

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Научный журнал

№ 1(67)

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.

Выходит 4 раза в год

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций

(свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук, включён в Единый
государственный перечень научных изданий — «Белый список» (уровень 3)

Подписной индекс в каталоге “Пресса России” 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко, С. В. Тихонов

Ответственные секретари: С. В. Матвеев, Е. В. Мурашкин

Редакционный совет: Ю. Н. Радаев, И. Э. Келлер, В. П. Радченко, А. И. Шашкин,
Л. Ю. Коссович, А. А. Маркин, Л. А. Игумнов, А. А. Алексеев, А. А. Буренин

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. Н. Богданов, А. Н. Власов,
Д. В. Георгиевский, В. В. Глаголев, М. А. Гузев, Д. В. Иванов, Р. А. Каюмов,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Д. С. Лисовенко, Е. В. Ломакин, Л. А. Максимова,
Н. В. Минаева, М. Н. Михин, Ю. В. Немировский, В. Н. Орлов,
А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, К. Б. Устинов,
А. Д. Чернышов, М. В. Шитикова

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, Президентский бульвар, 19А

Адрес издателя: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Тел.: (8352) 22-28-71, доб. 1182

E-mail: predel21@mail.ru

WWW: <https://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева, 2026

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

VESTNIK
CHUVASHSKOGO GOSUDARSTVENNOGO PEDAGOGICHESKOGO
UNIVERSITETA IM. I. YA. YAKOVLEVA
SERIYA: MEKHANIKA PREDEL'NOGO SOSTOYANIYA

Scientific journal
№ 1(67)

The Journal founder: I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University
Founders of the series: D. D. Ivlev, D. M. Klimov, L. A. Maksimova, A. V. Manzhirov,
B. G. Mironov, G. K. Mikhailov, Yu. N. Radaev, E. I. Shemyakin

Published since March 2007
Published four times a year

Registered in Federal Service for Supervision of Communications
Information Technology, and Mass Media "Roskomnadzor"
(Accreditation Certificate PI No. FS77-58094 d/d 20 May, 2014).

Hard copy of the Journal is available by subscription from the catalogue "Press of Russia"
(reg. No. 13109).

Editor-in-chief: B. G. Mironov

Executive Editor: Yu. N. Radayev

Associate Editor: N. M. Matchenko, S. V. Tikhonov

Executive Secretary: E. V. Murashkin, S. V. Matveev

Editorial Council: Yu. N. Radayev, I. E. Keller, V. P. Radchenko, A. I. Shashkin,
L. Yu. Kossovich, A. A. Markin, L. A. Igumnov, A. A. Alekseev, A. A. Burenin

Editorial Board: V. G. Bazhenov, A. N. Bogdanov, A. N. Vlasov, D. V. Georgievsky,
V. V. Glagolev, M. A. Guzev, D. V. Ivanov, R. A. Kayumov, D. M. Klimov,
V. A. Kovalev, D. S. Lisovenko, E. V. Lomakin, L. A. Maksimova, N. V. Minaeva,
M. N. Mikhin, Yu. V. Nemirovskii, V. N. Orlov, A. F. Revuzhenko, S. I. Senashov,
A. N. Sporykhin, A. A. Treshchev, K. B. Ustinov, A. D. Chernyshev, M. V. Shitikova

Postal address:: ul. K. Marksa 38, 428000 Cheboksary, Russia

Phone:: +7 352 22 28 71, ex.ph. 1182

E-mail:: predel21@mail.ru

Journal website:: <http://limit21.ru>



Ю. Ф. Коваленко

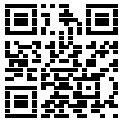
К 60-ЛЕТИЮ КОНСТАНТИНА БОРИСОВИЧА УСТИНОВА

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Аннотация. Статья посвящена доктору физико-математических наук Константину Борисовичу Устинову. В настоящей библиографической заметке приводятся биографические сведения об этом крупном ученом-механике.

Ключевые слова: механика, персоналии

Коваленко Юрий Федорович, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией геомеханики; e-mail: perfolinkgeo@yandex.ru;
<https://orcid.org/0000-0002-6128-1737>; AuthorID: 12282



для цитирования: Коваленко Ю. Ф. К 60-летию Константина Борисовича Устинова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 7–25. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.001. EDN: AHJDBB

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Yu. F. Kovalenko

ON THE 60TH ANNIVERSARY OF KONSTANTIN BORISOVICH USTINOV

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. This article is dedicated to Doctor of Physical and Mathematical Sciences Konstantin Borisovich Ustinov. This bibliographic note provides biographical information about this prominent mechanical scientist.

Keywords: mechanics, personalities.

Yury F. Kovalenko, Dr. Sci. Phys. & Math., Head of the Laboratory of Geomechanics; e-mail: perfolinkgeo@yandex.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-6128-1737>; AuthorID: 12282



to cite this article: Kovalenko Yu. F. On the 60th anniversary of Konstantin Borisovich Ustinov // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 7–25. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.001

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

28 февраля 2026 года исполнилось 60 лет Константину Борисовичу Устинову — известному специалисту в области механики деформируемого твердого тела, доктору физико-математических наук, автору более 200 научных работ.

Константин Борисович родился 28 февраля 1966 года в Москве, в семье инженеров. В 1983 г. поступил на физико-технический факультет Московского горного института, который окончил с отличием в 1989 г. по специальности “горный инженер – физик”. Во время обучения в институте прошел конкурс и был принят в группу “Геомеханика” по углубленному изучению математических дисциплин и механики твердого тела, организованную Р.Л. Салгаником. Окончив с отличием институт, работал инженером на выпускающей кафедре института “физико-технический контроль производства”. В 1990 г. поступил в аспирантуру Института проблем механики АН СССР (научный руководитель – профессор Р.Л. Салганик). В 1992 году К.Б. Устинов был приглашен в аспирантуру Университета Западной Австралии (University of Western Australia), которую окончил в 1995 г. представив диссертацию “Asymptotic modeling of stress concentration and fracture near underground excavations” (“Асимптотическое моделирование концентрации напряжений и разрушения вблизи подземных выработок”), а в 1996 году получил степень Doctor of Philosophy. После завершения обучения за рубежом он вернулся в Россию и поступил на работу в лабораторию механики нелинейных сред (впоследствии лаборатория геомеханики) Института проблем механики РАН, где и работает до настоящего времени в должностях (последовательно): младшего научного сотрудника, научного сотрудника, старшего научного сотрудника, ведущего научного сотрудника. В 1997 г. согласно законам РФ оформил переаттестацию диссертации Университета Западной Австралии на звание кандидата физико-математических наук по специальности “механика твердого тела”. В 2015 г. защитил диссертацию “Механика упругого деформирования систем с покрытиями и промежуточными слоями” на степень доктора физико-математических наук по специальности “механика твердого тела” (официальные оппоненты – д.ф.-м.н., проф. Греков Михаил Александрович (Санкт-Петербургский государственный университет); д.ф.-м.н., проф. Коробейников Сергей Николаевич (Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН); д.ф.-м.н., проф. Еремеев Виктор Анатольевич (Южный федеральный университет), ведущая организация – Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем машиноведения Российской академии наук (ИПМаш РАН). Защита состоялась на заседании Диссертационного совета ИПМех РАН. Доцент ВАК с 2007 г.

Научный путь Константина Борисовича хорошо показывает редкое сегодня сочетание широты и глубины. С одной стороны, это геомеханика нефтяных и газовых скважин, теоретическое изучение и механико-математическим моделирование деформационных процессов и процессов разрушения, происходящих в массиве горных пород под действием возникающих в них напряжений, исследование взаимовлияния напряженного состояния, фильтрации и разрушения

пород. Результатом этой деятельности явилась разработка математической модели потери устойчивости стволов наклонных и горизонтальных нефтяных и газовых скважин при их проводке и эксплуатации. При непосредственном участии К.Б. Устинова был проведен цикл экспериментальных работ, выявивший особый вид прочностной анизотропии ряда горных пород, что привело к необходимости по-новому взглянуть на некоторые вопросы геомеханики, такие как определение устойчивости скважин и определение исходного напряженного состояния массива.

С другой стороны, это большой пласт работ, связанных с получением аналитических решений задач теории упругости. Особое внимание уделялось использованию методов теории функции комплексного переменного и сведения задач теории упругости к задаче Римана о скачке (чаще матричной). В частности метод факторизации матриц А.А. Храпкова был адаптирован и успешно применен к решению задач о распространении интерфейсных трещин. С использованием данного подхода получен ряд решений для задач о трещинах в составных клиньях и об отслоении покрытий: найдены сингулярные и несингулярные члены разложений поля напряжений вблизи вершин интерфейсных трещин. В круг интересов К.Б. Устинова входит также моделирование эффектов, связанных с поверхностными явлениями и моментными напряжениями, причем в последнем случае физической обоснованностью важности их учета предполагалось наличие структуры среды, такой как слоистость.

Константин Борисович внес значительный вклад в развитие теории эффективных характеристик неоднородных сред. Для сред со множеством включений, в случае наличия нескольких параметров, характеризующих геометрию включения (отношение максимального размера к минимальному) и упругие свойства (отношение модуля включения к модулю матрицы) им выделены характерные области в пространстве параметров, для которых справедливы различные асимптотические оценки свойств.

Такой диапазон научных интересов сам по себе производит впечатление. Но еще важнее, что за ним всегда стоит не внешнее разнообразие тем, а единый стиль мышления — стремление добраться до сути механического явления и выразить ее строго, ясно и, по возможности, красиво.

Тех, кто работал с Константином Борисовичем, неизменно поражает его отношение к науке. Для него механика — не набор готовых схем и не собрание удобных формул на все случаи жизни, он не боится идти против инерции привычных представлений. Возможно, именно поэтому в его работах так органично соединяются физическая содержательность и математическая культура. Не случайно методы теории функции комплексного переменного он с характерной для него улыбкой называл “забытым искусством древних магов”. В этой фразе — и юмор, и точное ощущение того, что в науке есть инструменты, требующие не только техники, но и настоящего вкуса.

При всей масштабности собственных результатов Константин Борисович никогда не производит впечатления человека, отгороженного от коллег высотой

своей квалификации. Напротив, в научной работе и в повседневном общении он необыкновенно щедр: охотно делится идеями, замечаниями, соображениями, умеет вовремя подсказать решение или указать верное направление, не подавляя собеседника авторитетом. Для молодых исследователей это особенно важно. Он много лет преподавал, руководил студентами, бакалаврами, магистрантами, работал с аспирантами, и эта сторона его деятельности — вовсе не приложение к основным научным достижениям, а естественное продолжение его понимания науки как дела, которое должно передаваться дальше.

Особого упоминания заслуживает его отношение к учителям и научной традиции. Константин Борисович всегда с глубоким уважением говорит о Р.Л. Салганике и других ученых, которых считает своими наставниками. И в этом тоже есть важная черта его личности: для него научная школа — не формальность и не дань жанру, а реальная преемственность мысли, ответственности и профессиональной честности. При этом он совершенно лишен академической позы. В воспоминаниях о школьных годах, студенчестве, о собственном образовании у него всегда находится место самоиронии. Он умеет говорить о серьезных вещах без тяжеловесности — редкое качество, особенно в среде, где слишком легко упасть либо в сухой официоз, либо в дешевую фамильярность.

За пределами собственно науки Константин Борисович — человек широкой культуры и живого интереса к миру. Коллеги знают Константина Борисовича не только как крупного ученого, но и как человека высокой внутренней культуры. История, литература, музыка, кино — все это не декоративный фон, а часть его внутреннего устройства. Свободное время он любит проводить в горах, увлекается горными лыжами, парусом, путешествиями, причем явно предпочитает маршруты подальше от комфорта и массовых курортов.

Сегодня, поздравляя Константина Борисовича Устинова с 60-летием, хочется сказать не только о его научных заслугах, хотя они, безусловно, велики и общепризнанны. Хочется сказать о другом: о счастливо сохранившемся в нем масштабе личности, о ясности мысли, о человеческой надежности, о том особом соединении строгости и свободы, которое и делает ученого по-настоящему заметным.

В день 60-летия хочется пожелать Константину Борисовичу крепкого здоровья, сил, научного азарта, новых идей, талантливых учеников и, конечно, радости — от работы, от общения, от движения вперед.

Книги

2018

1. Карев В. И., Коваленко Ю. Ф., Устинов К. Б. Моделирование геомеханических процессов в окрестности нефтяных и газовых скважин. — Москва, 2018.

2020

2. *Karev V., Kovalenko Y., Ustinov K. Geomechanics of Oil and Gas Wells.* — Springer, 2020. — 166 p. — DOI: 10.1007/978-3-030-26608-0.

Статьи

1993

1. *Dyskin A. V., Germanovich L. N., Ustinov K. B.* Asymptotic solution for long cracks emanated from a pore in compression // International Journal of Fracture. – 1993. – Vol. 62, no. 4. – P. 307–324. – DOI: 10.1007/BF00017238.

1994

2. Experiments on 3-D crack growth in uniaxial compression / A. V. Dyskin [et al.] // International Journal of Fracture. – 1994. – Vol. 65, no. 4. – R77–R83. – DOI: 10.1007/bf00012382.
3. Study of 3-D mechanisms of crack growth and interaction in uniaxial compression / A. V. Dyskin [et al.] // ISRM News Journal. – 1994. – Vol. 2, no. 1. – P. 17–20.
4. *Ustinov K. B.* Asymptotic solution for long cracks emanated from a hole in bi-axial loading // International Journal of Fracture. – 1994. – Vol. 68, no. 3. – R73–R77. – DOI: 10.1007/BF00013075.

1995

5. *Dyskin A. V., Ustinov K. B., Korsunsky A. M.* On modelling of defect interaction // International Journal of Fracture. – 1995. – Vol. 71, no. 4. – R79–R83. – DOI: 10.1007/bf00037823.

