.nsc.ru; AuthorID: 10

Sergey I. Senashov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; e-mail: Sen@sibsau.ru; AuthorID: 214483

Irina L. Savostyanova, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; e-mail: ruppa@inbox.ru; AuthorID: 742389



to cite this article: Annin B. D., Senashov S. I., Savostyanova I. L. Solving the problem of elastic plastic rod torsion // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 4(66). p. 166–172. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.011

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

1. Введение. Методы, используемые для решения упругопластических задач, обычно разбивают на две группы: аналитические и вариационно-разностные. Аналитические приемы, используемые при решении упругопластических задач, опираются, в основном, на методы теории комплексного переменного и метод малого параметра [1, 2]. Этими методами решены упругопластические задачи в работах [3–5]. Из вариационно-разностных методов наибольшее применение к решению упругопластических задач находит метод конечных элементов. Решение задач такими методами можно найти в [2].

В последнее время для решений упругопластических задач активнее стал использоваться метод законов сохранения (см. [6–8]). В том числе, на основе формул, полученных с помощью законов сохранения, созданы программы для ЭВМ, которые позволяют строить упругопластические границы в различных телах.

В предлагаемой работе найдены законы сохранений для дифференциальных уравнений, описывающих напряженное состояние скручиваемого стержня. Использование законов сохранения позволяет свести нахождение компонент тензора напряжений в каждой точке к вычислению контурного интеграла по границе контура поперечного сечения. А это дает возможность построить упругопластическую границу, возникающую в этом случае.

Постановка задачи. Предполагаем, что напряженное состояние в упругой и пластической областях удовлетворяет следующим условиям

$$\sigma_x = -\lambda z + C, \sigma_y = -\lambda z + C, \sigma_z = -\lambda z + C, \tau_{xy} = 0, \tau_{xz} = u(x, y), \tau_{yz} = v(x, y). \quad (1)$$

В этом случае уравнения, описывающие упругую деформацию в стационарном случае, имеют вид

$$u_x + v_y = \lambda, \quad v_x - u_y = 0. \quad (2)$$

Система (2) – это уравнение равновесия и уравнение совместности упругих деформаций.

В пластической области система состоит из уравнения равновесия и условия пластичности Треска-Мизеса и имеет вид

$$u_x + v_y = \lambda, \quad u^2 + v^2 = k^2. \quad (3)$$

Здесь $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ – компоненты тензора напряжений, λ – постоянная, k – постоянная пластичности, равная пределу текучести при чистом сдвиге.

Уравнения (2), (3) можно использовать для описания напряженного состояния упругопластического стержня постоянного поперечного сечения, который подвергается кручению, параметр $-\lambda$ характеризует кручение. При этом ось z направлена вдоль оси стержня.

Предполагается, что боковая поверхность стержня свободна от касательных напряжений и находится в пластическом состоянии, поэтому система (2) решается со следующими граничными условиями

$$u n_1 + v n_2|_L = 0, u^2 + v^2 = k^2.$$

Откуда получаем на боковой поверхности

$$u = -kn_2, v = kn_1. \quad (4)$$

Здесь n_1, n_2 - компоненты вектора внешней нормали к внешнему контуру L , ограничивающему конечную область S .

Замечание. Формулировка рассматриваемой задачи совпадает с задачей о кручении упругопластического стержня, рассмотренного в [2]. Там, в случае, когда стержень имеет овальное поперечное сечение, доказана теорема существования и единственности.

2. Законы сохранения системы уравнений (2). Для удобства запишем уравнения (2) в виде

$$F_1 = u_x + v_y - \lambda = 0, F_2 = -u_y + v_x = 0. \quad (5)$$

Решим краевую задачу (2), (4) с помощью законов сохранения.

Определение. Законом сохранения для системы уравнений (2) назовем выражение вида

$$A_x + B_y = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2, \quad (6)$$

где ω_1, ω_2 - линейные дифференциальные операторы, одновременно не равные нулю тождественно.

Пусть

$$A = \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, B = \alpha^2 u + \beta^2 v + \gamma^2, \quad (7)$$

$\alpha^1, \beta^1, \gamma^1, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ - некоторые гладкие функции, зависящие только от x, y .

Замечание. Более общее определение закона сохранения, подходящее для произвольных систем уравнений, можно найти в [9].

Из (6) с учетом (7), получаем

$$\begin{aligned} \alpha^1 u + \alpha^1 u_x + \beta^1 v + \beta^1 v_x + \gamma^1 v_x + \alpha^2 u + \alpha^2 u_y + \beta^2 v + \beta^2 v_y + \gamma^2 v_y &= \\ = \omega_1(u_x + v_y - \lambda) + \omega_2(-u_y + v_x + 2\alpha). \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) следует

$$\begin{aligned} \alpha_x^1 + \alpha_y^2 &= 0, \quad \beta_x^1 + \beta_y^2 = 0, \\ \alpha^1 &= \omega_1, \quad \beta^1 = \omega_2, \quad \alpha^2 = -\omega_2, \quad \beta^2 = \omega_1, \\ \gamma_x^1 + \gamma_y^2 &= -\lambda\omega_1 + 2\alpha\omega_2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\alpha^1 = \beta^2, \quad \alpha^2 = -\beta^1. \quad (9)$$

Поэтому

$$\alpha_x^1 - \beta_y^1 = 0, \quad \alpha_y^1 + \beta_x^1 = 0, \quad \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = -\lambda\alpha^1. \quad (10)$$

Из приведённых формул следует, что система уравнений (2) допускает бесконечно много законов сохранения; далее будут приведены только те, которые позволяют решить поставленную задачу.

В силу (9) сохраняющийся ток (7) имеет вид

$$A = \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, \quad B = -\beta^1 u + \alpha^1 v + \gamma^2.$$

Из (6) по формуле Грина получаем

$$\iint_S (A_x + B_y) dx dy = \oint_L -Ady + Bdx = 0, \quad (11)$$

где S – область, ограниченная кривой L .

3. Решение задачи (2), (4). Для нахождения значений u, v внутри области S необходимо построить решения системы (10), имеющие особенности в произвольной точке $(x_0, y_0) \in S$.

Первое из таких решений имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, & \beta^1 &= \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \\ \gamma^1 &= 0, \\ \gamma^2 &= -\lambda \int \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} dy = -\lambda \arctg \frac{y-y_0}{x-x_0}. \end{aligned} \quad (12)$$

В точке $(x_0, y_0) \in S$ функции α^1, β^1 имеют особенности, поэтому окружим эту точку окружностью

$$\varepsilon : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2.$$

Тогда из формулы (11) получаем

$$\oint_L -Ady + Bdx + \oint_{\varepsilon} -Ady + Bdx = 0. \quad (13)$$

Вычислим последний интеграл в формуле (13).

Имеем

$$\begin{aligned} \oint_{\varepsilon} -Ady + Bdx &= \oint_{\varepsilon} \left(-\left(\frac{u(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} - \frac{v(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} + \gamma^1 \right) dy + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{u(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} - \frac{v(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} + \gamma^2 \right) dx \right). \end{aligned}$$

Введем новые координаты: $x - x_0 = \varepsilon \cos \varphi, y - y_0 = \varepsilon \sin \varphi$; получаем

$$\begin{aligned} \oint_{\varepsilon} -Ady + Bdx &= \int_0^{2\pi} [-(u \cos \varphi + v \sin \varphi) \cos \varphi - (u \sin \varphi + v \cos \varphi) \sin \varphi] d\varphi = \\ &= - \int_0^{2\pi} u d\varphi = -2\pi u(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (14)$$

Последнее равенство получено по теореме о среднем при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для окончательного построения решения подставим в (13) значения u, v на границе L . Из формул (13) получаем

$$2\pi u(x_0, y_0) = \oint_L -(-\alpha^1 n_2 + \beta^1 n_1) dy + (\beta^1 n_2 + \alpha^1 n_1 + \gamma^2) dx. \quad (15)$$

Второе решение системы уравнений (10) возьмем в виде

$$\begin{aligned}\alpha^1 &= \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, & \beta^1 &= -\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \\ \gamma^1 &= -\lambda \int \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} dx = -\lambda \arctg \frac{x-x_0}{y-y_0}, \\ \gamma^2 &= 0.\end{aligned}\quad (16)$$

Проделав выкладки, аналогичные выкладкам, проделанным с решением (12), получаем

$$2\pi v(x_0, y_0) = \oint_L -(-\alpha^1 n_2 + \beta^1 n_1 + \gamma^1) dy + (\beta^1 n_2 + \alpha^1 n_1) dx.$$

Заключение. В работе предложен метод решения краевой задачи, описывающей напряженное состояние скручиваемого упругопластического стержня. В настоящее время разрабатывается программа для ЭВМ, позволяющая строить границу для стержней с произвольной гладкой границей, удовлетворяющих граничным условиям (4).

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

Конфликт интересов. Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- Предельное состояние деформируемых твердых тел и горных пород / Д. Д. Ивлев [и др.]. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 832 с.
- Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упруго-пластическая задача. – Новосибирск : Наука, 1983. – 238 с.
- Ракин С. И. Расчет напряженно-деформированного состояния связующего композитных материалов // Прикладная механика и техническая физика. – 2024. – Т. 65, № 2. – С. 127–137.
- Севастьянов Г. М., Буренин А. А. Адиабатический нагрев материала при упругопластическом кручении с конечными деформациями // Прикладная механика и техническая физика. – 2019. – Т. 60, № 6. – С. 149–161.

5. Черепанова О. Н. Решение задачи о растяжении упруго–пластической полосы, ослабленной разрезами и отверстиями // Сибирский аэрокосмический журнал. – 2025. – Т. 26, № 2. – С. 215–222.
6. Сенашов С. И., Савостьянова И. Л., Власов А. Ю. Упругое кручение двухслойного стержня коробчатого сечения // Прикладная механика и техническая физика. – 2024. – Т. 65, № 3. – С. 161–168. – DOI: 10.15372/PMTF202315404.
7. Евтихов Д. О. Упругопластическая граница скручиваемого стержня, армированного волокнами // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковleva. Серия: Механика предельного состояния. – 2024. – 4(62). – С. 53–62.
8. Vinogradov A. M. Local symmetries and conservation laws // Acta Appl. Math. – 1984. – No. 6. – P. 56–64.

REFERENCES

1. The Limiting State of Deformable Solids and Rocks / D. D. Ivlev [et al.]. – Moscow : FIZMATLIT, 2008. – 832 p.
2. Annin B. D., Cherepanov G. P. Elastic–Plastic Problem. – Novosibirsk : Nauka, 1983. – 238 p.
3. Rakin S. I. Calculation of the Stress–Strain State of a Binder of Composite Materials // Applied Mechanics and Technical Physics. – 2024. – Vol. 65, no. 2. – P. 127–137.
4. Sevastyanov G. M., Burenin A. A. Adiabatic Heating of a Material during Elasto-plastic Torsion with Finite Deformations // Applied Mechanics and Technical Physics. – 2019. – Vol. 60, no. 6. – P. 149–161.
5. Cherepanova O. N. Solving the Problem of Stretching an Elastic–Plastic Strip Weakened by Cuts and Holes // Siberian Aerospace Journal. – 2025. – Vol. 26, no. 2. – P. 215–222.
6. Senashov S. I., Savostyanova I. L., Vlasov A. Y. Elastic Torsion of a Two-Layer Rod of a Box-Shaped Section // Applied Mechanics and Technical Physics. – 2024. – Vol. 65, no. 3. – P. 161–168. – DOI: 10.15372/PMTF202315404.
7. Evtikhov D. O. The Elastic–Plastic Boundary of a Twisted Fiber-Reinforced Rod // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. – 2024. – 4(62). – P. 53–62.
8. Vinogradov A. M. Local Symmetries and Conservation Laws // Acta Appl. Math. – 1984. – No. 6. – P. 56–64.

О. Е. Сысоев, А. Н. Намоконов, Е. О. Сысоев

ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ ТОНКОСТЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНЕ ДЕФОРМАЦИИ

Комсомольский-на-Амуре государственный университет, Комсомольск-на-Амуре,
Россия

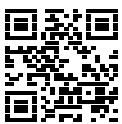
Аннотация. При эксплуатации конструкций, основу которых составляют тонкостенные цилиндрические оболочки, иногда возникают предельные нагрузки, когда материал конструкции близок пластической зоне или находится в пластической зоне напряжённо-деформированного состояния. В этих случаях изменяется модуль упругости конструкционного материала. Такое изменение модуля упругости оказывает влияние на собственные колебания тонкостенной цилиндрической оболочки, а при проектировании этот факт не учитывается. Это может вызвать смещение частоты собственных колебаний тонкостенной цилиндрической оболочки и привести к её разрушению из-за возникновения эффекта резонанса. В работе представлен модально-аналитический подход к оценке частот собственных колебаний тонкостенной цилиндрической оболочки в постановке задачи Доннелла–Муштари–Власова (ДМВ) с учётом стадии перехода материала в пластическую зону посредством секущего модуля $E_{\text{sec}}(\varepsilon)$, заданного по экспериментальной диаграмме растяжения $\sigma-\varepsilon$. Сохраняя линейную структуру уравнений движения, метод вводит физическую нелинейность в виде масштабирования спектра и амплитудной зависимости частот. Выведены модальные уравнения для осесимметричной и неосесимметричных форм и получены аналитические выражения для собственных частот через модальные параметры. Предложен итерационный алгоритм выбора E_{sec} по уровню эквивалентной деформации. Показано влияние амплитуды на эквивалентную деформацию и эффективную жёсткость оболочки; приведены рекомендации по применимости подхода для быстрых инженерных оценок в предкритической области

Ключевые слова: тонкостенная цилиндрическая оболочка; теория Доннелла–Муштари–Власова; собственные колебания; физическая нелинейность; пластическая деформация; секущий модуль упругости

Сысоев Олег Евгеньевич — доктор технических наук, профессор; e-mail: fks@knastu.ru; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6193-8584>; AuthorID: 446982

Намоконов Александр Николаевич — аспирант; e-mail: namokonovsasha@mail.ru; ORCID: 0009-0003-9269-7713; AuthorID: 1162898

Сысоев Евгений Олегович — кандидат экономических наук, доцент; e-mail: fks@knastu.ru; ORCID: 0000-0002-6193-8585; AuthorID: 530062



для цитирования: Сысоев О.Е., Намоконов А.Н., Сысоев Е.О. Численные исследования колебаний тонкостенной цилиндрической оболочки в пластической зоне деформации // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 4(66). С. 173–184. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.012. EDN: ESVEFT

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

O. E. Sysoev, A. N. Namokonov, E. O. Sysoev

NUMERICAL STUDY OF VIBRATIONS OF A THIN-WALLED CYLINDRICAL SHELL IN THE PLASTIC STRAIN RANGE

Komsomolsk-on-Amur State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia

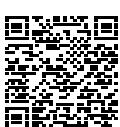
Abstract. During the operation of structures based on thin-walled cylindrical shells, limit loads sometimes occur, bringing the structural material close to or into the plastic region of the stress-strain state. In these cases, the elastic modulus of the material changes. This change in the elastic modulus affects the natural vibrations of the thin-walled cylindrical shell, a factor often not considered during design. This oversight can lead to a shift in the natural frequency of the shell and potentially cause its failure due to resonance. This work presents a modal-analytical approach for estimating the natural frequencies of a thin-walled cylindrical shell within the Donnell–Mushtari–Vlasov (DMV) formulation, accounting for the material's transition into the plastic zone via a secant modulus $E_{\text{sec}}(\varepsilon)$ defined by an experimental σ – ε tensile diagram. While preserving the linear structure of the equations of motion, the method introduces physical nonlinearity through spectrum scaling and amplitude-frequency dependence. Modal equations for axisymmetric and non-axisymmetric forms are derived, yielding analytical expressions for the natural frequencies in terms of modal parameters. An iterative algorithm for selecting E_{sec} based on the equivalent strain level is proposed. The influence of vibration amplitude on the equivalent strain and the effective stiffness of the shell is demonstrated, and recommendations are provided for the applicability of this approach for rapid engineering assessments in the pre-critical regime.

Keywords: thin-walled cylindrical shell; Donnell–Mushtari–Vlasov theory; free vibrations; physical nonlinearity; plastic deformation; secant modulus.

Oleg E. Sysoev — Doctor of Technical Sciences, Professor; e-mail: fks@knastu.ru; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6193-8584>.AuthorID: 446982

Alexander N. Namokonov — Postgraduate Student; e-mail: namokonovsasha@mail.ru; ORCID: 0009-0003-9269-7713.AuthorID: 1162898

Evgeny O. Sysoev — Candidate of Economic Sciences, Associate Professor;; e-mail: fks@knastu.ru; ORCID: 0000-0002-6193-8585.AuthorID: 530062



to cite this article: Sysoev O.E., Namokonov A.N., Sysoev E.O. Numerical Study of Vibrations of a Thin-Walled Cylindrical Shell in the Plastic Strain Range // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 4(66). p. 173–184. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.012

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение Традиционно тонкостенные цилиндрические оболочки широко применяются в авиационно-космической, энергетической и гражданской технике. Колебания оболочек в классической постановке задачи, основанной на теориях типа Доннелла–Муштари–Власова и других, рассчитываются в упругой области при постоянном модуле Юнга E .^[1, 2] Однако при перегрузках (избыточное внутреннее или внешнее давление, термомеханические воздействия и др.) эффективная жёсткость снижается с ростом деформаций: линейные оценки завышают собственные частоты и занижают амплитуды, что повышает риск резонансных и усталостных повреждений.^[3–5] Современные экспериментальные и вычислительные данные подтверждают ключевую роль динамических эффектов в предкритической области, что требует учёта материальной нелинейности.

Классический подход опирается на статические критические нагрузки, однако многочисленные эксперименты и современные вычисления показывают, что динамические эффекты и колебания существенно влияют на наступление предельных состояний; это стимулировало переход к динамико–колебательному анализу предкритической области ^[6–9]

В инженерной практике для быстрого учёта пластичности широко применяют эффективный (касательно–секущий) модуль $E(\hat{\varepsilon})$, получаемый из экспериментальной диаграммы $\sigma-\varepsilon$ на заданном участке. Замена $E = \text{const}$ на $E(\hat{\varepsilon})$ в уравнениях Доннелла–Муштари–Власова позволяет сохранить линейную структуру уравнений движения и ввести влияние пластичности в виде масштабирования частот ^[5, 10–12]

Цель данной работы — получить явные формулы и численные оценки собственных частот тонкостенной цилиндрической оболочки в постановке Доннелла–Муштари–Власова при применении $E(\hat{\varepsilon})$. Линейный расчёт оболочек с постоянным E завышает частоты и занижает амплитуды при выходе материала в пластическую область; корректировка через $E(\hat{\varepsilon})$ позволяет сохранить линейную структуру уравнений движения и ввести материальную нелинейность в виде масштабирования спектра частот.^[13]

1. Постановка задачи и вывод модальных уравнений Рассматривается цилиндрическая тонкостенная оболочка радиуса R и длины l с толщиной h , коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ . Предполагается тонкость оболочки

$$\frac{h}{R} \ll 1.$$

Координаты срединной поверхности: $x \in [0, l]$ (вдоль образующей), $y \in [0, 2\pi R]$ (дуговая координата, $y = R\theta$). Для учёта выхода материала в пластическую зону применяем касательно–секущий подход: в уравнениях заменяем

$$E \mapsto E_{\text{sec}}(\hat{\varepsilon}), \quad (1)$$

где альтернативно может использоваться касательный модуль $E_{\text{tg}}(\varepsilon) = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$.

Вводим функцию напряжений Эйри $\Phi(x, y, t)$. Мембранные усилия выражаются через Φ следующим образом:

$$N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, N_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (2)$$

Базовые уравнения ДМВ с учётом секущего модуля:

$$D(\tilde{\varepsilon}) \Delta^2 w + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \rho h \ddot{w} = 0 \quad (3)$$

$$\Delta^2 \Phi - \frac{E_{\sec}(\tilde{\varepsilon}) h}{R(1 - \nu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (4)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \quad (5)$$

изгибная жёсткость определяется секущим модулем:

$$D(\tilde{\varepsilon}) = \frac{E_{\sec}(\tilde{\varepsilon}) h^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (6)$$

Представим динамический прогиб как сочетание трёх модальных компонент:

$$w(x, y, t) = A(t) \cos(sy) \sin(rx) + B(t) \sin(sy) \sin(rx) + C(t) \sin(rx), \quad (7)$$

где

$$r = \frac{\pi m}{l}, \quad s = \frac{n}{R}, \quad m \geq 1, \quad n \geq 0.$$

Вычислим производные по x :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = r \left[A(t) \cos(sy) \cos(rx) + B(t) \sin(sy) \cos(rx) + C(t) \cos(rx) \right], \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -r^2 \left[A(t) \cos(sy) \sin(rx) + B(t) \sin(sy) \sin(rx) + C(t) \sin(rx) \right] = -r^2 w. \quad (9)$$

Подстановка уравнения (7) в (3) и (4) и поиск функции напряжений в виде

$$\Phi(x, y, t) = \Phi_1(t) \cos(sy) \sin(rx) + \Phi_2(t) \sin(sy) \sin(rx) + \Phi_3(t) \sin(rx) \quad (10)$$

приводят к соотношениям для $\Phi_i(t)$, поскольку w_{xx} выступает источником в уравнении для Φ . где $\Phi_i(t)$ — модальные функции напряжения. Вычислим билипласиан:

$$\Delta^2 \Phi = (r^2 + s^2)^2 \left[\Phi_1(t) \cos(sy) \sin(rx) + \Phi_2(t) \sin(sy) \sin(rx) \right] + r^4 \Phi_3(t) \sin(rx). \quad (11)$$

Сопоставление выражений из (4) и (11) даёт три соотношения:

$$\begin{aligned}
(r^2 + s^2)^2 \Phi_1(t) &= -\frac{E_{\sec}(\tilde{\varepsilon}) h r^2}{R(1 - \nu^2)} A(t), \\
(r^2 + s^2)^2 \Phi_2(t) &= -\frac{E_{\sec}(\tilde{\varepsilon}) h r^2}{R(1 - \nu^2)} B(t), \\
r^4 \Phi_3(t) &= -\frac{E_{\sec}(\tilde{\varepsilon}) h r^2}{R(1 - \nu^2)} C(t).
\end{aligned} \tag{12}$$

Отсюда явные выражения:

$$\begin{aligned}
\Phi_1(t) &= -\frac{E_{\sec}(\tilde{\varepsilon}) h r^2}{(1 - \nu^2)R(r^2 + s^2)^2} A(t), \\
\Phi_2(t) &= -\frac{E_{\sec}(\tilde{\varepsilon}) h r^2}{(1 - \nu^2)R(r^2 + s^2)^2} B(t), \\
\Phi_3(t) &= -\frac{E_{\sec}(\tilde{\varepsilon}) h}{(1 - \nu^2)Rr^2} C(t).
\end{aligned} \tag{13}$$

Для проекции на модальные функции вычислим интегралы по области $[0, l] \times [0, 2\pi R]$.

$$\begin{aligned}
\int_0^l \sin^2(rx) dx &= \frac{l}{2}, \\
\int_0^{2\pi R} \cos^2(sy) dy &= \pi R, \quad \int_0^{2\pi R} \sin^2(sy) dy = \pi R, \\
\int_0^{2\pi R} \sin(sy) \cos(sy) dy &= 0, \quad \int_0^{2\pi R} \sin(sy) dy = 0, \quad \int_0^{2\pi R} \cos(sy) dy = 0, \\
\int_0^{2\pi R} dy &= 2\pi R.
\end{aligned} \tag{14}$$

Базисные функции:

$$\psi_1(x, y) = \cos(sy) \sin(rx), \quad \psi_2(x, y) = \sin(sy) \sin(rx), \quad \psi_3(x, y) = \sin(rx). \tag{15}$$

Их нормы:

$$\begin{aligned}
\iint \psi_1^2 dx dy &= \iint \psi_2^2 dx dy = \frac{l}{2} \pi R, \\
\iint \psi_3^2 dx dy &= \pi l R.
\end{aligned}$$

перекрёстные интегралы равны нулю:

$$\iint \psi_i \psi_j dx dy = 0, \quad i \neq j. \tag{16}$$

Проецируя уравнение (3) на каждую базисную функцию ψ_i и используя выражения (13) вместе с ортогональными соотношениями получаем для модальных амплитуд следующие ОДУ:

$$\rho h \ddot{A}(t) + \frac{E_{\sec}(\tilde{\varepsilon})}{1 - \nu^2} \left[\frac{h^2}{12} (r^2 + s^2)^2 + \frac{r^4}{R^2(r^2 + s^2)^2} \right] A(t) = 0, \quad (17)$$

$$\rho h \ddot{B}(t) + \frac{E_{\sec}(\tilde{\varepsilon})}{1 - \nu^2} \left[\frac{h^2}{12} (r^2 + s^2)^2 + \frac{r^4}{R^2(r^2 + s^2)^2} \right] B(t) = 0, \quad (18)$$

$$\rho h \ddot{C}(t) + \frac{E_{\sec}(\tilde{\varepsilon})}{1 - \nu^2} \left[\frac{h^2}{12} r^4 + \frac{1}{R^2} \right] C(t) = 0. \quad (19)$$

Из уравнений (17)–(19) следуют квадраты собственных частот:

$$\omega_{AB}^2(\tilde{\varepsilon}) = \frac{E_{\sec}(\tilde{\varepsilon})}{\rho(1 - \nu^2)} \left[\frac{h^2}{12} (r^2 + s^2)^2 + \frac{r^4}{R^2(r^2 + s^2)^2} \right], \quad f_{AB}(\tilde{\varepsilon}) = \frac{\omega_{AB}(\tilde{\varepsilon})}{2\pi}, \quad (20)$$

$$\omega_C^2(\tilde{\varepsilon}) = \frac{E_{\sec}(\tilde{\varepsilon})}{\rho(1 - \nu^2)} \left[\frac{h^2}{12} r^4 + \frac{1}{R^2} \right], \quad f_C(\tilde{\varepsilon}) = \frac{\omega_C(\tilde{\varepsilon})}{2\pi}. \quad (21)$$

Пара $\{A, B\}$ описывает неосесимметричные моды ($n \geq 1$), а C — осесимметричную моду ($n = 0$). Учёт выхода материала в пластическую область выполняется заменой $E \rightarrow E_{\sec}(\tilde{\varepsilon})$; при фиксированных ρ, ν и геометрии это приводит к масштабированию спектра

$$\omega^2 \propto E_{\sec}(\tilde{\varepsilon}) \quad \Rightarrow \quad f(\tilde{\varepsilon}) \propto \sqrt{E_{\sec}(\tilde{\varepsilon})},$$

одинаково для мод $\{A, B\}$ и C (с отличием лишь в геометрических множителях внутри скобок). Такая подстановка учитывает только изменение упругой жёсткости; возможное пластическое/структурное демпфирование в ней не входит.

2. Численный пример Рассматривается тонкостенная цилиндрическая оболочка из материала сталь3 (Ст3) со свойствами

$$R = 0.75 \text{ м}, \quad l = 1.5 \text{ м}, \quad h = 0.006 \text{ м}, \quad \nu = 0.30, \quad \rho = 7800 \text{ кг/м}^3,$$

что удовлетворяет условию тонкости $h/R = 0.008 \ll 1$. Материальная нелинейность учитывается секущим модулем, полученным по диаграмме растяжения (рис. 1); аппроксимация $E_{\sec}(\varepsilon)$ показана на (рис. 2) и используется в формулах собственных частот (20), (21).

Исследуются неосесимметричная мода $(m, n) = (2, 6)$ и осесимметричная $(m, n) = (1, 0)$. Определения $r = \pi m/l$, $s = n/R$. Численные значения равны

$$(2, 6) : r \simeq 4.1888 \text{ м}^{-1}, \quad s = 8.0 \text{ м}^{-1}; \quad (1, 0) : r \simeq 2.0944 \text{ м}^{-1}, \quad s = 0.$$

Частоты вычисляются по (20) для $\{A, B\}$ и по (21) для C , при этом $f = \omega/(2\pi)$.

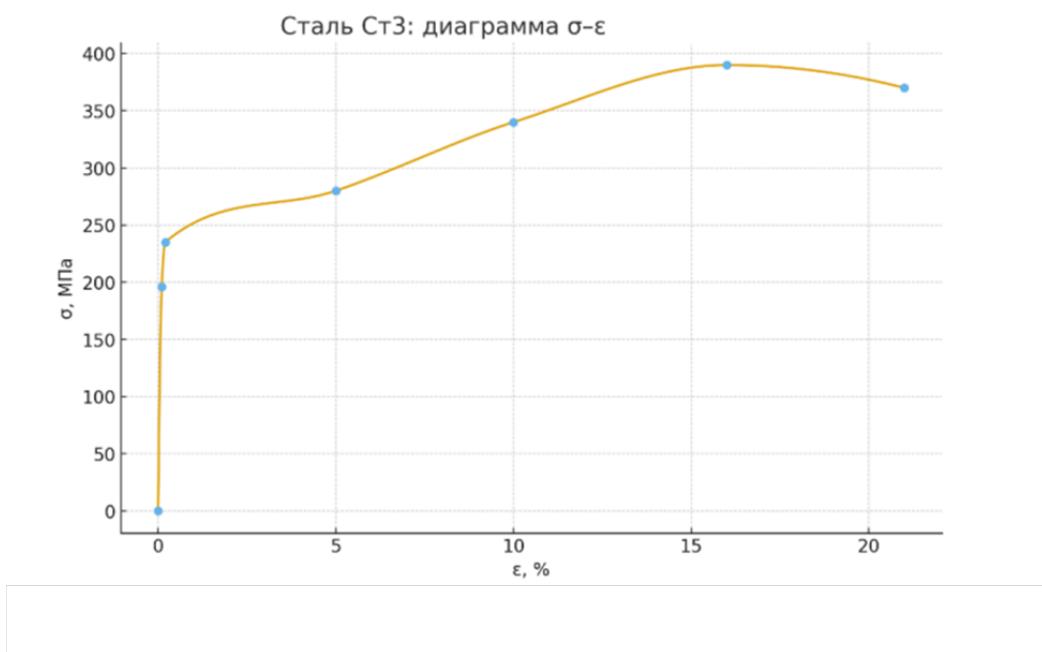


Рис. 1. Сталь Ст3: экспериментальная диаграмма растяжения $\sigma(\varepsilon)$ (ГОСТ 1497-84).

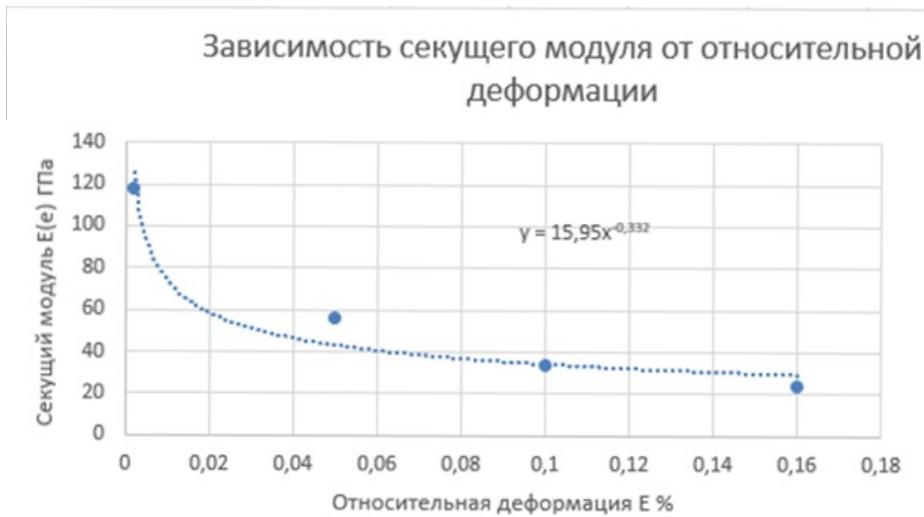


Рис. 2. Секущий модуль по данным рис. 1: $E_{\text{sec}}(\varepsilon) = 15.95 \varepsilon^{-0.332}$ (ГПа) при $\varepsilon \in [0.002, 0.16]$.

Введём геометрические множители

$$\mathcal{K}_{AB} = \frac{h^2}{12} (r^2 + s^2)^2 + \frac{r^4}{R^2(r^2 + s^2)^2}, \quad \mathcal{K}_C = \frac{h^2}{12} r^4 + \frac{1}{R^2}.$$

Коэффициент

$$K = \frac{\mathcal{K}}{\rho(1 - \nu^2)}, \quad f(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{K E_{\sec}(\varepsilon)}.$$

Численные значения примера для $(m, n) = (2, 6)$:

$$\mathcal{K}_{AB} = 1.02254 \times 10^{-1}, \quad K_{AB} = \frac{\mathcal{K}_{AB}}{\rho(1 - \nu^2)} = \frac{1.02254 \times 10^{-1}}{7800 \cdot 0.91} = 1.4406 \times 10^{-5} \text{ м кг}^{-1}.$$

Численные значения примера для $(m, n) = (1, 0)$:

$$\mathcal{K}_C = 1.7778355, \quad K_C = \frac{\mathcal{K}_C}{\rho(1 - \nu^2)} = \frac{1.7778355}{7800 \cdot 0.91} = 2.5047 \times 10^{-4} \text{ м кг}^{-1}.$$

Частоты

$$f_{AB}(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{K_{AB} E_{\sec}(\varepsilon)}, \quad f_C(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{K_C E_{\sec}(\varepsilon)}.$$

$$f_{AB}(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E_{\sec}(\varepsilon)}{\rho(1 - \nu^2)} \left[1.02254 \times 10^{-1} \right]}, \quad f_C(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E_{\sec}(\varepsilon)}{\rho(1 - \nu^2)} \left[1.7778355 \right]}.$$

Частотные значения. Итоговые частоты для набора деформаций сведены в табл. 1. Видно, что при уменьшении E_{\sec} (рост ε) частоты снижаются как $f \propto \sqrt{E_{\sec}}$; у осесимметричной моды C значения выше из-за доминирующего вклада $1/R^2$.

ε	E_{\sec} (ГПа)	f_{AB} (Гц)	f_C (Гц)
0.002	125.55	214.0	892.5
0.005	92.62	183.8	766.6
0.010	73.58	163.9	683.2
0.020	58.45	146.1	609.0
0.050	43.12	125.4	523.1
0.100	34.26	111.8	466.2
0.160	29.31	103.4	431.2

Таблица 1. Частоты мод $\{A, B\}$ и C для оболочки из стали Ст3 при разных ε .