1999

6. *Dyskin A. V., Ustinov K. B., Germanovich L. N.* A 3-D model of wing crack growth and interaction // Engineering Fracture Mechanics. – 1999. – Vol. 63, no. 1. – P. 81–110. – DOI: 10.1016/S0013-7944(96)00115-4.

2000

7. *Dyskin A. V., Germanovich L. N., Ustinov K. B.* Asymptotic analysis of crack interaction with free boundary // International Journal of Solids and Structures. – 2000. – Vol. 37, no. 6. – P. 857–886. – DOI: 10.1016/S0020-7683(99)00063-3.

2003

8. Influence of shape and locations of initial 3-d cracks on their growth in uniaxial compression / A. V. Dyskin [et al.] // Engineering Fracture Mechanics. – 2003. – Vol. 70, no. 15. – P. 2115–2136. – DOI: 10.1016/S0013-7944(02)00240-0.
9. Устинов К. Б. Об определении эффективных упругих характеристик двухфазных сред. Случай изолированных неоднородностей в форме эллипсоидов вращения // Успехи механики. – 2003. – Т. 2, № 2. – С. 126–168.

2004

10. *Salganik R. L., Ustinov K. B.* Crack-like formation of failure-decided angle points on middle planes of the layers resistant to bending in multi-layer structure - a continuum model // International Journal of Fracture. – 2004. – Vol. 128, no. 1. – P. 41–48. – DOI: 10.1023/B:FRAC.0000040964.38482.9d.

2005

11. Карев В. И., Коваленко Ю. Ф., Устинов К. Б. Определение деформационных и прочностных свойств горных пород применительно к баженовским отложениям // Технологии топливно-энергетического комплекса. – 2005. – № 3. – С. 17–21.

2006

12. Математическое и физическое моделирование разрушения горных пород при проходке наклонно-направленных скважин / Д. Климов [и др.] // Технологии топливно-энергетического комплекса. – 2006. – № 5. – С. 22–27.
13. Вознесенский А. С., Устинов К. Б., Шкурятник В. Л. Теоретическая модель акустической эмиссии при механическом нагружении горных пород в области максимального уплотнения // Прикладная механика и техническая физика. – 2006. – Т. 47, 4 (278). – С. 145–152. – DOI: 10.1007/s10808-006-0092-2.

2007

14. *Ustinov K. B., Goldstein R. V.* On application of classical eshelby approach to calculating effective elastic moduli of dispersed composites // International Journal of Fracture. – 2007. – Vol. 147, no. 1–4. – P. 55–66. – DOI: 10.1007/s10704-007-9128-8.

2008

15. Об оценке собственных деформаций кислородосодержащих преципитатов / Р. В. Гольдштейн [и др.] // Письма в Журнал технической физики. – 2008. – Т. 34, № 3. – С. 32–38. – DOI: 10.1007/s11455-008-2006-6.
16. Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Устинов К. Б. Моделирование механических эффектов, связанных с работой атомно-силовых микроскопов // Российские нанотехнологии. – 2008. – Т. 3, № 5/6. – С. 186–197.
17. Устинов К. Б. Об уточнении граничных условий для балочной модели кантилевера атомно-силового микроскопа и их влиянии на интерпретацию результатов измерений // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2008. – № 3. – С. 182–188. – DOI: 10.3103/S0025654408030175.

2009

18. Об устойчивости наклонных и горизонтальных нефтяных и газовых скважин / Д. М. Климов [и др.] // Актуальные проблемы механики. Механика деформируемого твердого тела. Сборник трудов. – Москва, 2009. – С. 455–469.
19. Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Устинов К. Б. Механическая модель контактного взаимодействия измерительного элемента АСМ с исследуемой поверхностью // Российские нанотехнологии. – 2009. – Т. 4, № 7/8. – С. 153–159. – DOI: 10.1134/S1995078009070155.
20. Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Устинов К. Б. О некоторых особенностях механического поведения кантилеверов атомно-силовых микроскопов // Инженерная физика. – 2009. – № 4. – С. 19–23.
21. Карев В. И., Устинов К. Б. Фильтрация газоконденсатной смеси при применении метода георыхления // Прикладная математика и механика. – 2009. – Т. 73, № 5. – С. 787–798. – DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2009.11.009.
22. Салганик Р. Л., Устинов К. Б. Мультиполи в упругой многослойной структуре, работающей на изгиб, и их приложения (континуальное приближение) // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2009. – № 1. – С. 37–52. – DOI: 10.3103/S0025654409010038.

2010

23. Теоретические модели акустической эмиссии в горных породах при различных режимах их нагревания / В. А. Винников [и др.] // Прикладная механика и

- техническая физика. – 2010. – Т. 51, 1 (299). – С. 100–105. – DOI: 10.1007/s10808-010-0013-2.
24. Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Устинов К. Б. Влияние поверхностных остаточных напряжений и поверхностной упругости на деформирование шарообразных включений нанометровых размеров в упругой матрице // Физическая мезомеханика. – 2010. – Т. 13, № 5. – С. 127–138. – DOI: 10.1016/j.physme.2010.11.012.
25. Семенова Д. В., Устинов К. Б. Некоторые асимптотические разложения компонент тензора эшелби в случае кубической и гексагональной анизотропии // Вестник Пермского государственного технического университета. Механика. – 2010. – № 4. – С. 80–100.
26. Устинов К. Б. О вычислении энергии неоднородности; асимптотики и область их применения // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2010. – № 2. – С. 103–113. – DOI: 10.3103/S0025654410020093.
- 2011
27. Экспериментально-теоретическое исследование процесса формирования системы кислородосодержащий преципитат–дислокационные петли в кремнии / Р. В. Гольдштейн [и др.] // Физика твердого тела. – 2011. – Т. 53, № 3. – С. 493–503. – DOI: 10.1134/S1063783411030103.
28. *Shushpannikov P., Goldstein R., Ustinov K.* The mechanical modeling of oxygen-containing precipitates in silicon wafers on different stages of the getter formation process // *Solid State Phenomena*. – 2011. – Vol. 178/179. – P. 483–488. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/SSP.178-179.483.
29. Гольдштейн Р. В., Устинов К. Б., Ченцов А. В. Оценка влияния податливости подложки на напряжения, вызывающие потерю устойчивости отслоившегося покрытия // Вычислительная механика сплошных сред. – 2011. – Т. 4, № 3. – С. 48–57.
30. Устинов К. Б. О влиянии поверхностных остаточных напряжений и поверхностной упругости на деформирование шарообразных включений нанометровых размеров в упругой матрице // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – 2011. – № 4/5. – С. 2541–2542.
- 2012
31. Моделирование изменения механических свойств полиуретановых эластомеров при модифицировании углеродными нанотрубками / Э. Р. Бадамшина [и др.] // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т. 15, № 3. – С. 5–10.
32. Коваленко Ю. Ф., Сидорин Ю. В., Устинов К. Б. Деформирование массива угля при наличии в нем системы изолированных газонаполненных трещин // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2012. – № 1. – С. 33–45. – DOI: 10.1134/S1062739148010042.
33. Салганик Р. Л., Устинов К. Б. Задача о деформировании упруго заделанной пластины, моделирующей частично отслоившееся от подложки покрытие (плоская деформация) // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2012. – № 4. – С. 50–62. – DOI: 10.3103/S0025654412040061.

34. Устинов К. Б., Шушпанников П. С. О концентрации напряжений, вызванных сфероидальными неоднородностями // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2012. – № 4. – С. 128–142.

2013

35. Simulation of variations in mechanical properties of polyurethane elastomers modified with carbon nanotubes / E. R. Badamshina [et al.] // Physical Mesomechanics. – 2013. – Vol. 16, no. 2. – P. 93–98. – DOI: 10.1134/S102995991302001X.
36. Механико-математическое и экспериментальное моделирование устойчивости скважин в анизотропных геосредах / Д. М. Климов [и др.] // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2013. – № 4. – С. 4–12. – DOI: 10.3103/S0025654413040018.
37. *Ustinov K. B., Goldstein R. V., Gorodtsov V. A.* On the modeling of surface and interface elastic effects in case of eigenstrains // Surface Effects in Solid Mechanics. Advanced Structured Materials. – Berlin, 2013. – Vol. 30. – DOI: 10.1007/978-3-642-35783-1_13.
38. Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Устинов К. Б. О построении теории поверхностной упругости для плоской границы // Физическая мезомеханика. – 2013. – Т. 16, № 4. – С. 75–83.
39. Устинов К. Б. Еще раз к задаче о полуплоскости, ослабленной полубесконечной трещиной, параллельной границе // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 4. – С. 138–168.

2014

40. Влияние фильтрации на напряженно-деформированное состояние породы в окрестности скважины / А. Б. Журавлев [и др.] // Прикладная математика и механика. – 2014. – Т. 78, № 1. – С. 86–97. – DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2014.05.007.
41. *Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Ustinov K. B.* On surface elasticity theory for plane interfaces // Physical Mesomechanics. – 2014. – Vol. 17. – P. 30–38. – DOI: 10.1134/S1029959914010044.
42. Гольдштейн Р. В., Устинов К. Б. Об учете ван-дер-ваальсового взаимодействия в некоторых задачах теории упругости // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2014. – № 1. – С. 87–94. – DOI: 10.3103/S0025654414010087.
43. Устинов К. Б. О сдвиговом отслоении тонкой полосы от полуплоскости // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2014. – № 6. – С. 141–152. – DOI: 10.3103/S0025654414060132.

2015

44. Модель фильтрации в скважину с учетом зависимости проницаемости от напряжений / В. И. Карев [и др.] // Процессы в геосредах. – 2015. – 4 (4). – С. 34–44.
45. *Galybin A. N., Goldstein R. V., Ustinov K. B.* Fracture development on a weak interface near a wedge // Journal of Mechanics of Materials and Structures. – 2015. – Vol. 10, no. 3. – P. 265–282. – DOI: 10.2140/jomms.2015.10.265.

46. *Ustinov K. B.* On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings // Engineering Failure Analysis. – 2015. – Vol. 47. – P. 338–344. – DOI: 10.1016/j.engfailanal.2013.09.022.
47. *Ustinov K. B.* On separation of a layer from the half-plane: Elastic fixation conditions for a plate equivalent to the layer // Mechanics of Solids. – 2015. – Vol. 50, no. 1. – P. 62–80. – DOI: 10.3103/S0025654415010070.
48. Устинов К. Б. О расслоении полосы по границе раздела упругих свойств. Часть 1. Постановка задачи, случай нормального отрыва // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 4. – С. 226–245.

2016

49. Геомеханическое моделирование процессов в призабойной зоне скважины / В. И. Карев [и др.] // Мониторинг. Наука и технологии. – 2016. – 3 (28). – С. 85–91.
50. Моделирование эффекта изменения прочности и трещиностойкости полиуретановых эластомеров при модифицировании углеродными нанотрубками / Э. Р. Бадамшина [и др.] // Физическая мезомеханика. – 2016. – Т. 19, № 5. – С. 17–22.
51. Модель разрушения анизотропных горных пород при сложном нагружении / В. И. Карев [и др.] // Физическая мезомеханика. – 2016. – Т. 19, № 6. – С. 34–40. – DOI: 10.3103/S0025654416050022.
52. *Ustinov K. B.* On propagation of interface cracks in bi-layered strip in relation to delamination of coatings from substrates of final thickness // Procedia Structural Integrity. – 2016. – P. 3439–3446. – DOI: 10.1016/j.prostr.2016.06.429.
53. Коваленко Ю. Ф., Устинов К. Б., Журавлев А. Б. Напряженно-деформированное состояние в окрестности перфорированной скважины при наличии неупругих деформаций // Процессы в геосредах. – 2016. – 1 (5). – С. 69–76.
54. Устинов К. Б. О применении моделей пластического течения для описания неупругого деформирования анизотропных горных пород // Процессы в геосредах. – 2016. – 3 (7). – С. 278–287.
55. Устинов К. Б. О расслоении полосы по границе раздела упругих свойств. Часть 2. случай сдвиговой трещины // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 2. – С. 131–142.
56. Устинов К. Б. О расслоении полосы по границе раздела упругих свойств. Часть 3. точное аналитическое решение для частного случая // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 3. – С. 222–240.

2017

57. Моделирование фильтрации флюида в скважину на больших глубинах с учетом анизотропии прочностных свойств пород коллектора / В. И. Карев [и др.] // Процессы в геосредах. – 2017. – 2 (11). – С. 512–521.
58. Экспериментальное исследование зависимости деформационных свойств осадочных горных пород от истории нагружения / Ю. В. Сидорин [и др.] // Процессы в геосредах. – 2017. – 3 (12). – С. 632–637.

59. *Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Ustinov K. B.* Deformation of spherical inclusion in an elastic body with account for influence of interface considered as infinitesimal layer with abnormal properties // *Advanced Structured Materials*. – 2017. – Vol. 46. – P. 163–169. – DOI: 10.1007/978-3-319-56050-2_8.
60. Карев В. И., Коваленко Ю. Ф., Устинов К. Б. Моделирование деформирования и разрушения анизотропных пород вблизи горизонтальной скважины // *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых*. – 2017. – № 3. – С. 12–21. – DOI: 10.1134/S1062739117032319.
2018
61. Fracture model of anisotropic rocks under complex loading / V. I. Karev [et al.] // *Physical Mesomechanics*. – 2018. – Vol. 21, no. 3. – P. 216–222. – DOI: 10.1134/S1029959918030050.
62. Modeling of deformation and filtration processes near wells with emphasis of their coupling and effects caused by anisotropy / V. I. Karev [et al.] // *Springer Geology*. – 2018. – P. 350–359. – DOI: 10.1007/978-3-319-77788-7_36.
63. Modelling of mechanical and filtration processes near the well with regard to anisotropy / V. I. Karev [et al.] // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2018. – P. 012039. – DOI: 10.1088/1742-6596/991/1/012039.
64. Strength and fracture toughness of polyurethane elastomers modified with carbon nanotubes / E. R. Badamshina [et al.] // *Physical Mesomechanics*. – 2018. – Vol. 21, no. 3. – P. 187–192. – DOI: 10.1134/S1029959918030013.
65. Устинов К. Б., Степанова Е. В. Об аналогии влияния порового давления и температуры при решении упругих и упруго-пластических задач // *Процессы в геосредах*. – 2018. – 2 (15). – С. 905–910.
2019
66. Fracture Mechanics Solutions for Interfacial Cracks between Compressible Thin Layers and Substrates / R. Massabò [et al.] // *Coatings*. – 2019. – Vol. 9, no. 3. – P. 152. – DOI: 10.3390/coatings9030152.
67. Эволюция поврежденности при сложном неравнокомпонентном сжатии песчаника по данным акустической эмиссии / И. А. Пантелеев [и др.] // *Физическая мезомеханика*. – 2019. – Т. 22, № 4. – С. 56–63. – DOI: 10.24411/1683-805X-2019-14006.
68. Экспериментальное исследование ползучести горных пород при истинно трехосном нагружении / В. И. Карев [и др.] // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. – 2019. – № 6. – С. 30–37. – DOI: 10.1134/S0572329919060084.
69. *Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S., Ustinov K. B.* Spherical inclusion in an elastic matrix in the presence of eigenstrain, taking into account the influence of the properties of the interface, considered as the limit of a layer of finite thickness // *Mechanics of Solids*. – 2019. – Vol. 54, no. 4. – P. 514–522. – DOI: 10.3103/S0025654419040034.
70. *Ustinov K.* On semi-infinite interface crack in bi-material elastic layer // *European Journal of Mechanics - A/Solids*. – 2019. – Vol. 75. – P. 56–69. – DOI: 10.1016/j.euromechsol.2019.01.013.

71. *Ustinov K. B., Stepanova E. V.* On influence of inclusions and cracks on mechanical properties of rocks // Springer Proceedings in Earth and Environmental Sciences. – 2019. – P. 472–479. – DOI: 10.1007/978-3-030-11533-3_47.
72. Журавлев А. Б., Устинов К. Б. О величинах, характеризующих степень упругой анизотропии трансверсально-изотропных горных пород // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2019. – № 4. – С. 129–140. – DOI: 10.1134/S0572329919040123.
73. Устинов К. Б. О наведенной анизотропии механических свойств эластомеров // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2019. – № 5. – С. 27–36. – DOI: 10.1134/S0572329919050167.
74. Устинов К. Б. Ползучесть горных пород. экспериментальные данные, модели, существующие проблемы // Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах. – 2019. – С. 140–141.
75. Устинов К. Б., Лисовенко Д. С., Ченцов А. В. Ортоотропная полоса с центральной полубесконечной трещиной под произвольными нормальными нагрузками // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2019. – Т. 23, № 4. – С. 657–670. – DOI: 10.14498/vsgtu1736.

2020

76. On modelling inelastic deformation of permeable rocks with accounting time-dependent effects / V. I. Karev [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – P. 012021. – DOI: 10.1088/1742-6596/1474/1/012021.
77. Геомеханическое и физическое моделирование деформационных процессов в пластах подземного хранилища газа при циклическом изменении пластового давления / В. И. Карев [и др.] // Газовая промышленность. – 2020. – S4 (808). – С. 56–62.
78. Эффект кайзера при многоосном непропорциональном сжатии песчаника / И. А. Пантелеев [и др.] // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. – 2020. – Т. 495, № 1. – С. 63–67. – DOI: 10.31857/S2686740020060152.
79. *Gandilyan D. V., Ustinov K. B.* Influence of surface effects on stress state in a body with two circular holes // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – P. 012014. – DOI: 10.1088/1742-6596/1474/1/012014.
80. *Karev V., Kovalenko Y., Ustinov K.* Results of tests of rock specimens by using tilts // Advances in Oil and Gas Exploration and Production. – 2020. – P. 107–140.
81. *Ustinov K. B.* Certain cases of elastic equilibrium of a composed wedge with an interface crack // Mathematics and Mechanics of Solids. – 2020. – Vol. 25, no. 12. – P. 2199–2209. – DOI: 10.1177/1081286520924070.
82. *Ustinov K. B., Idrisov D. M.* On delamination of bi-layers composed by orthotropic materials: exact analytical solutions for some particular cases // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 2020. – Vol. 101, no. 4. – e202000239. – DOI: 10.1002/zamm.202000239.

83. *Ustinov K. B., Lisovento D. S., Massabò R.* Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip // *Engineering Failure Analysis*. – 2020. – Vol. 110. – P. 104410. – DOI: 10.1016/j.engfailanal.2020.104410.
84. *Ustinov K. B., Stepanova E. V.* On the analogy of pore pressure and temperature effects in the elastic and elastoplastic problems solutions // *Springer Geology*. – 2020. – Vol. 1. – P. 255–262. – DOI: 10.1007/978-3-030-38177-6_27.
85. Гандилян Д. В., Устинов К. Б. Влияние поверхностных эффектов в задачах теории упругости для областей, ограниченных неконцентрическими окружностями // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. – 2020. – № 5. – С. 95–106. – DOI: 10.31857/S0572329920050062.

2022

86. On the atypical strength anisotropy of weakly cemented sandstones / D. M. Klimov [et al.] // *Doklady Mathematics*. – 2022. – Vol. 106, no. 2. – P. 398–401. – DOI: 10.1134/s1064562422050155.
87. Ориентационная природа эффекта деформационной памяти при трехосном циклическом неравнокомпонентном сжатии песчаника / И. А. Пантелеев [и др.] // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*. – 2022. – Т. 26, № 2. – С. 293–310. – DOI: 10.14498/vsgtu1890.
88. *Massabò R., Ustinov K.* Root rotations and root displacements in bimaterial layers and thin films // *Procedia Structural Integrity*. – 2022. – Vol. 41. – P. 461–469. – DOI: 10.1016/j.prostr.2022.05.052.
89. *Ustinov K., Massabò R.* On elastic clamping boundary conditions in plate models describing detaching bilayers // *International Journal of Solids and Structures*. – 2022. – Vol. 248. – P. 111600. – DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2022.111600.
90. Коваленко Ю. Ф., Устинов К. Б., Карев В. И. Геомеханический анализ образования вывалов на стенках скважин // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. – 2022. – № 6. – С. 148–163. – DOI: 10.31857/S0572329922060125.

2023

91. Изучение особенностей пескопроявления в вертикальных и горизонтальных скважинах / Ю. Ф. Коваленко [и др.] // *Процессы в геосредах*. – 2023. – 3 (37). – С. 2137–2143.
92. Экспериментальное исследование влияния анизотропии на ориентацию вывалов в скважинах / К. Б. Устинов [и др.] // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. – 2023. – № 3. – С. 21–35. – DOI: 10.31857/S0572329922600384.
93. *Ustinov K. B.* Interface Crack Starting From the Corner of a Wedge Attached to a Half-Plane // *Advances in Linear and Nonlinear Continuum and Structural Mechanics*. – Cham, 2023. – Vol. 198. – (Advanced Structured Materials). – DOI: 10.1007/978-3-031-43210-1_28.
94. *Ustinov K. B., Gandilyan D. V.* On combined influence of substrate curvature and compliance on parameters of coating delamination from a cylindrical base // *Mechanics of Solids*. – 2023. – Vol. 58, no. 2. – P. 622–640. – DOI: 10.3103/s0025654423600174.

95. Устинов К. Б., Гандилян Д. В. Деформирование тонкой пленки после утери контакта с цилиндрическим основанием // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 5. – С. 159–172. – DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.11.
- 2024
96. Факторы устойчивости скважин в коллекторах подземных хранилищ газа / Д. М. Климов [и др.] // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2024. – № 3. – С. 85–100. – DOI: 10.31857/S1026351924030065.
97. Карев В. И., Коваленко Ю. Ф., Устинов К. Б. О влиянии расслоения на механические и фильтрационные свойства пород-коллекторов нефтегазовых месторождений // Газовая промышленность. – 2024. – 6 (867). – С. 24–33.
98. Устинов К. Б. Т-напряжения в ортотропной полосе с центральной полубесконечной трещиной, нагруженной вдали от вершины трещины // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2024. – № 4. – С. 150–165. – DOI: 10.31857/S1026351924040104.
99. Устинов К. Б. Коэффициенты интенсивности напряжений в вершине центральной полубесконечной трещины в произвольно нагруженной изотропной полосе // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2024. – № 6. – С. 46–73. – DOI: 10.31857/S1026351924060042.
100. Устинов К. Б., Борисова Н. Л. Расслоение полосы, состоящей из двух одинаковых ортотропных полуполос // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2024. – № 5. – С. 235–256. – DOI: 10.31857/S1026351924050132.
101. Устинов К. Б., Гандилян Д. В. О граничных условиях для тонкой круглой пластины, сопряженной с массивным телом // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. – 2024. – Т. 30, № 1. – С. 50–63. – DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-1-50-63.
- 2025
102. *Gandilyan D. V., Ustinov K. B.* On Elastic-Plastic Deformation of a circular plate under normal loading with unloading // *Mechanics of Solids*. – 2025. – No. 8.
103. *Monetto I., Ustinov K. B., Massabò R.* T-stresses in bimaterial isotropic strips subjected to generalized end loadings // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2025. – Vol. 328. – P. 111473. – DOI: 10.1016/j.engfracmech.2025.111473.
104. *Ustinov K. B.* T-Stresses at the Tip of a Semi-Infinite Interface Crack between a Layer and a Half-Plane or Between Two Parts of a Bilayer // *Mechanics of Solids*. – 2025. – Vol. 60, no. 7. – P. 5915–5929.
105. *Ustinov K. B., Gandilyan D. V.* On elastic-plastic deformation of a circular plate under centrally symmetric normal loading // *Mechanics of Solids*. – 2025. – Vol. 60, no. 6.
106. *Ustinov K. B., Gandilyan D. V.* On elastic-plastic deformation of a rectangular plate on a cylindrical surface under normal loading // *Mechanics of Solids*. – 2025. – Vol. 60, no. 5. – P. 3491–3494. – DOI: 10.1134/S0025654425600394.
107. Гандилян Д. В., Устинов К. Б. Деформирование тонкой круговой пластины, сопряженной по контуру с основанием // Прикладная математика и механика. – 2025. – Т. 89, № 1. – С. 106–127. – DOI: 10.31857/S0032823525010089.

108. Устинов К. Б. Об учете поверхностных явлений при изгибе сверхтонких пластин // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2025. – № 2. – С. 238–266. – DOI: 10.31857/S1026351925020141.

Материалы конференций

1992

1. *Dyskin A. V., Germanovich L. N., Ustinov K. B.* On the pore-based mechanism of dilatancy and fracture of rocks under compression // 33rd U.S. Symposium on Rock Mechanics. – 1992. – P. 797–806.

1994

2. *Ustinov K. B., Dyskin A. V., Germanovich L. N.* Asymptotic analysis of extensive crack growth parallel to free boundary // 3rd International Conference on Localized Damage. – 1994. – P. 623–630.

2009

3. Virtual atomic force microscope as a tool for nanometrology / V. S. Bormashov [et al.] // Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology and Testing VIII. – 2009. – P. 32–36. – DOI: 10.1142/9789812839527_0006.
4. *Ustinov K. B., Shushpannikov P. S.* Stress concentrations caused by ellipsoidal inclusions; asymptotics and ranges of applicability // 12th International Conference on Fracture (ICF-12). – 2009. – P. 6043–6052.

2010

5. *Goldstein R. V., Ustinov K. B., Chentsov A. V.* Influence of substrate compliance and coating thickness on buckling of delaminated coatings // 18th European Conference on Fracture. – 2010.

2011

6. *Ustinov K. B., Chentsov A. V.* Discrete-continual modeling of layered materials // New Trends in Mechanics of Materials. – 2011. – P. 43–44.

2012

7. *Ustinov K. B.* On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings // 19th European Conference on Fracture (ECF19). – Kazan, Russia, 2012.

2013

8. *Ustinov K. B., Goldstein R.* On propagation of interface cracks parallel to free boundaries in relation to delamination of multilayered coatings // 13th International Conference on Fracture (ICF 2013). – 2013. – P. 5825–5833.

2015

9. Inelastic deformation, strain-softening, localized failure and dilatation in sandstone media under triaxial quasistatic loading / A. V. Zaitsev [et al.] // Advanced Problems in Mechanics 2015. XLIII International Conference. – 2015. – P. 121.
10. Моделирование фильтрации нефти в скважину на больших глубинах / В. И. Карев [и др.] // Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах. – 2015. – С. 98–99.
11. Экспериментальное исследование деформационных свойств горных пород в условиях плоской деформации и плоского напряженного состояния / В. И.

- Карев [и др.] // Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах. – 2015. – С. 99–100.
12. Бакеев Р. А., Стефанов Ю. П., Устинов К. Б. Численное моделирование деформации образцов пористых горных пород в 2D и 3D постановках // Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах. – 2015. – С. 38–40.
13. Устинов К. Б. Механика отслоения покрытий // Математическое моделирование в естественных науках. Т. 1. – 2015. – С. 543–548.
14. Устинов К. Б. Применение обобщенной теории поверхностной упругости для описания деформирования тел с внутренними границами раздела // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. – 2015. – С. 3851–3853.