См. также рис. 1 и рис. 2 для связи частот с диаграммой σ – ε и зависимостью $E_{\sec}(\varepsilon)$.

Как видно из табл. 1, с ростом пластической деформации секущий модуль E_{\sec} уменьшается, что приводит к снижению собственных частот колебаний. Это подчёркивает существенное влияние пластичности материала на динамические характеристики конструкции.

Заключение Использование секущего модуля, полученного по экспериментальной диаграмме растяжения $\sigma(\varepsilon)$, позволяет адекватно учесть нелинейные свойства материала без необходимости в полном нелинейном конечно-элементном анализе; такой подход эффективен для инженерных оценок и параметрических расчётов. Требование тонкостенности $h/R = 0.008 \ll 1$ соблюдено, что оправдывает применение модели Доннелла–Муштари–Власова; полученные формулы собственных частот корректны в рамках этой постановки. Материальная нелинейность учтена через секущий модуль $E_{\sec}(\varepsilon)$,

$$E_{\sec}(\varepsilon) = 15,95 \varepsilon^{-0,332} \text{ (ГПа)}, \quad \varepsilon \in [0,002; 0,16],$$

что обеспечивает согласованную подстановку в частотные формулы без полно-нелинейных расчётов.

Получены компактные выражения для частот:

$$f_{AB}(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{K_{AB} E_{\sec}(\varepsilon)}, \quad f_C(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{K_C E_{\sec}(\varepsilon)},$$

с геометрическими коэффициентами

$$K_{AB} = 1,4406 \times 10^{-5} \text{ м} \cdot \text{кг}^{-1}, \quad K_C = 2,5047 \times 10^{-4} \text{ м} \cdot \text{кг}^{-1}.$$

Частоты масштабируются как $f \propto \sqrt{E_{\sec}}$. В расчётах и диагностике тонкостенных цилиндрических конструкций из пластичных сталей недостаточно использовать лишь упругий модуль $E = \text{const}$. Необходимо учитывать зависимость $E_{\sec}(\varepsilon)$, особенно вблизи предела текучести, чтобы избежать недооценки амплитуд колебаний и ошибок в оценке резонансных частот.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. О. Е. Сысоев — постановка задачи, методология и теоретические выводы, верификация результатов, написание и финальное утверждение рукописи. А. Н. Намоконов — обзор литературы, постановка и проведение численных экспериментов, обработка данных, подготовка иллюстраций, первоначальный вариант текста. Е. О. Сысоев — анализ результатов, оформление таблиц и рисунков, научное и языковое редактирование, согласование финальной версии рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. О. Е. Сысоев — problem statement, methodology and theoretical derivations, results verification, writing and final approval of the manuscript. А. Н. Намоконов — literature review, setup and execution of numerical experiments, data processing, preparation of illustrations, initial draft of the text. Е. О. Сысоев — results analysis, preparation of tables and figures, scientific and linguistic editing, coordination of the final version of the manuscript.

Competing interests. The authors declare no competing interests.

Funding. The authors report no external funding for this research.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кубенко В. Д., Ковалчук П. С., Краснопольская Т. С. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. – Киев : Наукова думка, 1984. – 220 с.
2. Исследование свободных и вынужденных колебаний разомкнутых тонкостенных железобетонных оболочек / Е. О. Сысоев [и др.] // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2020. – 1 (43). – С. 121–130.
3. Cammalleri M., Castellano A. A Dynamic Matrix for the Study of Free Vibrations of Thin Circular Cylindrical Shells under Different Boundary Conditions // Designs. – 2023. – Т. 7, № 6. – С. 122. – DOI: 10.3390/designs7060122.
4. Frequency response of spinning cylindrical shells / Q. Chai [и др.] // Thin-Walled Structures. – 2023. – DOI: 10.1016/j.tws.2022.110253.
5. Nonlinear vibrations of fiber-reinforced composite cylindrical shells / H. Li [и др.] // Journal of Sound and Vibration. – 2021. – DOI: 10.1016/j.jsv.2021.115935.
6. Nonlinear Vibration Analysis for Stiffened Cylindrical Shells / X. Q. Li [и др.] // Shock and Vibration. – 2021. – DOI: 10.1155/2021/9983459.
7. Gholami I., Amabili M., Païdoussis M. P. Dynamic divergence of circular cylindrical shells conveying airflow // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2022. – DOI: 10.1016/j.ymssp.2021.108496.
8. Gholami I., Amabili M., Païdoussis M. P. Experimental parametric study on dynamic divergence instability and chaos of circular cylindrical shells conveying airflow // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2022. – DOI: 10.1016/j.ymssp.2021.108755.
9. Латухин А. Ю., Латухина Ю. А. Свободные колебания осесимметричных оболочечных конструкций // Международный научно-исследовательский журнал. – 2020. – 3 (93). – С. 43–48. – DOI: 10.23670/IRJ.2020.93.3.005.
10. Бочкарёв С. А. Численное моделирование собственных колебаний покоящейся на упругом основании Пастернака цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью // Вычислительные технологии. – 2022. – Т. 27, № 4. – С. 15–32. – DOI: 10.25743/ICT.2022.27.4.003.
11. Сысоев Е. О., Добрышкін А. Ю., Сысоев О. Е. Численные исследования колебаний композитных токостенных цилиндрических разомкнутых оболочек // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. – 2022. – 3 (59). – С. 85–90. – DOI: 10.17084/20764359-2022-59-85.
12. Андрианов И. К. Численная модель многокритериальной оптимизации тепловой защиты оболочечных элементов в условиях теплового и силового нагружения // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. – 2021. – 3 (51). – С. 14–20. – DOI: 10.17084/20764359-2021-51-14.
13. Антуфьев Б. А., Сукманов И. В. Динамическое поведение тонкостенной конструкции с упругим заполнителем под действием подвижной нагрузки // Труды МАИ. – 2021. – № 116. – DOI: 10.34759/trd-2021-116-03.

REFERENCES

1. Kubenko V. D., Kovalchuk P. S., Krasnopolskaya T. S. Nonlinear interaction of bending vibration modes of cylindrical shells. – Kyiv : Naukova Dumka, 1984. – 220 p. – (in Russian).
2. Study of free and forced vibrations of open thin-walled reinforced-concrete shells / E. O. Sysoev [et al.] // Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. – 2020. – 1 (43). – P. 121–130. – DOI: 10.37972/chgpu.2020.43.1.013. – (in Russian).
3. Cammalleri M., Castellano A. A Dynamic Matrix for the Study of Free Vibrations of Thin Circular Cylindrical Shells under Different Boundary Conditions // Designs. – 2023. – Vol. 7, no. 6. – P. 122. – DOI: 10.3390/designs7060122.
4. Frequency response of spinning cylindrical shells / Q. Chai [et al.] // Thin-Walled Structures. – 2023. – DOI: 10.1016/j.tws.2022.110253.
5. Nonlinear vibrations of fiber-reinforced composite cylindrical shells / H. Li [et al.] // Journal of Sound and Vibration. – 2021. – DOI: 10.1016/j.jsv.2021.115935.
6. Nonlinear Vibration Analysis for Stiffened Cylindrical Shells / X. Q. Li [et al.] // Shock and Vibration. – 2021. – DOI: 10.1155/2021/9983459.
7. Gholami I., Amabili M., Païdoussis M. P. Dynamic divergence of circular cylindrical shells conveying airflow // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2022. – DOI: 10.1016/j.ymssp.2021.108496.
8. Gholami I., Amabili M., Païdoussis M. P. Experimental parametric study on dynamic divergence instability and chaos of circular cylindrical shells conveying airflow // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2022. – Vol. 169. – DOI: 10.1016/j.ymssp.2021.108755.
9. Latukhin A. Y., Latukhina Y. A. Free Vibrations of Axisymmetric Shell Structures // International Research Journal. – 2020. – 3 (93). – P. 43–48. – DOI: 10.23670/IRJ.2020.93.3.005. – (in Russian).
10. Bochkaryov S. A. Numerical Simulation of Natural Vibrations of a Cylindrical Shell Resting on a Pasternak Elastic Foundation and Partially Filled with Liquid // Computational Technologies. – 2022. – Vol. 27, no. 4. – P. 15–32. – DOI: 10.25743/ICT.2022.27.4.003. – (in Russian).
11. Sysoev E. O., Dobryshkin A. Y., Sysoev O. E. Numerical Studies of Vibrations of Composite Thin-Walled Open Cylindrical Shells // Scientific Notes of Komsomolsk-on-Amur State Technical University. – 2022. – 3 (59). – P. 85–90. – DOI: 10.17084/20764359-2022-59-85. – (in Russian).
12. Andrianov I. K. A Numerical Model for Multi-Criteria Optimization of Thermal Protection of Shell Elements under Thermal and Mechanical Loading // Scientific Notes of Komsomolsk-on-Amur State Technical University. – 2021. – 3 (51). – P. 14–20. – DOI: 10.17084/20764359-2021-51-14. – (in Russian).
13. Antufyev B. A., Sukmanov I. V. Dynamic Behavior of a Thin-Walled Structure with an Elastic Filler Under a Moving Load // Trudy MAI (Proceedings of the Moscow Aviation Institute). – 2021. – No. 116. – DOI: 10.34759/trd-2021-116-03. – (in Russian).

С. Ю. Иванова¹, К. Ю. Осипенко¹, А. И. Демин¹, Н. В. Баничук¹,
Д. С. Лисовенко¹

О ВЛИЯНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ ГИБКИХ СОТОВЫХ МЕТАМАТЕРИАЛОВ НА ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ УДАРНИКА ПРИ ПРОБИВАНИИ

¹Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Аннотация. Экспериментально исследовалось сопротивление образцов ауксетических метаматериалов, изготовленных на 3D-принтере из гибкого термопластичного полиуретана (ТРУ 95А пластика) на основе ячейки в виде вогнутого шестиугольника (метаматериалов с отрицательным коэффициентом Пуассона), пробиванию по нормали жестким сферическим ударником. Были подготовлены образцы, внутренняя структура которых отличалась углом поворота (0, 30, 45, 60 или 90 градусов) относительно вертикальной оси. Образцы сравнивались по способности снижать кинетическую энергию ударников на скорости около 190 м/с при температурах 5, 16, 25 и 35°C. Было установлено, что в рассмотренном диапазоне температур образцы наиболее эффективно сопротивляются пробиванию ударником при 25°C. При этом для всех температур наибольшее сопротивление характерно для ауксетических метаматериалов из термопластичного полиуретана, с развернутой на 90 градусов структурой.

Ключевые слова: метаматериалы, ауксетики, температура, экспериментальные исследования, пробивание, жесткие ударники.

Иванова Светлана Юрьевна, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаб. механики новых материалов и технологий; e-mail: ivanova@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0001-5096-2759>; AuthorID: 146039

Осипенко Кирилл Юрьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаб. механики новых материалов и технологий; e-mail: osipenko@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0001-9653-1831>; AuthorID: 16440

Демин Александр Иванович, ведущий инженер лаборатории механики новых материалов и технологий; e-mail: deminaliv@gmail.com; AuthorID: 226717

Баничук Николай Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаб. механики новых материалов и технологий; e-mail: banichuk@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0652-0934>; AuthorID: 8002

Лисовенко Дмитрий Сергеевич, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией механики новых материалов и технологий; e-mail: lisovenk@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0003-0485-3433>; AuthorID: 167930



для цитирования: Иванова С.Ю., Осипенко К.Ю., Демин А.И., Баничук Н.В., Лисовенко Д.С. О влиянии температуры гибких сотовых метаматериалов на потери энергии ударника при пробивании // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 4(66). С. 185–202. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.013. EDN: USAOTQ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

S. Yu. Ivanova¹, K. Yu. Osipenko¹, A. I. Demin¹, N. V. Banichuk¹, D. S. Lisovenko¹

ON THE EFFECT OF THE TEMPERATURE OF FLEXIBLE CELLULAR METAMATERIALS ON THE ENERGY LOSS OF THE IMPACTOR DURING PENETRATION

¹*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

Abstract. The resistance of auxetic metamaterial samples to normal penetration by a rigid spherical impactor was experimentally investigated. The samples were made on a 3D printer from thermoplastic polyurethane (TPU 95A plastic) based on a cell in the form of a concave hexagon, which has a negative Poisson's ratio. The internal structure of the manufactured samples differed in the angle of rotation (0, 30, 45, 60 or 90 degrees) relative to the vertical axis. The samples were compared in terms of their ability to reduce the kinetic energy of the impactors at a velocity of about 190 m/s at temperatures of 5, 16, 25, and 35°C. It was found that in the considered temperature range, the samples most effectively resist penetration by an impactor at 25°C. At the same time, for all temperatures, the greatest resistance is characteristic of auxetic metamaterials made of thermoplastic polyurethane, with a 90-degree unfolded structure.

Keywords: metamaterials, auxetics, temperature, experimental studies, penetration, rigid strikers.

Svetlana Yu. Ivanova, Cand. Sci. Phys. & Math., Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS;

<https://orcid.org/0000-0001-5096-2759>; AuthorID: 146039

Kirill Yu. Osipenko, Cand. Sci. Phys. & Math., Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS;

<https://orcid.org/0000-0001-9653-1831>; AuthorID: 16440

Alexander I. Demin, Engineer, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS; e-mail: deminaliv@gmail.com; AuthorID: 226717

Nikolay V. Banichuk, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Chief Scientific Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS;

<https://orcid.org/0000-0002-0652-0934>; AuthorID: 8002

Dmitry S. Lisovenko, Corresponding member RAS, Dr. Sci. Phys. & Math., Head of Laboratory, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS; e-mail: lisovenk@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0003-0485-3433>; AuthorID: 167930



to cite this article: Ivanova S. Yu., Osipenko K. Yu., Demin A. I., Banichuk N. V., Lisovenko D. S. On the effect of the temperature of flexible cellular metamaterials on the energy loss of the impactor during penetration // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 4(66). p. 185–202. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.013

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Библиография проблемы исследования механических свойств ауксетиков (материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона), в том числе создаваемых в настоящее время ауксетических метаматериалов, которые могут быть использованы при проектировании защитных противоударных покрытий конструкций, очень обширна [1–10]. В списке публикаций приведены некоторые работы по проблематике данной статьи (см., например, [2, 11–18]).

В [16] экспериментально исследовались механические свойства хиральных ауксетических и неауксетических метаматериалов из гибкого ТРУ 95А пластика (термопластичного полиуретана), внутренняя структура которых состояла из ячеек на основе вогнутого или выпуклого шестиугольника. Результаты экспериментов по пробиванию образцов были представлены для двух значений температуры (16 и 25°C) и двух скоростных режимов пробивания (150 и 190 м/с). Относительная потеря кинетической энергии ударника при пробивании ауксетических образцов была существенно выше, чем неауксетических. Установлено, что для исследованных видов гибких метаматериалов сопротивляемость пробиванию ударником при 25°C выше, чем при 16°C. В [17] образцы метаматериалов из гибкого ТРУ 95А пластика (термопластичного полиуретана) и жесткого e-PLA пластика с ауксетической хиральной и нехиральной структурой сравнивались по способности сопротивляться пробиванию жестким ударником. В ходе проведения экспериментов было установлено, что наиболее эффективными по сопротивлению пробиванию ударником являются ауксетики из термопластичного полиуретана, с развернутой на 90 градусов относительно исходного (вертикального) направления нехиральной структурой. Поворот внутренней структуры относительно вертикальной оси (на 0, 30, 60 или 90 градусов) рассматривался в [18] для метаматериалов с хиральной и нехиральной внутренней структурой из гибкого термопластичного полиуретана (ТРУ 95А пластика) и жесткого e-PLA пластика. Образцы сравнивались по способности снижать кинетическую энергию ударников на скорости около 190 м/с при температуре 16°C. По результатам проведенных экспериментов по пробиванию образцов было установлено, что наиболее эффективными по сопротивлению пробиванию ударником являются ауксетики из термопластичного полиуретана, с развернутой на 90 градусов нехиральной структурой. Из проведенных в [16–18] экспериментальных исследований можно сделать обобщающий вывод, что лучше всего сопротивляются пробиванию ударником образцы гибкого нехирального ауксетического материала из ТРУ 95А пластика с внутренней структурой, развернутой на 90 градусов. При этом при температуре 25°C потери кинетической энергии ударника были выше, чем при 16°C.

Данная работа является продолжением описанных выше исследований и представляет результаты экспериментов по пробиванию образцов гибкого нехирального ауксетического метаматериала из ТРУ 95А пластика, высокая эффективность которого в плане гашения энергии ударника была установлена ранее. Сравниваются по сопротивляемости пробиванию нехиральные ауксетические

образцы с поворотом внутренней структуры на 0, 30, 45, 60 и 90 градусов при температурах 5, 16, 25 и 35°C.

1. Эксперимент и обсуждение. Для проведения экспериментов с помощью 3D принтера были изготовлены ауксетические образцы метаматериалов из ТРУ 95А пластика с поворотом внутренней структуры на угол $\alpha = 0, 30, 45, 60, 90$ градусов относительно вертикальной оси y (см. рис.1). Будем считать, что угол α принимает положительные значения при повороте структуры по часовой стрелке и отрицательные – при повороте против часовой стрелки. Образцы закреплялись в штативе и простреливались вдоль оси x стальным сферическим ударником на скорости ~ 190 м/с по нормали к боковой поверхности, имеющей размеры $\sim 70 \times 75$ мм. Образцы выдерживались в термостате не менее 4 часов при температуре 5, 16, 25 или 35°C. Ударник массой 4.06 г и диаметром 10 мм разгонялся пневматической пушкой и входил без вращения в преграду. Скорость входа ударника измерялась с помощью оптического рамочного хронографа ИБХ-АСС-0021 «Стрелец», а также с помощью высокоскоростной видеокамеры FASTCAM mini AX200, на которую записывался процесс пробивания образца. Камера применялась также для определения скорости вылета ударника из преграды. Результаты проведенных экспериментов приведены в табл.1-4 для значений температуры образцов 5, 16, 25 и 35°C, соответственно.

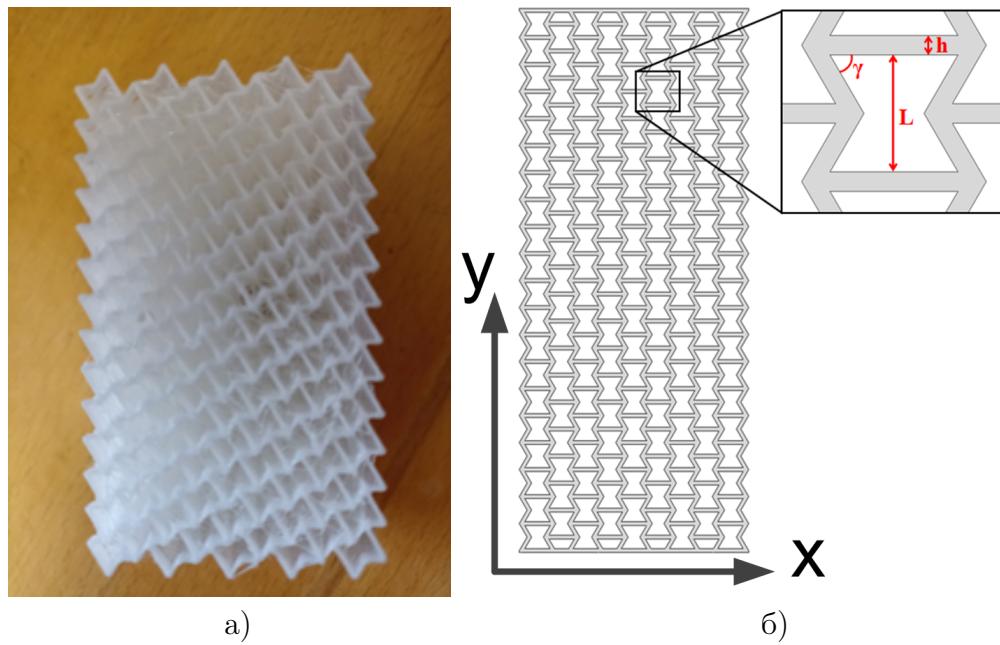


Рис. 1. Пример ауксетического образца с поворотом структуры по часовой стрелке на угол $\alpha = 60^\circ$: (а) напечатанный на 3D принтере образец из ТРУ 95А пластика; (б) 3D модель (при $\alpha = 0^\circ$): $L = 3$ мм, $h = 0.5$ мм, $\gamma = 60^\circ$.

Таблица 1. Пробивание нехиральныхных ауксетических образцов из ТРУ 95А пластика при температуре 5°C (результаты экспериментов).

Номер эксперимента/образца	α , град.	Кол-во слоев/масса, г	Скорость входа ударника v_1 , м/с	Скорость выхода ударника v_2 , м/с	$\delta = (v_1^2 - v_2^2) / v_1^2$, %
406/394	0	6/46.3	190.5	162	27.7
407/395	0	6/46.1	189	163.5	25.2
416/404	-30	6/49.5	190.5	155.6	33.3
415/403	30	6/47.3	192	159.4	31.1
449/437	-45	6/49.2	192	156.8	33.3
438/426	45	6/48.9	190.5	156.3	32.7
423/411	-60	6/48	192	156.3	33.7
422/410	60	6/45.3	192	158.2	32.1
428/416	90	6/49.8	192	157.5	32.7
429/417	90	6/47.8	190.5	153.8	34.8
408/396	0	9/65.8	190	150	37.7
409/397	0	9/69.2	193.5	150	39.9
413/401	-30	9/72	191.7	142.5	44.7
412/400	30	9/73.3	191.7	139.1	47.3
420/408	60	9/70.8	191.7	130.7	53.5
421/409	-60	9/67.5	190.5	128.8	54.3
426/414	90	9/72	190.5	137.7	47.7
427/415	90	9/70.5	189	136.9	47.5
433/421	45	10/70.7	190.5	130.7	52.9
450/438	45	10/71.2	191.7	142.5	44.7
411/399	0	12/86.5	191.7	142.5	44.7
454/442	0	12/85.9	193.1	135	51.1
414/402	-30	11/86.3	190	130	53.2
410/398	30	11/84.5	191.7	133.5	51.5
425/413	-60	12/91.2	191.7	123	58.8
453441	60	12/87.6	192	127.5	55.9
430/418	90	11/87.7	193.3	126.9	56.9
452/440	90	11/87.8	191.7	122.3	59.3
436/424	45	13/86.3	193.3	131.3	53.9
451/439	-45	13/88.8	192	127.5	55.9

Таблица 2. Пробивание нехиральныхных ауксетических образцов из ТРУ 95А пластика при температуре 16°C (результаты экспериментов).

Номер эксперимента/образца	α , град.	Кол-во слоев/масса, г	Скорость входа ударника v_1 , м/с	Скорость выхода ударника v_2 , м/с	$\delta = (v_1^2 - v_2^2) / v_1^2$, %
215/203	0	6/44.5	193.3	148.9	40.7
217/205	0	6/44.9	193.3	150	39.8
274/262	-30	6/46.6	193.3	151.9	38.2
277/265	30	6/46	192	154	35.7
294/282	-45	6/48	193.6	145.7	43.4
286/274	45	6/46	193.6	153.2	37.4
280/268	-60	6/45.3	195	152.1	39.2
281/269	60	6/44.8	193.3	146	43
213/201	90	6/46.4	190.9	145	42.3
218/206	90	6/47.7	193.3	141.9	46.1
306/294	-60	8/59.6	195	135	52.1
310/298	60	8/62.3	192	131.3	53.2
222/210	0	9/65.4	192.3	137.5	48.9
224/212	0	9/65.1	193.3	132.5	53
227/215	0	9/67	191.7	133.8	51.3
278/266	-30	9/71.7	193.1	127	56.7
279/267	30	9/69.8	191.7	126	56.8
311/299	45	9/66.2	195	125	58.9
312/300	-45	9/66	195	129	57.1
284/272	60	9/67.2	192	113.7	64.9
288/276	60	9/68.3	196.5	116.7	64.7
292/280	-60	9/68.4	193.3	115.5	64.3
211/199	90	9/67	193.3	100.6	72.9
212/200	90	9/67	191.7	114.6	64.3
290/278	45	10/70.5	193.1	116.3	63.7
296/284	45	10/72.1	192	113.8	64.7
313/301	-45	10/68.9	191.7	126.6	56.4
300/288	60	10/77.1	193.5	111.2	67
302/290	-60	10/74.2	191.7	107.3	68.7
216/204	0	12/85.8	193.3	110	67.6
221/209	0	12/87.8	193.3	110	67.6
223/211	0	12/87.3	191.7	112.5	65.6
275/263	-30	11/84.4	193.3	105.9	70
276/264	30	11/85.7	193.3	99	73.7

продолжение на следующей странице

Таблица 2 – Продолжение

Номер эксперимента/образца	α , град.	Кол-во слоев/масса, г	Скорость входа ударника v_1 , м/с	Скорость выхода ударника v_2 , м/с	$\delta = (v_1^2 - v_2^2) / v_1^2, \%$
299/287	-30	11/88.8	191.7	87.2	79.3
314/302	45	11/76	193.1	115.8	45
304/292	60	11/84.6	193.1	83.9	81.1
303/291	-60	11/79.8	193.1	116.5	63.6
307/295	-60	11/82.1	193.5	116	64.1
315/303	45	12/76.9	191.3	125.6	56.9
316/304	-45	12/80.6	191.3	114.7	64.1
283/271	-60	12/83.4	196.9	113.4	66.8
282/270	60	12/83.7	192.9	115.6	64.1
293/281	-60	12/85.2	193.1	106.3	69.8
308/296	-60	12/87.4	195	111.6	67.2
309/297	60	12/86.8	192	102.2	71.7
219/207	90	11/87.3	195	86.3	80.4
228/216	90	11/87.3	195	68.3	87.7
298/286	30	13/10.7	193.5	0	100
297/285	-30	13/10.2	195	64.8	89
291/279	-45	13/86.3	192.9	109.4	67.8
287/275	45	13/84.2	195	112.5	66.7
295/283	-45	13/83.5	193.3	106.6	69.6
301/289	-60	13/97.9	193.5	0	100
305/293	60	13/97.4	193.1	67.5	87.8

Таблица 3. Пробивание нехиральных ауксетических образцов из ТРУ 95А пластика при температуре 25°C (результаты экспериментов).

Номер эксперимента/образца	α , град.	Кол-во слоев/масса, г	Скорость входа ударника v_1 , м/с	Скорость выхода ударника v_2 , м/с	$\delta = (v_1^2 - v_2^2) / v_1^2, \%$
323/311	0	6/47.3	192.3	141.9	45.5
326/314	0	6/45.4	195	146.5	43.6
331/319	-30	6/46.3	195	143.6	45.8
330/318	30	6/44.8	193.6	140.4	47.4
356/344	-45	6/45.3	193.6	143.1	45.4

продолжение на следующей странице

Таблица 3 – Продолжение

Номер эксперимента/образца	α , град.	Кол-во слоев/масса, г	Скорость входа ударника v_1 , м/с	Скорость выхода ударника v_2 , м/с	$\delta = (v_1^2 - v_2^2) / v_1^2, \%$
355/343	45	6/47	190.9	141.9	44.7
337/325	-60	6/46.7	190.5	129.7	53.6
336/324	60	6/46.9	192	132	52.7
346/334	90	6/45.4	186	130	51.2
347/335	90	6/47.5	195	132	54.2
349/337	-60	8/58	192.3	121.9	59.8
348/336	60	8/56.1	192.3	126.2	56.9
459/447	0	9/68.8	191.5	105	69.9
328/316	0	9/65.6	195	117	64
440/428	0	9/65.9	193.8	117.5	63.2
333/321	-30	9/72	193.5	100.5	73
332/320	30	9/71.8	193.3	100	73.2
462/450	30	9/75.1	191.1	88.9	78.4
371/359	45	9/65.5	192	118.1	62.2
340/328	60	9/67.1	195	118.9	62.8
370/358	60	9/66	193.5	116.3	64
341/329	-60	9/69.1	192	108.2	67.8
463/451	-60	9/69.8	190	110.7	66,1
375/363	90	9/71.6	191.7	89.2	78.3
458/446	90	9/72.9	191.7	73.8	85.2
461/449	90	9/71.8	192	76.6	84.1
360/348	45	10/69.1	195	122.1	60.8
361/349	-45	10/68.3	190.5	111	66
350/338	60	10/73.6	190.5	96.7	74.2
369/357	-60	10/73.1	193.3	107.4	69.1
351/339	60	11/76.6	190.5	93	76.2
352/340	-60	11/83.8	193.5	100.3	73.1
460/448	60	11/82.3	192.5	92.9	76.7
325/313	0	12/89	193.1	81	82.4
329/317	0	12/85.4	193.3	92.4	77.2
441/429	0	12/87.7	191.7	75	84.7
335/323	-30	11/85.2	191.7	83.2	81.2
334/322	30	11/84.6	192	70.8	86.4
372/360	45	11/79	193.3	98.3	74.1
373/361	45	12/83.7	192	96	75
442/430	45	12/81.7	192	84	80.9

продолжение на следующей странице

Таблица 3 – Продолжение

Номер эксперимента/образца	α , град.	Кол-во слоев/масса, г	Скорость входа ударника v_1 , м/с	Скорость выхода ударника v_2 , м/с	$\delta = (v_1^2 - v_2^2) / v_1^2, \%$
351/339	60	11/76.6	190.5	93	76.2
352/340	-60	11/83.8	193.5	100.3	73.1
339/327	-60	12/90.3	192	71.1	86.3
338/326	60	12/90.5	193.3	57	91.3
342/330	90	11/89.1	195	39	96
374/362	90	11/84.7	193.3	46.7	94
357/345	45	13/80.4	192	91.9	77.1
358/346	-45	13/81.4	191.7	90	78

Таблица 4. Пробивание нехиральных ауксетических образцов из ТРУ 95А пластика при температуре 35°C (результаты экспериментов).

Номер эксперимента/образца	α , град.	Кол-во слоев/масса, г	Скорость входа ударника v_1 , м/с	Скорость выхода ударника v_2 , м/с	$\delta = (v_1^2 - v_2^2) / v_1^2, \%$
387/375	0	6/43.9	190.9	150	38.3
393/381	0	6/44.8	192	150	39
379/367	-30	6/43	192	147.7	40.8
378/366	30	6/45.3	190.5	141.9	44.5
400/388	-45	6/47.7	192	148.8	39.9
399/387	45	6/47.8	189	146.3	40.1
384/372	-60	6/46.8	192	141.9	45.4
383/371	60	6/46.8	189.5	135	49.2
376/364	90	6/46.5	190.5	127	55.5
377/365	90	6/49	192	126.4	56.7
386/374	0	9/64.4	190.5	131.3	52.5
398/386	0	9/64.4	190.5	131.5	52.4
392/380	-30	9/70.3	190.5	116.5	62.6
380/368	30	9/66.3	192	106.3	69.3
401/389	45	9/64	190	133.8	50.4
402/390	-45	9/62.5	192	136.2	49.7
364/352	60	9/68	190.9	114.4	64.1
388/376	-60	9/67.7	193.5	125.8	57.7

продолжение на следующей странице

Таблица 4 – Продолжение

Номер эксперимента/образца	α , град.	Кол-во слоев/масса, г	Скорость входа ударника v_1 , м/с	Скорость выхода ударника v_2 , м/с	$\delta = (v_1^2 - v_2^2) / v_1^2$, %
447/435	90	9/72.3	195	104	71.6
448/436	90	9/72.2	192	111.3	66.4
391/379	90	9/68.8	192	107.1	68.9
362/350	0	12/85	192	82.5	81.5
385/373	0	12/87	190	97.5	73.7
446/434	-30	11/86.9	193.1	95	75.8
445/433	30	11/87.7	191.7	75	84.4
382/370	-60	12/87.2	189	82.1	81.1
365/353	60	12/88.1	192	86.3	79.8
367/356	90	11/81.9	190.5	80.8	82
390/378	90	11/84.2	191.7	78.5	83.2
366/354	45	13/80.2	193.3	115.3	64.4

На рис.2а маркерами различных типов представлены экспериментальные зависимости относительной потери кинетической энергии δ ударника от массы m нехиральных образцов метаматериалов из ТРУ 95А пластика при скорости входа ударника ~ 190 м/с при значении угла поворота внутренней структуры $\alpha = 0^\circ$ (см. рис.16) для значений температуры 5, 16, 25 и 35°C . Для наглядности на рисунке добавлены также линейные линии тренда. Из графика видно, что наибольшее сопротивление пробиванию оказывают образцы при 25°C , а наименьшее - при 5°C . На рис.2б экспериментальные точки соединены для наглядности плавными кривыми, иллюстрирующими зависимость потери энергии от температуры образцов массой ~ 50 , 70 и 90 г. Видно, что максимум потерь соответствует температуре 25°C .

Рис.3а,б представляет экспериментальные зависимости относительной потери кинетической энергии δ при значении угла поворота внутренней структуры образцов метаматериала $\alpha = 30^\circ$. Углам поворота $\alpha = 45, 60, 90^\circ$ соответствуют рис.4-6.