2016

15. Установка для истинно-трехосных испытаний горных пород / В. И. Карев [и др.] // Новые материалы. – 2016. – С. 247–249.
16. *Karev V. I., Ustinov K. B.* Geomechanical approach to development of deposits with hard to recover reserves // Physical and mathematical modeling of processes in geomedia. – 2016. – P. 14–16.
17. Карев В. И., Коваленко Ю. Ф., Устинов К. Б. Моделирование фильтрации в скважину с учетом анизотропии прочностных свойств // Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах. – 2016. – С. 100–102.
18. Устинов К. Б. Описание неупругого деформирования анизотропных горных пород посредством модели пластического течения // Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах. – 2016. – С. 168–171.
19. Устинов К. Б. Трехосные испытания и математическое моделирование в геомеханике // Математическое моделирование в естественных науках. Т. 1. – 2016. – С. 606–609.

2017

20. Inelastic deformation, strain-softening, localized failure and dilatation in sandstone media under triaxial quasistatic loading / A. V. Zaitsev [et al.] // Topical Problems of Continuum Mechanics. – 2017. – P. 237–238.
21. Modeling of mechanical and filtration processes near the well accounting anisotropy / V. I. Karev [et al.] // Topical Problems of Continuum Mechanics. – 2017. – P. 182–183.
22. Моделирование геомеханических процессов в нефтегазовых пластах на установке истинно трехосного нагружения / В. И. Карев [и др.] // Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах. – 2017. – С. 111–113.
23. Моделирование деформационных и фильтрационных процессов в окрестности скважины с учетом их взаимовлияния и анизотропии свойств пород / В. И. Карев [и др.] // Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах. – 2017. – С. 113–116.
24. Неупругое деформирование, объемное разрыхление, разупрочнение и локализованное разрушение песчаников при трехосном квазистатическом нагружении / Ю. В. Соколкин [и др.] // Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. – 2017. – С. 207–211.

2018

25. Механизмы деформирования и разрушения песчаника при неравномерном двух- и трехосном сжатии по данным акустической эмиссии / И. А. Пантелеев [и др.] // Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах. – 2018. – С. 58–60.
26. Устинов К. Б. Влияние неоднородности и трещиноватости на механические свойства горных пород // Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах. – 2018. – С. 74–76.

2019

27. On modeling inelastic deformation of permeable rocks with accounting time-dependent effects / V. I. Karev [et al.] // Topical problems of continuum mechanics. – 2019. – P. 410–414.
28. Механизмы деформирования и закономерности разрушения горных пород при непропорциональном трехосном нагружении / А. В. Зайцев [и др.] // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. – 2019. – С. 1078–1080.

2020

29. Failure mechanisms under triaxial non-proportional loading of rocks on the basis of acoustic emission measurements / V. Karev [et al.] // Rock Mechanics for Natural Resources and Infrastructure Development. Proceedings of the 14th International Congress on Rock Mechanics and Rock Engineering. – 2020. – P. 1014–1021.
30. Механизмы деформирования и разрушения песчаника верхнекамского региона при непропорциональном многоосном сжатии / И. А. Пантелеев [и др.] // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов 10-й Всероссийской научной конференции с международным участием. – 2020. – С. 488–492. – DOI: 10.33113/conf.mkmk.ras.2020.488_492.74.
31. Эффект кайзера при двух- и трехосном непропорциональном сжатии песчаника с последовательным вращением эллипсоида Ламе / И. А. Пантелеев [и др.] // Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах. Шестая международная научная конференция-школа молодых ученых. – 2020. – С. 171–174.
32. Эффект кайзера при непропорциональном многоосном сжатии песчаника с последовательным вращением эллипсоида Ламе / И. А. Пантелеев [и др.] // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов 10-й Всероссийской научной конференции с международным участием. – 2020. – С. 493–497. – DOI: 10.33113/conf.mkmk.ras.2020.493_497.75.
33. *Massabò R., Ustinov K.* The effects of a large elastic mismatch on the decohesion of thin films from substrates // AIMETA 2019 - Proceedings of XXIV AIMETA Conference. – Cham, 2020. – P. 652–659. – DOI: 10.1007/978-3-030-41057-5_53.
34. *Ustinov K. B., Karev V. I.* On anisotropy of deformational and ultimate properties of poro-elasto-plastic rocks // Rock Mechanics for Natural Resources and Infrastructure Development. Proceedings of the 14th International Congress on Rock Mechanics and Rock Engineering. – 2020. – P. 2632–2639.

35. Устинов К. Б. Метод матричной факторизации в решениях задач об интерфейсных трещинах // Современные проблемы механики сплошной среды. Тезисы докладов XX Международной конференции. – Ростов-на-Дону – Таганрог, 2020. – С. 169.
36. Устинов К. Б. Моделирование геомеханических процессов при разработке нефтегазовых месторождений: основные задачи и подходы к их решению // Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах. Шестая международная научная конференция-школа молодых ученых. – 2020. – С. 218–220.

2021

37. Эффект "памяти" при непропорциональном многоосном сжатии песчаника с последовательным вращением эллипсоида Ламе / И. А. Пантелеев [и др.] // XLVII Гагаринские чтения. Международная молодежная научная конференция. – Москва, 2021. – С. 114–117.
38. Устинов К. Б. Определение напряженного состояния породного массива: методы, трудности и пути их преодоления // Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах. – Москва, 2021. – С. 227–230.

2022

39. Устинов К. Б. Неупругое деформирование горных пород при наличии деформационной и прочностной анизотропии // Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах. Материалы 8-й Международной научной конференции-школы молодых ученых. – Москва, 2022. – С. 161–162.
40. Устинов К. Б., Карев В. И., Коваленко Ю. Ф. Геомеханическое моделирование при решении задач разработки трудноизвлекаемых запасов углеводородов // Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах. Материалы 8-й Международной научной конференции-школы молодых ученых. – Москва, 2022. – С. 159–160.
41. Устинов К. Б., Карев В. И., Коваленко Ю. Ф. Нетипичная прочностная анизотропия пород-коллекторов и интерпретация данных скважинных измерений // Добрецовские чтения: наука из первых рук. – Новосибирск, 2022. – С. 336–337.

2023

42. Ориентационная природа эффекта Кайзера при многоосном циклическом неравнокомпонентном сжатии песчаника / И. А. Пантелеев [и др.] // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. – Санкт-Петербург, 2023. – С. 408–410.
43. Гандилян Д. В., Устинов К. Б. Задача об отслоении покрытия от цилиндрической подложки с учетом влияния ее кривизны, податливости, а также действия поперечных сил // Актуальные проблемы механики сплошной среды. – Ереван, 2023. – С. 82–86.
44. Карев В. И., Коваленко Ю. Ф., Устинов К. Б. Напряженное состояние в коллекторах подземных хранилищ газа при их эксплуатации // Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах. – Москва, 2023. – С. 66–69.
45. Карев В. И., Коваленко Ю. Ф., Устинов К. Б. Некоторые проблемы устойчивости скважин в коллекторах подземных хранилищ газа // Физическое и

математическое моделирование процессов в геосредах. Материалы 9-й Международной научной конференции-школы молодых ученых. – Москва, 2023. – С. 155–157.

46. Устинов К. Б., Коваленко Ю. Ф. О нетипичной анизотропии прочности горных пород // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. – Санкт-Петербург, 2023. – С. 433–435.

2024

47. Гандилян Д. В., Устинов К. Б. Модель Фешля–фон Кармана для моделирования деформации круговой пластины // Актуальные проблемы прикладной математики и механики. – Екатеринбург, 2024. – С. 12.
48. Гандилян Д. В., Устинов К. Б. Некоторые методы решения задачи отслоения круговой пластины от подложки // Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций. Материалы XVIII международной конференции. – Екатеринбург, 2024. – С. 29.
49. Устинов К. Б. Математическое моделирование в задачах эксплуатации подземных хранилищ газа // Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах. Сборник материалов конференции. – Москва, 2024. – С. 175–177.
50. Устинов К. Б., Гандилян Д. В. О граничных условиях в задачах о деформировании тонких пластин // Математическое моделирование и краевые задачи. – Самара, 2024. – С. 163–165.

2025

51. Устинов К. Б. О вывалах в скважинах и интерпретации данных об их наблюдении // Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах. Сборник материалов конференции. – Москва, 2025. – С. 88–89.

С. Г. Саиян, М. В. Шитикова

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ОРТОТРОПНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРЕХМЕРНЫХ СОТОВЫХ АУКСЕТИЧЕСКИХ МЕТАМАТЕРИАЛОВ С ВОГНУТОЙ СТРУКТУРОЙ НА ОСНОВЕ БАЛОЧНОЙ ТЕОРИИ

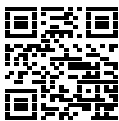
Национальный исследовательский Московский государственный строительный
университет, Москва, Россия

Аннотация. В работе предложен аналитический подход к определению эффективных ортотропных механических характеристик трехмерных сотовых ауксетических метаматериалов с вогнутой стержневой архитектурой. Элементарная ячейка рассматривается как периодическая балочная решетка с симметричной топологией, допускающей переход к эквивалентной ортотропной сплошной среде. Стержневая система моделируется на основе балочной теории с учетом больших перемещений (геометрической нелинейности) и сдвиговых деформаций (теория Тимошенко). Получены замкнутые выражения локальных перемещений, после чего сформулированы геометрические соотношения гомогенизации, связывающие локальные перемещения с усредненными деформациями ауксетической ячейки. Выведены нелинейные (с учетом больших перемещений) и приближенные (малые перемещения) зависимости для эффективных модулей упругости $E_x=E_y$, E_z и коэффициентов Пуассона ν_{zx} , ν_{yz} и ν_{xy} как функции геометрических параметров длины L , высоты H , угла вогнутости θ и толщины элемента t . Проведено параметрическое исследование влияния θ и отношения H/L , показывающее, что увеличение угла θ приводит к снижению значений E_z , $|\nu_{zx}|$ и к увеличению величин E_y , $|\nu_{yz}|$. При увеличении масштабного фактора H/L увеличиваются E_z , $|\nu_{zx}|$ и уменьшаются E_y , $|\nu_{yz}|$. Отмечено, что вклад геометрической нелинейности более существенен для коэффициентов Пуассона, чем для модулей упругости. Полученные зависимости позволяют подбирать геометрию ячейки под требуемые ортотропные константы и использовать их в расчетах конструкций без явного моделирования ауксетической решетки.

Ключевые слова: ауксетические метаматериалы, трехмерная сотовая решетка, вогнутая структура, гомогенизация, ортотропия, балка Тимошенко, геометрическая нелинейность, механические характеристики

Саиян Сергей Гургенович, кандидат технических наук, научный сотрудник НОЦ КМ им. А.Б. Золотова; e-mail: Berformert@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0003-0694-4865>; AuthorID: 987238

Шитикова Марина Вячеславовна, доктор физико-математических наук, профессор, заведующая кафедрой высшей математики; e-mail: marinavshitikova@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0003-2186-1881>; AuthorID: 4259



для цитирования: Саиян С.Г., Шитикова М.В. Определение эффективных ортотропных механических характеристик трехмерных сотовых ауксетических метаматериалов с вогнутой структурой на основе балочной теории // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 26–54. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.002. EDN: CKVDT0

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

S. G. Saiyan, M. V. Shitikova

DETERMINATION OF EFFECTIVE ORTHOTROPIC MECHANICAL PROPERTIES OF THREE-DIMENSIONAL CELLULAR AUXETIC METAMATERIALS WITH A RE-ENTRANT STRUCTURE BASED ON BEAM THEORY

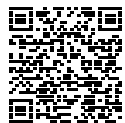
Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Russia

Abstract. Paper proposes an analytical approach for determining the effective orthotropic mechanical properties of three-dimensional cellular auxetic metamaterials with a re-entrant strut architecture. The unit cell is treated as a periodic beam lattice with a symmetric topology, resulting in its replacement by an equivalent orthotropic continuum. The strut system is modeled using beam theory with due account for large displacements (geometric nonlinearity) and shear deformations (Timoshenko theory). Expressions for local displacements have been obtained in a closed form, with further formulation of kinematic relationships of homogenization, allowing one to link the local displacements with the averaged strains of the auxetic cell. Exact (including large displacements) and approximate (small displacement) relationships have been derived for the effective Young's moduli $E_x=E_y$, E_z , and Poisson's ratios ν_{zx} , ν_{yz} , ν_{xy} as functions of such geometric parameters as the length L , height H , re-entrant angle θ , and element thickness t , as well as of the linear elastic material properties E and G . A parametric study of the effects of θ and the ratio H/L shows that the increase in θ reduces the magnitudes of E_z and $|\nu_{zx}|$, and increases the magnitudes of E_y and $|\nu_{yz}|$. The increase in the scale factor H/L results in the increase in E_z and $|\nu_{zx}|$ and in the decrease in E_y and $|\nu_{yz}|$. It is noted that the contribution of geometric nonlinearity is more significant for Poisson's ratios than for Young's modulus. The obtained relationships enable one to select the unit cell geometry in order to achieve the required orthotropic constants, and to adopt them in structural analyses without modeling the auxetic lattice explicitly.