На рис.4а и рис.5а экспериментальные зависимости δ от m для значений температуры 5 и 16°C дополнены полиномиальными линиями тренда (полином третьей степени). В предшествующей работе [18] такой нелинейный характер зависимостей предлагалось объяснить тем, что с ростом массы образцов в рассматриваемых случаях не происходит роста потери энергии ударников, и можно предположить, что рост затрат энергии на пробивание более толстого (и, следовательно, более массивного) образца сопровождается одновременным снижением деформационных потерь энергии (более толстый образец может совершать меньшие деформации). Данное явление наблюдалось для образцов с $\alpha = 45, 60^\circ$

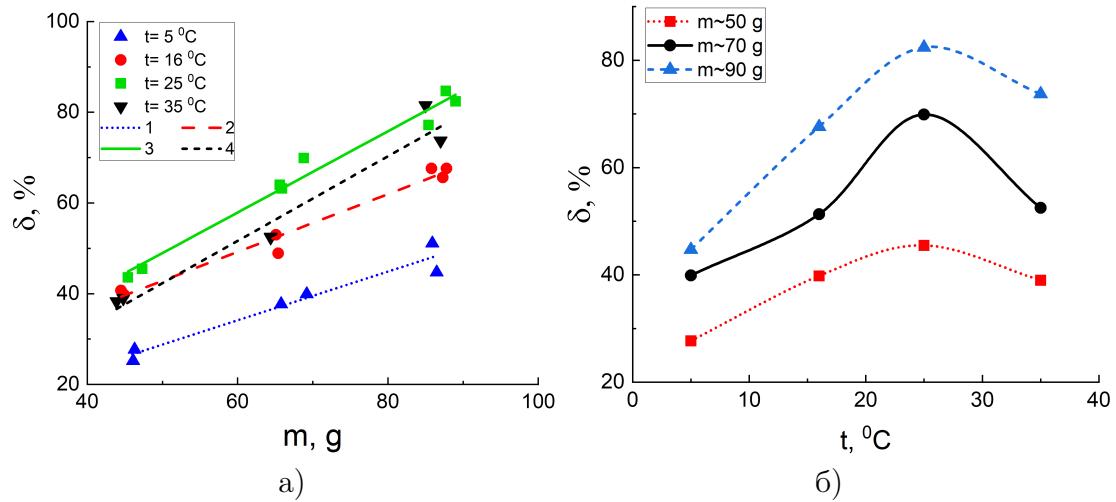


Рис. 2. Зависимость относительной потери δ (%) кинетической энергии ударника при пробивании образцов метаматериала из TPU 95A пластика при $\alpha = 0^\circ$: (а) зависимость от массы m (г) образцов при значениях температуры: 1 – 5°C; 2 – 16°C; 3 – 25°C; 4 – 35°C; (б) зависимость от температуры t (°C) при значениях массы образца 50 г, 70 г, 90 г.

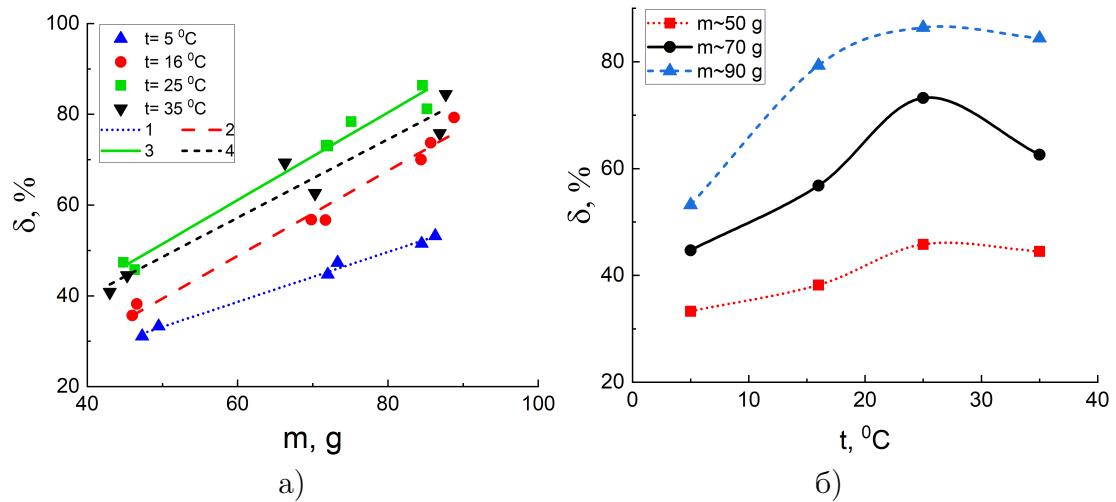


Рис. 3. Зависимость относительной потери δ (%) кинетической энергии ударника при пробивании образцов метаматериала из TPU 95A пластика при $\alpha = 45^\circ$: (а) зависимость от массы m (г) образцов при значениях температуры: 1 – 5°C; 2 – 16°C; 3 – 25°C; 4 – 35°C; (б) зависимость от температуры t (°C) при значениях массы образца 50 г, 70 г, 90 г.

при более низких температурных режимах (16 и 5°C) в рассмотренном диапазоне.

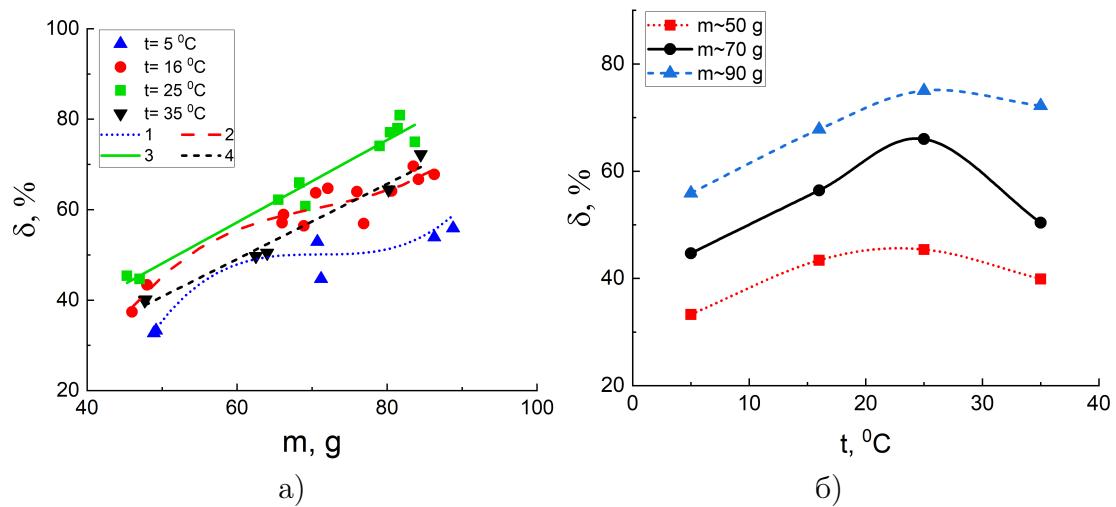


Рис. 4. Зависимость относительной потери δ (%) кинетической энергии ударника при пробивании образцов метаматериала из TPU 95A пластика при $\alpha = 45^\circ$: (а) зависимость от массы m (г) образцов при значениях температуры: 1 – 5°C ; 2 – 16°C ; 3 – 25°C ; 4 – 35°C ; (б) зависимость от температуры t ($^\circ\text{C}$) при значениях массы образца 50 г, 70 г, 90 г.

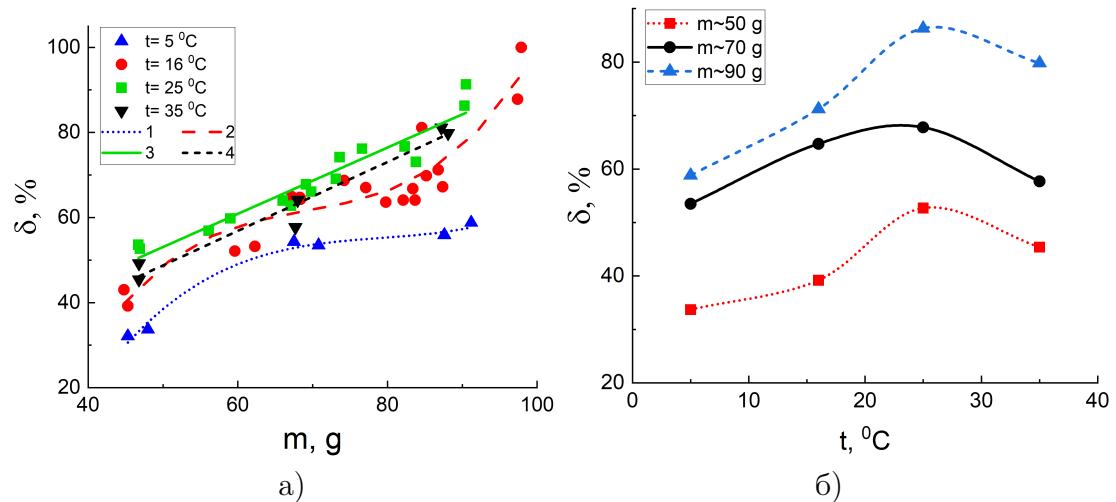


Рис. 5. Зависимость относительной потери δ (%) кинетической энергии ударника при пробивании образцов метаматериала из TPU 95A пластика при $\alpha = 60^\circ$: (а) зависимость от массы m (г) образцов при значениях температуры: 1 – 5°C ; 2 – 16°C ; 3 – 25°C ; 4 – 35°C ; (б) зависимость от температуры t ($^\circ\text{C}$) при значениях массы образца 50 г, 70 г, 90 г.

Результаты серии экспериментов с нехиральными образцами из TPU 95A пластика при поворотах внутренней структуры на $\alpha = 0, 30, 45, 60, 90$ градусов,

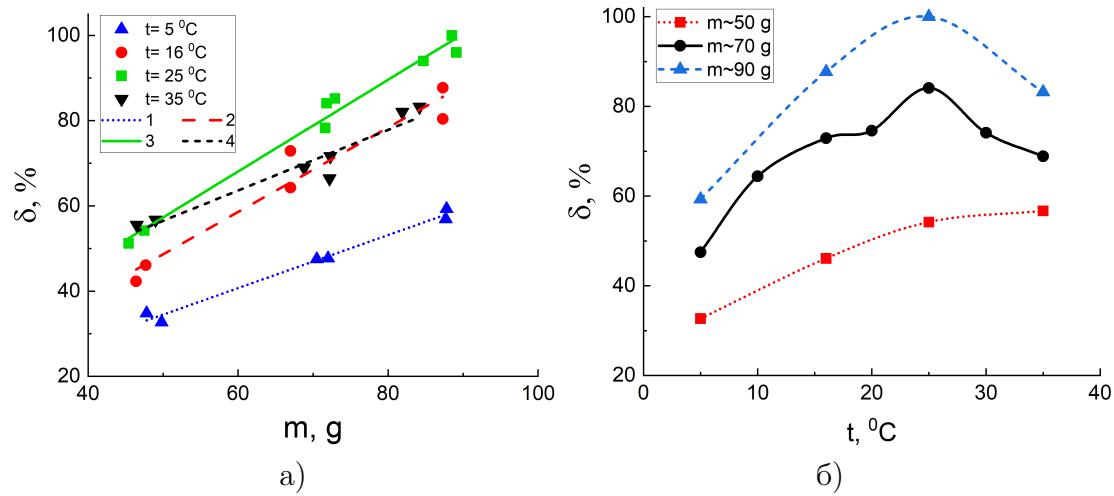


Рис. 6. Зависимость относительной потери δ (%) кинетической энергии ударника при пробивании образцов метаматериала из ТРУ 95А пластика при $\alpha = 90^\circ$: (а) зависимость от массы m (г) образцов при значениях температуры: 1 – 5 °C; 2 – 16 °C; 3 – 25 °C; 4 – 35 °C; (б) зависимость от температуры t (°C) при значениях массы образца 50 г, 70 г, 90 г.

соответственно, показали наилучшую сопротивляемость пробиванию при 25 °C для всех рассмотренных типов метаматериалов. Наилучшие значения зафиксированы для образцов с $\alpha = 90$ градусов. Это видно из рис.7. Метаматериалы с углами поворота $\alpha = 0, 45$ градусов сопротивлялись слабее на величину $\delta \sim 10 - 15\%$ и имели примерно равные показатели. Промежуточный результат у структур с $\alpha = 30$ и 60 градусов.

На основании проведенных экспериментов можно сделать следующие выводы:

- при пробивании рассмотренных типов ауксетических нехиральных метаматериалов из ТРУ 95А пластика с поворотом внутренней структуры на некоторый угол относительно исходного положения (относительно вертикальной оси) температура образцов существенным образом влияет на их способность снижать кинетическую энергию ударника;
- максимальные потери энергии образцов наблюдались при температуре 25 °C;
- при температуре 16 и 5 °C для образцов из ТРУ 95А пластика с поворотом внутренней структуры на 60 и 45 градусов наблюдался интервал изменения массы образцов, для которого значение потери относительной кинетической энергии ударника сохранялось практически постоянным;
- из всех рассмотренных в работе метаматериалов наилучшую способность сопротивляться пробиванию имели образцы с поворотом структуры на 90 градусов, при углах поворота 0 и 45 градусов она была минимальной.

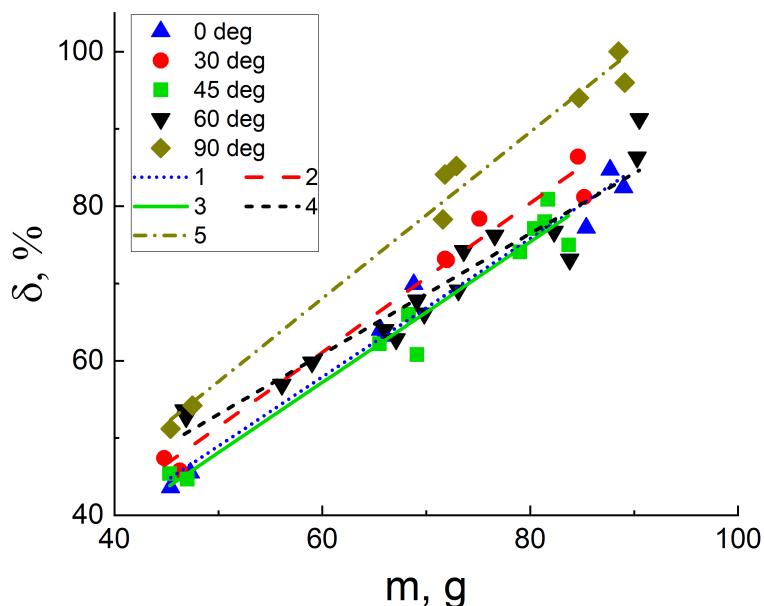


Рис. 7. Зависимость относительной потери δ (%) кинетической энергии ударника от массы m (г) образца для скорости входа ~ 190 м/с, максимальные потери по всем рассмотренным ауксетическим метаматериалам (при температуре 25°C): 1 – $\alpha = 0^\circ$; 2 – $\alpha = 30^\circ$; 3 – $\alpha = 45^\circ$; 4 – $\alpha = 60^\circ$; 5 – $\alpha = 90^\circ$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. С. Ю. Иванова проведение экспериментов, написание текста рукописи. К. Ю. Осипенко проведение экспериментов. А. И. Демин подготовка моделей 3D моделей. Н. В. Баничук редактирование текста рукописи. Д. С. Лисовенко подготовка образцов для экспериментов, редактирование текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена по темам Госзадания (номера госрегистрации 124013000674-0, 124012500437-9).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. S. Yu. Ivanova conducting experiments, writing the text of the manuscript. K. Yu. Osipenko conducting experiments. A. I. Demin preparing 3D models. N. V. Banichuk editing the text of the manuscript. D. S. Lisovenko preparing samples for experiments, editing the text of the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The work was carried out on the topics of the State Assignment (state registration numbers 124013000674-0, 124012500437-9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Auxetic metamaterials and structures: a review / X. Ren [et al.] // Smart Mater. Struct. – 2018. – Vol. 27, no. 2. – P. 023001. – DOI: 10.1088/1361-665X/aaa61c.

2. Dynamic crushing of double-arrowed auxetic structure under impact loading / X. Zhao [et al.] // Mater. Design. – 2018. – Vol. 160. – P. 527–537. – DOI: 10.1016/j.matdes.2018.09.041.
3. A review on various aspects of auxetic materials / S. Naik [et al.] // AIP Conf. Proc. – 2019. – Vol. 2105. – P. 020004. – DOI: 10.1063/1.5100689.
4. 3D metamaterials / M. Kadic [et al.] // Nature Rev. Phys. – 2019. – Vol. 1, no. 3. – P. 198–210. – DOI: 10.1038/s42254-018-0018-y.
5. Yoo S., Park Q.-H. Metamaterials and chiral sensing: a review of fundamentals and applications // Nanophotonics. – 2019. – Vol. 8, no. 2. – P. 249–261. – DOI: 10.1515/nanoph-2018-0167.
6. Mechanical design and multifunctional applications of chiral mechanical metamaterials: A review / W. Wu [et al.] // Mater. Design. – 2019. – Vol. 180. – P. 107950. – DOI: 10.1016/j.matdes.2019.107950.
7. Cellular auxetic structures for mechanical metamaterials: A review / P. U. Kelkar [et al.] // Sensors. – 2020. – Vol. 20, no. 11. – P. 3132. – DOI: 10.3390/s20113132.
8. The use of auxetic materials in tissue engineering / P. Mardling [et al.] // Biomater. Sci. – 2020. – Vol. 8, no. 8. – P. 2074–2083. – DOI: 10.1039/C9BM01928F.
9. Design and manufacturing of mechanical metamaterials. A review / M. K. Kim [et al.] // Compos. Res. – 2021. – Vol. 34, no. 4. – P. 199–211. – DOI: 10.7234/composres.2021.34.4.199.
10. Joseph A., Mahesh V., Harursampath D. On the application of additive manufacturing methods for auxetic structures: a review // Adv. in Manufacturing. – 2021. – Vol. 9, no. 3. – P. 342–368. – DOI: 10.1007/s40436-021-00357-y.
11. Influences of material and geometry in the performance of auxetic composite structure under blast loading / G. Imbalzano [et al.] // Appl. Mech. Mater. – 2016. – Vol. 846. – P. 476–481. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/amm.846.476.
12. Usta F., Türkmen H. S., Scarpa F. High-velocity impact resistance of doubly curved sandwich panels with re-entrant honeycomb and foam core // Inter. J. Impact Eng. – 2022. – Vol. 165. – P. 104230. – DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2022.104230.
13. Analysis of the penetration ability of exponential bullets on TPMS structures with variable density / Q. Jiang [et al.] // Mech. Solids. – 2024. – Vol. 59, no. 5. – P. 3198–3211. – DOI: 10.1134/S0025654424605640. – EDN: ENTUBT.
14. Dynamic response and energy absorption characteristics of auxetic concave honeycomb pad for ballistic helmet under shock wave and bullet impact / Z. Y. Shen [et al.] // Mech. Solids. – 2024. – Vol. 59, no. 5. – P. 3050–3067. – DOI: 10.1134/S0025654424605159. – EDN: ZALSXG.
15. Dynamic response of novel sandwich structures with 3D sinusoid-parallel-hybrid honeycomb auxetic cores: The cores based on negative Poisson's ratio of elastic jump / Y. Yu [et al.] // Eur. J. Mech. - A/Solids. – 2025. – Vol. 109. – P. 105449. – DOI: 10.1016/j.euromechsol.2024.105449.
16. Влияние температуры метаматериалов на основе гибкого пластика TPU 95A на сопротивление пробиванию жестким ударником / С. Ю. Иванова [и др.] // Известия РАН. МТТ. – 2025. – № 1. – С. 197–208. – DOI: 10.31857/S1026351925010108. – EDN: SZUKEG.
17. Влияние температуры метаматериалов на основе гибкого пластика TPU 95A на сопротивление пробиванию жестким ударником / С. Ю. Иванова [и др.] //

- Известия РАН. МТТ. – 2025. – № 3. – С. 289–302. – DOI: 10.31857/S1026351925020156. – EDN: AZGETQ.
18. Исследование сопротивления пробиванию ударником ауксетических метаматериалов при различных углах поворота их внутренней ячеистой структуры / С. Ю. Иванова [и др.] // Известия РАН. МТТ. – 2025. – № 4. – С. 187–204. – DOI: 10.31857/S1026351925040128. – EDN: BOIMMJ.

REFERENCES

1. Auxetic metamaterials and structures: a review / X. Ren [et al.] // Smart Mater. Struct. – 2018. – Vol. 27, no. 2. – P. 023001. – DOI: 10.1088/1361-655X/aaa61c.
2. Dynamic crushing of double-arrowed auxetic structure under impact loading / X. Zhao [et al.] // Mater. Design. – 2018. – Vol. 160. – P. 527–537. – DOI: 10.1016/j.matdes.2018.09.041.
3. A review on various aspects of auxetic materials / S. Naik [et al.] // AIP Conf. Proc. – 2019. – Vol. 2105. – P. 020004. – DOI: 10.1063/1.5100689.
4. 3D metamaterials / M. Kadic [et al.] // Nature Rev. Phys. – 2019. – Vol. 1, no. 3. – P. 198–210. – DOI: 10.1038/s42254-018-0018-y.
5. Yoo S., Park Q.-H. Metamaterials and chiral sensing: a review of fundamentals and applications // Nanophotonics. – 2019. – Vol. 8, no. 2. – P. 249–261. – DOI: 10.1515/nanoph-2018-0167.
6. Mechanical design and multifunctional applications of chiral mechanical metamaterials: A review / W. Wu [et al.] // Mater. Design. – 2019. – Vol. 180. – P. 107950. – DOI: 10.1016/j.matdes.2019.107950.
7. Cellular auxetic structures for mechanical metamaterials: A review / P. U. Kelkar [et al.] // Sensors. – 2020. – Vol. 20, no. 11. – P. 3132. – DOI: 10.3390/s20113132.
8. The use of auxetic materials in tissue engineering / P. Mardling [et al.] // Biomater. Sci. – 2020. – Vol. 8, no. 8. – P. 2074–2083. – DOI: 10.1039/C9BM01928F.
9. Design and manufacturing of mechanical metamaterials. A review / M. K. Kim [et al.] // Compos. Res. – 2021. – Vol. 34, no. 4. – P. 199–211. – DOI: 10.7234/composres.2021.34.4.199.
10. Joseph A., Mahesh V., Harursampath D. On the application of additive manufacturing methods for auxetic structures: a review // Adv. in Manufacturing. – 2021. – Vol. 9, no. 3. – P. 342–368. – DOI: 10.1007/s40436-021-00357-y.
11. Influences of material and geometry in the performance of auxetic composite structure under blast loading / G. Imbalzano [et al.] // Appl. Mech. Mater. – 2016. – Vol. 846. – P. 476–481. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/amm.846.476.
12. Usta F., Türkmen H. S., Scarpa F. High-velocity impact resistance of doubly curved sandwich panels with re-entrant honeycomb and foam core // Inter. J. Impact Eng. – 2022. – Vol. 165. – P. 104230. – DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2022.104230.
13. Analysis of the penetration ability of exponential bullets on TPMS structures with variable density / Q. Jiang [et al.] // Mech. Solids. – 2024. – Vol. 59, no. 5. – P. 3198–3211. – DOI: 10.1134/S0025654424605640.
14. Dynamic response and energy absorption characteristics of auxetic concave honeycomb pad for ballistic helmet under shock wave and bullet impact / Z. Y. Shen [et al.] // Mech. Solids. – 2024. – Vol. 59, no. 5. – P. 3050–3067. – DOI: 10.1134/S0025654424605159.

15. Dynamic response of novel sandwich structures with 3D sinusoid-parallel-hybrid honeycomb auxetic cores: The cores based on negative Poisson's ratio of elastic jump / Y. Yu [et al.] // Eur. J. Mech. - A/Solids. – 2025. – Vol. 109. – P. 105449. – DOI: 10.1016/j.euromechsol.2024.105449.
16. Temperature influence of metamaterials based on flexible TPU 95A plastic on resistance to penetration by a rigid striker / S. Y. Ivanova [et al.] // Mech. Solids. – 2025. – Vol. 60, no. 1. – P. 128–135. – DOI: 10.1134/S0025654424606797.
17. On the influence of chirality of the structure of auxetic metamaterials on the resistance to impact penetration / S. Y. Ivanova [et al.] // Mech. Solids. – 2025. – Vol. 60, no. 3. – P. 1677–1684. – DOI: 10.1134/S0025654425601156.
18. Study of resistance to impact penetration of auxetic metamaterials at various angles of rotation of their internal cellular structure / S. Y. Ivanova [et al.] // Mech. Solids. – 2025. – Vol. 60, no. 4. – P. 2491–2503. – DOI: 10.1134/S0025654425602885.

М. В. Полоник, А. А. Манцыбора, Н. В. Макарова

К ПРОБЛЕМЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИСТИРАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия

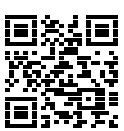
Аннотация. В настоящей работе рассматривается процесс истирания поверхности неоднородного материала с зернистыми включениями, на примере цементного композита. Предложен подход к моделированию перехода процесса износа с приповерхностного слоя в глубь материала с возможным выпадением зерен из матрицы. Данный подход осуществляется путем поэтапного снижения деформационных характеристик матрицы с анализом напряженно-деформированного состояния переходной зоны «матрица–зерно».

Ключевые слова: неоднородные материалы, зернистые композиты, бетон, истирание, износ, трибология, механика контактного взаимодействия, разрушение.

Полоник Марина Васильевна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики необратимого деформирования; e-mail: polonik@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0003-4092-8957>; AuthorID: 15247

Манцыбора Александр Анатольевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории механики необратимого деформирования; e-mail: manzubor@iacp.dvo.ru; <https://orcid.org/0000-0001-5060-5436>; AuthorID: 15243

Макарова Наталья Валентиновна, кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики необратимого деформирования; e-mail: maknat@bk.ru; <https://orcid.org/0000-0002-2581-8066>; AuthorID: 159898



для цитирования: Полоник М. В., Манцыбора А. А., Макарова Н. В. К проблеме моделирования истираемой поверхности неоднородных материалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 4(66). С. 203–213. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.019. EDN: YQBPSN

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

M. V. Polonik, A. A. Manzybora, N. V. Makarova

ON THE PROBLEM OF MODELING THE ABRADED SURFACE OF HETEROGENEOUS MATERIALS

*Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the RAS,
Vladivostok, Russia*

Abstract. This paper examines the process of abrasion of the surface of a heterogeneous material with granular inclusions, using the cement composite as an example. An approach is proposed for modeling the transition of the wear process from the surface layer into the depth of the material with possible loss of grains from the matrix. This approach is implemented by gradually reducing the deformation characteristics of the matrix with an analysis of the stress-strain state of the matrix-grain transition zone.

Keywords: heterogeneous materials, granular composites, concrete, abrasion, wear, tribology, contact mechanics, destruction.

Marina V. Polonik, PhD in Physical & Mathematical Sciences, Senior Researcher, Laboratory of irreversible deformation; e-mail: polonik@mail.ru;
<https://orcid.org/0000-0003-4092-8957>; AuthorID: 15247

Alexander A. Manzybora, PhD in Physical & Mathematical Sciences, Senior Researcher, Laboratory of irreversible deformation; e-mail: manzubor@iacp.dvo.ru;
<https://orcid.org/0000-0001-5060-5436>; AuthorID: 15243

Natalia V. Makarova, PhD of Engineering Sciences & Engineering Sciences, Senior Researcher, Laboratory of irreversible deformation; e-mail: maknat@bk.ru;
<https://orcid.org/0000-0002-2581-8066>; AuthorID: 159898



to cite this article: Polonik M. V., Manzybora A. A., Makarova N. V. On the Problem of Modeling the Abraded Surface of Heterogeneous Materials // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 4(66). p. 203–213. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.019

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Проблема деградации поверхности, довольно часто возникает при проектировании и эксплуатации гидротехнических сооружений, например, в основаниях нефтяных платформ гравитационного типа, транспортных покрытий автомобильных дорог и других бетонных конструкций. Это влечет за собой уменьшение эффективных размеров, и, в конечном итоге, может привести к разрушению. Таким образом, проектирование структуры бетона, как зернистого композита, с высоким сопротивлением износу, является важной проблемой.

Следует отметить, что сопротивление истиранию таких зернистых композитов до настоящего времени остается наименее изученным свойством. Последнее связано со сложностью экспериментального получения данных характеристик таких материалов [1].

Более того, моделирование процесса истирания цементных композитов, осложнено существенной неоднородностью данных материалов. Модели износа поверхности, представленные в работах [2–6] учитывают неоднородность структуры бетона. Однако прочностные и деформационные характеристики элементов структуры здесь не изменяются, а остаются постоянными в течение всего процесса.

В работах [4], [7] износ поверхности представлен как результат выпадения зерен заполнителя из цементно-песчаной матрицы при оголении их на определенную величину, которая сопоставима с размером крупного заполнителя. В то же время на протяжении достаточно длительного эксплуатационного периода конструкций изменение поверхности происходит только за счет износа тонких приповерхностных слоев. Последнее оказывает существенное влияние на выбор критерия разрушения на различных структурных уровнях.

Ранее, в работах [3], [4], [8–11], в том числе авторов статьи, выбор структурных уровней, обоснованный экспериментальными исследованиями [12], [13], был разделен на необходимые стадии для моделирования.

В настоящей работе предложена модель перехода истирания цементной матрицы от рабочей стадии [8], [14–17] к процессу износа бетонной поверхности на макроуровне (стадия разрушения). Данный подход осуществляется путем поэтапного снижения деформационных характеристик матрицы, а именно модуля деформации цементной матрицы, в процессе ее старения, и возможного выпадения зерен из матрицы. Представлен анализ напряженно-деформированного состояния переходной зоны "матрица-зерно".

1. Стадии истирания поверхности неоднородного материала с зернистыми включениями. Процесс истирания поверхности неоднородного материала с зернистыми включениями, в связи со сказанным выше, и на основании [3], [4], [8–11], целесообразно описывать и моделировать отдельно, на каждой, следующей одна за другой, стадии: начальная; рабочая; разрушение (рис. 1).

1.1. Начальная стадия истирания – стадия на которой дробятся сольватные оболочки и обнажаются зерна мелкого и крупного заполнителей [8], [12]. Моделирование на данной стадии описано в [13]. Показано, что поверхность

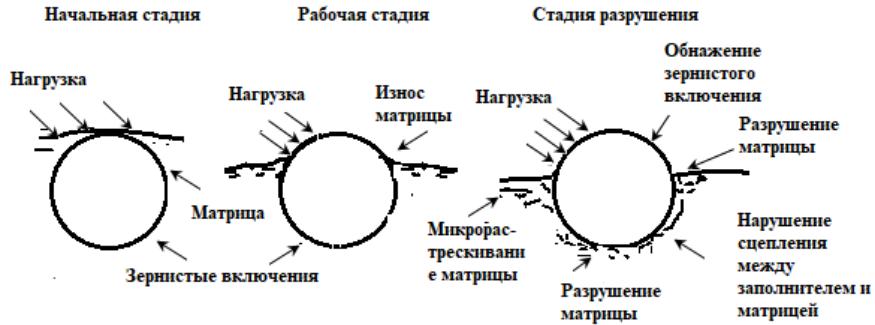


Рис. 1. Поэтапность процесса истирания поверхности неоднородного материала с зернистыми включениями: начальная стадия; рабочая стадия; стадия разрушения.

неоднородного материала с зернистыми включениями может быть принята однородной. Степень истирания может быть представлена как $\partial\omega/\partial t$ и зависит от скорости v , давления p на контакте поверхности, а также от параметров неоднородного материала [8], [12, 13].

1.2. Рабочая стадия истирания. На этой стадии происходит процесс истирания и зерен крупного заполнителя, и матрицы. Данные процессы протекают с разной скоростью, и зависят от физических свойств материала. Происходит неравномерное изнашивание материала: более мягкая структура мелкого заполнителя матрицы разрушается, зерна крупного заполнителя на поверхности обнажаются. Как результат, достаточно ровная поверхность становится волнообразной.

Здесь процесс изнашивания неоднородной поверхности с зернистыми включениями представлен одновременно как истирание поверхности заполнителя, так и разрушение матрицы рис.1. Данные процессы приводят к изменению формы поверхности. Применение предыдущей модели на начальной стадии становится невозможным.

Таким образом, авторами статьи, было предложено моделирование процесса истирания на данной стадии с учетом инструментов механики контактного взаимодействия [18]. Поверхность неоднородного материала с зернистыми включениями моделировалась, как упругое полупространство с областью Ω , усиленной в круговых (или другой конфигурации) областях ω_{ij} радиуса a , в узлах квадратной решетки с шагом l рис. 2. Давление p и скорость v были приняты постоянными. В установившемся режиме изнашивания получены формы истирания изношенной поверхности $f(x, y)$ полупространства неоднородного материала с зернистыми включениями Ω . Серия вычислительных экспериментов позволила изучить зависимость $f(x, y)$ моделируемой функции от варьируемых значений a и $m_2 = m - 1$ [14] и от крупности зерен и их количества в рассматриваемом

объеме. Расположение упрочненных зон оказывает существенное влияние на формируемый в процессе изнашивания рельеф поверхности рис. 2.

Более подробные расчеты и результаты представлены в работах авторов [14–17].

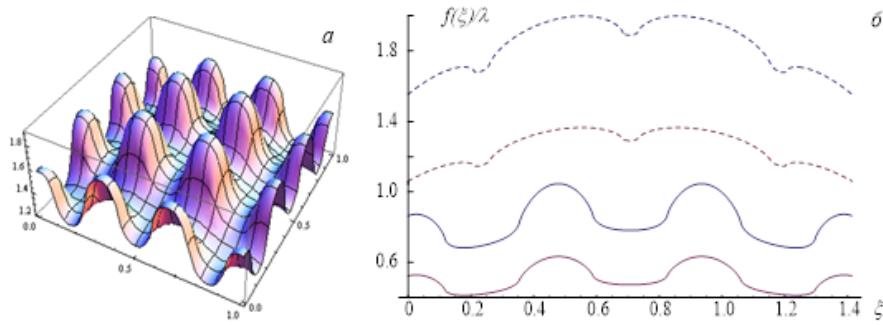


Рис. 2. Изношенная поверхность неоднородного материала с зернистыми включениями в диагональном поперечном сечении (б) при расположении упрочненных зон (а), где $m_2 = m - 1 = \{0.9; 0.5\}$: сплошная линия $f(x, y)$ ($a = 0.25$); штриховая линия $f(x, y)$ ($a = 0.45$).

Согласно [4], как только выступ зерен достигает максимальной высоты выхода $0.4h$, возможен процесс их выпадения. Дальнейшее применение данной модели невозможно.

1.3. Стадия разрушения – разрушение поверхности из-за выпадения зерен заполнителя из матрицы.

Здесь возможно два варианта разрушения, что установлено экспериментально авторами статьи на примере истирания бетона [8, 12, 13]:

– усталостное разрушение матрицы (объемное микрорасстескивание) между зернами крупного заполнителя, приводящее к их выпадению. Это характерно для бетона с малопрочной цементно-песчаной матрицей;

– прорастание усталостной макротрецины на границе между зернами крупного заполнителя и цементно-песчаной матрицей. Такое разрушение характерно для высокопрочных бетонов [8].

Моделирование процесса поверхностной деградации цементного композита как постепенного усталостного разрушения матрицы и нарушения сцепления достаточно сложная проблема. Ниже представлена предложенная авторами простая модель, где процесс деградации приповерхностного слоя зернистого композита происходит поэтапно за счет снижения жесткости матрицы. При этом жесткость гранул заполнителя остается постоянной.