Keywords: auxetic metamaterials, three-dimensional cellular lattice, re-entrant structure, homogenization, orthotropy, Timoshenko beam, geometric nonlinearity, mechanical properties

Sergey G. Saiyan, Candidate of Technical Sciences, Researcher at education-and-research Center of computer modelling named after A.B. Zolotov; e-mail: Berformert@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0003-0694-4865>; AuthorID: 987238

Marina V. Shitikova, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Higher Mathematics; e-mail: marinavshitikova@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0003-2186-1881>; AuthorID: 4259



to cite this article: Saiyan S. G., Shitikova M. V. Determination of Effective Orthotropic Mechanical Properties of Three-Dimensional Cellular Auxetic Metamaterials with a Re-Entrant Structure Based on Beam Theory // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 26–54. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.002

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Ауксетические метаматериалы – класс искусственно сформированных структур (функциональные материалы), для которых характерен отрицательный коэффициент Пуассона, выражающийся в том, что при растяжении в одном направлении они могут расширяться в поперечном, а при сжатии, наоборот, сжиматься [1]. Такое поведение не противоречит классической теории упругости, поскольку определяется не материалом как таковым, а геометрией и кинематикой элементарной ячейки [1–7]. Наиболее технологически и инженерно востребованными являются решетчатые (сотовые) ауксетические метаструктуры, где требуемый эффект достигается за счет поворотов узлов и работы стержневых элементов в условиях изгиба и сдвига [1, 8, 9]. К числу наиболее практичных геометрий относится вогнутая структура, в которой наклонные элементы образуют вогнутые углы и обеспечивают выраженную поперечную деформацию при осевом нагружении [1, 10, 11].

Интерес к трехмерным ауксетическим решеткам обусловлен тем, что сочетание отрицательных коэффициентов Пуассона с пространственной топологией дает набор свойств, которые можно использовать в инженерной практике [12]: повышенную деформативность ауксетика, способность к значительным формоизменениям без локального разрушения, эффективное поглощение энергии и управляемую анизотропию. Однако проектирование и расчет таких структур усложняются тем, что их поведение определяется одновременно параметрами исходного материала, из которого изготовлен ауксетик, а также геометрией ячейки, причем вклад геометрии зачастую доминирует и приводит к сильной нелинейности кинематики ауксетической решетки даже при умеренных уровнях напряжений.

1. Виды ауксетических метаматериальных структур. Ауксетический эффект (отрицательный коэффициент Пуассона) может реализовываться в широком спектре метаматериальных архитектур [3, 4]. Особенностью является то, что поперечная деформация определяется преимущественно геометрией и кинематикой элементарной ячейки, а не физико-механическими характеристиками исходного материала. Поэтому в механике ауксетики целесообразно классифицировать не по видам материала, а по конструктивному механизму, который обеспечивает отрицательную поперечную деформацию. Среди наиболее распространенных ауксетических структур можно выделить следующие (рис. 1):

1. Сотовые и решетчатые структуры (рис. 1а), в которых наклонные элементы образуют вогнутые углы [10, 12]. При осевом растяжении такие ячейки раскрываются за счет поворота узлов и изгиба или сдвига наклонных стержней, что приводит к расширению в поперечном направлении. Подобные архитектуры реализуются как в двухмерном (вогнутые соты), так и в трехмерном (пространственные решетки, сформированные периодическим повторением ячейки) виде. Для данного класса характерна выраженная управляемость коэффициентов Пуассона геометрическими параметрами (например, углом наклона) и

возможность получения сильной анизотропии свойств. Именно к этому классу относится рассматриваемая далее в настоящей работе трехмерная сотовая конструкция с вогнутой структурой.

2. Киральные и антикиральные решетки (рис. 1b), в которых ауксетические свойства возникают вследствие вращения узловых колец/ядер (цилиндрические или кольцевые элементы), соединенных тонкими связями [1, 8, 10, 13, 14]. Под нагрузкой узлы поворачиваются, а связи деформируются, обеспечивая отрицательную поперечную деформацию. Антикиральные варианты часто дают более симметричный (квазиизотропный в плоскости) отклик. Такие структуры интересны тем, что ауксетический эффект формируется, главным образом, механизмами вращения, однако для корректного расчета существенны особенности узлов и податливость соединений.

3. Структуры на основе вращающихся жестких элементов (рис. 1c), которые составлены из жестких фигур (квадратов, прямоугольников, треугольников и т.п.), соединенных шарнирно или тонкими перемычками [15–17]. Отрицательный коэффициент Пуассона обеспечивается кинематикой поворота элементов относительно друг друга. Такие архитектуры способны демонстрировать очень сильные свойства ауксетика (вплоть до предельных значений при идеализированных шарнирах), но их реальное поведение чувствительно к форме и жесткости связей между элементами, а также к концентрациям напряжений в местах соединений.

4. Перфорированные ауксетические структуры из листового материала (рис. 1d), которые создают из сплошных листов путем нанесения периодического рисунка отверстий и прорезей [18, 19]. В таких системах отрицательная поперечная деформация также часто связана с механизмом вращения сегментов или раскрытием элементов.

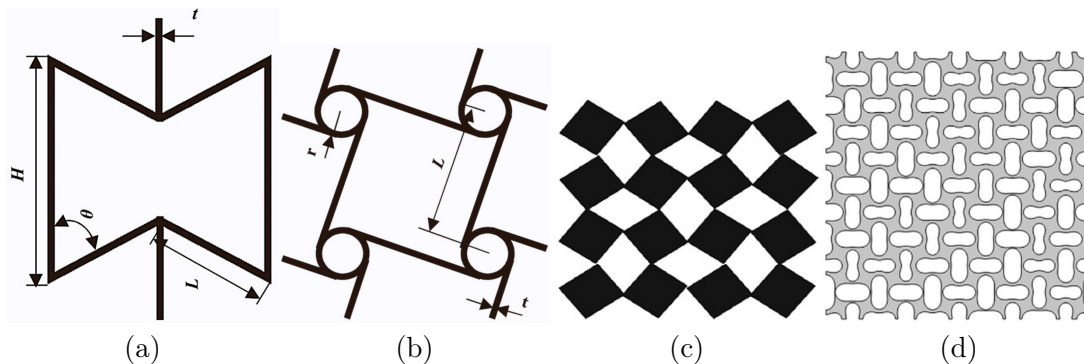


Рис. 1. Ауксетические метаматериальные структуры: (a) – сотовая структура с вогнутыми элементами [10], (b) – киральная решетка [10], (c) – вращающиеся жесткие квадратные диски [18], (d) – перфорированная структура с овальными вырезами [19].

С практической позиции важны два признака: топология (периодическая решетка/соты, листовая перфорация и т.д.) и доминирующий механизм деформации (поворот узлов/элементов, изгиб или сдвиг стержней и т.д.). Для целей гомогенизации и получения эффективных анизотропных характеристик наиболее удобны периодические стержневые архитектуры, поскольку их поведение допускает строгую связь между геометрией ячейки и средними деформациями всей системы.

2. Методы определения эффективных характеристик решетчатых метаматериалов. Для использования ауксетических метаструктур в расчете строительных конструкций (в том числе в таких конечно-элементных пакетах, как ANSYS Mechanical APDL, SIMULIA Abaqus и т.д.) необходимы эффективные (гомогенизированные) механические характеристики. Такой подход позволяет заменить моделирование каждой ауксетической ячейки (что является достаточно трудоемким как при построении подобной структуры, так и по вычислительным затратам) на эквивалентную непрерывную среду с набором констант, описывающих данную среду. Это существенно снижает вычислительные затраты и позволяет выполнять параметрические исследования, оптимизацию характеристик и верификацию результатов расчета на уровне конструкции. При этом важно, чтобы эффективные константы среды были получены из модели, адекватно отражающей физику деформирования ауксетического метаматериала.

Существующие подходы к определению эффективных характеристик решетчатых метаматериалов можно условно разделить на следующие:

1. Методы на основе репрезентативного объемного элемента (representative elementary volume (REV)) [20–22], в основе которого используется условие Хилла-Манделя, при котором усредненная виртуальная работа на микроуровне равна виртуальной работе на макроуровне (выполняется энергетическое согласование). Для этого используют кинематические, статические или периодические граничные условия.

2. Гомогенизация на основе методов численного моделирования в программных комплексах (например, конечно-элементное моделирование в ANSYS Mechanical APDL или SIMULIA Abaqus и т.д.) [23–25]. В данном подходе выполняется моделирование либо отдельных ауксетических элементов с целью определения податливости системы на единичное воздействие, либо целой конструкции.

3. Кинематические (так называемые "механизмные" модели) и аналитические модели ячейки, в которых описывается упрощенная механика отдельных ячеек (в составе конструкции), например, шарнирные повороты, изгиб, растяжение, сдвиг элементов, геометрические соотношения между углами и макродеформацией [5, 26–29]. Такие модели особенно популярны для метаматериалов, состоящих из стержневых элементов, а также для вращающихся элементов.

4. Методы, использующие обобщенные непрерывные среды (например, среду Коссера, градиентную или микро-дилатационную теорию упругости), которые

применяются для случаев, когда размер рассматриваемого элемента конструкции сопоставим с характерным размером ячеек метаматериала [26].

5. Экспериментальные методы [15, 27–29], позволяющие определять характеристики на основе серии экспериментов (сжатия, растяжения, изгиба, удара и т.д.).

Настоящая работа посвящена аналитическому методу определения эффективных ортотропных механических характеристик трехмерных сотовых ауксетических метаматериалов с вогнутой структурой на основе балочной теории. Цель работы – получить точные и приближенные (с применением гипотезы малых деформаций) аналитические выражения для эффективных ортотропных констант метаструктуры, которые можно применять для инженерных расчетов, а также для исследования влияния геометрических характеристик ауксетических ячеек на эффективные механические характеристики ортотропной среды. Практическая значимость полученных результатов заключается в возможности подбора геометрических параметров ауксетического метаматериала под требуемые ортотропные механические характеристики среды.

3. Описание ауксетической метаструктуры. Рассматривается пространственная (трехмерная) сотовая структура (метаматериал) с вогнутыми элементами, обладающая ауксетическим эффектом. При осевом растяжении или сжатии в одном направлении поперечные деформации имеют тот же знак, что соответствует отрицательным коэффициентам Пуассона в определенных направлениях. Метаматериал формируется как периодическая решетка из элементарных ауксетических ячеек, многократно повторяемых вдоль осей декартовой системы X , Y , Z (рис. 2 а, б). Геометрическое построение ауксетических решеток выполнялось на основе параметризации в ANSYS SpaceClaim.

Геометрически метаструктура является балочной решеткой, поскольку она состоит из прямолинейных стержней постоянного поперечного сечения, соединенных в узлах. Вогнутость обеспечивается наличием наклонных стержней, образующих с вертикальными стойками вогнутые углы, благодаря чему при нагружении возможны значимые повороты узлов и развитие деформаций изгиба/сдвига в наклонных элементах, что и определяет ауксетическое поведение подобной конструктивной системы материала.

Конструкция обладает центральной симметрией относительно центра ячейки. В частности, для рассматриваемой ячейки направления X и Y являются эквивалентными (симметрия в плоскости XY), что далее отражается в симметрии эффективных механических характеристик.

Оси X , Y , Z выбираются совпадающими с главными направлениями периодичности решетки. Это согласуется с последующей интерпретацией структуры как эквивалентной ортотропной среды, для которой оси ортотропии принимаются совпадающими с глобальной декартовой системой координат.

В качестве основных геометрических параметров рассматриваемой ауксетической ячейки вводятся (рис. 2с):

L – длина наклонного (вогнутого) стержня AC ;

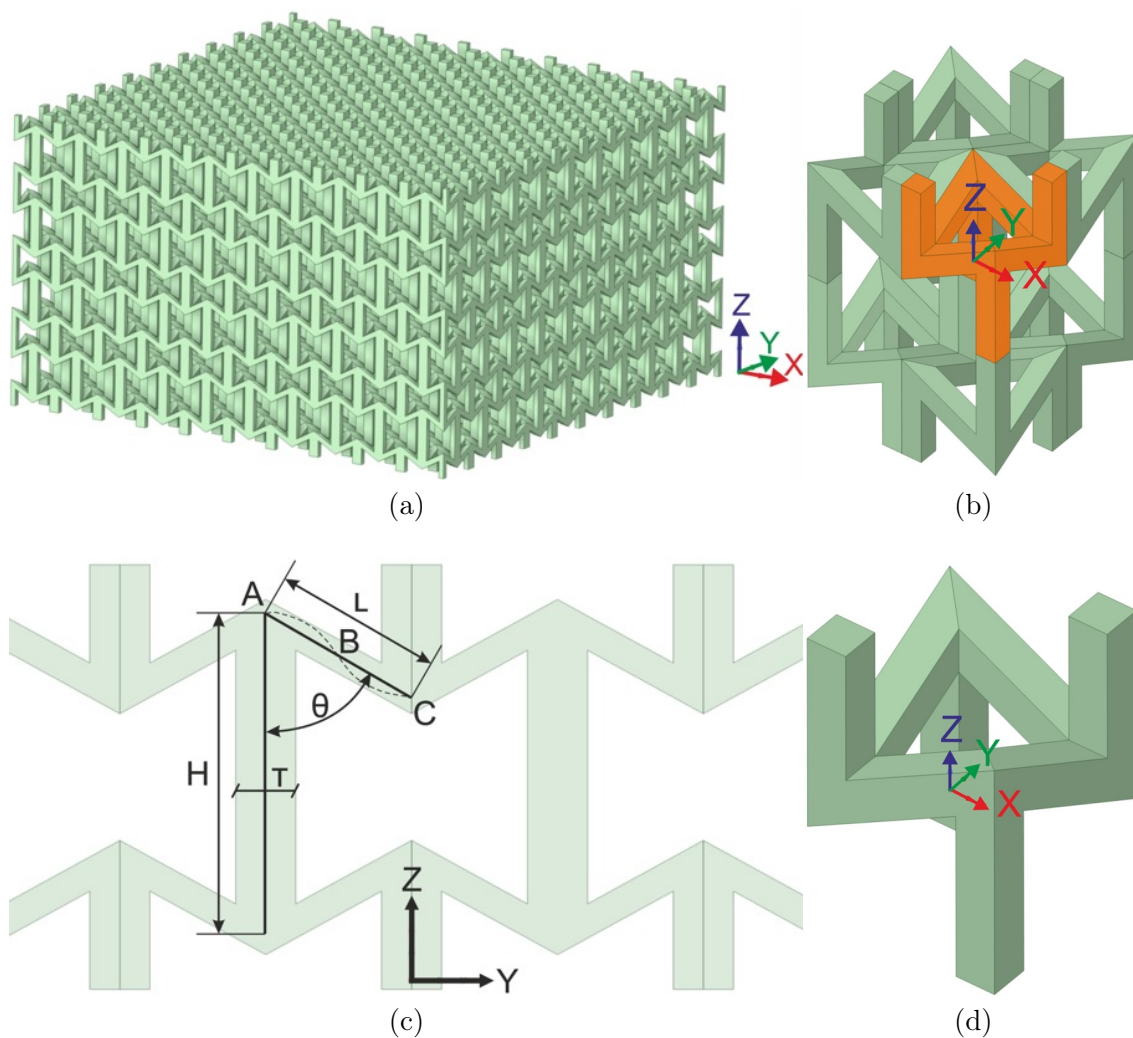


Рис. 2. Трехмерная сотовая ауксетическая конструкция с вогнутой структурой в ANSYS SpaceClaim: (a) трехмерная структура ауксетика; (b) элементарная ауксетическая ячейка (оранжевым цветом выделена единичная образующая структура); (c) геометрические параметры ауксетической ячейки со схемой деформации единичной балочной структуры; (d) единичная образующая структура, которая посредством зеркальной осевой симметрии (по X, Y и Z) образует элементарную ауксетическую ячейку.