2. Переход от рабочей стадии истирания к стадии возможного выпадения зерен. Исходя из того, что неоднородные материалы с зернистыми включениями – это, как правило, гетерогенные материалы, и, из-за сложности трехмерного моделирования мезоструктуры и высоких вычислительных затрат, исследование напряженно-деформированного состояния на данной стадии целесообразнее проводить в двумерных (2D) моделях. Поэтому в двумерном (2D) мезоскопическом моделировании приповерхностный уровень представлен в виде упругого слоя с круглыми включениями: расстояние между зернами l , размер зерна a и высота выступа h .

Так же, реальный процесс динамического износа был сведен к приложению статической равномерно распределенной нагрузки P к зернам под некоторым углом β .

Метод конечных элементов (FEM) позволяет решать ряд таких задач. Расчеты были проведены в программном обеспечении ANSYS. Для двумерного моделирования использовался элемент ANSYS-PLANE182.

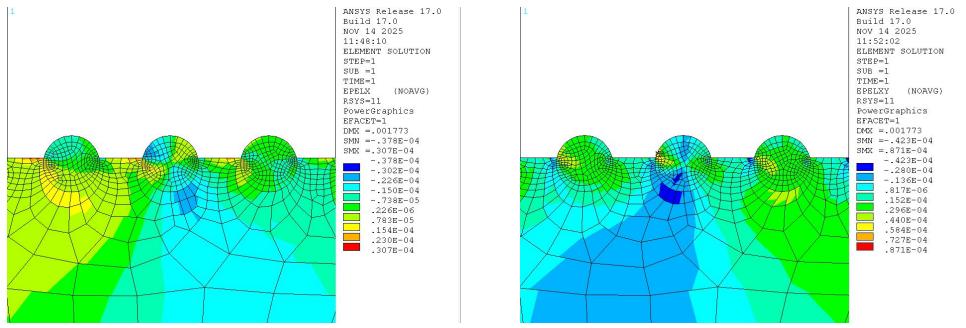


Рис. 3. (а) нормальные деформации (d_{rr}); (б) касательные деформации ($d_{r\varphi}$) для E

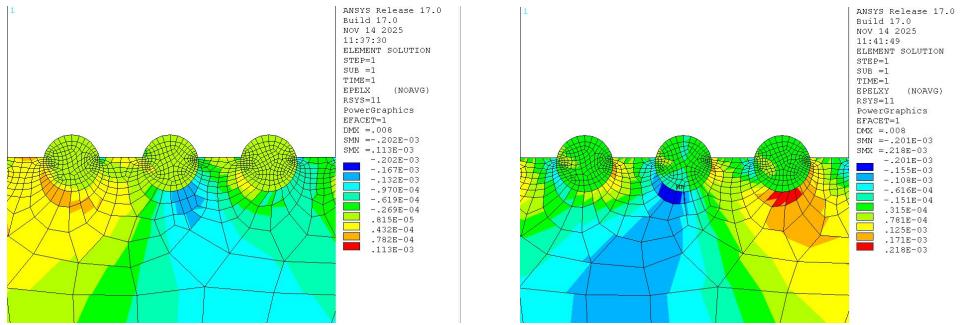


Рис. 4. (а) нормальные деформации (d_{rr}); (б) касательные деформации ($d_{r\varphi}$) для $0.2E$

Параметры для экспериментов: $E = 23$ МПа – модуль Юнга матрицы, $E_2 = 37$ МПа – модуль Юнга зерен, $v_1 = 0.2$ – постоянная Пуассона матрицы, $v_2 = 0.25$

– постоянная Пуассона зерен. Данные для $P = 100\text{кПа}$, $a = 20\text{мм}$, $l = 35\text{мм}$, $h = 8\text{мм}$ приняты на основе решения задачи о выпадении зерна из матрицы [4]. Процесс деградации моделируем снижением модуля упругости матрицы: E , $0.8E$, $0.6E$, $0.2E$.

Численные исследования для анализа напряженно-деформированного состояния и определения местоположения зон ожидаемого разрушения приповерхностного материала в пределах границы сцепления представлены на рис. 3-4.

Расчеты проводились в системе ANSYS в декартовой системе координат. Для наглядности, результаты расчетов приведены в Local Coordinate Systems, соответствующей цилиндрической локальной системе координат (LCS). Деформации с компонентами d_{rr} соответствуют нормальным деформациям, а $d_{r\phi}$ – касательным деформациям, действующим на границе.

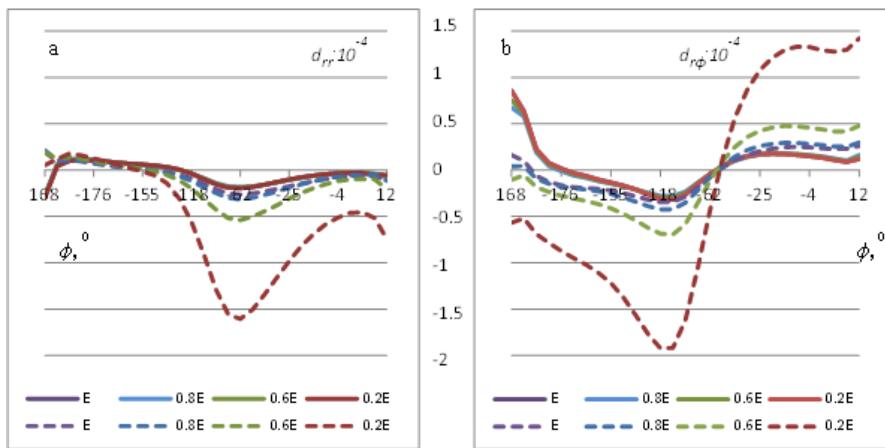


Рис. 5. (а) нормальные деформации (d_{rr}); (б) касательные деформации ($d_{r\phi}$) на границе сцепления ядра (сплошная линия) и матрицы (пунктирная линия) при снижении модуля упругости матрицы: E , $0.8E$, $0.6E$, $0.2E$.

Согласно полученным расчетам рис. 5, со снижением модуля упругости матрицы, деформации в матрице увеличиваются, а деформации зерна практически не изменяются. Максимальные и минимальные деформации сосредоточены на границе сцепления зерна и матрицы. Более того, при выбранных параметрах расчетов, на границе сцепления, предельных значений для разрушения не достигается. Это происходит за счет нахождения в матрице близлежащих зерен. Варьируя расстояниями между зернами, можно получить как высокопрочный, так и не устойчивый, даже к небольшим нагрузкам, бетон.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Полученные оценки напряженно-деформированного состояния "матрица-зерно" позволяют сформулировать конкретные рекомендации для проектирования состава и технологических параметров зернистых композитов, например таких как бетон, с высокой стойкостью к истиранию.

Накопленные данные по исследованию процесса деградации приповерхностного слоя цементного композита при истирании с учетом изменения его структуры позволяет уточнить расчетные модели. Такие модели могут быть использованы как для оценки ресурса конструкций, так и для проектирования оптимальных бетонных композиций.

Предложенный подход так же может быть полезен в прогнозировании поведения неоднородных материалов с зернистыми включениями в процессе износа в зависимости от степени изменения механических свойств их структурных элементов на протяжении жизненного цикла.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Н. В. Макарова моделирование, написание текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, обзор литературы по теме статьи, М. В. Полоник математическое моделирование, численные расчеты, написание текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, обзор литературы по теме статьи, А. А. Манцыбора математическое моделирование и численные расчеты в ANSYS, написание текста рукописи, редактирование текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена в рамках государственного задания ИАПУ ДВО РАН (тема № FFWF-2021-0005).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. N. V. Makarova modeling, writing the text of the manuscript, agreeing of the final version of the manuscript, the literature on the topic of the article, M. V. Polonik mathematical modeling, numerical calculations, writing the text of the manuscript, agreeing of the final version of the manuscript, the literature on the topic of the article, A. A. Manzybora mathematical modeling and numerical calculations in ANSYS, writing the text of the manuscript, editing the text of the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The research was carried out within the state assignment of IACP FEB RAS (Theme FFWF-2021-0005).

ЛИТЕРАТУРА

1. ГОСТ 13087-81. Бетоны. Методы определения истираемости.
2. *Dandapat R., Deb A.* A Probability Based Model for the Erosive Wear of Concrete by Sediment Bearing Water // Wear. – 2016. – Jan. – Vol. 350. – P. 166–181. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.wear.2016.01.012>. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0043164816000211>.
3. *Liu Q., Wu M.* Experimental and Numerical Investigations on Concrete Abrasion of Hydraulic Structures // International RILEM Conference on Synergising Expertise towards Sustainability and Robustness of Cement-based Materials and Concrete Structures / под ред. А. Jędrzejewska [и др.]. – Cham : Springer Nature Switzerland, 06.2023. – С. 191–202. – DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-33211-1_18.
4. An experimental study on abrasion of concrete due to sea ice / Y. Itoh [et al.] // Offshore Technology Conference. – 1988. – May. – P. 297–305.

5. Correlation analysis of abrasion resistance of rubber concrete with microstructure and pore structure / F. Chen [et al.] // Construction and Building Materials. – 2025. – Vol. 475. – P. 141211. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2025.141211>. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0950061825013595>.
6. *Barbhuiya S., Jivkov A., Das B. B.* A review of multi-scale modelling of concrete deterioration: Fundamentals, techniques and perspectives // Construction and Building Materials. – 2023. – Vol. 406. – P. 133472. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2023.133472>. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0950061823031896>.
7. Study of the abrasion of Concrete due to Sea Ice / H. Saeki [et al.] // The 20th Marine Development Symposium. – 1988.
8. *Makarova N. V.* Relations between Concrete Structural Parameters and Abrasion Resistance // Architecture, Building Materials and Engineering Management. T. 357. – Trans Tech Publications Ltd, 10.2013. – C. 1259–1262. – (Applied Mechanics and Materials). – DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.357–360.1259.
9. *Makarova N. V., Polonik M. V.* Abrasion Wear of Heterogeneous Materials // Mechanical Materials and Manufacturing Engineering II. T. 248. – Trans Tech Publications Ltd, 02.2013. – C. 355–360. – (Applied Mechanics and Materials). – DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.248.355.
10. *Makarova N., Polonik M.* Optimization of Structural Parameters of Cement Composites with High Wear Resistance // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2018. – Июнь. – Т. 365, № 3. – С. 032068. – DOI: 10.1088/1757-899X/365/3/032068. – URL: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/365/3/032068>.
11. *Makarova N. V., Polonik M. V., Mantsybora A. A.* Abrasive wear of Cemented Granular Composites: Experiments and Numerical Simulations // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2018. – Дек. – Т. 463, № 3. – С. 032002. – DOI: 10.1088/1757-899X/463/3/032002. – URL: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/463/3/032002>.
12. *Makarova N.* Abrasion Experimental and theoretical investigation on abrasion strength of concrete // Assesment of Reliability of Materials and Structures. Problems and Solutions: Proc. Intern. – 2008. – Дек. – С. 219–224.
13. *Макарова Н. В.* Об учете неоднородности при моделировании процесса истирания бетона // Вестник гражданских инженеров. – 2009. – № 3. – С. 137–139.
14. *Макарова Н. В., Полоник М. В.* Формирование рельефа истираемой поверхности неоднородных материалов // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Серия: Механика деформируемого твердого тела. – 2011. – 4 (4). – С. 1591–1593.
15. *Макарова Н. В., Полоник М. В.* Учет экспериментальных данных при моделировании процесса истирания бетона на микро- и мезоуровнях // Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета. – 2012. – 1(10). – С. 116–120.
16. *Makarova N., Polonik M.* Modelling the influence of structural and compositional parametres on the abrasion resistance of concrete // Proceedings of the International Offshore and Polar Engineering Conference. – 2012. – Янв. – С. 67–71.

17. Макарова Н. В., Полоник М. В., Рогачев Е. Е. Абрзивный износ неоднородных материалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. – 2012. – 4 (14). – С. 164–172.
18. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. – М. : Наука, 2001. – 478 с.

REFERENCES

1. GOST 13087-81. Betony. Metody opredeleniya istirayemosti. – (in Russian).
2. Dandapat R., Deb A. A Probability Based Model for the Erosive Wear of Concrete by Sediment Bearing Water // Wear. – 2016. – Jan. – Vol. 350. – P. 166–181. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.wear.2016.01.012>. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0043164816000211>.
3. Liu Q., Wu M. Experimental and Numerical Investigations on Concrete Abrasion of Hydraulic Structures // International RILEM Conference on Synergising Expertise towards Sustainability and Robustness of Cement-based Materials and Concrete Structures. – Cham : Springer Nature Switzerland, 06/2023. – P. 191–202. – DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-33211-1_18.
4. An experimental study on abrasion of concrete due to sea ice / Y. Itoh [et al.] // Offshore Technology Conference. – 1988. – May. – P. 297–305.
5. Correlation analysis of abrasion resistance of rubber concrete with microstructure and pore structure / F. Chen [et al.] // Construction and Building Materials. – 2025. – May. – Vol. 475. – P. 141211. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2025.141211>. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0950061825013595>.
6. Barbhuiya S., Jivkov A., Das B. B. A review of multi-scale modelling of concrete deterioration: Fundamentals, techniques and perspectives // Construction and Building Materials. – 2023. – Vol. 406. – P. 133472. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2023.133472>. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0950061823031896>.
7. Study of the abrasion of Concrete due to Sea Ice / H. Saeki [et al.] // The 20th Marine Development Symposium. – 1988.
8. Makarova N. V. Relations between Concrete Structural Parameters and Abrasion Resistance // Architecture, Building Materials and Engineering Management. Vol. 357. – Trans Tech Publications Ltd, 10/2013. – P. 1259–1262. – (Applied Mechanics and Materials). – DOI: [10.4028/www.scientific.net/AMM.357-360.1259](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.357-360.1259).
9. Makarova N. V., Polonik M. V. Abrasion Wear of Heterogeneous Materials // Mechanical Materials and Manufacturing Engineering II. Vol. 248. – Trans Tech Publications Ltd, 02/2013. – P. 355–360. – (Applied Mechanics and Materials). – DOI: [10.4028/www.scientific.net/AMM.248.355](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.248.355).
10. Makarova N., Polonik M. Optimization of Structural Parameters of Cement Composites with High Wear Resistance // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2018. – June. – Vol. 365, no. 3. – P. 032068. – DOI: [10.1088/1757-899X/365/3/032068](https://doi.org/10.1088/1757-899X/365/3/032068). – URL: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/365/3/032068>.

11. *Makarova N. V., Polonik M. V., Mantsybora A. A.* Abrasive wear of Cemented Granular Composites: Experiments and Numerical Simulations // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2018. – Dec. – Vol. 463, no. 3. – P. 032002. – DOI: 10.1088/1757-899X/463/3/032002. – URL: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/463/3/032002>.
12. *Makarova N.* Abrasion Experimental and theoretical investigation on abrasion strength of concrete // Assesment of Reliability of Materials and Structures. Problems and Solutions: Proc. Intern. – 2008. – Dec. – P. 219–224.
13. *Makarova N. V.* Formirovaniye relyefa istirayemoy poverkhnosti neodnorodnykh materialov // Vestnik grazhdanskikh inzhenerov. – 2009. – No. 3. – P. 137–139. – (in Russian).
14. *Makarova N. V., Polonik M. V.* Formirovaniye relyefa istirayemoy poverkhnosti neodnorodnykh materialov // VESTNIK OF LOBACHEVSKY STATE UNIVERSITY OF NIZHNI NOVGOROD. – 2011. – 4 (4). – P. 1591–1593. – (in Russian).
15. *Makarova N. V., Polonik M. V., Rogachev E. E.* Uchet eksperimentalnykh dannykh pri modelirovaniyu protsessa istiraniya betona na mikro- i mezourovnyakh // FEFU: School of Engineering Bulletin (Vestnik Inzhenernoi shkoly DVFU). – 2012. – 1(10). – P. 116–120. – (in Russian).
16. *Makarova N., Polonik M.* Modelling the influence of structural and compositional parametres on the abrasion resistance of concrete // Proceedings of the International Offshore and Polar Engineering Conference. – 2012. – Jan. – P. 67–71.
17. *Makarova N. V., Polonik M. V., Rogachev E. E.* ABRASION DETERIORATION OF INHOMOGENEOUS MATERIALS // Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. – 2012. – 4 (14). – P. 164–172. – (in Russian).
18. *Goryacheva I. G.* Mekhanika friktsionnogo vzaimodeystviya. – M. : Nauka, 2001. – 478 p. – (in Russian).

В. Э. Богачева, И. М. Лавит, О. С. Перова

ВЛИЯНИЕ ТОЛЩИНЫ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО АДГЕЗИОННОГО СЛОЯ КОМПОЗИТА НА ЗНАЧЕНИЕ J-ИНТЕГРАЛА

Тульский государственный университет, Тула, Россия

Аннотация. Исследуется упругопластическое деформирование композитной пластины, соответствующее нагружению нормальным отрывом, в состоянии плоской деформации. Сматриваемый образец состоит из двух упругих консолей, связанных упругопластическим адгезионным слоем. Используется аналитическое решение, основанное на концепции «слоя взаимодействия», теории пластин Миндлина—Рейсснера и критерия Треска—Сен-Венана при условии полной пластичности. Найдена формула для определения значений прочностной характеристики в виде J-интеграла. Показано, что у двух адгезивов с различными механическими свойствами погрешность аналитических и экспериментальных значений J-интеграла не превышает 5 %, а при уменьшении толщины адгезионного слоя значения J-интеграла стремятся к определенному значению.

Ключевые слова: адгезионный слой, композит, слой взаимодействия, нормальный отрыв, упругопластическое деформирование, J-интеграл.

Богачева Виктория Эдуардовна, аспирант кафедры вычислительной механики и математики; e-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0002-6303-2160>; AuthorID: 1081852

Лавит Игорь Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной механики и математики; e-mail: igorlavit@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0002-8683-5943>; AuthorID: 14837

Перова Ольга Сергеевна, аспирант кафедры вычислительной механики и математики; e-mail: o.s.perova@yandex.ru; <https://orcid.org/0009-0000-7489-9256>; AuthorID: 1272696



для цитирования: Богачева В. Э., Лавит И. М., Перова О. С. Влияние толщины упругопластического адгезионного слоя композита на значение J-интеграла // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 4(66). С. 214–224. DOI: 10.37972/chgpru.2025.66.4.014. EDN: ULADPS

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

V. E. Bogacheva, I. M. Lavit, O. S. Perova

EFFECT OF THE THICKNESS OF THE ELASTOPLASTIC ADHESIVE LAYER OF THE COMPOSITE ON THE VALUE OF THE J-INTEGRAL

Tula State University, Tula, Russia

Abstract. The elastic-plastic deformation of a composite plate corresponding to normal separation loading in a state of plane deformation is investigated. The sample in question consists of two elastic consoles connected by an elastoplastic adhesive layer. An analytical solution is used based on the concept of the "interaction layer", the Mindlin—Reissner plate theory and the Tresca—Saint-Venant criterion under the condition of full plasticity. A formula for determining the values of the strength characteristic in the form of a J-integral is found. It is shown that for two adhesives with different mechanical properties, the error of the analytical and experimental values of the J-integral does not exceed 5 %, and with a decrease in the thickness of the adhesive layer, the values of the J-integral tend to a certain value.

Keywords: adhesive layer, composite, interaction layer, normal separation, elastic-plastic deformation, J-integral.

Viktoriya E. Bogacheva, Postgraduate; e-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru;
<https://orcid.org/0000-0002-6303-2160>; AuthorID: 1081852

Igor M. Lavit, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor;
e-mail: igorlavit@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0002-8683-5943>;
AuthorID: 14837

Olga S. Perova, Postgraduate; e-mail: o.s.perova@yandex.ru;
<https://orcid.org/0009-0000-7489-9256>; AuthorID: 1272696



to cite this article: Bogacheva V. E., Lavit I. M., Perova O. S. Effect of the thickness of the elastoplastic adhesive layer of the composite on the value of the J-integral // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 4(66). p. 214–224. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.014

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Использование адгезионных соединений находит широкое применение в различных отраслях, например, машиностроении, авиационной и ракетной технике. Поэтому анализ их прочностных свойств является достаточно актуальной задачей.

При экспериментальных исследованиях трещиностойкости адгезионных слоев в качестве образца обычно используют двухконсольную балку. А трещиноподобный дефект в адгезиве моделируют не только в виде математического разреза с жестким сцеплением сопрягаемых тел, но и в виде слоя с характерной толщиной [1–5].

В данной работе рассматривается образец, экспериментально изученный в статье [6], с адгезивами, в качестве которых выступают смолы Araldite 2015 и Sikaforce 7752. В статье [7], показано общее аналитическое решение упругопластической постановки задачи и изучено влияние геометрических данных композита на распределение напряжений в слое. В данной работе продолжено изучение этой задачи — определена прочностная характеристика в виде J-интеграла.

1. Постановка задачи. Рассматривается образец (рис. 1) длиной $\ell + a$, где a — длина участка без сопряжения консолей адгезионным слоем, $a = 0.055$ м, ℓ — длина участка с сопряжением консолей слоем 3, $\ell = 0.2$ м, b — толщина образца, $b = 0.025$ м, ℓ_p — длина участка, на котором слой деформируется пластически, причем данное значение определяется в ходе решения. Консоли 1 и 2 имеют одинаковые толщины $h = 0.0127$ м, модуль упругости $E = 2.04 \cdot 10^{11}$ Па и коэффициент Пуассона $\nu = 0.33$. По длине ℓ тела связаны адгезионным слоем 3, толщина которого δ_0 — линейный параметр. Механические и прочностные характеристики для адгезивов найдены экспериментально в работе [6] и приведены в таблице 1.

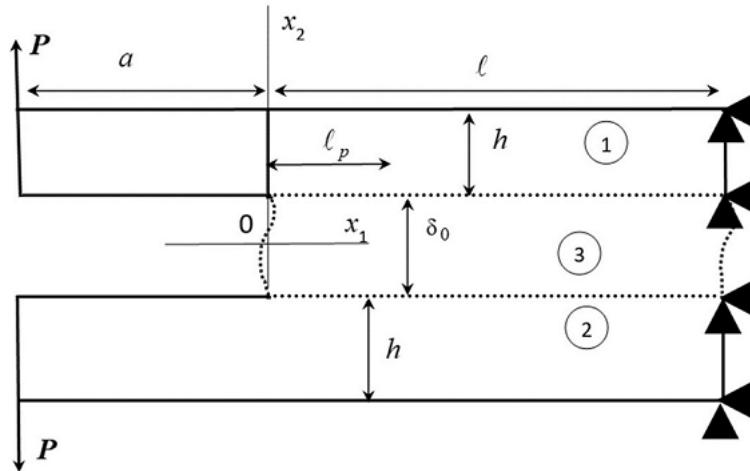


Рис. 1. Слоистый композит

	E_3 , Па	ν_3	τ_0 , МПа	P_{cr} , Н	J_C , Н/м
Araldite 2015	$1.85 \cdot 10^9$	0.33	14.6	1500	430
Sikaforce 7752	$0.49 \cdot 10^9$	0.3	5.2	3100	2360

Таблица 1. Механические и прочностные характеристики адгезионных слоев

В таблице 1 E_3 , ν_3 — модуль упругости и коэффициент Пуассона адгезионного слоя 3; τ_0 — предел текучести; P_{cr} — внешняя нагрузка при инициализации трещины в адгезиве толщиной $\delta_0 = 10^{-3}$ м, J_C — значение J-интеграла.

Правый торец композита закреплен от перемещений, на левых торцах консолей действует нагрузка, обеспечивающая нормальный отрыв, интенсивностью P . Композит рассматривается в состоянии плоской деформации. Считается, что консоли 1 и 2 деформируются упруго, а материал слоя 3 является упругопластическим без упрочнения.

В статье [7] описана данная постановка задачи. В ней для описания взаимодействия слоя 3 с телами 1 и 2 применяется концепция "слоя взаимодействия" [5] с учетом симметрии образца относительно горизонтальной оси Ox_1 . Согласно данной концепции на границах между слоем и пластинами жесткое сцепление, и постулируется равенство по модулю и противоположность по направлению векторов напряжений по границе слоя 3.

Область упругого деформирования определяется законом Гука. На участке пластического деформирования слоя 3 предполагается выполнение критерия Треска—Сен-Венана [8] при условии полной пластичности. Также учитывается теория пластин Миндлина—Рейсснера [9, 10], согласно которой поле перемещений в теле 1 определяется следующим образом:

$$u_1(x_1, x_2) = u_1^+(x_1) - \varphi(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \quad u_2(x_1, x_2) = u_2^+(x_1), \quad (1)$$

где u_1^+ , u_2^+ — компоненты векторов перемещений верхней границы слоя, φ — угол поворота материальных нормалей к плоскости $x_2 = \delta_0/2$.

Общее решение на участке $(0; \ell_p]$ имеет вид:

$$\begin{aligned} u_1^+ = & \tilde{C}_2 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_9 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_{10} \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_3 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_{10} \cos(R_2 x_1) + \\ +R_9 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \\ & - \tilde{C}_4 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_9 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_{10} \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_5 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_{10} \cos(R_2 x_1) + \\ +R_9 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \\ & + \frac{1}{Dh} \tilde{C}_1 x_1 + \frac{2\tau_0 \delta_0}{3Dh} x_1 + \tilde{C}_6, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
u_2^+ &= \tilde{C}_2 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_1 \cos(R_2 x_1) - \\ -R_2 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \tilde{C}_3 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_2 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_1 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \\
&- \tilde{C}_4 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_1 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_2 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_5 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_2 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_1 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \\
&- \frac{\delta_0}{2Dh} \tilde{C}_1 - \frac{2\tau_0 \delta_0 S}{3Dh}, \tag{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi &= \tilde{C}_2 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_3 \cos(R_2 x_1) + \\ -R_4 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \tilde{C}_3 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_4 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_3 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \\
&+ \tilde{C}_4 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_3 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_4 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_5 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_4 \cos(R_2 x_1) + \\ -R_3 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix}, \tag{4}
\end{aligned}$$

где $D = \frac{E}{(1-\nu^2)}$; $L = k \frac{E}{2(1+\nu)}$; $k = \frac{5}{6}$; $\Delta = 4D^2 h^4 (1 - \delta_0 T)$; $T = \frac{12L(2LS+Dh)}{D^2 h^2}$;
 $K = \frac{E_3}{3(1-2\nu_3)}$; $S = \frac{Dh}{K} + \frac{\delta_0}{2}$; $R_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}}$; $R_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}$; $\alpha = \frac{Dh-6L\delta_0}{Lh\delta_0(\frac{Dh}{K}+2\delta_0)}$;
 $\beta = \frac{D\sqrt{\delta_0 T-1}}{L\delta_0(\frac{Dh}{K}+2\delta_0)}$; $R_3 = \frac{2LS}{V} \left(R_1^2 - R_2^2 - \frac{2D}{LS\delta_0} \right)$; $R_4 = \frac{4LSR_1R_2}{V}$; $V = 2LS + Dh$;
 $R_5 = \frac{Dh^2(R_2R_4-R_1R_3)}{2SK} + \frac{R_1}{S}$; $R_6 = -\frac{Dh^2(R_1R_4+R_2R_3)}{2SK} + \frac{R_2}{S}$; $R_7 = \frac{R_1}{R_1^2+R_2^2}$; $R_8 = \frac{R_2}{R_1^2+R_2^2}$;
 $R_9 = R_5R_7 + R_6R_8$; $R_{10} = R_6R_7 - R_5R_8$.

Согласно работе [11] общее решение на участке $(\ell_p; \ell]$ следующее:

$$\begin{aligned}
u_1^+ &= \tilde{C}_8 e^{F_1 x_1} \begin{bmatrix} -F_9 \cos(F_2 x_1) + \\ +F_{10} \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_9 e^{F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_{10} \cos(F_2 x_1) + \\ +F_9 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} - \\
&- \tilde{C}_{10} e^{-F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_9 \cos(F_2 x_1) + \\ +F_{10} \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_{11} e^{-F_1 x_1} \begin{bmatrix} -F_{10} \cos(F_2 x_1) + \\ +F_9 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} + \\
&+ \left[\frac{\delta_0 D_2 C_2}{2S_2 (C_1 S_2 - 0.5\delta_0 D_2 C_2)} + \frac{1}{S_2} \right] \tilde{C}_7 x_1 + \tilde{C}_{12}, \tag{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2^+ &= \tilde{C}_8 e^{F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_1 \cos(F_2 x_1) - \\ -F_2 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} - \tilde{C}_9 e^{F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_2 \cos(F_2 x_1) + \\ +F_1 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} - \\
&- \tilde{C}_{10} e^{-F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_1 \cos(F_2 x_1) + \\ +F_2 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_{11} e^{-F_1 x_1} \begin{bmatrix} -F_2 \cos(F_2 x_1) + \\ +F_1 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} - \\
&- \frac{C_2}{C_1 S_2 - 0.5\delta_0 D_2 C_2} \tilde{C}_7, \tag{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi &= -\tilde{C}_8 e^{F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_3 \cos(F_2 x_1) + \\ +F_4 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_9 e^{F_1 x_1} \begin{bmatrix} -F_4 \cos(F_2 x_1) + \\ +F_3 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} + \\
&+ \tilde{C}_{10} e^{-F_1 x_1} \begin{bmatrix} -F_3 \cos(F_2 x_1) + \\ +F_4 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_{11} e^{-F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_4 \cos(F_2 x_1) + \\ +F_3 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix}, \tag{7}
\end{aligned}$$

где $D_1 = \frac{E_3(1-\nu_3)}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}$; $D_2 = \frac{2E_3\nu_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)\delta_0}$; $C_1 = \frac{2D_1}{\delta_0}$; $C_2 = \frac{\delta_0 D_2}{2}$; $m_1 = 1 + \frac{DhC_2}{2LS_2}$; $m_2 = \frac{1}{Lh} \left(C_1 - \frac{\delta_0 D_2 C_2}{2S_2} \right)$; $m_3 = -\frac{3(\delta_0 D_2 Dh + 4LS_2)}{Dh(4hS_2 - 3Dh^2)}$; $m_4 = \frac{12LS_2}{Dh(4hS_2 - 3Dh^2)}$; $S_2 = Dh + 0.5\delta_0 D_1$; $d = (m_2 + m_1 m_3 + m_4)^2 - 4m_2 m_4$; $F_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{\gamma^2 + \eta^2} + \gamma}{2}}$; $F_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{\gamma^2 + \eta^2} - \gamma}{2}}$; $\gamma = \frac{m_2 + m_1 m_3 + m_4}{2}$; $\eta = \frac{\sqrt{-d}}{2}$; $F_3 = \frac{m_2 - F_1^2 + F_2^2}{m_1}$; $F_4 = \frac{2F_1 F_2}{m_1}$; $F_5 = \frac{Dh^2(F_1 F_3 + F_2 F_4) + \delta_0 D_2 F_1}{2S_2}$; $F_6 = \frac{Dh^2(F_2 F_3 - F_1 F_4) + \delta_0 D_2 F_2}{2S_2}$; $F_7 = \frac{F_1}{F_1^2 + F_2^2}$; $F_8 = \frac{F_2}{F_1^2 + F_2^2}$; $F_9 = F_5 F_7 + F_6 F_8$; $F_{10} = F_6 F_7 - F_5 F_8$.

Чтобы найти 12 констант интегрирования из формул (2)-(7), необходимо удовлетворить следующим условиям:

$$\begin{aligned} u_1^+|_{x_1=\ell} &= 0, u_2^+|_{x_1=\ell} = 0, \varphi|_{x_1=\ell} = 0, \\ Q_{12}|_{x_1=0} &= -P/b, (Q_{11} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{11})|_{x_1=0} = 0, M_{11}|_{x_1=0} = -Pa/b, \\ u_1^+|_{x_1=\ell_p-0} &= u_1^+|_{x_1=\ell_p+0}, u_2^+|_{x_1=\ell_p-0} = u_2^+|_{x_1=\ell_p+0}, \varphi|_{x_1=\ell_p-0} = \varphi|_{x_1=\ell_p+0}, \\ Q_{12}|_{x_1=\ell_p-0} &= Q_{12}|_{x_1=\ell_p+0}, Q_{11}|_{x_1=\ell_p-0} = (Q_{11} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{11})|_{x_1=\ell_p+0}, \\ M_{11}|_{x_1=\ell_p-0} &= M_{11}|_{x_1=\ell_p+0}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $Q_{11} = Dh \left(\frac{du_1^+}{dx_1} - \frac{h}{2} \frac{d\varphi}{dx_1} \right)$, $Q_{12} = Lh \left(\frac{du_2^+}{dx_1} - \varphi \right)$, $M_{11} = Dh^2 \left(\frac{1}{2} \frac{du_1^+}{dx_1} - \frac{h}{3} \frac{d\varphi}{dx_1} \right)$ — обобщенные силы и обобщенный момент.

2. Определение J-интеграла. На рис. 2 показан интеграл по замкнутому контуру $SM'MS'ABB'A'$, который охватывает предполагаемую область диссипации.

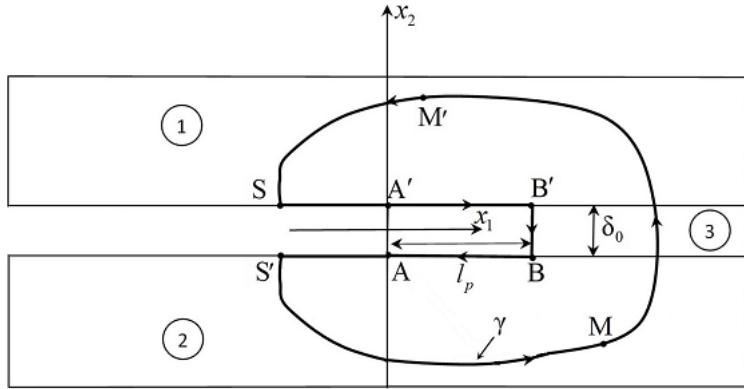


Рис. 2. Контур интегрирования

А на рис. 3 согласно работе [12] изображен элемент слоя взаимодействия, который находится в равновесии под воздействием распределенной внешней нагрузки \mathbf{q} , где \mathbf{q}^+ — нагрузка по верхней границе слоя; \mathbf{q}^- — нагрузка по нижней

границе слоя; \mathbf{q}^r — нагрузка по правому торцу слоя; \mathbf{q}^l — нагрузка по левому торцу слоя.