H – характерный вертикальный размер, задаваемый длиной соответствующей вертикальной стойки;

θ – вогнутый угол, задающий наклон стержня AC относительно вертикального направления (и, соответственно, степень вогнутости ячейки)

t – размер поперечного сечения стержня (в работе далее принимается квадратное сечение $t \times t$).

При этом вводится ограничение на допустимую геометрию ауксетической ячейки, при которой должны выполняться условия $H > L \cos \theta$, $0 < \frac{t}{2L \sin(\theta)} < 1$ и $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Все стержни метаструктуры считаются изготовленными из линейно-упругого материала, характеризующегося упругим модулем растяжения-сжатия E , модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона ν . Таким образом, дальнейшие теоретические выкладки справедливы для любого материала, например, металлического порошка [30–32] или часто используемых пластиков [33], если их поведение можно считать линейно-упругим в рассматриваемом диапазоне.

В расчетной постановке используется элементарная ауксетическая ячейка (рис. 2b), которая служит минимальным повторяющимся объемом для построения всей трехмерной решетки. Для удобства параметризации и последующего аналитического вывода внутри ячейки выделяется единичная образующая структура, представляющий собой минимальный симметричный фрагмент, из которого полная ячейка собирается операциями зеркального отражения относительно координатных плоскостей по осям X , Y , Z (рис. 2d). Такая декомпозиция важна по причине выделения несущих элементов, в которых возникают основные механизмы деформации (изгиб и сдвиг наклонных стержней и осевая деформация вертикальных стоек), что также позволяет в дальнейшем использовать симметрию при выводе зависимостей прогибов от нагрузки и при переходе от перемещений отдельного стержня к средним деформациям ауксетической ячейки.

Полная элементарная ауксетическая ячейка и единичная образующая структура различаются, поскольку эффективные деформации и ортотропные характеристики определяются по полной элементарной ячейке, тогда как единичная образующая структура используется только для локального силового взаимодействия и кинематики внутри нее.

Для моделирования элементарной ячейки было сделано несколько предположений. Во-первых, предполагалось, что элементарная ячейка расположена в бесконечной структуре (т.е. бесконечном числе элементарных ячеек во всех трех направлениях), что исключает краевые эффекты и сохраняет геометрическую симметрию. Во-вторых, все соединения в метаструктуре считались жесткими, а деформация элементов в основном обусловлена изгибом и сдвигом наклонных стержней и осевым сжатием вертикальных стержней.

4. Прогибы вогнутых стержней под нагрузкой на основе балочной теории. Наклонный стержень в единичной ауксетической решетке длиной L (АС на рис. 2с) соединен с соседними элементами жесткими узлами и в идеализированной бесконечной решетке работает как балка, защемленная на обоих концах (рис. 2а). При симметричном нагружении эпюра моментов для такой балки имеет нулевое значение в середине пролета, что верно для рассматриваемой схемы нагружения, когда точка перегиба находится в центре. Следовательно, каждую половину можно рассматривать как консоль длины $\ell = L/2$.

Введем локальную продольную координату u вдоль исходной оси стержня от заземления А (см. рис.3d). Если конец В смещается вдоль локальной оси стержня u на Δu , эффективное плечо поперечной силы уменьшается относительно u – координаты вдоль исходной (недеформированной) оси половины стержня (локальная продольная координата $u \in [0, L/2]$) и вместо $(\ell - u)$ получаем $(\ell - \Delta u - u)$. Отсюда изгибающий момент в произвольном сечении можно получить из состояния равновесия рис.3с и рис.3d):

$$M(u) = Q(\ell - \Delta u - u), \quad (1)$$

где Q – поперечная сила в балке.

Согласно классической теории Эйлера-Бернулли кривизна оси балки при поворотах определяется как

$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{M(u)}{EI} = \frac{Q}{EI}(\ell - \Delta u - u), \quad (2)$$

где s – дуговая координата вдоль деформированной оси половины балки, $\varphi(s)$ – угол поворота касательной к оси балки относительно исходного направления, E – модуль упругости балки, $I = \frac{t^4}{12}$ – осевой момент инерции сечения (рассматривается квадратное).

Важно отметить, что u является зависимой координатой от s , поскольку при больших поворотах проекция дугового элемента ds на исходную ось равна du и связывается с φ .

Для тонких балок (у которых высота сечения значительно меньше длины), работающих в основном на изгиб [34–36], эффекты, связанные с влиянием сдвиговой деформации, являются незначительными. Однако, поскольку длины рассматриваемых элементов ячеек ауксетического метаматериала малы, то для достаточно коротких стержней используется модель балки Тимошенко, в которой связь между углом поворота и производной поперечного прогиба определяется как [37]

$$\gamma = \varphi(u) - \frac{dv}{du} = \frac{Q}{\kappa_s AG}, \quad (3)$$

где γ – сдвиговая деформация, которая является константой при постоянной поперечной силе Q ; κ_s – коэффициент сдвига, зависящий от формы поперечного сечения балки (для прямоугольного сечения $\kappa_s = 5/6$); v – поперечный прогиб балки; G – модуль сдвига материала, из которого изготовлена ячейка ауксетика; A – площадь поперечного сечения балки (квадратного сечения размерами $t \times t$).

Так как поперечная сила Q на рассматриваемом участке балки постоянна, сдвиговая деформация также является постоянной величиной и не зависит от координаты. Поэтому, дифференцируя (3) по дуговой координате s , получаем следующее кинематическое соотношение

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dv}{du} + \gamma \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{dv}{du} \right) = \frac{d^2v}{du^2} \frac{du}{ds}. \quad (4)$$

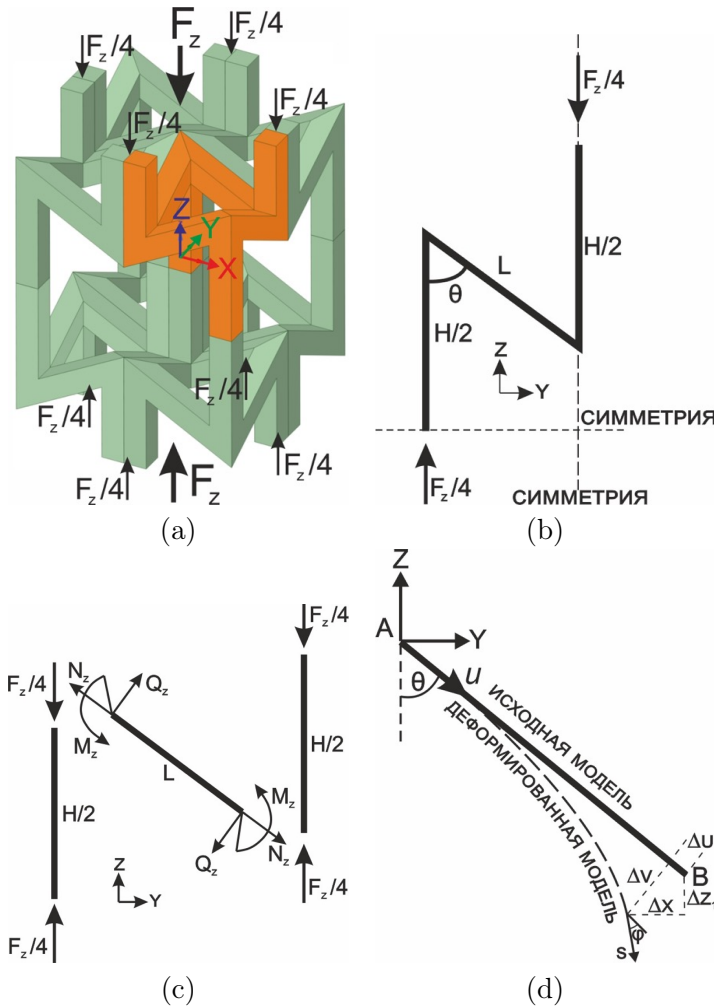


Рис. 3. Нагружение вдоль оси Z на элементарную ауксетическую ячейку: (а) – условие нагружения на элементарную ауксетическую ячейку; (б) – условие нагружения на единичную образующую структуру ауксетика в плоскости ZY ; (с) – внутренние усилия в единичной образующей структуре ауксетика в плоскости ZY ; (д) – связь между системами координат исходной и деформированной системы при нагружении в направлении Z .

Пренебрегая растяжением оси балки, т.е. считая, что ее длина не изменяется в процессе нагружения, можно получить соотношения, связывающие дуговую координату s с текущей формой в плоскости через угол поворота касательной φ :

$$\frac{du}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{dv}{ds} = \sin \varphi. \quad (5)$$

Для того чтобы получить нелинейное дифференциальное уравнение для $\varphi(s)$, продифференцируем уравнение (2) по s и учтем соотношения (5):

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{Q}{EI} \frac{d}{ds} (\ell - \Delta u - u) = -\frac{Q}{EI} \frac{du}{ds} = -\frac{Q}{EI} \cos(\varphi). \quad (6)$$

Умножим (6) на $\frac{d\varphi}{ds}$ и проинтегрируем по s :

$$\int \frac{d^2\varphi}{ds^2} \frac{d\varphi}{ds} ds = -\frac{Q}{EI} \int \cos(\varphi) \frac{d\varphi}{ds} ds. \quad (7)$$

В результате получим:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = -\frac{Q}{EI} \sin(\varphi) + C. \quad (8)$$

Для определения постоянной интегрирования C необходимо задать граничные условия для консольной балки AB (см. рис.3д), которая в нашем случае моделирует половину балки AC (см. рис. 2с):

1. На свободном конце $s = \ell = \frac{L}{2}$ кривизна (а значит, и $d\varphi/ds$) обращается в ноль:

$$\left. \frac{d\varphi}{ds} \right|_{s=\ell} = 0, \quad \varphi(\ell) = \varphi_{L/2}, \quad (9)$$

откуда получаем $C = \frac{Q}{EI} \sin(\varphi_{L/2})$.

2. В защемлении $s=0$ угол поворота равен сдвиговому углу γ . Это следует из (3), поэтому

$$\left. \frac{dv}{du} \right|_{s=0} = 0, \quad \varphi(0) = \gamma. \quad (10)$$

Подставляя найденное C в (8) и выбирая положительную ветвь, получаем:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \sqrt{\frac{2Q}{EI} (\sin(\varphi_{L/2}) - \sin(\varphi))}. \quad (11)$$

Разделим переменные в уравнении (11) и проинтегрируем от $s = 0$ до $s = \ell = L/2$ с учетом граничных условий. В результате получим

$$\int_{\gamma}^{\varphi_{L/2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin(\varphi_{L/2}) - \sin(\varphi)}} = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{2Q}{EI}}. \quad (12)$$

Покажем, что интеграл в (12) сводится к эллиптическому интегралу Лежандра 1-го рода. Для этого введем параметры $k = \sqrt{\frac{1+\sin(\varphi_{L/2})}{2}}$ и $\sin(\alpha) = \sqrt{\frac{1+\sin(\varphi)}{1+\sin(\varphi_{L/2})}}$. Тогда интеграл в (12) можно представить через неполный эллиптический интеграл первого рода $F(\alpha, k)$ и полный $F(k) \equiv F(\frac{\pi}{2}, k)$:

$$F(k) - F(\alpha_0, k) = \int_{\alpha_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\alpha)}} = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{Q}{EI}}, \quad (13)$$

где α_0 соответствует $\varphi = \gamma$, т.е. $\sin(\alpha_0) = \sqrt{\frac{1+\sin(\gamma)}{1+\sin(\varphi_{L/2})}}$.

При заданных значениях величин L , t , E , G и Q параметр k определяется как корень уравнения (13), после чего находится $\varphi_{L/2}$ из условия $\sin(\varphi_{L/2}) = 2k^2 - 1$.