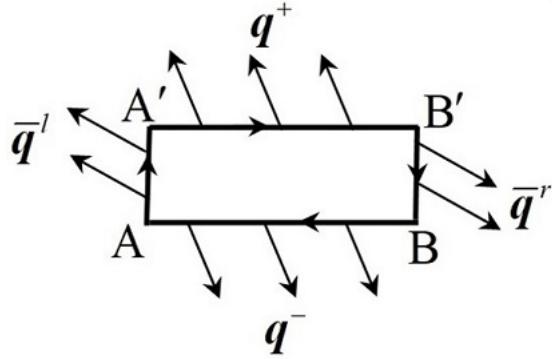


Рис. 3. Элемент слоя

Следуя работе [13], приходим к следующему определению J-интеграла:

$$J = \delta_0 \psi|_{x_1=\ell_p} - \delta_0 \bar{\mathbf{q}}^r \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\ell_p} - \int_0^{\ell_p} \left(\mathbf{q}^- \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^-}{\partial x_1} + \mathbf{q}^+ \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial x_1} \right) dx_1, \quad (9)$$

где ψ — удельная свободная энергия; $\bar{\mathbf{u}} = 0.5(\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-)$ — вектор средних перемещений; $\mathbf{q}^+ = \sigma_{12}^+ \mathbf{e}_1 + \sigma_{22}^+ \mathbf{e}_2$; $\mathbf{q}^- = -\sigma_{12}^- \mathbf{e}_1 - \sigma_{22}^- \mathbf{e}_2$; $\bar{\mathbf{q}}^r = \bar{\sigma}_{11} \mathbf{e}_1 + \bar{\sigma}_{12} \mathbf{e}_2$; $\bar{\mathbf{q}}^l = -\bar{\sigma}_{11} \mathbf{e}_1 - \bar{\sigma}_{12} \mathbf{e}_2$; $\sigma_{12}^\pm, \sigma_{22}^\pm$ — граничные напряжения слоя; $\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{\sigma}_{22}$ — средние напряжения на торцах слоя; $\bar{\sigma}_{11}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{11}(x_1, x_2) dx_2$; $\bar{\sigma}_{12}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{12}(x_1, x_2) dx_2$; $\bar{\sigma}_{22}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{22}(x_1, x_2) dx_2$.

Учитывая условия равновесия слоя: $\delta_0 \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1} = \sigma_{12}^- - \sigma_{12}^+$, $\delta_0 \frac{\partial \bar{\sigma}_{12}}{\partial x_1} = \sigma_{22}^- - \sigma_{22}^+$, для случая нормального отрыва имеем: $u_1^+ = u_1^-$; $u_2^+ = -u_2^-$; $\bar{\sigma}_{12} = 0$; $\sigma_{12}^- = -\sigma_{12}^+ = 0.5\delta_0 \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1}$; $\sigma_{22}^+ = \sigma_{22}^- = \bar{\sigma}_{22}$.

Таким образом, формула (9) преобразуется к следующему виду:

$$J = \delta_0 \left[\frac{\tau_0}{3} (\bar{\varepsilon}_{11} - 2\bar{\varepsilon}_{22})|_{x_1=\ell_p} + \frac{K}{2} (\bar{\varepsilon}_{22}^2 - \bar{\varepsilon}_{11}^2)|_{x_1=0} + \frac{4\tau_0}{3} \bar{\varepsilon}_{22}|_{x_1=0} \right], \quad (10)$$

где $\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{du_1^+}{dx_1}$, $\bar{\varepsilon}_{22} = \frac{2u_2^+}{\delta_0}$ — средние деформации в адгезионном слое.

3. Результаты. Для принятых механических и геометрических характеристик образца по формуле (10) вычислим значения J-интеграла. В таблице 2 при разной толщине адгезионного слоя показаны результаты для смолы Araldite 2015, а в таблице 3 — для Sikaforce 7752.

δ_0 , м	ℓ_p , м	J_C , Н/м
10^{-3}	0.00290683	431.74
$5 \cdot 10^{-4}$	0.00378364	415.68
10^{-4}	0.00391626	388.13

Таблица 2. Результаты расчета для адгезива Araldite 2015

δ_0 , м	ℓ_p , м	J_C , Н/м
10^{-3}	0.01357304	2233.6
$5 \cdot 10^{-4}$	0.01230715	2081.1
10^{-4}	0.00894073	1827

Таблица 3. Результаты расчета для адгезива Sikaforce 7752

Из таблиц 2 и 3 видим, что при $\delta_0 = 10^{-3}$ м значения J-интеграла отличаются от экспериментальных значений (табл. 1) менее чем на 5 %. А при уменьшении толщины слоя значения J-интеграла тоже уменьшаются и согласно работе [14] стремятся к аналитическому значению, вычисленному по формуле:

$$J^a = \frac{12P^2(1-\nu^2)}{hEb^2} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5(1-\nu)}} \frac{h}{a} \right)^2 \quad (11)$$

Для Araldite 2015 по формуле (11) получим $J^a = 353.42$ Н/м, а для Sikaforce 7752 — $J^a = 1509.5$ Н/м.

Заключение. Показано общее решение для модели упругопластического деформирования тонкого адгезионного слоя. Разработан подход для определения прочностной характеристики в виде J-интеграла. С использованием полученной формулы вычислены его значения для адгезивов Araldite 2015 и Sikaforce 7752 при различной толщине адгезионного слоя. Получено, что аналитические значения J-интеграла отличаются от экспериментальных не более чем на 5 % и стремятся к определенному значению.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. В. Э. Богачева написание текста рукописи, И. М. Лавит согласование финальной версии рукописи, О. С. Перова редактирование текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. V. E. Bogacheva writing the text of the manuscript, I. M. Lavit approving the final version of the manuscript, O. S. Perova editing the text of the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The work was carried out with the support of the state assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (code FEWG-2023-0002).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Prandtl L., Knauss W. G.* A thought model for the fracture of brittle solids // International Journal of Fracture. – 2011. – Т. 171, № 2. – С. 105–109.
2. *Ентов В. М., Салганик Р. Л.* К модели хрупкого разрушения Прандтля // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. – 1968. – № 6. – С. 87–99.
3. *Салганик Р. Л., Мищенко А. А., Федотов А. А.* Напряженное состояние в окрестности выработки, пройденной в глубокозалегающем горизонтальном пласте // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2015. – № 2. – С. 24–33.
4. *Макклинток Ф.* Пластические аспекты разрушения // Разрушение. Т. 3. – М. : Мир, 1975. – С. 67–262.
5. *Glagolev V. V., Markin A. A.* Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // International Journal of Solids and Structures. – 2019. – Т. 158. – С. 141–149. – DOI: doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002.
6. Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints / R. M. Lopes [и др.] // Journal of Adhesion and Adhesives. – 2016. – Т. 67. – С. 103–111. – DOI: [10.1016/j.ijadhadh.2015.12.032](https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2015.12.032).
7. *Богачева В. Э., Перова О. С.* Влияние геометрических характеристик композита на напряженное состояние тонкого адгезионного слоя // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2024. – 4 (62). – С. 97–106. – DOI: [10.37972/chgpu.2024.62.4.011](https://doi.org/10.37972/chgpu.2024.62.4.011). – EDN: QYGMSh.
8. *Tresca H.* Memoires sur l'ecoulement des corps solides // Memoires presentes par divers savants a l'Academie royale des sciences. – 1868. – Т. 18, № 1864. – С. 733–799.
9. *Mindlin R. D.* Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // ASME Journal of Applied Mechanics. – 1951. – Т. 18. – С. 31–38.
10. *Reissner E.* On Bending of Elastic Plates // Quarterly of Applied Mathematics. – 1947. – Т. 5, № 1. – С. 55–68.
11. *Богачева В. Э.* Влияние механических характеристик слоистого композита на критическое значение J-интеграла // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2023. – 4 (58). – С. 63–70. – DOI: [10.37972/chgpu.2023.58.4.007](https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.58.4.007). – EDN: YEWGCG.
12. Влияние пластических свойств тонкого адгезионного слоя на распределение зон пластичности и значения J-интеграла в состоянии плоской деформации / В. В. Глаголев [и др.] // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2023. – Т. 29, № 1. – С. 115–131. – DOI: [10.33113/mkmk.ras.2023.29.01.08](https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2023.29.01.08). – EDN: AXADBS.
13. *Berto F., Glagolev V. V., Markin A. A.* Relationship between J_c and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite // International Journal of Fracture. – 2020. – Т. 224, № 2. – С. 277–284. – DOI: [10.1007/s10704-020-00464-0](https://doi.org/10.1007/s10704-020-00464-0). – EDN: QERRGI.

14. О влиянии механических характеристик тонкого адгезионного слоя на прочность композита. Часть 2. Упругопластическое деформирование / В. В. Глаголев [и др.] // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 3. – С. 30–42. – DOI: 10.15593/perm.mech/2023.3.03. – EDN: QWPPXP.

REFERENCES

1. Prandtl L., Knauss W. G. A thought model for the fracture of brittle solids // International Journal of Fracture. – 2011. – Vol. 171, no. 2. – P. 105–109.
2. Entov V. M., Salganik R. L. To the Prandtl model of brittle fracture // Izv. AN SSSR. MTT. – 1968. – No. 6. – P. 87–99. – (in Russian).
3. Salganik R. L., Mishchenko A. A., Fedotov A. A. Stress state in the vicinity of excavation in deep horizontal bed // Journal of Mining Science. – 2015. – No. 2. – P. 24–33. – (in Russian).
4. Makklintok F. Plastic aspects of destruction // Razrushenie. Vol. 3. – M. : Mir, 1975. – P. 67–262. – (in Russian).
5. Glagolev V. V., Markin A. A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // International Journal of Solids and Structures. – 2019. – Vol. 158. – P. 141–149. – DOI: doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002.
6. Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints / R. M. Lopes [et al.] // Journal of Adhesion and Adhesives. – 2016. – Vol. 67. – P. 103–111. – DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2015.12.032.
7. Bogacheva V. E., Perova O. S. Influence of geometric characteristics of the composite on the stress state of a thin adhesive layer // Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. – 2024. – 4 (62). – P. 97–106. – DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.011. – EDN: QYGMSh. – (in Russian).
8. Tresca H. Memoires sur l'ecoulement des corps solides // Memoires presentes par divers savants a l'Academie royale des sciences. – 1868. – Vol. 18, no. 1864. – P. 733–799.
9. Mindlin R. D. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // ASME Journal of Applied Mechanics. – 1951. – Vol. 18. – P. 31–38.
10. Reissner E. On Bending of Elastic Plates // Quarterly of Applied Mathematics. – 1947. – Vol. 5, no. 1. – P. 55–68.
11. Bogacheva V. E. Influence of mechanical characteristics of a layered composite on the critical value of the J-integral // Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. – 2023. – 4 (58). – P. 63–70. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.007. – EDN: YEWGCG. – (in Russian).
12. Influence of the plastic properties of a thin adhesion layer on the distribution of plasticity zones and the values of the J-integral in the plane deformation state / V. V. Glagolev [et al.] // Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii. – 2023. – Vol. 29, no. 1. – P. 115–131. – DOI: 10.33113/mkmk.ras.2023.29.01.08. – EDN: AXADBS. – (in Russian).

13. *Berto F., Glagolev V. V., Markin A. A.* Relationship between J_c and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite // International Journal of Fracture. – 2020. – Vol. 224, no. 2. – P. 277–284. – DOI: 10.1007/s10704-020-00464-0. – EDN: QERRGI.
14. On the influence of the mechanical characteristics of a thin adhesion layer on the composite strength. Part 2. Elastic-plastic deformation / V. V. Glagolev [et al.] // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2023. – No. 3. – P. 30–42. – DOI: 10.15593/perm.mech/2023.3.03. – EDN: QWPPXP. – (in Russian).

Л. А. Максимова¹, А. В. Юденков²

О РАЗРЕШИМОСТИ КЛАССИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

¹Российский университет транспорта (МИИТ), Москва, Россия

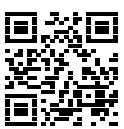
²Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Смоленск, Россия

Аннотация. В статье исследуется разрешимость классических краевых задач для бианалитических функций, которые обобщают основные задачи теории упругости. Установлена нётеровость краевых задач. Установлена зависимость числа решений однородных задач и числа условий разрешимости неоднородных задач от индексов краевых коэффициентов в краевых условиях. Полученные результаты позволяют существенно расширить возможности применения численных методов при работе с математическими моделями задач теории упругости.

Ключевые слова: Краевая задача, конформное отображение, бианалитическая функция.

Максимова Людмила Анатольевна, доктор физико-математических наук; профессор кафедры высшей математики и естественных наук; e-mail: maximova_ng@mail.ru

Юденков Алексей Витальевич, доктор физико-математических наук; профессор кафедры естественнонаучных и гуманитарных дисциплин; e-mail: aleks-ydenkov@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0001-8329-1146>



для цитирования: Максимова Л. А., Юденков А. В. О разрешимости классических краевых задач для бианалитических функций в математической теории упругости // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 4(66). С. 225–235. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.015. EDN: TUQVVS

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

L. A. Maximova¹, A. V. Yudakov²

ON THE SOLVABILITY OF CLASSICAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR BIANALYTIC FUNCTIONS IN THE MATHEMATICAL THEORY OF ELASTICITY

¹*Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia*

²*Plekhanov Russian University of Economics, Smolensk, Russia*

Abstract. The article explores the solvability of classical boundary value problems for bianalytical functions, which generalize the basic problems of elasticity theory. The Noetherianism of boundary value problems has been established. The dependence of the number of solutions to homogeneous problems and the number of solvability conditions for heterogeneous problems on the indices of boundary coefficients in boundary conditions is established. The results obtained make it possible to significantly expand the possibilities of using numerical methods when working with mathematical models of problems in the theory of elasticity.

Keywords: Boundary value problem, conformal mapping, bianalytical function.

Lyudmila A. Maximova, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; e-mail: maximova_ng@mail.ru

Aleksey V. Yudakov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; e-mail: aleks-ydenkov@mail.ru;
<https://orcid.org/0000-0001-8329-1146>



to cite this article: Maximova L. A., Yudakov A. V. On the Solvability of Classical Boundary Value Problems for Bianalytic Functions in the Mathematical Theory of Elasticity // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 4(66). p. 225–235. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.015

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Эффективным методом решения задач теории упругости является использование комплексного потенциала [1], который, как показано в работах Г.В. Колосова, Н.И. Мусхелишвили ([2] с. 136), представляет собой решение бигармонического уравнения.

$$\Delta^2 F = 0.$$

На множестве комплексных чисел решение бигармонического уравнения является бианалитической функцией.

$$F(z) = \phi_0(z) + \bar{z}\phi_1(z). \quad (1)$$

Здесь $\phi_k(z)$ ($k=0,1$) - аналитические в области D (область занятая телом) функции, $\bar{z} = x - iy$.

В работах ([3] с.300), ([2] с.279), ([4] с.9) для решения основных задач теории упругости использовались краевые задачи для аналитических и бианалитических функций.

Напомним, что в выделяют две основных краевых задачи теории аналитических функций ([3] с.85, 264): двусторонняя задача Римана и односторонняя задача Гильберта. Напомним их формулировки.

Пусть на расширенной плоскости комплексного переменного z задан простой гладкий замкнутый контур L , который делить плоскость на конечную область D^+ и бесконечную область $D^-(z_\infty \in D^-)$.

Задача Римана. Найти кусочно аналитическую функцию $\Phi^\pm(z)$ по краевому условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t). \quad (t \in L) \quad (2)$$

Здесь $G(t)$ (краевой коэффициент) и $g(t)$ (свободный член) – заданные на контуре функции удовлетворяющие условию Гельдера, $G(t) \neq 0$.

Задача Гильберта. Найти аналитическую в области D^+ функцию $\Phi^+(z)$ по краевому условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\overline{\Phi^+(t)} + g(t). \quad (3)$$

Здесь на краевые коэффициенты накладываются условия аналогичные предыдущим.

Важным свойством задач (2) и (3) является то, что число условий разрешимости и число линейно независимых решений соответствующих однородных задач полностью определяется индексом краевого коэффициента $G(t)$. Кроме этого, в случае односвязной области задачу (3) можно методом аналитического продолжения свести к задаче (2).

Краевые условия основных задач теории упругости и их обобщений являются аналогами задач (2) и (3) на классе бианалитических функций. Наличие в краевых условиях задач для бианалитических функций неаналитических компонент осложняет их исследование. До сих пор не проведено систематическое

исследование разрешимости данных задач, что ограничивает их практическое использование.

Постановка задачи. Основная задача работы - исследование зависимости разрешимости краевых задач для бианалитических функций от краевых коэффициентов.

Приведём постановки краевых задач для бианалитических функций ([3] с.344).

Задача Римана для бианалитической функции. Найти кусочно бианалитическую функцию $F^\pm(z) = \phi_0^\pm(z) + \bar{z}\phi_1^\pm(z)$ по краевым условиям

$$\begin{aligned}\varphi_0^{+'}(t) + \bar{t}\varphi_1^{+'}(t) + \varphi_1^+(t) &= G_1(t) \left[\varphi_0^-(t) + \bar{t}\varphi_1^-(t) + \varphi_1^-(t) \right] + g_1(t), \\ \varphi_0^{+'}(t) + \bar{t}\varphi_1^{+'}(t) - \varphi_1^+(t) &= G_2(t) \left[\varphi_0^-(t) + \bar{t}\varphi_1^-(t) - \varphi_1^-(t) \right] + g_2(t).\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь $G_k(t)$ заданные функции, удовлетворяющие условию Гельдера вместе с своими производными до порядка $(2k-1)$ порядка включительно; $g_1(t) \in H^1(L)$.

Задача Гильберта для бианалитической функции. Найти бианалитическую в области D функцию $F(z)$ по краевым условиям:

$$\begin{aligned}\varphi_0'(t) + \bar{t}\varphi_1'(t) + \varphi_1(t) &= G_1(t) \overline{[\varphi_0'(t) + \bar{t}\varphi_1'(t) + \varphi_1(t)]} + g_1(t), \\ \varphi_0'(t) + \bar{t}\varphi_1'(t) - \varphi_1(t) &= G_2(t) \overline{[\varphi_0'(t) + \bar{t}\varphi_1'(t) - \varphi_1(t)]} + g_2(t).\end{aligned}\quad (5)$$

Частным случаем задачи Гильберта для бианалитических функций является первая основная задача теории упругости:

$$\begin{aligned}\phi_0'(t) + \bar{t}\phi_1'(t) + \phi_1(t) &= \overline{[\phi_0'(t) + \bar{t}\phi_1'(t) + \phi_1(t)]} + g_1(t), \\ \phi_0'(t) + \bar{t}\phi_1'(t) - \phi_1(t) &= \overline{[\phi_0'(t) + \bar{t}\phi_1'(t) - \phi_1(t)]} + g_2(t).\end{aligned}\quad (6)$$

Неоднородная краевая задача (6) имеет единственное решение. Однородная задача не имеет нетривиальных решений ([2] с.283). Данный результат получен благодаря дополнительному условию. Согласно которому тело находится в равновесии. Сам результат имеет ясную физическую интерпретацию. В отсутствии внешних напряжений отсутствует деформация. Определенным напряжениям соответствуют единственныe деформации.

В общем случае для исследования задач (4) и (5) привлечение механических аналогов не подходит. Поэтому на данный момент разрешимость краевых задач для бианалитических функций исследована только в частных случаях [5]. Для полного исследования применим несколько, дополняющих друг друга методов.

Доказательство нетривиальности краевых задач Римана и Гильберта для бианалитических функций. Назовём нетривиальными краевые задачи, в которых индекс (разность между числом линейно независимых решений однородной задачи и числом условий разрешимости неоднородной задачи) является

конечным числом. Для подсчёта индекса задачи воспользуемся системами сингулярных интегральных уравнений эквивалентным краевым задачам (4) и (5).

Рассмотрим задачу Римана для бианалитических функций (4). Соответствующая система сингулярных интегральных уравнений в данном случае будет иметь вид [1]:

$$a_1(t)(\rho_0(t) + \bar{t}\rho_1'(t) + \rho_1(t)) + \frac{b_1(t)}{\pi i} \int_L \frac{\rho_0(\tau) + \bar{t}\rho_1'(\tau) + \rho_1(\tau)}{\tau - t} d\tau = g_1(t), \quad (7)$$

$$a_2(t)(\rho_0(t) + \bar{t}\rho_1'(t) - \rho_1(t)) + \frac{b_2(t)}{\pi i} \int_L \frac{\rho_0(\tau) + \bar{t}\rho_1'(\tau) - \rho_1(\tau)}{\tau - t} d\tau = g_2(t).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \phi_k'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\rho_k(\tau)}{\tau - t} d\tau, \\ a_k(t) &= \frac{1 + G_k(t)}{2}, \\ b_k(t) &= \frac{1 - G_k(t)}{2}. \end{aligned}$$

Выполним следующее преобразование.

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\bar{t}\rho_1'(\tau)}{\tau - t} d\tau = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\bar{\tau}\rho_1'(\tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\bar{t} - \bar{\tau}}{\tau - t} \right) \rho_1(\tau) d\tau.$$

Введём обозначение

$$\begin{aligned} W_1(t) &= \rho_0(t) + \bar{t}\rho_1'(t) + \rho_1(t), \\ W_2(t) &= \rho_0(t) + \bar{t}\rho_1'(t) - \rho_1(t). \end{aligned}$$

Получим

$$a_1(t)W_1(t) + \frac{b_1(t)}{\pi i} \int_L \frac{W_1(\tau)}{\tau - t} d\tau = g_1(t) - \int_L R_1(t, \tau) \rho_1(\tau) d\tau, \quad (8)$$

$$a_2(t)W_2(t) + \frac{b_2(t)}{\pi i} \int_L \frac{W_2(\tau)}{\tau - t} d\tau = g_2(t) - \int_L R_2(t, \tau) \rho_1(\tau) d\tau.$$

Система (8) может быть регуляризована методом Карлемана-Векуа ([3] с. 233), то есть приведена к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Система (8) преобразуется к следующему виду:

$$\rho_1(t) + \int_L K_2(t, \tau) \rho_1(\tau) d\tau = f_2(t), \quad (9)$$

$$\rho_0(t) = -\bar{t}\rho_1'(t) - \rho_1(t) - \int_L K_1(t, \tau) \rho_1(\tau) d\tau + f_1(t).$$

Здесь $K_k(t, \tau)$ – известные ядра Фредгольма, $f_k(t)$ – известные функции принадлежащие классу Гельдера.

Индекс данной системы определяется краевыми коэффициентами $G_k(t)$.

$$IndR = Ind[G_1(t) + G_2(t)] = k_1 + k_2.$$

Число линейно независимых решений однородного уравнения Фредгольма второго рода из системы (9) таким образом определить невозможно.

Аналогичные результаты можно получить для задачи (4).

Определение условий разрешимости и число линейно независимых решений. Для разнообразия основное внимание в данном разделе большее внимание уделим задаче Гильберта для бианалитических функций (5). Результаты относительно краевой задачи Римана приведём кратко.

Воспользуемся методом решения краевых задач для бианалитических функций и их обобщений, предложенным в работе ([3] с.310).

Пусть контур L представляет собой единичную окружность: $t\bar{t} = 1$.

Воспользуемся соотношением

$$\bar{t} = \frac{1}{t}.$$

В этом случае краевое условие (5) примет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_0'(t) + \frac{1}{t}\varphi_1'(t) + \varphi_1(t) &= G_1(t) \overline{[\varphi_0'(t) + \frac{1}{t}\varphi_1'(t) + \varphi_1(t)]} + g_1(t), \\ \varphi_0'(t) + \frac{1}{t}\varphi_1'(t) - \varphi_1(t) &= G_2(t) \overline{[\varphi_0'(t) + \frac{1}{t}\varphi_1'(t) - \varphi_1(t)]} + g_2(t). \end{aligned}$$

Введём вспомогательные аналитические функции.

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= \varphi_0'(z) + \frac{1}{z}\varphi_1'(z) + \varphi_1(z), \\ \Phi_2(z) &= \varphi_0'(z) + \frac{1}{z}\varphi_1'(z) - \varphi_1(z). \end{aligned}$$

Получим

$$\Phi_1(t) = G_1(t) \overline{\Phi_1(\bar{t})} + g_1(t), \quad (10)$$

$$\Phi_2(t) = G_2(t) \overline{\Phi_2(\bar{t})} + g_2(t).$$

Система (10) представляет собой две обычные краевые задачи Гильберта для аналитических функций.

Замечание. Обычно при постановке краевой задачи Гильберта для бианалитических функций добавляются начальные условия либо в точке $z = 0$ или в точке $z = \infty$. Таким образом, чтобы функции $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ не имели особенностей.

Для задачи Гильберта вида (10) справедливо следующее утверждение:

Теорема 1 ([3] с.291). При $k_m = IndG_m \geq 0$ неоднородная задача безусловно разрешима, однородная задача имеет k_m линейно независимых решений. При $k_m = IndG_m < 0$ неоднородная задача неразрешима, единственное решение неоднородной задачи существует при соблюдении $|k_m|$ необходимых и достаточных условий.

Таким образом, для краевой задачи Гильберта для бианалитических функций в случае круговой области число условий разрешимости неоднородной задачи p и число линейно независимых решений однородной задачи l полностью определяется коэффициентами $G_m (m = 1, 2)$.

$$l = \max(0, k_1 + k_2),$$

$$p = \max(0, -k_1 - k_2).$$

Полученные результаты можно распространить на области, отображающиеся на внутренность единичного круга рациональными функциями.

Для конечной области D конформно отображающая функция будет иметь вид

$$z = \omega_n(\vartheta) = a_1\vartheta + a_2\vartheta^2 + \dots + a_n\vartheta^n.$$

Для бесконечной

$$z = \omega_n(\vartheta) = \frac{a_{-1}}{\vartheta} + a_1\vartheta + a_2\vartheta^2 + \dots + a_n\vartheta^n.$$

Введём вспомогательные функции.

$$\begin{aligned} \psi(\omega_n) &= \varphi'_0(z) \\ \psi_0(\omega_n) &= \psi'(\omega), \\ \psi_1[\omega_n(\vartheta)] &= \phi_1(z). \end{aligned}$$

Краевое условие (5) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_0(\sigma) + \frac{\overline{\omega_n(\sigma)}}{\omega_n'(\sigma)}\psi'_1(\sigma) + \psi_1(\sigma) &= G_1[\omega_n(\sigma)] \left[\psi_0(\sigma) + \frac{\overline{\omega_n(\sigma)}}{\omega_n'(\sigma)}\psi'_1(\sigma) + \psi_1(\sigma) \right] + \\ &+ g_1[\omega_n(\sigma)], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \psi_0(\sigma) + \frac{\overline{\omega_n(\sigma)}}{\omega_n'(\sigma)}\psi'_1(\sigma) - \psi_1(\sigma) &= G_2[\omega_n(\sigma)] \left[\psi_0(\sigma) + \frac{\overline{\omega_n(\sigma)}}{\omega_n'(\sigma)}\psi'_1(\sigma) - \psi_1(\sigma) \right] + \\ &+ g_2[\omega_n(\sigma)]. \end{aligned}$$

Здесь σ – точка единичной окружности.

Согласно предположению об функции, осуществляющей конформное отображение, можно записать:

$$\overline{\omega_n}\left(\frac{1}{\vartheta}\right) = \vartheta^{-n} (\overline{a_1}\vartheta^{n-1} + \overline{a_2}\vartheta^{n-2} + \dots + \overline{a_n}). \quad (12)$$

Введём вспомогательные функции.

$$\Phi_1(\vartheta) = \psi_0(\vartheta) + \frac{\overline{\omega_n}\left(\frac{1}{\vartheta}\right)}{\omega_n'(\sigma)}\psi'_1(\vartheta) + \psi_1(\vartheta),$$

$$\Phi_2(\vartheta) = \psi_0(\vartheta) + \frac{\overline{\omega_n}(\frac{1}{\vartheta})}{\omega'_n(\sigma)} \psi'_1(\vartheta) - \psi_1(\vartheta).$$

Получим:

$$\Phi_1(\sigma) = G_1[\omega_n(\sigma)] \overline{\Phi_1(\sigma)} + g_1[\omega_n(\sigma)], \quad (13)$$

$$\Phi_2(\sigma) = G_2[\omega_n(\sigma)] \overline{\Phi_2(\sigma)} + g_2[\omega_n(\sigma)].$$

С учётом (12) краевые условия (13) представляют собой две краевые задачи Гильберта для аналитических в области D функций. Для каждой из задач справедлива теорема 1.

В частности, в случае нулевого индекса однородные задачи (13) не имеют нетривиальных решений. Отсюда

$$\begin{aligned} \psi_1(\vartheta) &= \frac{\Phi_1(\vartheta) - \Phi_2(\vartheta)}{2} = 0, \\ \psi_0(\vartheta) &= 0. \end{aligned}$$

Это утверждение соответствует свойству безусловной однозначной разрешимости основных задач теории упругости, которое получено без привлечения условия механического равновесия.

В случае произвольной области такой подход не даст нужного результата, так как $\bar{t} = \overline{\omega(\sigma)} = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{c}_i \bar{\sigma}^i$ ($\omega(\sigma) = \frac{1}{\sigma} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i \sigma^i$ для бесконечной области) нельзя представить в виде граничного значения аналитической функции.

Преобразуем систему (13) к следующему виду:

$$\psi_0(\sigma) = G_1[\omega(\sigma)] \overline{\psi_0(\sigma)} + Q_1(\sigma), \quad (14)$$

$$\psi_1(\sigma) - G_2[\omega(\sigma)] \overline{\psi_1(\sigma)} + \int_L A(\sigma, \sigma_0) \psi_1(\sigma_0) d\sigma_0 + \int_L B(\sigma, \sigma_0) \overline{\psi_1(\sigma_0)} d\sigma_0 = Q_2(\sigma).$$

Здесь $A(\sigma, \sigma_0)$, $B(\sigma, \sigma_0)$ - известные ядра Фредгольма, $Q_2(\sigma)$ - известная функция,

$$Q_1(\sigma) = -\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \psi'_1(\sigma) - \psi_1(\sigma) + G_1(\omega(\sigma)) \left[\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \psi'_1(\sigma) + \psi_1(\sigma) \right] + g_1(\omega(\sigma)).$$

Из системы (14) следует, что решение краевой задачи Гильберта для бианалитической функции сводится к последовательному решению задачи Гильберта для аналитической функции, содержащей интегральные члены и обычной задачи Гильберта. Отсюда следует, что для доказательства неразрешимости однородной задачи (5) с нулевым индексом достаточно доказать неразрешимость второй краевой задачи в системе (14).

Предположим, что $\psi_1(\vartheta) \neq 0$ решение краевой задачи

$\psi_1(\sigma) - G_2[\omega(\sigma)]\overline{\psi_1(\sigma)} + \int_L A(\sigma, \sigma_0)\psi_1(\sigma_0)d\sigma_0 + \int_L B(\sigma, \sigma_0)\overline{\psi_1(\sigma_0)}d\sigma_0 = 0$,
при условии $IndG_2[\omega(\sigma)] = 0$.

Рассмотрим функцию $\omega_n(\vartheta)$, которая получается из функции $\omega(\vartheta)$ отбрасыванием членов степени выше n . Данная функция отображает внутренность единичного круга на область D_n близкую к области D :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\omega_n(\sigma) - \omega(\sigma)| = 0.$$

В силу условий, наложенных на контур L и краевые условия задачи Гильберта для бианалитических функций справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} |G_2[\omega_n(\sigma)] - G_2[\omega(\sigma)]| &\leq A |\omega_n(\sigma) - \omega(\sigma)|^\mu, \quad 0 < \mu \leq 1. \\ |A_n(\sigma, \sigma_0) - A(\sigma, \sigma_0)| &\leq C(|\omega_n(\sigma) - \omega(\sigma)|^\mu + |\omega_n(\sigma_0) - \omega(\sigma_0)|^\mu), \\ |B_n(\sigma, \sigma_0) - B(\sigma, \sigma_0)| &\leq D(|\omega_n(\sigma) - \omega(\sigma)|^\mu + |\omega_n(\sigma_0) - \omega(\sigma_0)|^\mu). \end{aligned}$$

Здесь μ – показатель Гёльдера, A, C, D – постоянные.

Отсюда следует, что

$$|\psi_1[\omega_n(\vartheta)] - \psi_1[\omega(\vartheta)]| \leq K |\omega_n(\sigma) - \omega(\sigma)|^\mu.$$

Согласно предыдущим результатам $\psi_1[\omega_n(\vartheta)] = 0$. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_1[\omega_n(\vartheta)] = \psi_1[\omega(\vartheta)] = 0.$$

Этот результат противоречит сделанному предположению.

Теорема 2. Однородная задача Гильберта для бианалитических функций с нулевым индексом неразрешима.

Теорема 3. Неоднородная задача Гильберта для бианалитических функций безусловно и однозначно разрешима.

Аналогичным образом можно рассмотреть случаи, когда индекс задачи Гильберта отличен от нуля. В общем случае справедливо утверждение.

Теорема 4. Число решений однородной задачи Гильберта для бианалитической функции и число условий разрешимости неоднородной задачи определяется индексами краевых коэффициентов $G_k(t)$ ($k = 1, 2$).

$$l = \max(0, k_1 + k_2),$$

$$p = \max(0, -k_1 - k_2).$$

Аналогичный результат можно получить для задачи Римана для бианалитических функций (4). Единственное существенное отличие в доказательстве заключается в том, что при конформном отображении в краевых условиях задачи появится функция сдвига, которая не влияет на разрешимость [6].

Выводы. Краевые задачи для бианалитических функций, построенные на основе основных задач теории упругости являются нётеровыми. Это означает, что число условий разрешимости p неоднородных задач и число решений l однородных задач конечно. При этом числа p, l и индекс задачи полностью определяются краевыми коэффициентами задач.

Данный результат позволяет шире применять к решению задач, связанных с определением напряжённого состояния изотропных и анизотропных тел, тел с различными упругими свойствами теорию краевых задач для бианалитических функций и их обобщений.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The authors' contributions are equal.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Максимова Л. А., Юденков А. В. Теория стохастического потенциала в плоской теории упругости // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – 4(26). – С. 134–142. – EDN: VNХOVH.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва : Наука, 1966.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – Москва : Наука, 1977.
4. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев : Наукова думка, 1975.
5. Расулов К. М., Тимофеева Т. И. О картине разрешимости однородной краевой задачи Гильберта для квазигармонических функций в круговых областях // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2016. – Т. 8, № 4. – С. 33–40. – DOI: 10.14529/mmp160404. – EDN: WWHMXX.
6. Адигамов А. Э., Юденков А. В. Модель напряженно-деформированного состояния нарушенного породного массива с учётом анизотропии и неоднородностей // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – 2021. – № 8. – С. 93–103. – DOI: 10.25018/0236_1493_2021_8_0_93. – EDN: DUOLLE.

REFERENCES

1. *Maksimova L. A., Yudenkov A. V.* Theory of stochastic potential in the plane theory of elasticity // Bulletin of the I.Ya. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of the limit state. – 2015. – 4(26). – P. 134–142. – EDN: VNХOVH.
2. *Muskhelishvili N. I.* Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. – Moscow : Nauka, 1966.
3. *Gakhov F. D.* Boundary value problems. – Moscow : Nauka Publ., 1977.
4. *Savin G. N.* Stress distribution near holes. – Kiev : Naukova Dumka Publ., 1975.
5. *Rasulov K. M., Timofeeva T. I.* On the solvability of a homogeneous Hilbert boundary value problem for quasi-harmonic functions in circular domains // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics. – 2016. – Vol. 8, no. 4. – P. 33–40. – DOI: [10.14529/mmp160404](https://doi.org/10.14529/mmp160404). – EDN: WWHMXX.
6. *Adigamov A. E., Yudenkov A. V.* A model of the stress-strain state of a disturbed rock mass, taking into account anisotropy and inhomogeneities // Mining Information and Analytical Bulletin (scientific and technical journal). – 2021. – No. 8. – P. 93–103. – DOI: [10.25018/0236_1493_2021_8_0_93](https://doi.org/10.25018/0236_1493_2021_8_0_93). – EDN: DUOLLE.

С. А. Рытов¹, И. М. Иовлев¹, Т. Г. Рытова², Л. А. Максимова^{3,4}

ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЁТЫ ПРИ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОМ СОПРОВОЖДЕНИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ФУНДАМЕНТОВ МЕМОРИАЛА ДОНБАССА

¹НИИ оснований и подземных сооружений им. Н. М. Герсеванова (НИИОСП), АО «НИЦ „Строительство“, Москва, Россия

²Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), Москва, Россия

³Российский университет транспорта (РУТ), Москва, Россия

⁴Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, Чебоксары, Россия

Аннотация. В статье описаны результаты численных расчетов с применением метода конечных элементов (МКЭ) при научно-техническом сопровождении проектирования фундаментов мемориала Донбасса в просадочных грунтах второго типа.

Ключевые слова: устойчивость откоса, коэффициент запаса устойчивости, свайные фундаменты, просадочные грунты, второй тип просадочности, численные расчеты.

Рытов Сергей Александрович, кандидат технических наук; начальник центра исследования свайных фундаментов; e-mail: rytovs@gmail.com

Иовлев Илья Михайлович, старший научный сотрудник лаборатории новых видов свайных фундаментов; e-mail: lab38@mail.ru

Рытова Татьяна Георгиевна, кандидат технических наук; доцент кафедры металлических и деревянных конструкций; e-mail: rytovatg@gmail.com

Максимова Людмила Анатольевна, доктор физико-математических наук; профессор кафедры высшей математики и естественных наук; e-mail: maximova_ng@mail.ru

для цитирования: Рытов С. А., Иовлев И. М., Рытова Т. Г., Максимова Л. А. Численные расчёты при научно-техническом сопровождении проектирования фундаментов Мемориала Донбасса // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 4(66). С. 236–247. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.016. EDN: VNWPLO

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

S. A. Rytov¹, I. M. Iovlev¹, T. G. Rytova², L. A. Maksimova^{3,4}

NUMERICAL CALCULATIONS IN SCIENTIFIC AND TECHNICAL SUPPORT OF THE DONBASS MEMORIAL FOUNDATION DESIGN

¹Gersevanov Research Institute of Foundations and Underground Structures (NIIOSP),
JSC Research Center “Construction”, Moscow, Russia

²Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

³Russian University of Transport, Moscow, Russia

⁴I. N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia

Abstract. The article describes the results of numerical calculations using the finite element method (FEM) in the scientific and technical support of the design of the foundations of the Donbas Memorial in second-type subsiding soils.

Keywords: slope stability, stability factor, pile foundations, subsiding soils, second type of subsidence, numerical calculations.

Sergey A. Rytov, PhD (Eng.); e-mail: rytovsa@gmail.com

Ilya M. Iovlev, Senior Researcher; e-mail: lab38@mail.ru

Tatyana G. Rytova, PhD (Eng.); e-mail: rytovatg@gmail.com

Lyudmila A. Maksimova, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; Professor; e-mail: maximova_ng@mail.ru



to cite this article: Rytov S. A., Iovlev I. M., Rytova T. G., Maksimova L. A. Numerical Calculations in Scientific and Technical Support of the Donbass Memorial Foundation Design // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 4(66). p. 236–247. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.016

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

1. Состояние вопроса. В рамках восстановления Донбасса планируется строительство мемориального комплекса. Проектируемый объект - архитектурно-художественный мемориал. Общий вид мемориала показан на рис. 1. Первоначальный вариант конструктивной схемы мемориала – каркас из пространственной фермы из стоек, горизонтальных и вертикальных связей. Основной каркас устанавливается на железобетонный постамент. В окончательном варианте Заказчиком принято решение об изменении конструктивной схемы: переход от системы из балок и связей на оболочку.

Строительство будет осуществляться в сложных инженерно-геологических условиях (просадочные грунты II типа, склоновые процессы) [1–3]. В рамках научно-технического сопровождения НИИОСП выполнил анализ инженерно-геологических условий площадки строительства, дал рекомендации по корректировке материалов изысканий, разработал принципиальные решения по фундаментам объекта, выполнил расчет устойчивости существующего склона с учетом строительства Объекта, дал рекомендации по геотехническому мониторингу. Кроме того, в рамках научно-технического сопровождения генеральный проектировщик выполнил численное моделирование и испытания конструкции в аэродинамической трубе, в том числе для уточнения нагрузок на основание [4, 5].



Рис. 1. Общий вид мемориала

2. Краткое описание инженерно-геологических условий площадки строительства и конструктивных решений объекта. В административном отношении участок строительства расположен в г. Мариуполь. В геоморфологическом отношении - в пределах абрационной террасы Таганрогского залива (рис. 2).

В современном рельефе эта часть города равнинная, с крутым уступом в южном направлении к Таганрогскому заливу. Рельеф участка непосредственно на площадке изысканий относительно ровный, спланированный, абсолютные отметки изменяются от 45,95 до 46,70 м (по устьям горных выработок). С учетом склона абсолютные отметки изменяются от 7,00 до 46,20 м. Общий уклон поверхности от верхней бровки уступа до подножия 14-25 градусов.

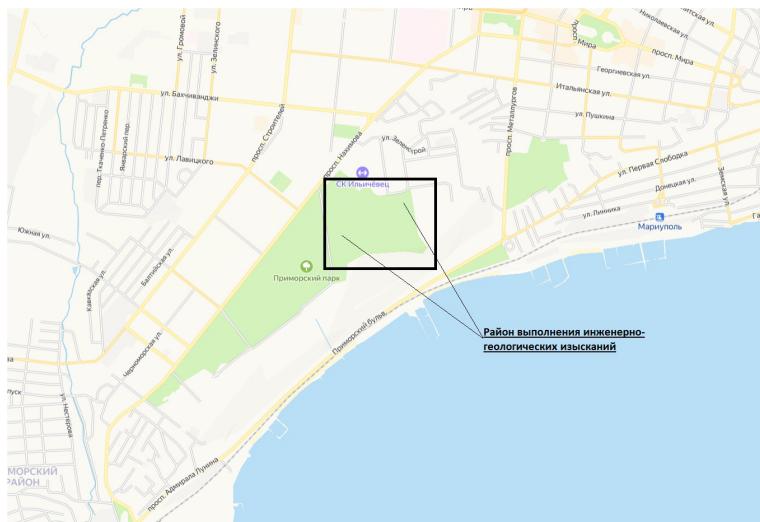


Рис. 2. Схема размещения Объекта

В геологическом строении площадки до глубины бурения 20 м принимают участие: современные техногенные образования (**tQIV**), делювиально-аллювиальные отложения (**daQIV**), аллювиальные отложения (**aQIII-IV**), элювиальные коры выветривания (**eMZ**), челябинский гранитоидный массив (**PZ**).

С учетом генезиса и физико-механических свойств грунтов на участке изысканий выделены 4 слоя современных техногенных, почвенных отложений и 6 инженерно-геологических элементов (ИГЭ):

Слой-1н (eQIV) - насыпной грунт;

Слой-2н (eQIV) - насыпной грунт – суглинок пылеватый, твердый, при водонасыщении текучепластичный, среднепросадочный, неоднородный, неслежавшийся;

Слой-п (eQIV) - почвенно-растительный слой;

Слой-г (eQIV) - гумусированный слой – глина твердая, при водонасыщении мягкопластичная, слабопросадочная, гумусированная;

ИГЭ-1 (dQIII) - суглинов твердый, при водонасыщении тугопластичный, слабопросадочный, с прослойми глины;

ИГЭ-2 (dQI) - песок средней крупности, средней плотности, маловлажный;

ИГЭ-3 (dQ1) - суглинок пылеватый, твердый, непросадочный, с тонкими прослойками песка;

ИГЭ-3а (dQI) - суглинок твердый, при водонасыщении тугопластичный, непросадочный;

ИГЭ-4 (dQI) - песок крупный, средней плотности, водонасыщенный;

ИГЭ-5 (dQI) - глина пылеватая, твердая, средненабухающая.

При бурении скважин в июне-июле 2024 г. уровень грунтовых вод на площадке проектируемого сооружения установился на глубине 19,8-20,1 м (абс. отм. 25,93-26,29м), на участке склона на глубине 3,7-11,5 м (абс. отм. 3,30-18,62).

Водовмещающими грунтами на исследуемом участке являются глинистые грунты (ИГЭ-3, 3а) и пески (ИГЭ-4). Локальный водоупор – глины ИГЭ-5. Региональный водоупор не вскрыт.

Специфическими грунтами на данном участке являются насыпные, просадочные и набухающие грунты. Просадочные грунты распространены повсеместно в пределах площадки изысканий. Тип грунтовый условий по просадочности – второй. Участок строительства относится к III категории сложности инженерно-геологических условий согласно СП 446.1325800.2019 [6]. План-схема расположения инженерно-геологических разрезов приведена на рис. 3.

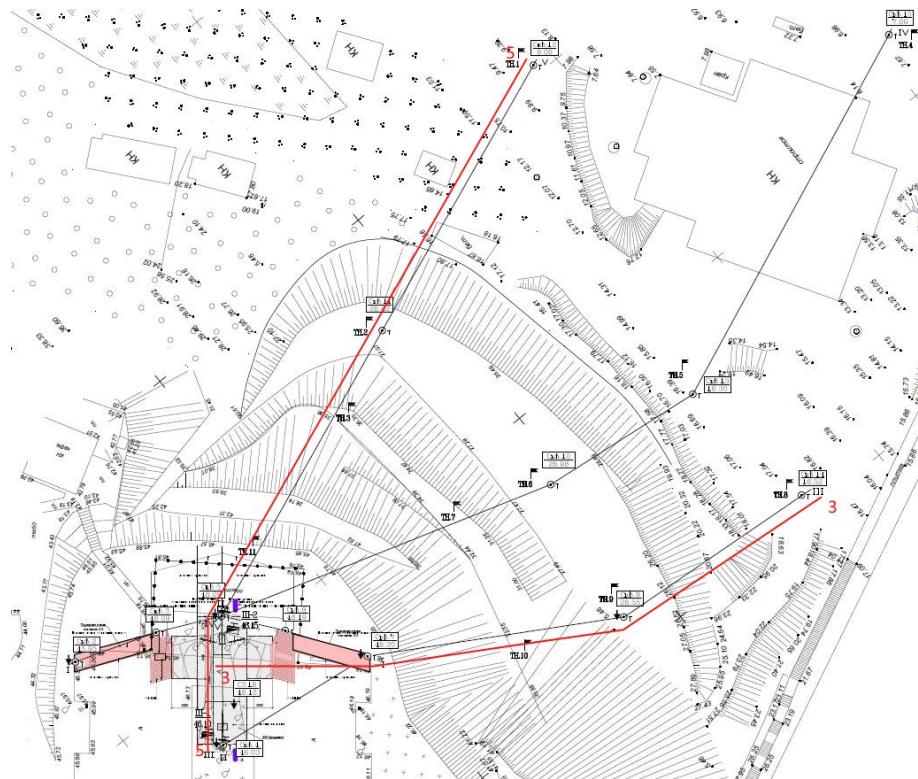


Рис. 3. План-схема расположения инженерно-геологических разрезов для оценки устойчивости склона с учетом строительства Объекта

Инженерно-геологический разрез 3-3 для расчета устойчивости Объекта приведен на рис. 4

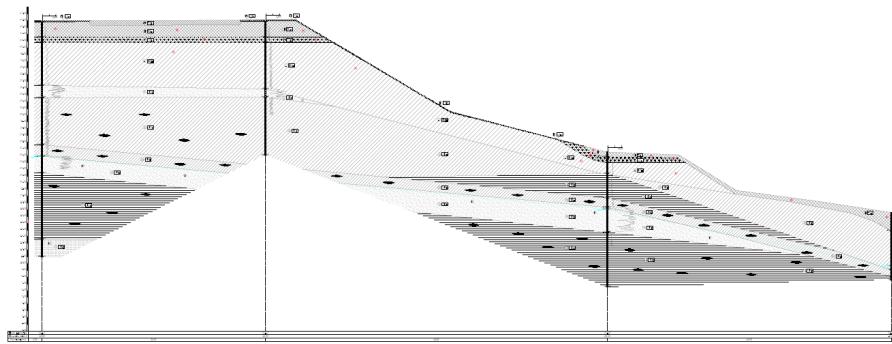


Рис. 4. Расчет устойчивости откоса на период эксплуатации с учетом пригрузочной призмы

3. Методы. В первоначальной отчете по изысканиям коэффициент запаса устойчивости для склона в естественном состоянии был менее 1.0 (при этом для некоторых грунтов (ИГЭ 3, За, 5) физико-механические характеристики, определенные методом "плашка по плашке" были приняты при расчете устойчивости).

Так как в отчете по изысканиям не было обоснования потенциальной оползнеопасности склона, то НИИОСП рекомендовал для грунтов физико-механических характеристик методом "плашка по плашке" не использовать. Кроме того, НИИОСП рекомендовал обосновать возможность водонасыщения грунтов склона. В случае обоснованности такого сценария, расчет устойчивости с учетом водонасыщения НИИОСП рекомендовал рассматривать как расчет на особое сочетание нагрузок. В результате корректировки отчета по изысканиям, с учетом рекомендаций НИИОСП, коэффициент устойчивости склона при природной влажности составил 1,352-1,481 (склон находится в устойчивом состоянии).

При увеличении влажности грунта было установлено, что устойчивость склона снижается. Значение коэффициента устойчивости при этом составит 1,097-1,224. В связи с этим НИИОСП рекомендовал в проекте мемориала предусмотреть водозащитные мероприятия по СП 21.13330 [7], СП 22.13330 [8] для исключения замачивания грунтов склона (включая, просадочные грунты).

С учетом инженерно-геологических условий НИИОСП рекомендовал принять свайный вариант для Объекта. Технология погружения – забивка, вдавливание. Возможно применение свай заводского изготовления 35x35 см с опиранием на ИГЭ-3 (сваи прорезают просадочные грунты и опираются на непросадочные). Для снижения сил негативного трения от просадки было рекомендовано применение лидерного бурения при погружении свай. Глубина лидера – на 1 м

меньше длины свай, диаметр лидерного бурения равен стороне квадратной сваи (не менее 35 см). По расчетам НИИОСП расчетная нагрузка на сваю 35x35 см с учетом сил негативного трения составила 35.7 тс (при опирании свай на ИГЭ-3). НИИОСП рекомендовал проведение статических испытаний по ГОСТ 5686 [9] с учетом п. 9.11 СП 24.13330 [10]. Должно быть проведено не менее трех испытания на вдавливающую нагрузку и трех на выдергивающую для сооружений КС-2. План свайного фундамента приведен на рис. 5.

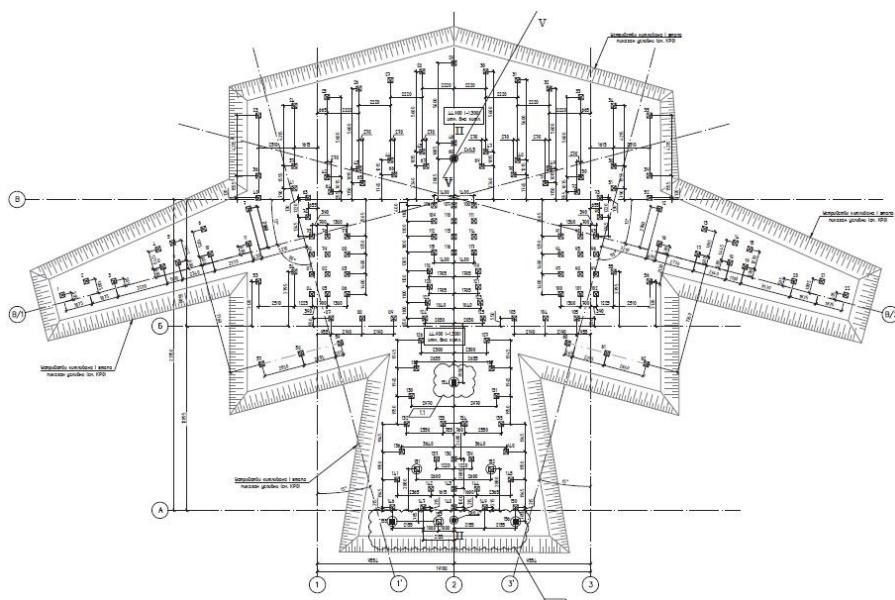


Рис. 5. План свайного фундамента мемориала

Испытания грунтов сваями статической вдавливающей нагрузкой были проведены специализированной испытательной организацией в соответствии с ГОСТ 5686 [9] и СП 24.13330 [10]. Испытания свай статической вдавливающей нагрузкой были завершены по достижении максимальной нагрузки 150 тс, при этом общая осадка испытуемых свай составила 33,5-38 мм.

Также проведены статические испытания свай выдергивающую нагрузку. Максимальная нагрузка при испытании на выдергивание – 32 тс, при этом общий выход сваи составил до 22 мм.

4. Результаты. НИИОСП выполнил поверочные расчеты устойчивости склона в период строительства и эксплуатации объекта по двум расчетным сечениям (разрезы 3-3 и 5-5) с учетом принятых принципиальных решений по фундаментам объекта.

Расчеты устойчивости склона выполнялись методом конечных элементов в сертифицированном программном комплексе Plaxis 2D. Расчеты выполнены на

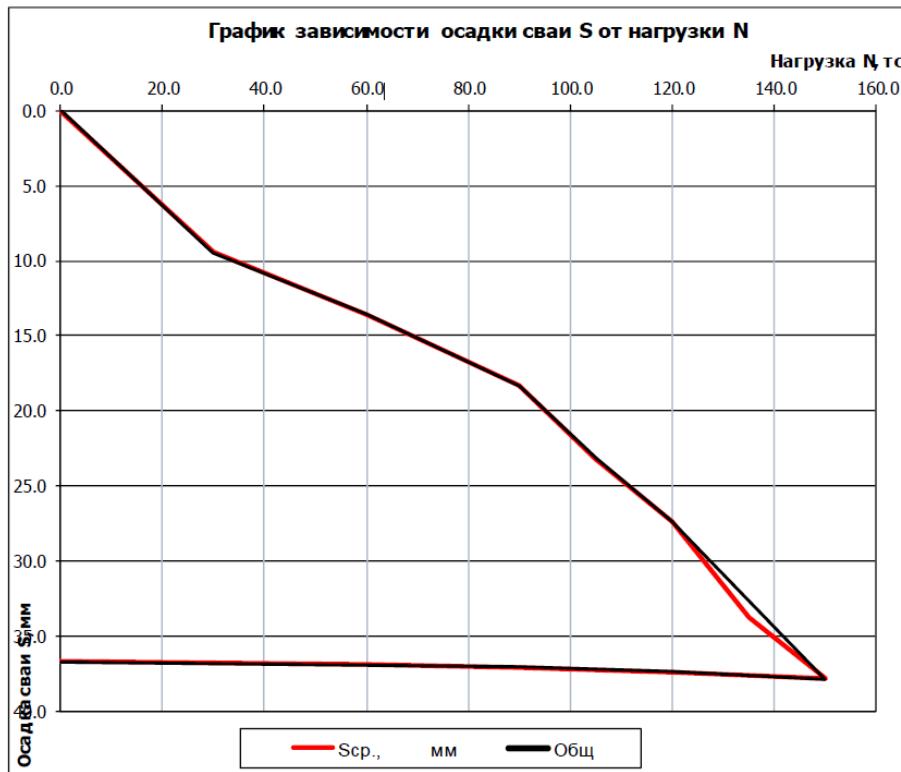


Рис. 6. График испытания свай на вдавливающую нагрузку. Условные обозначения Горизонтальная ось – нагрузка в тс, вертикальная ось – осадка в мм.

основное (природная влажность) и особое сочетание нагрузок (полное водонасыщение). Работа грунта описывалась упругопластической моделью Мора-Кулона.

Расчетная схема 3-3 приведена на рис. 8.

Оценка устойчивости склона выполнялась для следующих расчетных случаев.

- (1) Оценка устойчивости природного склона в естественном состоянии на основное сочетание нагрузок.
- (2) Оценка устойчивости природного склона в водонасыщенном состоянии на особое сочетание нагрузок.
- (3) Оценка устойчивости склона в естественном состоянии на основное сочетание нагрузок в период строительства.
- (4) Оценка устойчивости склона в водонасыщенном состоянии на особое сочетание нагрузок в период строительства.
- (5) Оценка устойчивости склона в естественном состоянии на основное сочетание нагрузок в период эксплуатации.

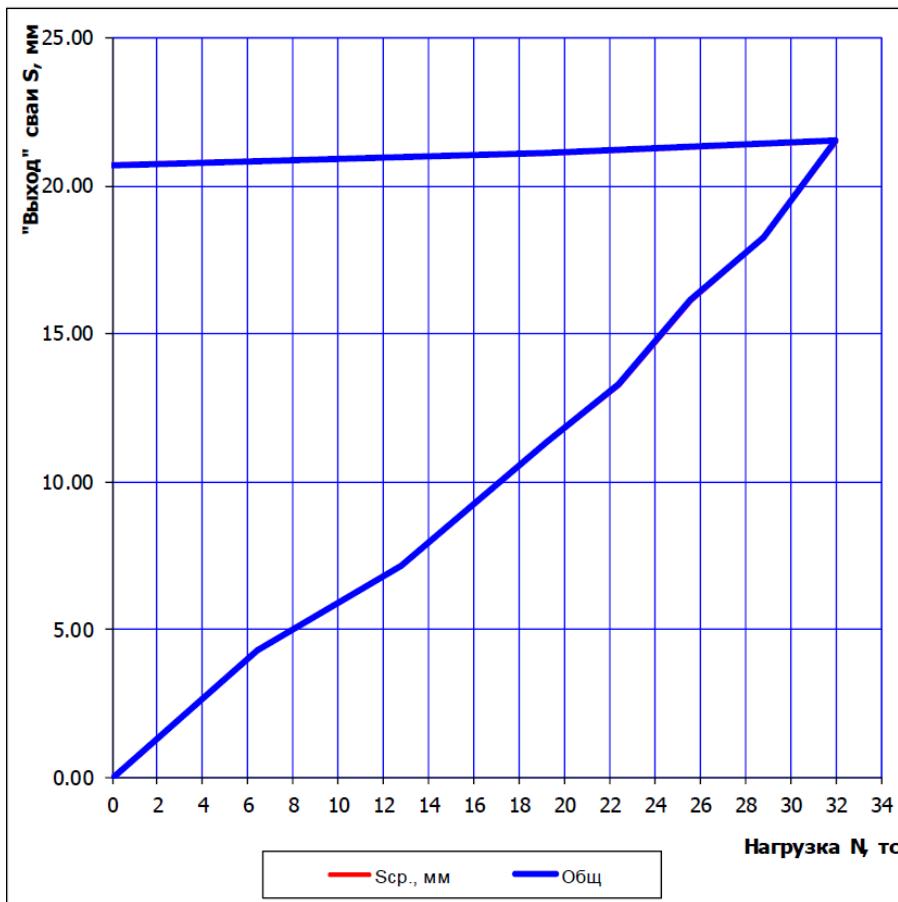


Рис. 7. График испытания свай на выдергивающую нагрузку. Условные обозначения Горизонтальная ось – нагрузка в тс, вертикальная ось – перемещение в мм.

(6) Оценка устойчивости склона в водонасыщенном состоянии на особое сочетание нагрузок в период эксплуатации.

Все расчеты выполнялись по предельным состояниям первой группы. Механизм потери устойчивости склона по разрезу 3-3 в естественном состоянии приведен на рис. 9.

Механизм потери устойчивости склона по разрезу 3-3 в эксплуатационный период приведен на рис. 10.

Выполненные НИИОСП расчеты устойчивости склона с учетом принятых конструктивных решений по фундаментам мемориала показали, что склон находится в устойчивом состоянии в период строительства и эксплуатации объекта. Дополнительных мероприятий по усилению склона не требуется. Рекомендуется предусмотреть комплекс водозащитных мероприятий по СП 21.13330,

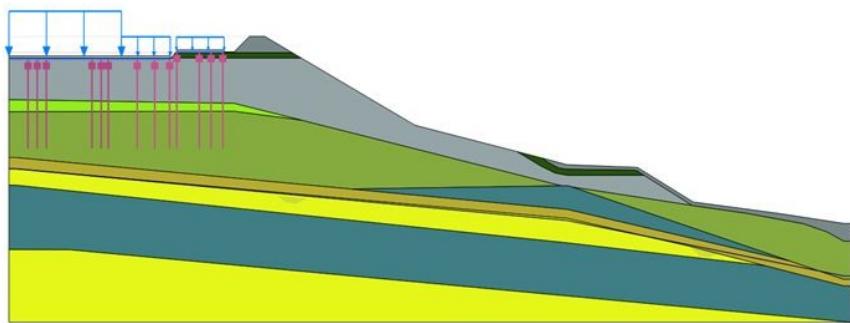


Рис. 8. Расчетная схема 3-3 для оценки устойчивости в естественном состоянии, в эксплуатационный период.

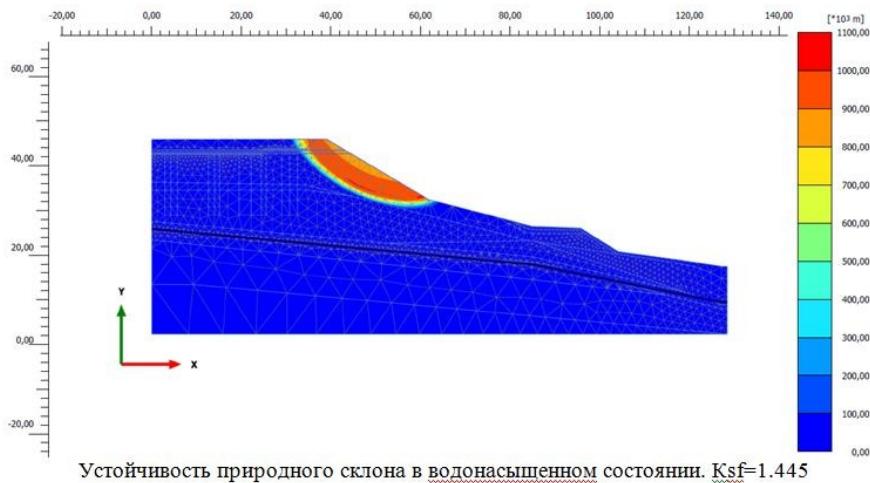


Рис. 9. Механизм потери устойчивости склона в естественном состоянии.

СП 22.13330 для исключения замачивания грунтов основания мемориала и существующего склона (включая, просадочные грунты). Также в период строительства объекта и его эксплуатации было рекомендовано организовать геотехнический мониторинг в соответствии с СП 22.13330.2016.

5. Выводы. В рамках научно-технического сопровождения НИИОСП выполнил анализ инженерно-геологических условий площадки строительства, дал

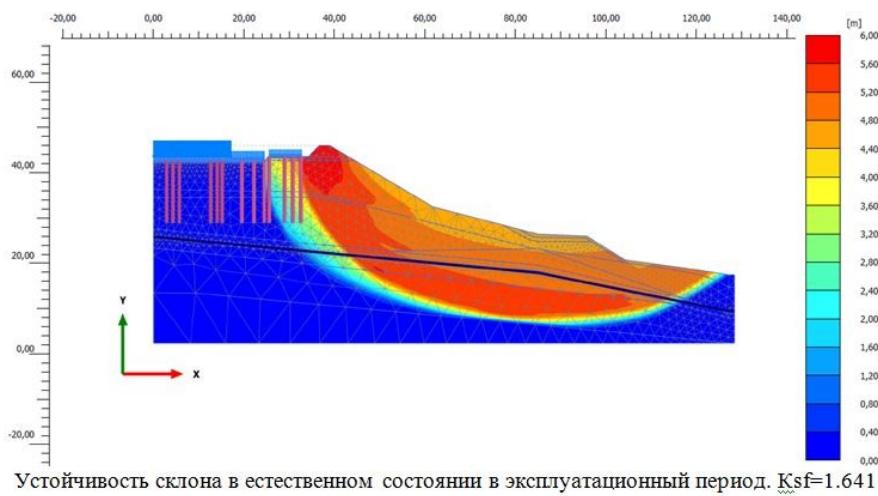


Рис. 10. Механизм потери устойчивости склона по разрезу 3-3 в эксплуатационный период.

рекомендации по корректировке материалов изысканий, разработал принципиальные решения по фундаментам Объекта, выполнил расчет устойчивости существующего склона с учетом строительства Объекта. Научно-техническое сопровождение проектирования фундаментов мемориала позволило выработать оптимальное решение.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Вклад авторов равнозначен.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The authors' contributions are equal.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рытов С. А., Иовлев И. М., Шишарин А. С. Особенности оценки устойчивости склонов в инженерно-геологических условиях Республики Крым // Вестник НИЦ Строительство. – 2019. – 1(20). – С. 67–75.
2. Попсуенко И. К., Рытов С. А., Малеева А. Н. Численный расчет уплотненных массивов из песчано-гравийных смесей (ПГС) в просадочных грунтах II типа с учетом фактора времени // Теория и практика фундаментостроения: Сборник тезисов докладов XV Международного симпозиума по реологии грунтов. – Казань : Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 2025. – С. 106.

3. Способ ликвидации просадки и снижения сейсмической нагрузки на основание фундамента сооружения, возводимого на просадочных грунтах в сейсмическом районе : 2831855 С1 / И. К. Попсуенко, С. А. Рытов. – МПК Е02Д 27/34; заявка № 2024110497.
4. Предельное состояние деформируемых тел и горных пород / Д. Д. Ивлев [и др.]. – Москва : ООО Издательская фирма «Физико-математическая литература», 2008. – 832 с.
5. Особенности научно-технического сопровождения изысканий и проектирования для зданий повышенного уровня ответственности на примере жилого дома в г. Самаре / А. М. Белостоцкий [и др.] // Вестник НИЦ Строительство. – 2021. – 2(29). – С. 28–37.
6. СП 446.1325800.2019. Инженерно-геологические изыскания для строительства. Общие правила производства работ. – 2019.
7. СП 21.13330.2012. Здания и сооружения на подрабатываемых территориях и просадочных грунтах. – 2012.
8. СП 22.13330.2016. Основания зданий и сооружений. – 2016.
9. ГОСТ 5686-2020. Грунты. Методы полевых испытаний сваями. – 2020.
10. СП 24.13330.2021. Свайные фундаменты. – 2021.

REFERENCES

1. *Rytov S. A., Iovlev I. M., Shisharin A. S. Features of Assessing the Stability of Slopes in the Engineering and Geological Conditions of the Republic of Crimea // Vestnik NITs Stroitelstvo.* – 2019. – 1(20). – P. 67–75.
2. *Popsuenko I. K., Rytov S. A., Maleeva A. N. Numerical Calculation of Compacted Massifs of Sand-Gravel Mixtures (SGM) in Type II Saturated Soils, Taking into Account the Time Factor // Theory and Practice of Foundation Engineering: Collection of Abstracts of the XV International Symposium on Soil Rheology.* – Kazan : Kazan State University of Architecture, Civil Engineering, 2025. – P. 106.
3. Method for Eliminating Settlement and Reducing Seismic Load on the Foundation of a Structure Built on Sinking Soils in a Seismic Area : 2831855 С1 / I. K. Popsuenko, S. A. Rytov. – IPC Е02Д 27/34; application No. 2024110497.
4. The Ultimate State of Deformable Bodies and Rocks / D. D. Ivlev [et al.]. – Moscow : LLC Publishing House “Physical, Mathematical Literature”, 2008. – 832 p.
5. Features of Scientific and Technical Support of Surveys and Design for Buildings with a High Level of Responsibility on the Example of a Residential Building in Samara / A. M. Belostotsky, S. A. Kryuchkov, S. A. Rytov, [et al.] // Bulletin of SIC Construction. – 2021. – 2(29). – P. 28–37.
6. SP 446.1325800.2019 Engineering and Geological Surveys for Construction. General Rules for Work Production. – 2019.
7. SP 21.13330.2012 Buildings and Structures in Areas Under Development and on Sinking Soils. – 2012.
8. SP 22.13330.2016 Foundations for Buildings and Structures. – 2016.
9. GOST 5686-2020. Soils. Methods of Field Testing with Piles. – 2020.
10. SP 24.13330.2021 Pile Foundations. – 2021.

A. H. Спорыхин

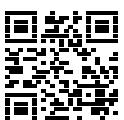
О ДИНАМИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В работе на основе реологической модели упруговязкопластической смеси в рамках плоской деформации определено напряженно-деформированное состояние и внутренняя динамическая нагрузка, при которой происходит исчерпание несущей способности (отказ) трубы.

Ключевые слова: смесь, напряжение, деформация, упругость, пластичность, вязкость, упрочнение.