Далее вычислим перемещения Δu и Δv . Для этого сначала воспользуемся соотношением

$$\Delta v = \int_0^\ell \frac{dv}{ds} ds = \int_0^\ell \sin(\varphi) ds,$$

которое с учетом (11) перепишем в виде:

$$\Delta v = \sqrt{\frac{EI}{2Q}} \int_\gamma^{\varphi_{L/2}} \frac{\sin(\varphi) d\varphi}{\sqrt{\sin(\varphi_{L/2}) - \sin(\varphi)}}. \quad (14)$$

Тогда, используя параметры k и $\sin(\alpha)$, перемещение Δv выражается через эллиптические интегралы первого $F(\cdot)$ и второго рода $E(\cdot)$:

$$\Delta v = \sqrt{\frac{EI}{Q}} [F(k) - F(\alpha_0, k) - 2(E(k) - E(\alpha_0, k))]. \quad (15)$$

Продольная проекция деформированной оси на исходную ось:

$$u(\ell) = \int_0^\ell \frac{du}{ds} ds = \int_0^\ell \cos(\varphi) ds. \quad (16)$$

Так как исходная длина половины стержня равна $\ell = L/2$, выражение для продольного перемещения принимает вид:

$$\Delta u = \ell - u(\ell) = \frac{L}{2} - \int_0^\ell \cos(\varphi) ds. \quad (17)$$

Используя тот же переход $ds \rightarrow d\varphi$, получаем замкнутую форму:

$$\Delta u = \frac{L}{2} - \sqrt{\frac{2EI}{Q}} (\sin(\varphi_{L/2}) - \sin(\gamma)). \quad (18)$$

Важно отметить, что Δu появляется только из-за больших перемещений (геометрическая нелинейность). Для классической модели балки Тимошенко обычно принимают $\Delta u \approx 0$ (т.е. проекция пренебрежимо мала).

Для моделирования ауксетических метаматериалов из менее жестких полимерных материалов, подверженных значительным деформациям под нагрузкой, решения на основе модели балки с большими перемещениями учитывают нелинейное изменение размеров и, как ожидается, будут более точно описывать деформацию полимерных структур. При этом это требует применения неаналитических алгоритмов (численных методов), и поэтому они менее эффективны для проектирования и оптимизации конструкций, состоящих из ауксетических метаматериалов. Следовательно, необходимо получить, в том числе и приближенные формулы, которые будут представлять собой замкнутые (аналитические) функции, удобные для практического применения.

Далее приведены теоретические выкладки по переходу от перемещений отдельного стержня Δv и Δu к изменениям размеров ауксетической ячейки по

глобальным осям и к эффективным модулям упругости и коэффициентам Пуассона.

Идея заключается в том, что периодическая ауксетическая ячейка трактуется как эквивалентная ортотропная непрерывная среда. Для этого при заданном напряжении σ_z и σ_y вычисляются средние деформации ячейки через перемещения Δx , Δy и Δz , а затем определяются E_i и ν_{ij} , где $i, j = x, y, z$.

5. Гомогенизация ортотропных механических свойств. Пусть в бесконечной ауксетической решетке возникает сжимающее напряжение σ_z вдоль направления Z. Тогда при моделировании одной элементарной ячейки (показанной на рис. 3а, которая может быть далее упрощена до структуры, представленной на рис. 3б, в виду симметрии) будем рассматривать сжимающее усилие F_z .

Площадь верхней грани (в плоскости XY) равна $A_{xy} = (2L \sin(\theta))(2L \sin(\theta)) = 4L^2 \sin^2(\theta)$. в силу симметрии и принятого разбиения на симметричную подсистему, результирующая сила:

$$F_z = \frac{1}{2} \sigma_z A_{xy} = 2\sigma_z L^2 \sin^2(\theta). \quad (19)$$

Далее эта сила распределяется по наклонным элементам (рис.3с). На каждый наклонный стержень действует сила $F_z/4$, которую раскладывают на:

1. поперечную компоненту (вызывающую изгиб):

$$Q_z = \frac{F_z}{4} \sin(\theta) = \frac{1}{2} \sigma_z L^2 \sin^3(\theta); \quad (20)$$

2. продольную компоненту (вызывающую растяжение и сжатие):

$$N_z = \frac{F_z}{4} \cos(\theta) = \frac{1}{2} \sigma_z L^2 \sin^2(\theta) \cos(\theta). \quad (21)$$

В дальнейшем для определения перемещений используется прежде всего Q_z , поскольку основное деформирование задается изгибом и сдвигом наклонных стержней, в то время как N_z является более существенным для прочности и локальной устойчивости элементов ауксетической решетки (авторы планируют это учесть в своих дальнейших исследованиях).

Далее локальные перемещения конца половины стержня (Δu , Δv) соотносятся с глобальными (для половины стержня в геометрии элементарной ячейки), показанными на рис. 3d, с помощью следующих соотношений:

$$\Delta x = \Delta u \sin(\theta) + \Delta v \cos(\theta), \quad \Delta z_1 = \Delta v \sin(\theta) - \Delta u \cos(\theta). \quad (22)$$

Соотношения (22) описывают геометрию поворота локальной системы на угол θ . Важно отметить, что Δx и Δz_1 – это вклад половины стержня.

Вертикальная стойка длиной H и сечением $A=t^2$ испытывает осевое сжатие силой F_z , что добавляет компоненту перемещений по Z:

$$\Delta z_2 = \frac{F_z H}{EA} = \frac{F_z H}{Et^2} = \frac{2\sigma_z H L^2 \sin^2(\theta)}{Et^2}. \quad (23)$$

При этом в рассматриваемой симметричной подсистеме вклад наклонных стержней в Δz удваивается (две симметричные половины), следовательно, в результате имеем:

$$\Delta z = 2\Delta z_1 + \Delta z_2. \quad (24)$$

С учетом габаритов для половины элементарной ячейки исходный размер подсистемы $h_z = H - L \cos(\theta)$ – вдоль Z и $h_x = L \sin(\theta)$ – вдоль X. Тогда средние деформации можно определить как:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta z}{H - L \cos(\theta)}, \quad \varepsilon_x = \frac{2\Delta x}{L \sin \theta}. \quad (25)$$

Множитель 2 в ε_x относится к половине стержня, а изменение ширины подсистемы собирается из двух симметричных половин.

Коэффициент Пуассона по определению равен отрицательному значению отношения поперечной деформации к осевой деформации. Таким образом, коэффициент Пуассона в направлении оси Z (ν_{zx}) с учетом (24):

$$\nu_{zx} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} = -\frac{\frac{2\Delta x}{L \sin(\theta)}}{\frac{\Delta z}{H - L \cos(\theta)}} = -\frac{2(H - L \cos(\theta)) \Delta x}{L \sin(\theta) \Delta z} = \frac{2\Delta x (L \cos(\theta) - H)}{L \sin(\theta) (2\Delta z_1 + \Delta z_2)}. \quad (26)$$

Благодаря зеркальной симметрии относительно плоскостей XZ и YZ и симметрии ячейки при перестановке направлений X и Y, эффективные свойства вдоль осей X и Y совпадают, тогда $\nu_{zy} = \nu_{zx}$. Эффективный модуль упругости E_z по определению:

$$E_z = \frac{\sigma_z}{\varepsilon_z} = \frac{\sigma_z}{\frac{\Delta z}{H - L \cos(\theta)}} = \frac{\sigma_z (H - L \cos(\theta))}{2\Delta z_1 + \Delta z_2}. \quad (27)$$

Формула (27) корректна как для модели с учетом больших перемещений (геометрической нелинейности), где Δu и Δv вычисляются по эллиптическим интегралам, так и для малых прогибов.

Для получения замкнутых (аналитических) формул для ν_{zx} и E_z с учетом теории малых прогибов по классической модели балки Тимошенко необходимо использовать решения для консоли длины ℓ под действием поперечной силы Q. Поперечный прогиб консольной балки разделяется на 2 составляющие:

1. изгибная $\Delta v_b = \frac{Q\ell^3}{3EI}$;
2. сдвиговая $\Delta v_s = \frac{Q\ell}{\kappa_s GA}$.

Тогда полный прогиб:

$$\Delta v = \frac{Q (L/2)^3}{3E (t^4/12)} + \frac{Q (L/2)}{(5/6) Gt^2} = Q \left(\frac{L^3}{2Et^4} + \frac{3L}{5Gt^2} \right). \quad (28)$$

Продольное перемещение $\Delta u \approx 0$, поскольку в приближении малых перемещений укорочение из-за кривизны мало. Тогда соотношения (22) упрощаются и определяют глобальные приращения в виде:

$$\Delta x \approx \Delta v \cos(\theta), \quad \Delta z_1 \approx \Delta v \sin(\theta). \quad (29)$$

Используя (26) с (24), а также (23), (28) и (29) получим замкнутую формулу для коэффициента Пуассона в направлении оси z (ν_{zx}):

$$\nu_{zx} = \frac{\tilde{C} \cos(\theta) (L \cos(\theta) - H)}{L \tilde{C} \sin^2(\theta) + 20GHt^2}. \quad (30)$$

где $\tilde{C} = 5GL^2 + 6Et^2$.

Используя (27) и те же подстановки, получим:

$$E_z = \frac{Et^2}{L^2} \frac{H/L - \cos(\theta)}{\sin^2(\theta) \left[\frac{2H}{L} + \left(\frac{L^2}{2t^2} + \frac{3E}{5G} \right) \sin^2(\theta) \right]}. \quad (31)$$

Аналогичный подход был применен для моделирования свойств одноосного сжатия вогнутой ауксетической структуры в направлении оси Y (см. рис. 4). На рис. 4 показана элементарная ячейка, в которой каждый вогнутый элемент, расположенный на ее границе вдоль оси Y , является общим для двух элементарных ячеек.

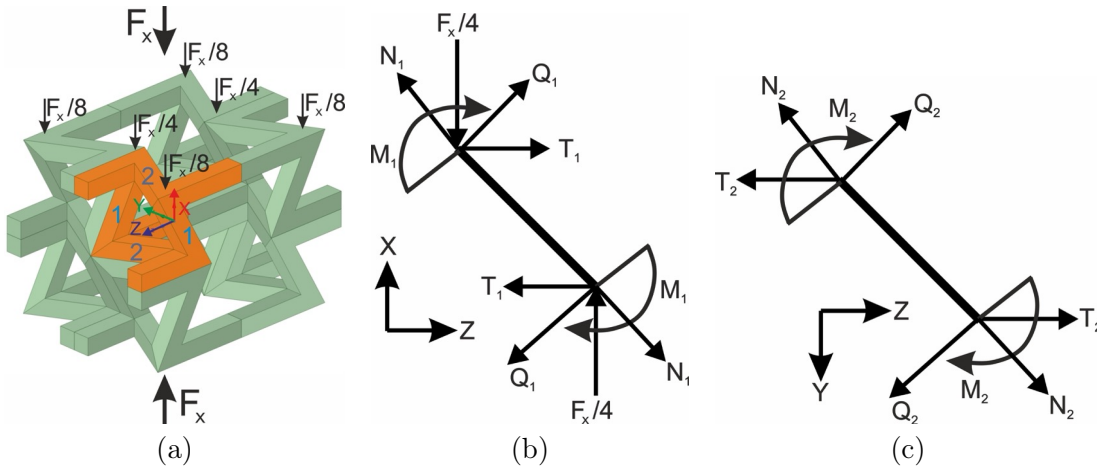


Рис. 4. Нагружение вдоль оси $X \equiv Y$ на элементарную ауксетическую ячейку: (a) – Условие нагружения на элементарную ауксетическую ячейку; (b) – тип стержня 1; (c) – тип стержня 2.

В силу симметрии ячейки физико-механические свойства вдоль осей X и Y одинаковы, поэтому достаточно рассмотреть одно направление. Площадь соответствующей грани вдоль оси Y равна $A_{xz} = (2(H - L \cos(\theta))) (2L \sin(\theta))$. Поскольку напряжение прикладывается к бесконечной структуре, то сжимающая сила, приложенная к каждому целому вогнутому элементу, составляет $F_y/4$. Связь между силой и напряжением определяется следующим соотношением:

$$F_y = \sigma_y A_{xz} = 4\sigma_y (H - L \cos(\theta)) (L \sin(\theta)), \quad (32)$$

где F_y относится к полной элементарной ячейке. На единичную образующую структуру, выделенную на рис.4 оранжевым цветом, приходится сила $F_y/8$. Силы $F_y/4$ и $F_y/8$, показанные на отдельных элементах, обусловлены тем, что

соответствующие граничные стержни совместно используются соседними элементарными ячейками.

Благодаря геометрической симметрии элементарную ячейку можно дополнительно упростить до единичной образующей структуры, показанной на рис. 4 оранжевым цветом. В силу равновесия и симметрии вертикальные стойки, которые теперь кажутся горизонтальными, не испытывают никакой эффективной силы. Также следует отметить, что вогнутые стержни, отмеченные цифрами 1 и 2 на рис. 4, не являются механически симметричными и, следовательно, должны рассматриваться отдельно. При таком нагружении выделяются два неэквивалентных набора наклонных стержней (тип 1 и тип 2) на рис. 4b и рис. 4c. Для типа 1 обозначим их силовые компоненты N_1 и Q_1 для продольной и поперечной составляющих сил и M_1 для изгибающего момента, а также N_2 , Q_2 и M_2 для типа 2. Введем горизонтальные реакции T_1 и T_2 , тогда из условия равновесия и отсутствия поворота получаются условия, приводящие к результатам для $Q_1 = \frac{F_y}{4} \cos(\theta) - T_1 \sin(\theta)$ и $Q_2 = T_2 \sin(\theta)$.