Спорыхин Анатолий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры мехники и компьютерного моделирования; **е-mail:** anspor@mail.ru



для цитирования: Спорыхин А. Н. О динамическом деформировании толстостенной трубы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 4(66). С. 248–254. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.017. EDN: XQGGAW

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

A. N. Sporykhin

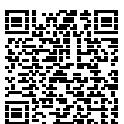
ON THE DYNAMIC DEFORMATION OF A THICK-WALLED PIPE

I. Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. In this work, based on a rheological model of an elastoviscoplastic mixture under plane strain conditions, the stress-strain state and the internal dynamic load leading to the exhaustion of load-bearing capacity (failure) of a pipe are determined.

Keywords: mixture, stress, deformation, elasticity, plasticity, viscosity, hardening.

Anatoliy N. Sporykhin, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; e-mail: anspor@mail.ru



to cite this article: Sporykhin A. N. On the dynamic deformation of a thick-walled pipe // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 4(66). p. 248–254. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.017

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Известно, что многие создаваемые материалы, к которым в частности можно отнести полимеры — это продукт смещивания конечного числа сплошных сред с различными физико-механическими параметрами, и как результат — среда (смесь) со сложными реологическими свойствами. Применение технозделий из таких материалов, безопасность их использования определяет необходимость производить расчёты их поведения при динамическом нагружении.

1. Ниже в квазистатической постановке рассматривается деформирование толстостенной трубы, внешний радиус которой — b , а внутренний — a , находящейся под действием внутреннего давления

$$P = P_0 e^{\hat{a}t}, \quad 0 \ll t \ll t_0,$$

где \hat{a} — известная константа.

Приведем основные состояния определяющие свойства обобщенной модели тела S_p^α [1—3].

Тело остается упругим

$$S_{ij} S_{ij} \ll k_1^2, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}, \quad \sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{kk}, \quad k_1 \gg k_2 \gg \dots \gg k_L \quad (1)$$

где S_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений.

При этом для последовательно соединенных моделей тела

$$S_{ij}^\alpha = 2\mu_\alpha \varepsilon_{ij}^{e\alpha}, \quad \sum \alpha = 1, 2..L, \quad (1)$$

где μ_α — параметр Ламе.

Если $S_{ij} S_{ij} \geq k^2$, то полная деформация слагается из упругой и пластической

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{e_1} + \varepsilon^{p_1} + \varepsilon_{ij}^{e_2} + \varepsilon_{ij}^{p_2} + \dots + \varepsilon_{ij}^{e_L} + \varepsilon_{ij}^{p_L} = (\varepsilon_{ij}^{e\alpha} + \varepsilon_{ij}^{p\alpha}) \quad (2)$$

Здесь α определяет порядок обобщенной модели S_p^α .

Объемная деформация согласно (2) удовлетворяет условию несжимаемости

$$\varepsilon_{\text{пп}} = 0 \quad (3)$$

Напряжения (усилия), приложенные к моделям S_p^α одинаковы, тогда

$$S_{ij}^1 = S_{ij}^2 = \dots = S_{ij}^L \quad (\sigma_{ij}^1 = \dots = \sigma_{ij}^L) \quad (4)$$

Компоненты тензора скоростей пластической деформации $e_{ij}^{p\alpha}$ связаны с компонентами тензора напряжений соотношениями ассоциированного закона течения

$$\varepsilon_{ij}^{p\alpha} = \Psi_\alpha (S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^{p\alpha} - n_\alpha \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\alpha}), \quad \sum \alpha = 1, 2..L, \quad (5)$$

если выполняются условия пластиичности

$$(S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^{p\alpha} - n_\alpha \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\alpha})(S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^{p\alpha} - n_\alpha \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\alpha}) = k_\alpha^2 \quad \sum \alpha = 1, 2..L \quad (6)$$

где c_α — коэффициент упрочнения, n_α — коэффициент вязкости, k_α — предел текучести.

Полные деформации удовлетворяют соотношениям Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_i}{\partial x_j} + \frac{\partial W_j}{\partial x_i} \right), \quad (7)$$

Уравнениям равновесия удовлетворяют только действительные напряжения

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^j} = 0. \quad (8)$$

Уравнения (??)-(8) — полная система уравнений, описывающих деформированное состояние «смешанной» упруговязкопластической среды тела S_p^α произвольного порядка.

Напряженно-деформированное состояние трубы (в случае плоской деформации) определяется согласно (7), уравнением равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (9)$$

законом Гука (1) и соотношением Коши (7) для области упругого деформирования трубы и имеют вид:

$$\sigma_r^e = -\frac{\mu^* C^e}{r^2} + D, \quad \sigma_\theta^e = \frac{\mu^* C^e}{r^2} + D, \quad u_r^e = \frac{C^e}{r}, \quad \mu^* = , \quad \left(\int_{\alpha=1}^L \frac{1}{2\mu_\alpha} \right)^{-1} \quad (10)$$

где C^e и D — неизвестные интегрирования.

В пластической области из условия объемной несжимаемости (3) следует:

$$u^p = \frac{C_1^p}{r}, \quad \varepsilon_r = -\varepsilon_\theta = -\frac{C_1^p}{r^2}, \quad (11)$$

из соотношений (1) и (2) следует

$$\varepsilon_{ij} = \mu^{*-1} S_{ij}^\alpha + \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_{ij}^{p_\alpha}, \quad (12)$$

Т.к. каждый комплекс S_p^α воспринимает полную нагрузку (4), то $S_{ij}^\alpha = S_{ij}$ и (12) тогда принимает вид

$$S_{ij} = \mu^* \varepsilon_{ij} - \mu^* \varepsilon_{ij}^p, \quad \left(\varepsilon_{ij}^p = \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_{ij}^{p_\alpha} \right), \quad (13)$$

В полярных координатах

$$S_r = \mu^* \varepsilon_r - \mu^* \varepsilon_r^p = -S_\theta, \quad S_{33} = 0, \quad (14)$$

Для отдельно взятого S_p^α тела условия пластиичности (6) представляется так:

$$S_r - 2c_\alpha \varepsilon_r^{p_\alpha} - 2n_\alpha \varepsilon_r^{p_\alpha} = \pm 2k_\alpha, \quad \sum \alpha = 1, 2..L \quad (15)$$

Принимая во внимание (11) и (14) приходим к уравнению для определения $\varepsilon_r^{p_\alpha}$ для отдельно взятого комплекса S_p^α .

$$n_\alpha \varepsilon_r^{p_\alpha} + (\mu_\alpha + c_\alpha) \varepsilon_r^{p_\alpha} = -2k_\alpha - \frac{\mu_\alpha C_1^p}{r^2}, \quad \sum \alpha = 1, 2..L \quad (16)$$

Решение уравнения (16) имеет вид

$$\varepsilon_r^{p_\alpha} = \frac{k_\alpha r^2 - 2\mu_\alpha C_1^p}{r^2(2\mu_\alpha + c_\alpha)} (1 - e \frac{-(2\mu_\alpha + c_\alpha)}{n_\alpha} t), \quad \sum \alpha = 1, 2..L \quad (17)$$

Неизвестная интегрирования определена из начального условия $\varepsilon_r^{P_\alpha} = 0$ при $t=0$.

Далее подставляя (15) в уравнение равновесия (9), учитывая при этом (10), (11), (14), (17) и интегрируя находим неизвестные интегрирования

$$\begin{aligned}\sigma_r^p &= B_\alpha \ln r + \frac{A_\alpha C_1^p}{2r^2} + C_3, \quad C_1^p, \quad C_3 \quad \text{— неизвестные интегрирования} \\ \sigma_\theta^p &= \sigma_r^p + B_\alpha - \frac{A_\alpha C_1^p}{r^2} = B_\alpha (1 + \ln r) - \frac{A_\alpha C_1^p}{2r^2} + C_3\end{aligned}\quad (18)$$

где обозначено

$$\begin{aligned}e \frac{-(2\mu_\alpha + c_\alpha)}{n_\alpha} t - 1 &= A_\alpha^0 \\ A_\alpha &= -4 \sum_{\alpha=1}^L \frac{\mu^* \mu_\alpha}{(2\mu_\alpha + c_\alpha)} A_\alpha^0 - 2\mu^* \\ B_\alpha &= 2 \sum_{\alpha=1}^L \frac{\mu^* k_\alpha}{(2\mu_\alpha + c_\alpha)} A_\alpha^0, \quad A_\alpha^0 = e \frac{-(2\mu_\alpha + c_\alpha)}{n_\alpha} t - 1\end{aligned}\quad (19)$$

Для удобства дальнейших выкладок приведем все величины в соотношениях (10), (18) и (19) к безразмерному виду. Отнесем все величины, имеющие раз мерность напряжения к модулю сдвига $\mu_\alpha (\alpha = 1)$, а величины имеющие раз мерность длины к внешнему радиусу трубы — b , сохранив при этом их прежние обозначения.

Подчиняя полученные решения (18), (19) граничным условиям на внешней и внутренней поверхности трубы

$$\sigma_r^e = 0 \text{ при } r = 1, \sigma_r^p = -P e^{\hat{a}t} = P^* \text{ при } r = a \quad (20)$$

а также условиям сопряжения напряжений и перемещений на упругопластической границе

$$\sigma_r^p = \sigma_r^e, \quad \sigma_\theta^p = \sigma_\theta^e, \quad u_r^p = u_r^e \text{ при } r = \gamma \quad (21)$$

определяем неизвестные интегрирования

$$C^e = C_1^p = C = \frac{B_\alpha \gamma^2}{A_\alpha - 2\mu^*}, \quad D = \mu^* C \quad (22)$$

$$C_3 = B_\alpha \ln a - \frac{A_\alpha C}{2a^\alpha} - P^*$$

Таким образом, для компонент напряжений и перемещений в упругой (10) и пластической (18) областях при учете (22) получаем

$$\begin{aligned}\sigma_r^e &= \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \mu^* C, \quad \sigma_\theta^e = \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) \mu^* C, \quad u^e = \frac{C}{r} \\ \sigma_r^p &= -P^* + B_\alpha (\ln r - \ln a) + \frac{A_\alpha C}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2}\right), \quad u^p = \frac{C}{r}\end{aligned}\quad (23)$$

$$\sigma_{\theta}^p = -P^* + B_{\alpha} (1 + \ln r - \ln a) - \frac{A_{\alpha} C}{2} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{a^2} \right)$$

Радиус упругопластической границы γ удовлетворяет уравнению

$$\gamma^2 \frac{B_{\alpha}}{A_{\alpha} - 2\mu^*} \left(\mu^* + \frac{A_{\alpha}}{a^2} \right) - B_{\alpha} \ln \frac{\gamma}{a} - \frac{B_{\alpha}}{A_{\alpha} - 2\mu^*} (\mu^* - A_{\alpha}) + P_* = 0 \quad (24)$$

При этом давление, при котором вся труба приходит в пластическое состояние, определяется выражением ($\gamma = 1$).

$$P_* = - \frac{B_{\alpha}}{A_{\alpha} - 2\mu^*} \left(\mu^* + \frac{A_{\alpha}}{a^2} \right) + B_{\alpha} \ln a + \frac{B_{\alpha}}{A_{\alpha} - 2\mu^*} (\mu^* - A_{\alpha}) \quad (26)$$

$0 \ll t \ll t_0$

Отметим, если в (24) положить $\alpha = 1$, $P_* = const$, $A_{\alpha} = 1$, то приходим к результатам работы [1], соответствующим классическому варианту теории течений упруговязкопластической среды [4], а при $n_{\alpha} = 0$ ($\alpha = 1$), приходим к результату работы [5], полученным в рамках классического варианта теории течения упругопластической среды [6].

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. 100%.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. 100%.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Спорыгин А. Н. Об одной модели упруговязкопластических смесей // Сборник трудов IX Всероссийской конференции. – Воронеж, 2016. – С. 199–201.
2. Спорыгин А. Н. Моделирование процессов деформирования и потери устойчивости упруговязкопластических смесей // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2020. – № 6. – С. 141–148.
3. Спорыгин А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. – Воронеж : Воронежский государственный университет, 1997. – 361 с.
4. Спорыгин А. Н. Об устойчивости деформирования упруговязкопластических тел // Прикладная механика и техническая физика. – 1967. – № 1. – С. 52–58.
5. Ершов Л. В., Ивлев Д. Д. О выпучивании толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Известия АН СССР. Отделение механики и машиностроения. – 1958. – № 8. – С. 149–152.
6. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. – Москва : Физматлит, 2003. – 701 с.

REFERENCES

1. *Sporykhin A. N.* On a Model of Elastoviscoplastic Mixtures // Proceedings of the IX All-Russian Conference. – Voronezh, 2016. – P. 199–201.
2. *Sporykhin A. N.* Modeling of Deformation Processes and Loss of Stability in Elastoviscoplastic Mixtures // Proceedings of the Russian Academy of Sciences, Mechanics and Machine Engineering. – 2020. – No. 6. – P. 141–148.
3. *Sporykhin A. N.* Method of Perturbations in Stability Problems of Complex Media. – Voronezh : Voronezh State University, 1997. – 361 p.
4. *Sporykhin A. N.* On the Stability of Deformation of EVP Bodies // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1967. – No. 1. – P. 52–58.
5. *Ershov L. V., Ivlev D. D.* On the Buckling of a Thick-Walled Pipe Under Internal Pressure // Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Department of Mechanics and Machine Engineering. – 1958. – No. 8. – P. 149–152.
6. *Ishlinsky A. Y., Ivlev D. D.* Mathematical Theory of Plasticity. – Moscow : Fizmatlit, 2003. – 701 p.

СИСТЕМЫ ЦЕЛЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ В АППРОКСИМАЦИЯХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ФОРМ МИКРОПОЛЯРНЫХ ТЕЛ

¹Филиал Российского государственного гуманитарного университета, Домодедово, Россия

²Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Аннотация. В настоящем исследовании предлагается алгоритм получения аппроксимации шестого порядка потенциала силовых и моментных напряжений гемитропного микрополярного упругого тела, учитываяющего (кроме базовой квадратичной аппроксимации) поправки вплоть до шестого алгебраического порядка, при систематическом использовании теории алгебраических инвариантов. С этой целью обсуждается полный перечень неприводимых инвариантов для системы двух асимметричных тензоров второго ранга в форме инвариантных следов. Предложен исходный набор из 86 инвариантных следов, максимальная степень которых равна 6. Предложена схема построения инвариантов шестой степени, разбитых для удобства по восьми подгруппам. В итоге, гемитропный микрополярный потенциал определяется с помощью 1034 независимых механических модулей. Получены определяющие уравнения для силовых и моментных напряжений, включающие поправки второй, третьей, четвертой и пятой алгебраических степеней.

Ключевые слова: наномасштаб, микромасштаб, энергетическая форма, целочисленный рациональный алгебраический инвариант, неприводимая система инвариантов, аппроксимация шестой степени, гемитропное микрополярное упругое тело

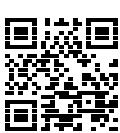
Михин Михаил Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математических и естественнонаучных дисциплин; e-mail: mmikhin@inbox.ru; <https://orcid.org/0009-0007-2081-3462>; AuthorID: 493518

Мурашкин Евгений Валерьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: murashkin@ipmnet.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Радаев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radaev@ipmnet.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116



для цитирования: Михин М. Н., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Системы целых рациональных инвариантов в аппроксимациях энергетических форм микрополярных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 4(66). С. 255–269. DOI: 10.37972/chgpru.2025.66.4.018. EDN: WEPFSK. Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

SYSTEMS OF INTEGER RATIONAL INVARIANTS IN ENERGY FORM APPROXIMATIONS FOR HEMITROPIC MICROPOLAR SOLID

¹Russian State University for the Humanities, Domodedovo, Russia

²Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. In this study, an algorithm is proposed for deriving a sixth-order approximation of the potential for force and couple stresses in a hemitropic micropolar elastic body, which incorporates corrections up to the sixth algebraic order—beyond the fundamental quadratic approximation through the systematic application of algebraic invariant theory. For this aim, a complete enumeration of irreducible invariants for a system of two asymmetric second-rank tensors is represented in the form of invariant traces. An initial set of 86 invariant traces, with a maximum degree of six, is discussed.

A scheme for deriving sixth-order invariants is proposed, organized for convenience into eight subgroups. Ultimately, the hemitropic micropolar potential is defined via 1034 independent mechanical moduli. Constitutive equations for force and couple stresses are derived, incorporating corrections of the second, third, fourth, and fifth algebraic orders.

Keywords: algebraic weight, pseudotensor, nanoscale, microscale, energy form, integer rational algebraic invariant, irreducible system of invariants, sixtic approximation, hemitropic micropolar elastic solid

Mikhail N. Mikhin, Cand. Sci. (Phys. & Math.), Associate Professor, Head of the Department of Mathematics and Natural Sciences **e-mail:** mmikhin@inbox.ru; <https://orcid.org/0009-0007-2081-3462>; AuthorID: 493518

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sci. (Phys. & Math.), MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; **e-mail:** evmurashkin@gmail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Yuri N. Radayev, Dr. Sci. (Phys. & Math.), Prof., Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; **e-mail:** radayev@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116



to cite this article: Mikhin M. N., Murashkin E. V., Radayev Y. N. Systems of integer rational invariants in energy form approximations for hemitropic micropolar solid // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 4(66). p. 255–269. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.018

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Вводные замечания. Настоящая работа продолжает цикл работ [1—3], посвященных формулировкам энергетических форм нелинейных микрополярных континуумов. Предлагается алгоритм получения аппроксимации шестого порядка потенциала силовых и моментных напряжений гемитропного микрополярного упругого тела, учитывающего (кроме базовой квадратичной аппроксимации) поправки вплоть до шестого алгебраического порядка, при систематическом использовании теории алгебраических инвариантов. С этой целью обсуждается полный перечень неприводимых инвариантов для системы двух асимметричных тензоров второго ранга в форме инвариантных следов. В результате предложен исходный набор из 86 инвариантных следов, состоящий из 8 индивидуальных инвариантов, 17 парных, 44 инвариантных троек, 17 инвариантных четверок. Здесь классификация проведена по количеству тензорных литер (максимальное число литер равно 4). Максимальная степень исходных инвариантов равна 6.

Предложена схема построения инвариантов шестой степени, разбитых для удобства по восьми подгруппам. Таким образом, микрополярный потенциал определяется с помощью 1034 механических модулей. Получены определяющие уравнения для силовых и моментных напряжений, включающие поправки второй, третьей и четвертой алгебраической степени, справедливые в произвольной криволинейной системе координат.

Изложение в значительной степени использует терминологию, обозначения, методы и результаты, развитые в предыдущих статьях [1—17].

1. Инвариантные следы целый рациональный базис относительно гемитропной группы. Рассмотрим систему, состоящую из двух асимметричных тензоров второго ранга. Каждый из этих тензоров можно представить в виде алгебраической суммы симметричной и антисимметричной частей, т.е.

$$\mathbf{A} + \mathbf{V}; \quad \mathbf{B} + \mathbf{W}. \quad (1)$$

При этом, справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}^T; \quad \mathbf{V} = -\mathbf{V}^T; \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}^T; \quad \mathbf{W} = -\mathbf{W}^T. \end{aligned} \quad (2)$$

Используя результаты, полученные в работах [18—20], для системы, состоящей из двух симметричных \mathbf{A} , \mathbf{B} и двух антисимметричных \mathbf{V} , \mathbf{W} тензоров второго ранга, можно построить систему исходных инвариантов. Следует отметить, что рассуждения о совместных и индивидуальных инвариантах такой системы существенно зависят от размерности пространства. Положим далее, что она равна 3. Для удобства перенумеруем их согласно следующим правилам: 1.) инварианты нумеруются в порядке возрастания их алгебраической степени; 2.) — в порядке увеличения количества различных сомножителей во внутреннем произведении; 3.) — в алфавитном порядке литер. При этом главным является правило 1.), а правила 2.) и 3.) — подчиненными. Кроме того, правило 3.) подчинено также правилу 2.). В таком случае получим следующий упорядоченный

набор инвариантов:

$$\begin{array}{cccc}
 1.) \text{tr} [\mathbf{A}] & 2.) \text{tr} [\mathbf{B}] & 3.) \text{tr} [\mathbf{A}^2] & 4.) \text{tr} [\mathbf{B}^2] \\
 5.) \text{tr} [\mathbf{V}^2] & 6.) \text{tr} [\mathbf{W}^2] & 7.) \text{tr} [\mathbf{AB}] & 8.) \text{tr} [\mathbf{VW}] \\
 9.) \text{tr} [\mathbf{A}^3] & 10.) \text{tr} [\mathbf{B}^3] & 11.) \text{tr} [\mathbf{AB}^2] & 12.) \text{tr} [\mathbf{BA}^2] \\
 13.) \text{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{A}] & 14.) \text{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{B}] & 15.) \text{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{A}] & 16.) \text{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{B}] \\
 17.) \text{tr} [\mathbf{VAB}] & 18.) \text{tr} [\mathbf{WAB}] & 19.) \text{tr} [\mathbf{VWA}] & 20.) \text{tr} [\mathbf{VWB}] \\
 21.) \text{tr} [\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2] & 22.) \text{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{A}^2] & 23.) \text{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{B}^2] & 24.) \text{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{A}^2] \\
 25.) \text{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{B}^2] & 26.) \text{tr} [\mathbf{VA}^2\mathbf{B}] & 27.) \text{tr} [\mathbf{WA}^2\mathbf{B}] & 28.) \text{tr} [\mathbf{VB}^2\mathbf{A}] \\
 29.) \text{tr} [\mathbf{WB}^2\mathbf{A}] & 30.) \text{tr} [\mathbf{VWA}^2] & 31.) \text{tr} [\mathbf{VWB}^2] & 32.) \text{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AB}] \\
 33.) \text{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AB}] & 34.) \text{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{WA}] & 35.) \text{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{WB}] & 36.) \text{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{VA}] \\
 37.) \text{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{VB}] & 38.) \text{tr} [\mathbf{VWAB}] & 39.) \text{tr} [\mathbf{VWBA}] & 40.) \text{tr} [\mathbf{VA}^2\mathbf{B}^2] \\
 41.) \text{tr} [\mathbf{VA}^2\mathbf{BA}] & 42.) \text{tr} [\mathbf{VB}^2\mathbf{AB}] & 43.) \text{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}] & 44.) \text{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}] \\
 45.) \text{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AVB}] & 46.) \text{tr} [\mathbf{WA}^2\mathbf{B}^2] & 47.) \text{tr} [\mathbf{WA}^2\mathbf{BA}] & 48.) \text{tr} [\mathbf{WB}^2\mathbf{AB}] \\
 49.) \text{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}] & 50.) \text{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}] & 51.) \text{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AWB}] & 52.) \text{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{WA}^2] \\
 53.) \text{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{VA}^2] & 54.) \text{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{WB}^2] & 55.) \text{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{VB}^2] & 56.) \text{tr} [\mathbf{VWA}^2\mathbf{B}] \\
 57.) \text{tr} [\mathbf{VWB}^2\mathbf{A}] & 58.) \text{tr} [\mathbf{WVA}^2\mathbf{B}] & 59.) \text{tr} [\mathbf{WVB}^2\mathbf{A}] & 60.) \text{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{WAB}] \\
 61.) \text{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{VAB}] & 62.) \text{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AWB}] & 63.) \text{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AVB}] & 64.) \text{tr} [\mathbf{VA}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}] \\
 65.) \text{tr} [\mathbf{VB}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}] & 66.) \text{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AVA}^2] & 67.) \text{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AVB}^2] & 68.) \text{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AWA}^2] \\
 69.) \text{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AWB}^2] & 70.) \text{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{BVA}^2] & 71.) \text{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{BVB}^2] & 72.) \text{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{BWA}^2] \\
 73.) \text{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{BWB}^2] & 74.) \text{tr} [\mathbf{VWA}^2\mathbf{BA}] & 75.) \text{tr} [\mathbf{VWA}^2\mathbf{B}^2] & 76.) \text{tr} [\mathbf{VWB}^2\mathbf{AB}] \\
 77.) \text{tr} [\mathbf{WA}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}] & 78.) \text{tr} [\mathbf{WB}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}] & 79.) \text{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AVA}^2] & 80.) \text{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AVB}^2] \\
 81.) \text{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AWA}^2] & 82.) \text{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AWB}^2] & 83.) \text{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{BVA}^2] & 84.) \text{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{BVB}^2] \\
 85.) \text{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{BWA}^2] & 86.) \text{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{BWB}^2] & &
 \end{array} \tag{3}$$

Здесь и далее будем опускать операцию внутреннего произведения тензоров, т.е. запись $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ сокращается до \mathbf{AB} .

Каждый из инвариантных следов снабжается индивидуальным идентификационным номером. Отметим, что в наборе (3) присутствует: два инварианта первой степени — 1.), 2.); шесть инвариантов второй степени — 3.)–8.); двенадцать инвариантов третьей степени — 9.)–20.); девятнадцать инвариантов четвертой степени — 21.)–39.); двадцать четыре инварианта пятой степени — 40.)–63.); двадцать три инварианта шестой степени — 64.)–86.);

2. Набор инвариантов шестой степени. Найдем полный набор инвариантов шестой степени, представляющих собой совместные комбинации инвариантов из списка (3) общей алгебраической степени 6 по схеме, которая была использована ранее для получения полного набора гемитропных инвариантов общих алгебраических степеней 3, 4 и 5.

Сначала найдем произведения линейных инвариантов друг с другом (7):

$$1^6, 1^5 \cdot 2, 1^4 \cdot 2^2, 1^3 \cdot 2^3, 1^2 \cdot 2^4, 1 \cdot 2^5; \\ 2^6. \quad (4)$$

Произведения инвариантов первой и пятой степеней примут вид ($2^*24=48$):

$$1 \cdot 40, 1 \cdot 41, 1 \cdot 42, 1 \cdot 43, 1 \cdot 44, 1 \cdot 45, 1 \cdot 46, 1 \cdot 47, 1 \cdot 48, 1 \cdot 49, 1 \cdot 50, 1 \cdot 51, \\ 1 \cdot 52, 1 \cdot 53, 1 \cdot 54, 1 \cdot 55, 1 \cdot 56, 1 \cdot 57, 1 \cdot 58, 1 \cdot 59, 1 \cdot 60, 1 \cdot 61, 1 \cdot 62, 1 \cdot 63; \\ 2 \cdot 40, 2 \cdot 41, 2 \cdot 42, 2 \cdot 43, 2 \cdot 44, 2 \cdot 45, 2 \cdot 46, 2 \cdot 47, 2 \cdot 48, 2 \cdot 49, 2 \cdot 50, 2 \cdot 51, \\ 2 \cdot 52, 2 \cdot 53, 2 \cdot 54, 2 \cdot 55, 2 \cdot 56, 2 \cdot 57, 2 \cdot 58, 2 \cdot 59, 2 \cdot 60, 2 \cdot 61, 2 \cdot 62, 2 \cdot 63. \quad (5)$$

Произведения инвариантов четвертой степени и квадратов инвариантов первой степени примут вид ($3^*19=57$):

$$1^2 \cdot 21, 1^2 \cdot 22, 1^2 \cdot 23, 1^2 \cdot 24, 1^2 \cdot 25, 1^2 \cdot 26, 1^2 \cdot 27, 1^2 \cdot 28, 1^2 \cdot 29, 1^2 \cdot 30, \\ 1^2 \cdot 31, 1^2 \cdot 32, 1^2 \cdot 33, 1^2 \cdot 34, 1^2 \cdot 35, 1^2 \cdot 36, 1^2 \cdot 37, 1^2 \cdot 38, 1^2 \cdot 39; \\ 2^2 \cdot 21, 2^2 \cdot 22, 2^2 \cdot 23, 2^2 \cdot 24, 2^2 \cdot 25, 2^2 \cdot 26, 2^2 \cdot 27, 2^2 \cdot 28, 2^2 \cdot 29, 2^2 \cdot 30, \\ 2^2 \cdot 31, 2^2 \cdot 32, 2^2 \cdot 33, 2^2 \cdot 34, 2^2 \cdot 35, 2^2 \cdot 36, 2^2 \cdot 37, 2^2 \cdot 38, 2^2 \cdot 39; \quad (6) \\ 1 \cdot 2 \cdot 21, 1 \cdot 2 \cdot 22, 1 \cdot 2 \cdot 23, 1 \cdot 2 \cdot 24, 1 \cdot 2 \cdot 25, 1 \cdot 2 \cdot 26, 1 \cdot 2 \cdot 27, 1 \cdot 2 \cdot 28, \\ 1 \cdot 2 \cdot 29, 1 \cdot 2 \cdot 30, 1 \cdot 2 \cdot 31, 1 \cdot 2 \cdot 32, 1 \cdot 2 \cdot 33, 1 \cdot 2 \cdot 34, 1 \cdot 2 \cdot 35, 1 \cdot 2 \cdot 36, \\ 1 \cdot 2 \cdot 37, 1 \cdot 2 \cdot 38, 1 \cdot 2 \cdot 39.$$

Произведения инвариантов первой и третьей степеней друг с другом записутся в виде ($4^*12=48$):

$$1^3 \cdot 9, 1^3 \cdot 10, 1^3 \cdot 11, 1^3 \cdot 12, 1^3 \cdot 13, 1^3 \cdot 14, \\ 1^3 \cdot 15, 1^3 \cdot 16, 1^3 \cdot 17, 1^3 \cdot 18, 1^3 \cdot 19, 1^3 \cdot 20; \\ 1^2 \cdot 2 \cdot 9, 1^2 \cdot 2 \cdot 10, 1^2 \cdot 2 \cdot 11, 1^2 \cdot 2 \cdot 12, 1^2 \cdot 2 \cdot 13, 1^2 \cdot 2 \cdot 14, \\ 1^2 \cdot 2 \cdot 15, 1^2 \cdot 2 \cdot 16, 1^2 \cdot 2 \cdot 17, 1^2 \cdot 2 \cdot 18, 1^2 \cdot 2 \cdot 19, 1^2 \cdot 2 \cdot 20; \quad (7) \\ 1 \cdot 2^2 \cdot 9, 1 \cdot 2^2 \cdot 10, 1 \cdot 2^2 \cdot 11, 1 \cdot 2^2 \cdot 12, 1 \cdot 2^2 \cdot 13, 1 \cdot 2^2 \cdot 14, \\ 1 \cdot 2^2 \cdot 15, 1 \cdot 2^2 \cdot 16, 1 \cdot 2^2 \cdot 17, 1 \cdot 2^2 \cdot 18, 1 \cdot 2^2 \cdot 19, 1 \cdot 2^2 \cdot 20; \\ 2^3 \cdot 9, 2^3 \cdot 10, 2^3 \cdot 11, 2^3 \cdot 12, 2^3 \cdot 13, 2^3 \cdot 14, \\ 2^3 \cdot 15, 2^3 \cdot 16, 2^3 \cdot 17, 2^3 \cdot 18, 2^3 \cdot 19, 2^3 \cdot 20.$$

Произведения инвариантов второй и четвертой степеней друг с другом записутся в виде (6*19=114):

$$\begin{aligned}
 & 3 \cdot 21, 3 \cdot 22, 3 \cdot 23, 3 \cdot 24, 3 \cdot 25, 3 \cdot 26, 3 \cdot 27, 3 \cdot 28, 3 \cdot 29, 3 \cdot 30, \\
 & 3 \cdot 31, 3 \cdot 32, 3 \cdot 33, 3 \cdot 34, 3 \cdot 35, 3 \cdot 36, 3 \cdot 37, 3 \cdot 38, 3 \cdot 39; \\
 & 4 \cdot 21, 4 \cdot 22, 4 \cdot 23, 4 \cdot 24, 4 \cdot 25, 4 \cdot 26, 4 \cdot 27, 4 \cdot 28, 4 \cdot 29, 4 \cdot 30, \\
 & 4 \cdot 31, 4 \cdot 32, 4 \cdot 33, 4 \cdot 34, 4 \cdot 35, 4 \cdot 36, 4 \cdot 37, 4 \cdot 38, 4 \cdot 39; \\
 & 5 \cdot 21, 5 \cdot 22, 5 \cdot 23, 5 \cdot 24, 5 \cdot 25, 5 \cdot 26, 5 \cdot 27, 5 \cdot 28, 5 \cdot 29, 5 \cdot 30, \\
 & 5 \cdot 31, 5 \cdot 32, 5 \cdot 33, 5 \cdot 34, 5 \cdot 35, 5 \cdot 36, 5 \cdot 37, 5 \cdot 38, 5 \cdot 39; \\
 & 6 \cdot 21, 6 \cdot 22, 6 \cdot 23, 6 \cdot 24, 6 \cdot 25, 6 \cdot 26, 6 \cdot 27, 6 \cdot 28, 6 \cdot 29, 6 \cdot 30, \\
 & 6 \cdot 31, 6 \cdot 32, 6 \cdot 33, 6 \cdot 34, 6 \cdot 35, 6 \cdot 36, 6 \cdot 37, 6 \cdot 38, 6 \cdot 39; \\
 & 7 \cdot 21, 7 \cdot 22, 7 \cdot 23, 7 \cdot 24, 7 \cdot 25, 7 \cdot 26, 7 \cdot 27, 7 \cdot 28, 7 \cdot 29, 7 \cdot 30, \\
 & 7 \cdot 31, 7 \cdot 32, 7 \cdot 33, 7 \cdot 34, 7 \cdot 35, 7 \cdot 36, 7 \cdot 37, 7 \cdot 38, 7 \cdot 39; \\
 & 8 \cdot 21, 8 \cdot 22, 8 \cdot 23, 8 \cdot 24, 8 \cdot 25, 8 \cdot 26, 8 \cdot 27, 8 \cdot 28, 8 \cdot 29, 8 \cdot 30, \\
 & 8 \cdot 31, 8 \cdot 32, 8 \cdot 33, 8 \cdot 34, 8 \cdot 35, 8 \cdot 36, 8 \cdot 37, 8 \cdot 38, 8 \cdot 39. \tag{8}
 \end{aligned}$$

Произведения инвариантов третьей степени друг с другом вычисляются согласно схеме (12*13/2=78):

$$\begin{aligned}
 & 9^2, 9 \cdot 10, 9 \cdot 11, 9 \cdot 12, 9 \cdot 13, 9 \cdot 14, 9 \cdot 15, 9 \cdot 16, 9 \cdot 17, 9 \cdot 18, 9 \cdot 19, 9 \cdot 20; \\
 & 10^2, 10 \cdot 11, 10 \cdot 12, 10 \cdot 13, 10 \cdot 14, 10 \cdot 15, 10 \cdot 16, 10 \cdot 17, 10 \cdot 18, 10 \cdot 19, 10 \cdot 20; \\
 & 11^2, 11 \cdot 12, 11 \cdot 13, 11 \cdot 14, 11 \cdot 15, 11 \cdot 16, 11 \cdot 17, 11 \cdot 18, 11 \cdot 19, 11 \cdot 20; \\
 & 12^2, 12 \cdot 13, 12 \cdot 14, 12 \cdot 15, 12 \cdot 16, 12 \cdot 17, 12 \cdot 18, 12 \cdot 19, 12 \cdot 20; \\
 & 13^2, 13 \cdot 14, 13 \cdot 15, 13 \cdot 16, 13 \cdot 17, 13 \cdot 18, 13 \cdot 19, 13 \cdot 20; \\
 & 14^2, 14 \cdot 15, 14 \cdot 16, 14 \cdot 17, 14 \cdot 18, 14 \cdot 19, 14 \cdot 20; \\
 & 15^2, 15 \cdot 16, 15 \cdot 17, 15 \cdot 18, 15 \cdot 19, 15 \cdot 20; \\
 & 16^2, 16 \cdot 17, 16 \cdot 18, 16 \cdot 19, 16 \cdot 20; \\
 & 17^2, 17 \cdot 18, 17 \cdot 19, 17 \cdot 20; \\
 & 18^2, 18 \cdot 19, 18 \cdot 20; \\
 & 19^2, 19 \cdot 20; \\
 & 20^2. \tag{9}
 \end{aligned}$$

Триплетные произведения инвариантов первой, второй и третьей степеней записутся в виде $(2^*6^*12=144)$:

$$\begin{aligned}
 & 1 \cdot 3 \cdot 9, 1 \cdot 3 \cdot 10, 1 \cdot 3 \cdot 11, 1 \cdot 3 \cdot 12, 1 \cdot 3 \cdot 13, 1 \cdot 3 \cdot 14, \\
 & 1 \cdot 3 \cdot 15, 1 \cdot 3 \cdot 16, 1 \cdot 3 \cdot 17, 1 \cdot 3 \cdot 18, 1 \cdot 3 \cdot 19, 1 \cdot 3 \cdot 20; \\
 & 1 \cdot 4 \cdot 9, 1 \cdot 4 \cdot 10, 1 \cdot 4 \cdot 11, 1 \cdot 4 \cdot 12, 1 \cdot 4 \cdot 13, 1 \cdot 4 \cdot 14, \\
 & 1 \cdot 4 \cdot 15, 1 \cdot 4 \cdot 16, 1 \cdot 4 \cdot 17, 1 \cdot 4 \cdot 18, 1 \cdot 4 \cdot 19, 1 \cdot 4 \cdot 20; \\
 & 1 \cdot 5 \cdot 9, 1 \cdot 5 \cdot 10, 1 \cdot 5 \cdot 11, 1 \cdot 5 \cdot 12, 1 \cdot 5 \cdot 13, 1 \cdot 5 \cdot 14, \\
 & 1 \cdot 5 \cdot 15, 1 \cdot 5 \cdot 16, 1 \cdot 5 \cdot 17, 1 \cdot 5 \cdot 18, 1 \cdot 5 \cdot 19, 1 \cdot 5 \cdot 20; \\
 & 1 \cdot 6 \cdot 9, 1 \cdot 6 \cdot 10, 1 \cdot 6 \cdot 11, 1 \cdot 6 \cdot 12, 1 \cdot 6 \cdot 13, 1 \cdot 6 \cdot 14, \\
 & 1 \cdot 6 \cdot 15, 1 \cdot 6 \cdot 16, 1 \cdot 6 \cdot 17, 1 \cdot 6 \cdot 18, 1 \cdot 6 \cdot 19, 1 \cdot 6 \cdot 20; \\
 & 1 \cdot 7 \cdot 9, 1 \cdot 7 \cdot 10, 1 \cdot 7 \cdot 11, 1 \cdot 7 \cdot 12, 1 \cdot 7 \cdot 13, 1 \cdot 7 \cdot 14, \\
 & 1 \cdot 7 \cdot 15, 1 \cdot 7 \cdot 16, 1 \cdot 7 \cdot 17, 1 \cdot 7 \cdot 18, 1 \cdot 7 \cdot 19, 1 \cdot 7 \cdot 20; \\
 & 1 \cdot 8 \cdot 9, 1 \cdot 8 \cdot 10, 1 \cdot 8 \cdot 11, 1 \cdot 8 \cdot 12, 1 \cdot 8 \cdot 13, 1 \cdot 8 \cdot 14, \\
 & 1 \cdot 8 \cdot 15, 1 \cdot 8 \cdot 16, 1 \cdot 8 \cdot 17, 1 \cdot 8 \cdot 18, 1 \cdot 8 \cdot 19, 1 \cdot 8 \cdot 20; \\
 & 2 \cdot 3 \cdot 9, 2 \cdot 3 \cdot 10, 2 \cdot 3 \cdot 11, 2 \cdot 3 \cdot 12, 2 \cdot 3 \cdot 13, 2 \cdot 3 \cdot 14, \\
 & 2 \cdot 3 \cdot 15, 2 \cdot 3 \cdot 16, 2 \cdot 3 \cdot 17, 2 \cdot 3 \cdot 18, 2 \cdot 3 \cdot 19, 2 \cdot 3 \cdot 20; \\
 & 2 \cdot 4 \cdot 9, 2 \cdot 4 \cdot 10, 2 \cdot 4 \cdot 11, 2 \cdot 4 \cdot 12, 2 \cdot 4 \cdot 13, 2 \cdot 4 \cdot 14, \\
 & 2 \cdot 4 \cdot 15, 2 \cdot 4 \cdot 16, 2 \cdot 4 \cdot 17, 2 \cdot 4 \cdot 18, 2 \cdot 4 \cdot 19, 2 \cdot 4 \cdot 20; \\
 & 2 \cdot 5 \cdot 9, 2 \cdot 5 \cdot 10, 2 \cdot 5 \cdot 11, 2 \cdot 5 \cdot 12, 2 \cdot 5 \cdot 13, 2 \cdot 5 \cdot 14, \\
 & 2 \cdot 5 \cdot 15, 2 \cdot 5 \cdot 16, 2 \cdot 5 \cdot 17, 2 \cdot 5 \cdot 18, 2 \cdot 5 \cdot 19, 2 \cdot 5 \cdot 20; \\
 & 2 \cdot 6 \cdot 9, 2 \cdot 6 \cdot 10, 2 \cdot 6 \cdot 11, 2 \cdot 6 \cdot 12, 2 \cdot 6 \cdot 13, 2 \cdot 6 \cdot 14, \\
 & 2 \cdot 6 \cdot 15, 2 \cdot 6 \cdot 16, 2 \cdot 6 \cdot 17, 2 \cdot 6 \cdot 18, 2 \cdot 6 \cdot 19, 2 \cdot 6 \cdot 20; \\
 & 2 \cdot 7 \cdot 9, 2 \cdot 7 \cdot 10, 2 \cdot 7 \cdot 11, 2 \cdot 7 \cdot 12, 2 \cdot 7 \cdot 13, 2 \cdot 7 \cdot 14, \\
 & 2 \cdot 7 \cdot 15, 2 \cdot 7 \cdot 16, 2 \cdot 7 \cdot 17, 2 \cdot 7 \cdot 18, 2 \cdot 7 \cdot 19, 2 \cdot 7 \cdot 20; \\
 & 2 \cdot 8 \cdot 9, 2 \cdot 8 \cdot 10, 2 \cdot 8 \cdot 11, 2 \cdot 8 \cdot 12, 2 \cdot 8 \cdot 13, 2 \cdot 8 \cdot 14, \\
 & 2 \cdot 8 \cdot 15, 2 \cdot 8 \cdot 16, 2 \cdot 8 \cdot 17, 2 \cdot 8 \cdot 18, 2 \cdot 8 \cdot 19, 2 \cdot 8 \cdot 20.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Триплетные произведения инвариантов второй степени друг с другом примут вид (56):

$$\begin{aligned}
 & 3^3, 3^2 \cdot 4, 3^2 \cdot 5, 3^2 \cdot 6, 3^2 \cdot 7, 3^2 \cdot 8; \\
 & 3 \cdot 4^2, 3 \cdot 4 \cdot 5, 3 \cdot 4 \cdot 6, 3 \cdot 4 \cdot 7, 3 \cdot 4 \cdot 8; \\
 & 3 \cdot 5^2, 3 \cdot 5 \cdot 6, 3 \cdot 5 \cdot 7, 3 \cdot 5 \cdot 8; \\
 & 3 \cdot 6^2, 3 \cdot 6 \cdot 7, 3 \cdot 6 \cdot 8; \\
 & 3 \cdot 7^2, 3 \cdot 7 \cdot 8; \\
 & 3 \cdot 8^2; \\
 & 4^3, 4^2 \cdot 5, 4^2 \cdot 6, 4^2 \cdot 7, 4^2 \cdot 8; \\
 & 4 \cdot 5^2, 4 \cdot 5 \cdot 6, 4 \cdot 5 \cdot 7, 4 \cdot 5 \cdot 8; \\
 & 4 \cdot 6^2, 4 \cdot 6 \cdot 7, 4 \cdot 6 \cdot 8; \\
 & 4 \cdot 7^2, 4 \cdot 7 \cdot 8; \\
 & 4 \cdot 8^2; \\
 & 5^3, 5^2 \cdot 6, 5^2 \cdot 7, 5^2 \cdot 8; \\
 & 5 \cdot 6^2, 5 \cdot 6 \cdot 7, 5 \cdot 6 \cdot 8; \\
 & 5 \cdot 7^2, 5 \cdot 7 \cdot 8; \\
 & 5 \cdot 8^2; \\
 & 6^3, 6^2 \cdot 7, 6^2 \cdot 8; \\
 & 6 \cdot 7^2, 6 \cdot 7 \cdot 8; \\
 & 6 \cdot 8^2; \\
 & 7^3, 7^2 \cdot 8; \\
 & 8^3;
 \end{aligned} \tag{11}$$

Произведения квадратов инвариантов первой и второй степеней друг с другом примут вид (63):

$$\begin{aligned}
 & 1^2 \cdot 3^2, 1^2 \cdot 3 \cdot 4, 1^2 \cdot 3 \cdot 5, 1^2 \cdot 3 \cdot 6, 1^2 \cdot 3 \cdot 7, 1^2 \cdot 3 \cdot 8; \\
 & 1^2 \cdot 4^2, 1^2 \cdot 4 \cdot 5, 1^2 \cdot 4 \cdot 6, 1^2 \cdot 4 \cdot 7, 1^2 \cdot 4 \cdot 8; \\
 & 1^2 \cdot 5^2, 1^2 \cdot 5 \cdot 6, 1^2 \cdot 5 \cdot 7, 1^2 \cdot 5 \cdot 8; \\
 & 1^2 \cdot 6^2, 1^2 \cdot 6 \cdot 7, 1^2 \cdot 6 \cdot 8; \\
 & 1^2 \cdot 7^2, 1^2 \cdot 7 \cdot 8; \\
 & 1^2 \cdot 8^2; \\
 & 2^2 \cdot 3^2, 2^2 \cdot 3 \cdot 4, 2^2 \cdot 3 \cdot 5, 2^2 \cdot 3 \cdot 6, 2^2 \cdot 3 \cdot 7, 2^2 \cdot 3 \cdot 8; \\
 & 2^2 \cdot 4^2, 2^2 \cdot 4 \cdot 5, 2^2 \cdot 4 \cdot 6, 2^2 \cdot 4 \cdot 7, 2^2 \cdot 4 \cdot 8; \\
 & 2^2 \cdot 5^2, 2^2 \cdot 5 \cdot 6, 2^2 \cdot 5 \cdot 7, 2^2 \cdot 5 \cdot 8; \\
 & 2^2 \cdot 6^2, 2^2 \cdot 6 \cdot 7, 2^2 \cdot 6 \cdot 8; \\
 & 2^2 \cdot 7^2, 2^2 \cdot 7 \cdot 8; \\
 & 2^2 \cdot 8^2; \\
 & 1 \cdot 2 \cdot 3^2, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8; \\
 & 1 \cdot 2 \cdot 4^2, 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5, 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6, 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7, 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8; \\
 & 1 \cdot 2 \cdot 5^2, 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6, 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7, 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8; \\
 & 1 \cdot 2 \cdot 6^2, 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 7, 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 8; \\
 & 1 \cdot 2 \cdot 7^2, 1 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 8; \\
 & 1 \cdot 2 \cdot 8^2; \\
 \end{aligned} \tag{12}$$

Наконец отберем исходные инварианты шестой алгебраически степени:

$$\begin{aligned}
 & 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, \\
 & 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86.
 \end{aligned} \tag{13}$$

3. Аппроксимация шестого порядка энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела. Опираясь на результаты предыдущего раздела, построим систему индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов симметричных и антисимметричных частей асимметричных тензоров деформаций и тензора изгиба–кручения. Для этого следует положить:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \text{sym } \boldsymbol{\epsilon}, \quad \mathbf{B} = \text{sym } \boldsymbol{\kappa}, \\
 \mathbf{V} &= \text{asym } \boldsymbol{\epsilon}, \quad \mathbf{W} = \text{asym } \boldsymbol{\kappa}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

В смешанных компонентах соотношения (14) примут вид

$$\begin{aligned} A_{s^*}^k &= \frac{1}{2} [\epsilon_{s^*}^k + \epsilon_{s^*}^{k*}], & B_{s^*}^k &= \frac{1}{2} [\kappa_{s^*}^k + \kappa_{s^*}^{k*}], \\ V_{s^*}^k &= \frac{1}{2} [\epsilon_{s^*}^k - \epsilon_{s^*}^{k*}], & W_{s^*}^k &= \frac{1}{2} [\kappa_{s^*}^k - \kappa_{s^*}^{k*}]. \end{aligned} \quad (15)$$

Воспользовавшись заменой (14) и принимая схему нумерации из работ [4, 5], системы гемитропных инвариантов второй [4], третьей [21], четвертой [2] и пятой [RadMur25ChGPU2Quintic] следует дополнить системой гемитропных инвариантов шестой степени (4)–(13). Полученную итоговую систему инвариантов используем для построения аппроксимации шестого порядка А-представления энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела и запишем ее в сокращенной форме:

$$\mathcal{U} = \sum_{\alpha=1}^9 {}^2C_{\alpha}^2 I + \sum_{\mathfrak{c}=1}^{28} {}^3C_{\mathfrak{c}}^3 \mathfrak{J} + \sum_{\mathfrak{m}=1}^{87} {}^4C_{\mathfrak{m}}^4 \mathfrak{K} + \sum_{\mathfrak{s}=1}^{242} {}^5C_{\mathfrak{s}}^5 \mathfrak{L} + \sum_{\mathfrak{r}=1}^{668} {}^6C_{\mathfrak{r}}^6 \mathfrak{Y}, \quad (16)$$

где введены новые обозначения для определяющих модулей: ${}^2C_{\alpha}$ ($\alpha = 1, \dots, 9$) — определяющие модули квадратичного приближения; ${}^3C_{\mathfrak{c}}$ ($\mathfrak{c} = 1, \dots, 28$) — определяющие модули, связанные с кубическими поправками; ${}^4C_{\mathfrak{m}}$ ($\mathfrak{m} = 1, \dots, 87$) — определяющие модули, связанные с поправками четвертой степени; ${}^5C_{\mathfrak{s}}$ ($\mathfrak{s} = 1, \dots, 242$) — определяющие модули, связанные с поправками четвертой степени; ${}^6C_{\mathfrak{r}}$ ($\mathfrak{r} = 1, \dots, 668$) — определяющие модули, связанные с поправками пятой степени; ${}^2I_{\alpha}$ ($\alpha = 1, \dots, 9$) — квадратичные инварианты; ${}^3\mathfrak{J}_{\mathfrak{c}}$ ($\mathfrak{c} = 1, \dots, 28$) — кубические инварианты; ${}^4\mathfrak{K}_{\mathfrak{m}}$ ($\mathfrak{m} = 1, \dots, 87$) — инварианты четвертой степени; ${}^5\mathfrak{L}_{\mathfrak{s}}$ ($\mathfrak{s} = 1, \dots, 242$) — инварианты пятой степени; ${}^6\mathfrak{Y}_{\mathfrak{r}}$ ($\mathfrak{r} = 1, \dots, 668$) — инварианты шестой степени. Стоит отметить чувствительность некоторых определяющих модулей к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства, что связано с возможностью присвоения нечетного алгебраического веса тензору изгиба–кручения.

Определяющие модули ($9 + 28 + 87 + 242 + 668 = 1034$): ${}^2C_{\alpha}$ ($\alpha = 1, \dots, 9$); ${}^3C_{\mathfrak{c}}$ ($\mathfrak{c} = 1, \dots, 28$); ${}^4C_{\mathfrak{m}}$ ($\mathfrak{m} = 1, \dots, 87$); ${}^5C_{\mathfrak{s}}$ ($\mathfrak{s} = 1, \dots, 242$) и ${}^6C_{\mathfrak{r}}$ ($\mathfrak{r} = 1, \dots, 668$), присутствующие в потенциале силовых и моментных напряжений (16), являются неопределенными коэффициентами в линейной комбинации неприводимой системы инвариантов второй, третьей, четвертой и пятой алгебраических степеней системы двух асимметричных тензоров второго ранга.

Определяющие уравнения для силовых и моментных напряжений, соответствующие энергетической форме (16), получены как в виде

$$t_{\cdot k}^{s^*} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\epsilon_{s^*}^k)}, \quad \mu_{\cdot k}^{s^*} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\kappa_{s^*}^k)}. \quad (17)$$

Для симметричных и антисимметричных частей силовых и моментных напряжений справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [t_{s\cdot}^k + t_{\cdot s}^k] &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\epsilon_{s\cdot}^k)} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\epsilon_{\cdot s}^k)} \right], \\ \frac{1}{2} [\mu_{s\cdot}^k + \mu_{\cdot s}^k] &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\kappa_{s\cdot}^k)} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\kappa_{\cdot s}^k)} \right], \\ \frac{1}{2} [t_{s\cdot}^k - t_{\cdot s}^k] &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\epsilon_{s\cdot}^k)} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\epsilon_{\cdot s}^k)} \right], \\ \frac{1}{2} [\mu_{s\cdot}^k - \mu_{\cdot s}^k] &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\kappa_{s\cdot}^k)} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\kappa_{\cdot s}^k)} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставив выражение для потенциала (16) в уравнения (17), получим:

$$\begin{aligned} t_{s\cdot}^k &= \sum_{\mathfrak{c}=1}^9 {}^2C_{\mathfrak{c}} \frac{\partial^2 \mathbb{I}}{\partial (\epsilon_{s\cdot}^k)} + \sum_{\mathfrak{a}=1}^{28} {}^3C_{\mathfrak{a}} \frac{\partial^3 \mathfrak{J}}{\partial (\epsilon_{s\cdot}^k)} + \sum_{\mathfrak{m}=1}^{87} {}^4C_{\mathfrak{m}} \frac{\partial^4 \mathfrak{K}}{\partial (\epsilon_{s\cdot}^k)} + \sum_{\mathfrak{s}=1}^{242} {}^5C_{\mathfrak{s}} \frac{\partial^5 \mathfrak{L}}{\partial (\epsilon_{s\cdot}^k)} + \sum_{\mathfrak{r}=1}^{668} {}^6C_{\mathfrak{r}} \frac{\partial^6 \mathfrak{Y}}{\partial (\epsilon_{s\cdot}^k)}, \\ \mu_{s\cdot}^k &= \sum_{\mathfrak{c}=1}^9 {}^2C_{\mathfrak{c}} \frac{\partial^2 \mathbb{I}}{\partial (\kappa_{s\cdot}^k)} + \sum_{\mathfrak{a}=1}^{28} {}^3C_{\mathfrak{a}} \frac{\partial^3 \mathfrak{J}}{\partial (\kappa_{s\cdot}^k)} + \sum_{\mathfrak{m}=1}^{87} {}^4C_{\mathfrak{m}} \frac{\partial^4 \mathfrak{K}}{\partial (\kappa_{s\cdot}^k)} + \sum_{\mathfrak{s}=1}^{242} {}^5C_{\mathfrak{s}} \frac{\partial^5 \mathfrak{L}}{\partial (\kappa_{s\cdot}^k)} + \sum_{\mathfrak{r}=1}^{668} {}^6C_{\mathfrak{r}} \frac{\partial^6 \mathfrak{Y}}{\partial (\kappa_{s\cdot}^k)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Остается вычислить частные производные в выражениях (19) для получения точной формулировки определяющих уравнений нелинейного гемитропного микрополярного тела, учитывающие поправка второй, третьей, четвертой и пятой алгебраической степени.

4. Заключение. В настоящей работе теория алгебраических инвариантов используется с целью получения аппроксимации шестого порядка энергетической формы нелинейного гемитропного микрополярного упругого тела. Алгоритм развивается на базе исходной системы инвариантных следов. Алгебраические инварианты представляют собой инвариантные следы, вообще говоря, неперестановочных степеней внутренних произведений целых степеней тензоров второго ранга, образующих исходную систему. Подводя итог настоящего исследования, заключаем:

- (1) С помощью теории целых рациональных алгебраических инвариантов (псевдоинвариантов) исследовано полное множество неприводимых инвариантов для системы двух асимметричных тензоров второго ранга в форме инвариантных следов. В результате выделен набор из 86 инвариантных следов, состоящий из 8 индивидуальных инвариантов, 17 парных, 44 инвариантных троек и 17 инвариантных четверок, т.е. $8 + 17 + 44 + 17 = 86$.
- (2) Найдены 668 целых рациональных произведений шестой алгебраической степени, сформированные из исходных 86 элементов.
- (3) Построен потенциал силовых и моментных напряжений гемитропного микрополярного упругого тела, содержащий аппроксимации второго,

третьего, четвертого и пятого порядков. Таким образом микрополярный потенциал содержит всего $9 + 28 + 87 + 242 + 668 = 1034$ независимых механических модулей.

- (4) Получены определяющие уравнения для силовых и моментных напряжений, включающие поправки второй, третьей, четвертой и пятой алгебраической степени.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500437-9).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number 124012500437-9).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Murashkin E. V., Radaev Y. N. Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2024. – Т. 45, № 5. – С. 2378–2390. – DOI: 10.1134/s1995080224602480.
2. *Murashkin E. V., Radaev Y. N. О квадратичных поправках определяющих уравнений для гемитропного микрополярного упругого тела* // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.] – 2025. – Т. 29, № 2. – С. 207–219. – DOI: 10.14498/vsgtu2144.
3. *Мурашкін Е. В., Радаев Ю. Н. О квадратичных поправках определяющих уравнений для гемитропного микрополярного упругого тела* // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. – Самара, 2025. – Т. 29, № 2. – С. 274–293. – DOI: 10.14498/vsgtu2144.
4. *Radaev Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума* // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2018. – Т. 22, вып. 3. – С. 504–517. – DOI: 10.14498/vsgtu1635.
5. *Радаев Ю., Мурашкін Е. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред* // Проблемы прочности и пластичности. – 2020. – Т. 82, № 4. – С. 399–412. – DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
6. *Murashkin E. V., Radaev Y. N. Heat Conduction of Micropolar Solids Sensitive to Mirror Reflections of Three-Dimensional Space* // Uchenye Zapiski Kazanskogo

- Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2023. – Т. 165, № 4. – С. 389–403. – DOI: 10.26907/2541-7746.2023.4.389-403.
7. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* Heat transfer in anisotropic micropolar solids // Mechanics of Solids. – United States, 2023. – Т. 58, № 9. – С. 3111–3119. – DOI: 10.3103/S0025654423700255.
 8. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* On algebraic triple weights formulation of micropolar thermoelasticity // Mechanics of Solids. – United States, 2024. – Т. 59, № 1. – С. 555–580. – DOI: 10.1134/s00256544242700274.
 9. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. – 2023. – Т. 58, № 3. – С. 802–813. – DOI: 10.3103/s0025654423700127.
 10. *Мурашкін Е. В., Радаев Ю. Н.* К поливариантности основных уравнений связанный термоупругости микрополярного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. – 2023. – 3(57). – С. 112–128. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
 11. *Мурашкін Е. В., Радаев Ю. Н.* Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. – 2023. – 4(58). – С. 86–120. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
 12. *Мурашкін Е. В., Радаев Ю. Н.* Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. – 2022. – 4(54). – С. 108–115. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009.
 13. *Мурашкін Е. В., Радаев Ю. Н.* О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. – 2022. – 3(53). – С. 86–100. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
 14. *Мурашкін Е. В.* О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. – 2023. – 1(55). – С. 110–121. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
 15. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2023. – Т. 44, № 6. – С. 2440–2449. – DOI: 10.1134/s1995080223060392.
 16. *Krylova E. Y., Murashkin E. V., Radaev Y. N.* The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic, and ultraisotropic micropolar elastic solids // Mechanics of Solids. – United States, 2024. – Т. 59, № 3. – С. 1311–1320. – DOI: 10.1134/s0025654424603719.
 17. *Мурашкін Е. В., Радаев Ю. Н.* Об одном алгоритме аппроксимации энергетической формы гемитропного микрополярного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2025. – № 2. – С. 255–269. – DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.015.

18. Спенсер Э. Теория инвариантов. – Мир, 1974.
19. Spencer A., Rivlin R. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors: part I // Archive for rational mechanics and analysis. – 1962. – Т. 9. – С. 45–63.
20. Spencer A. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors: part II // Archive for rational mechanics and analysis. – 1965. – Т. 18, № 1. – С. 51–82.
21. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Cubic Approximation of Stress Potential for a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2025. – Т. 46, № 5. – С. 2391–2400. – DOI: 10.1134/S1995080225606514.

REFERENCES

1. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2024. – Vol. 45, no. 5. – P. 2378–2390. – DOI: 10.1134/S1995080224602480.
2. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Quadratic Corrections to the Constitutive Equations for a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.] – 2025. – Vol. 29, no. 2. – P. 207–219. – DOI: 10.14498/vsgtu2144.
3. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Quadratic Corrections to the Constitutive Equations for a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki. – Samara, 2025. – Vol. 29, no. 2. – P. 274–293. – DOI: 10.14498/vsgtu2144.
4. Radayev Y. N. Multiplier Rule in Covariant Formulations of Micropolar Continuum Mechanics Theories // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki. – 2018. – Vol. 22, iss. 3. – P. 504–517. – DOI: 10.14498/vsgtu1635.
5. Radayev Y. N., Murashkin E. V. Pseudotensor Formulation of the Mechanics of Hemitropic Micropolar Media // Problemy prochnosti i plastichnosti. – 2020. – Vol. 82, no. 4. – P. 399–412. – DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
6. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat Conduction of Micropolar Solids Sensitive to Mirror Reflections of Three-Dimensional Space // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2023. – Vol. 165, no. 4. – P. 389–403. – DOI: 10.26907/2541-7746.2023.4.389-403.
7. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // Mechanics of Solids. – United States, 2023. – Vol. 58, no. 9. – P. 3111–3119. – DOI: 10.3103/S0025654423700255.
8. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On algebraic triple weights formulation of micropolar thermoelasticity // Mechanics of Solids. – United States, 2024. – Vol. 59, no. 1. – P. 555–580. – DOI: 10.1134/S0025654424700274.
9. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. – 2023. – Vol. 58, no. 3. – P. 802–813. – DOI: 10.3103/S0025654423700127.
10. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Polyvariance of the Basic Equations of Coupled Micropolar Thermoelasticity // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo

- sostoyaniya. – 2023. – 3(57). – P. 112–128. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
11. *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* Multiweights Thermomechanics of Hemitropic Micropolar Solids // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya.* – 2023. – 4(58). – P. 86–120. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
 12. *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* Reduction of Natural Forms of Hemitropic Energy Potentials to Conventional Ones // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya.* – 2022. – 4(54). – P. 108–115. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009.
 13. *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* On Two Basic Natural Forms of the Potential of Asymmetric Force-Stress and Couple-Stress Tensors in the Mechanics of Hemitropic Bodies // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya.* – 2022. – 3(53). – P. 86–100. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
 14. *Murashkin E. V.* On the Relation Between Micropolar Constitutive Parameters of Thermodynamic State Potentials // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya.* – 2023. – 1(55). – P. 110–121. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
 15. *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // *Lobachevskii Journal of Mathematics.* – Russian Federation, 2023. – Vol. 44, no. 6. – P. 2440–2449. – DOI: 10.1134/s1995080223060392.
 16. *Krylova E. Y., Murashkin E. V., Radaev Y. N.* The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic, and ultraisotropic micropolar elastic solids // *Mechanics of Solids.* – United States, 2024. – Vol. 59, no. 3. – P. 1311–1320. – DOI: 10.1134/s0025654424603719.
 17. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* On an Algorithm for Approximating the Energy Form of a Hemitropic Micropolar Body // *Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.* – 2025. – № 2. – C. 255–269. – DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.015.
 18. *Spencer E.* Theory of Invariants. – Mir, 1974.
 19. *Spencer A. J. M., Rivlin R. S.* Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors: part I // *Archive for Rational Mechanics and Analysis.* – 1962. – Vol. 9. – P. 45–63.
 20. *Spencer A. J. M.* Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors: part II // *Archive for Rational Mechanics and Analysis.* – 1965. – Vol. 18, no. 1. – P. 51–82.
 21. *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* Cubic Approximation of Stress Potential for a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // *Lobachevskii Journal of Mathematics.* – Russian Federation, 2025. – Vol. 46, no. 5. – P. 2391–2400. – DOI: 10.1134/s1995080225606514.

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Алексеев Андрей Алексеевич (alexeew@bk.ru) – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета, г. Тверь, Россия.

Богданов Андрей Николаевич (bogdanov@imec.msu.ru) – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории газодинамики взрыва и реагирующих систем Научно-исследовательского института механики МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Буренин Анатолий Александрович (aab@imim.ru) – член-корреспондент РАН, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Власов Александр Николаевич (bah1955@yandex.ru) – доктор технических наук, директор Института прикладной механики РАН (ИПРИМ РАН), г. Москва.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Иванов Дмитрий Валерьевич (ivanovdv.84@ya.ru) – профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

Каюмов Рашит Абдулхакович (kauytov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Келлер Илья Эрнстович (kie@icmm.ru) – доктор физико-математических наук, доцент, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Коссович Леонид Юрьевич (president@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Лисовенко Дмитрий Сергеевич (dslisov@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матвеев Сергей Владимирович (sergio2100@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Матченко Николай Михайлович (ekc_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Минаева Надежда Витальевна (nminaeva@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Миронов Борис Гурьевич (mbg.chspu@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Немировский Юрий Владимирович (nemiryury@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

Орлов Виктор Николаевич (orlowvn@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работе должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должны быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала predel21@mail.ru и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст,

который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки на русском и английском языках**; **сведения о всех авторах на русском и английском языках**: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2e с использованием стиля predel.sty. Стиль predel.sty и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки BibTeX. Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журналедается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редакколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Тихонов С. В., Миронов Б. Г.</i> Дюис Данилович Ивлев. К 95-летию со дня рождения	7
<i>Мурашкін Е. В., Радаев Ю. Н.</i> К 70-летию профессора Александра Николаевича Власова	15
<i>Пеньков В. Б., Левина Л. В., Левин Л. В., Затонская В. В.</i> Стационарные термоупругие состояния многополостного тела	44
<i>Евтихов Д. О., Савостьянова И. Л., Сенашов С. И.</i> Кручение упруго-пластического стержня, находящегося под действием давления, линейно меняющегося вдоль образующей	59
<i>Непершин Р. И.</i> Осевое сдавливание цилиндра штампом с криволинейной гладкой границей	70
<i>Сумин А. И., Сумина Р. С., Фролов А. Л., Фролова О. А.</i> Математическое моделирование потери устойчивости материалов под воздействием механических и тепловых нагрузок	92
<i>Акопян А. Г., Капленко О. А., Ягудаев Г. Г.</i> Предельное пластическое состояние композитного конического листа	103
<i>Смолин А. Ю., Еремина Г. М.</i> Моделирование напряженно-деформированного состояния системы остеонов при механическом воздействии ..	112
<i>Халиулова А. Р., Иванов Д. В.</i> Влияние облучения на биомеханику различных структур организма	142
<i>Стрелков К. С.</i> Теоретическое и экспериментальное исследование ползучести стали марки Р110	157
<i>Аннин Б. Д., Сенашов С. И., Савостьянова И. Л.</i> Решение задачи упругопластического кручения стержня с помощью законов сохранения	166
<i>Сысоев О. Е., Намоконов А. Н., Сысоев Е. О.</i> Численные исследования колебаний тонкостенной цилиндрической оболочки в пластической зоне деформации	173
<i>Иванова С. Ю., Осипенко К. Ю., Демин А. И., Баничук Н. В., Лисовенко Д. С.</i> О влиянии температуры гибких сотовых метаматериалов на потерю энергии ударника при пробивании	185
<i>Полоник М. В., Манцыбара А. А., Макарова Н. В.</i> К проблеме моделирования истираемой поверхности неоднородных материалов	203
<i>Богачева В. Э., Лавит И. М., Перова О. С.</i> Влияние толщины упруго-пластического адгезионного слоя композита на значение J-интеграла	214
<i>Максимова Л. А., Юденков А. В.</i> О разрешимости классических краевых задач для бианалитических функций в математической теории упругости	225

<i>Рытов С. А., Иовлев И. М., Рытова Т. Г., Максимова Л. А.</i> Численные расчёты при научно-техническом сопровождении проектирования фундаментов Мемориала Донбасса	236
<i>Спорыгин А. Н.</i> О динамическом деформировании толстостенной трубы	248
<i>Михин М. Н., Мурашкун Е. В., Радаев Ю. Н.</i> Системы целых рациональных инвариантов в аппроксимациях энергетических форм микрополярных тел ..	255
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	270
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	273

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА

СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2025. № 4 (66)

Отв. за выпуск: С. В. Тихонов

Технические редакторы: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Компьютерная верстка: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Макет: С. В. Тихонов

Подписано в печать 25.12.2025. Выход в свет 30.12.2025.

Формат 70x100/8. Бумага писчая.

Печать оперативная. Typeset by L^AT_EX 2 _{ϵ} . Усл. печ. л. 34,6.

Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ № 577

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском центре Чувашского государственного
педагогического университета им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38