Следует отметить, что для обоих типов стержней граничные условия идентичны. Поскольку стержни типа 1 и типа 2 должны компенсировать прогиб таким образом, чтобы в упрощенной конструкции не возникали глобальные крутильные эффекты, как того требует симметрия конструкции, их прогибы должны быть одинаковыми. Следовательно, $M_1 = M_2$, тогда $\frac{F_y}{4} \cos(\theta) - T_1 \sin(\theta) = T_2 \sin(\theta)$. Кроме того, для равновесия вертикальных стоек необходимо, чтобы $T_1 = T_2$. Откуда следует, что

$$T_1 = T_2 = \frac{F_y \cos(\theta)}{8 \sin(\theta)} = \frac{F_y}{8} \operatorname{ctg}(\theta), \quad Q_1 = Q_2 = \frac{F_y}{8} \cos(\theta). \quad (33)$$

Компоненты продольных сил, которые интересны в основном при анализе несущей способности и не учитываются вследствие малого вклада в перемещение наклонных элементов, получаются из проекций

$$N_1 = \frac{F_y}{4} \sin(\theta) + T_1 \cos(\theta), \quad N_2 = T_2 \cos(\theta). \quad (34)$$

Для половины стержня при известных Δu и Δv из соотношений (22) определяются изменения размеров в главных направлениях $\Delta z = \Delta v \sin(\theta) - \Delta u \cos(\theta)$ и $\Delta x = \Delta y = \Delta u \sin(\theta) + \Delta v \cos(\theta)$. Заметим, то здесь проявляется одна важная особенность: поскольку при сжатии вдоль Y из-за симметрии подсистемы изменения вдоль X и Y оказываются одинаковыми, то сразу можно определить один из коэффициентов Пуассона.

Средняя деформация вдоль Y берется по половине ячейки $h_y = L \sin(\theta)$, а вдоль Z - $h_z = H - L \cos(\theta)$, поэтому

$$\varepsilon_y = \frac{2\Delta y}{L \sin(\theta)}, \quad \varepsilon_z = \frac{2\Delta z}{H - L \cos(\theta)}. \quad (35)$$

Тогда коэффициент Пуассона ν_{yz} определяется как

$$\nu_{yz} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_y} = -\frac{\frac{2\Delta z}{H-L\cos(\theta)}}{\frac{2\Delta y}{L\sin(\theta)}} = -\frac{\Delta z \sin(\theta)}{\Delta y (H/L - \cos(\theta))}. \quad (36)$$

Так как $\Delta x = \Delta y$, то $\varepsilon_x = \varepsilon_y$. Тогда коэффициент Пуассона $\nu_{yx} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = -1$. Эффективный модуль упругости E_y (а значит, и E_x) определяется как

$$E_y = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y} = \frac{\sigma_y}{\frac{2\Delta y}{L\sin(\theta)}} = \frac{\sigma_y L \sin(\theta)}{2\Delta y}. \quad (37)$$

В приближении малых перемещений по линейной теории Тимошенко $\Delta u \approx 0$. Тогда $\Delta z \approx \Delta v \sin(\theta)$ и $\Delta y \approx \Delta v \cos(\theta)$, а соотношения (36) и (37) сводятся соответственно к виду:

$$\nu_{yz} \approx -\frac{(\Delta v \sin(\theta)) \sin(\theta)}{(\Delta v \cos(\theta)) (H/L - \cos(\theta))} = \frac{L \sin(\theta) \operatorname{tg}(\theta)}{L \cos(\theta) - H}. \quad (38)$$

$$E_y = \frac{10EGt^4}{L \cos^2(\theta) (H - L \cos(\theta)) (5L^2G + 6Et^2)} \quad (39)$$

При этом $E_y = E_x$.

6. Влияния геометрических параметров на ортотропные характеристики ауксетика. Геометрические параметры ячейки задаются длиной наклонного стержня L , высотой стойки H , углом вогнутости (наклона) θ и размером поперечного сечения t (квадратное). Для получения эффективных констант используются две модели:

1. точное решение с учетом геометрической нелинейности наклонных стержней, определяемые по формулам (26), (27), (36) и (37);
2. приближенное (на основе линейной балки Тимошенко), использующее гипотезу малых деформаций. Принимается $\Delta u \approx 0$, а Δv задается суммой изгибной и сдвиговой составляющих, что приводит к замкнутым аналитическим формулам (30), (31), (38) и (39).

Эффективные характеристики определяются в рамках процедуры гомогенизации как отношение заданного напряжения к средней деформации ячейки в соответствующем направлении. Обезразмеривание модулей упругости производилось в виде E_z/E и E_y/E , где E – модуль упругости материала, из которого изготовлен ауксетик.

Использованы параметры материала, соответствующие нержавеющей стали 17-4РН (ХН4МДБТ): $E=200$ ГПа и $G=77.4$ ГПа. Геометрические параметры: $L=5$ мм, $t=1$ мм, базовое значение $H=10$ мм и $\theta=60^\circ$. Для точной модели расчет выполнен при фиксированных уровнях напряжений σ_z и σ_y , равных 1 и 100 МПа (в этом случае получаемые эффективные модули являются секущими по отношению к заданной нагрузке, а отличие от модели с гипотезой малых деформаций отражает вклад геометрической нелинейности).

На рис. 5а показана зависимость E_z/E от угла θ при базовых значениях H и L , а также от масштабного параметра H/L при базовом угле θ 5б. Из рис. 5а видно, что наблюдается резкое падение эффективной жесткости по z с ростом θ . При увеличении θ возрастает поперечная составляющая нагрузки на наклонные элементы и, как следствие, увеличивается их изгибно-сдвиговая податливость, формирующая основной вклад в Δz . Из рис. 5б следует, что E_z/E монотонно растет с увеличением H/L . Рост связан с тем, что при увеличении H возрастает характерный размер h_z , тогда как вклад изгибной составляющей наклонных стержней в абсолютное приращение Δz остается сопоставимым (он определяется, в первую очередь, величинами L , t , θ и уровнем нагрузки). В результате относительная деформация $\varepsilon_z = \Delta z/h_z$ снижается, и эффективная жесткость $E_z = \sigma/\varepsilon_z$ возрастает. Вклад напряжения σ_z незначителен.

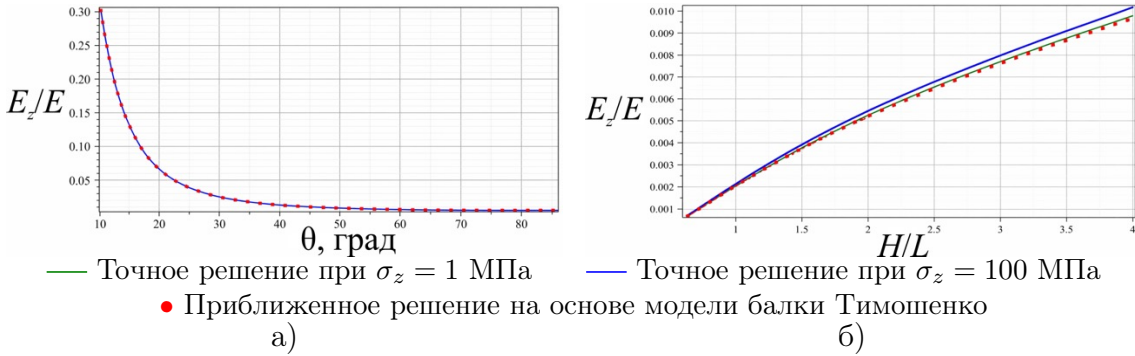


Рис. 5. Зависимость модуля упругости E_z от угла вогнутости (а) и отношения H/L (б) для точного решения при σ_z , равном 1 МПа (зеленый цвет) и 100 МПа (синий), а также приближенное решение на основе модели балки Тимошенко (красный).

На рис. 6 показана зависимость E_y/E от угла θ (а) при базовых значениях H и L , а также от масштабного параметра H/L при базовом угле θ (б). Из рис. 6а видно, что в отличие от E_z , модуль E_y возрастает с увеличением θ , причем рост становится особенно резким при $\theta > 75^\circ$. Такая тенденция согласуется с аналитической структурой приближенной формулы для E_y (при $\theta \rightarrow 90^\circ \cos(\theta) \rightarrow 0$) и жесткость по y увеличивается. Из рис. 6б видно, что E_y/E убывает с увеличением H/L . Это связано с тем, что при росте H увеличивается вертикальный размер подсистемы $h_z = H - L \cos(\theta)$, что повышает податливость по оси Y . Вклад геометрической нелинейности становится более значительным при увеличении угла θ .

На рис. 7 показана зависимость коэффициента Пуассона ν_{zx} от угла θ (а) при базовых значениях H и L , а также от масштабного параметра H/L при базовом угле θ (б). Во всем исследованном диапазоне $\nu_{zx} < 0$, т.е. структура демонстрирует ауксетическое поведение. При этом коэффициент Пуассона ν_{zx} существенно зависит от угла (рис. 7а): при малых углах эффект максимально выражен ($\nu_{zx} \approx -3.18$ при $\theta = 10^\circ$), а при приближении к 85° он ослабевает ($\nu_{zx} \approx -0.28$). Это объясняется тем, что при малых θ механизм поворота

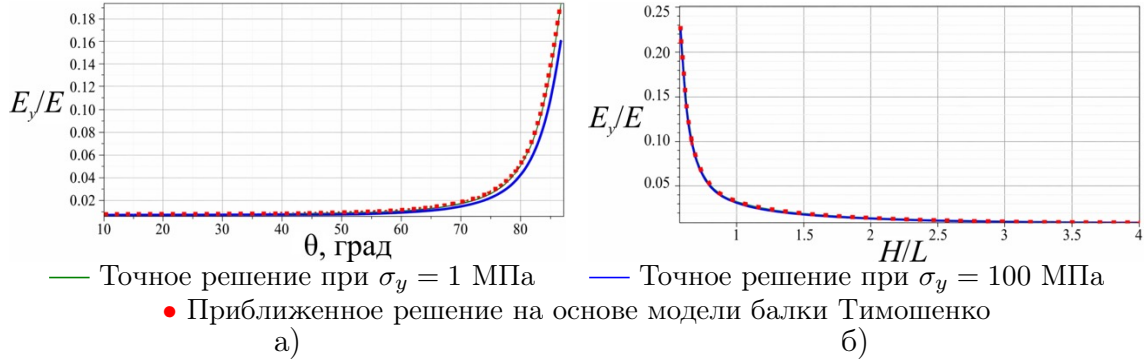


Рис. 6. Зависимость модуля упругости E_y от угла вогнутости (а) и отношения H/L (б) для точного решения при σ_y , равном 1 МПа (зеленый цвет) и 100 МПа (синий), а также приближенное решения на основе модели балки Тимошенко (красный).

наклонных стержней дает значительное изменение $h_x = L \sin(\theta)$ при сравнительно малом изменении $h_z = H - L \cos(\theta)$. На рис.7б показано, что при росте H/L коэффициент Пуассона ν_{zx} проявляет более сильные ауксетические свойства. Это означает, что более высокие ячейки (параметр H) при сжатии по оси Z дают более выраженную поперечную деформацию в X (или Y) относительно продольной деформации по Z . Вклад геометрической нелинейности становится более значительным при увеличении угла θ , а также при увеличении масштабного параметра H/L .

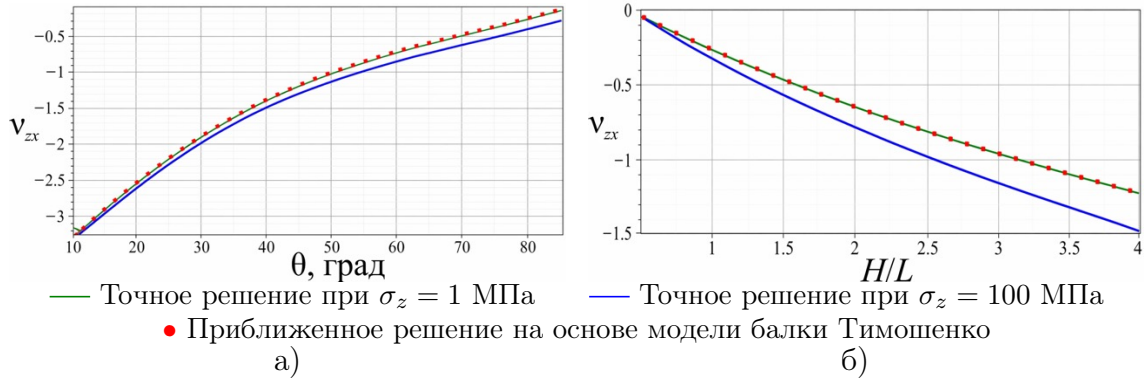


Рис. 7. Зависимость коэффициента Пуассона ν_{zx} от угла вогнутости (а) и отношения H/L (б) для точного решения при σ_z , равном 1 МПа (зеленый цвет) и 100 МПа (синий), а также приближенное решения на основе модели балки Тимошенко (красный).

На рис. 8 показана зависимость коэффициента Пуассона ν_{yz} от угла θ (а) при базовых значениях H и L , а также от масштабного параметра H/L при базовом угле θ (б). Во всем исследованном диапазоне $\nu_{yz} < 0$, т.е. структура демонстрирует ауксетическое поведение. По мере роста угла θ коэффициент Пуассона ν_{yz} демонстрирует более сильные ауксетические свойства (рис. 8а), что свидетельствует об увеличении вертикальной составляющей деформаций, возникающей

из поворота и прогиба наклонных элементов при нагружении по y , а также наблюдается рост чувствительности к геометрии при $\theta \rightarrow 90^\circ$. Характерный результат демонстрирует коэффициент Пуассона ν_{yz} в зависимости от H/L . При стремлении $H/L \rightarrow \cos(\theta)$, коэффициент Пуассона ν_{yz} сильно усиливает ауксетические свойства, а при росте масштабного параметра H/L быстро уменьшается. Это соответствует структуре аналитической зависимости ν_{yz} , в которой присутствует знаменатель вида $L \cos(\theta) - H$, при котором вертикальный размер h_z становится малым при H близком к $L \cos(\theta)$, и даже небольшие абсолютные приращения по Z дают большие относительные деформации и, как следствие, большую по модулю величину ν_{yz} . Вклад геометрической нелинейности становится более значительным при увеличении угла θ .

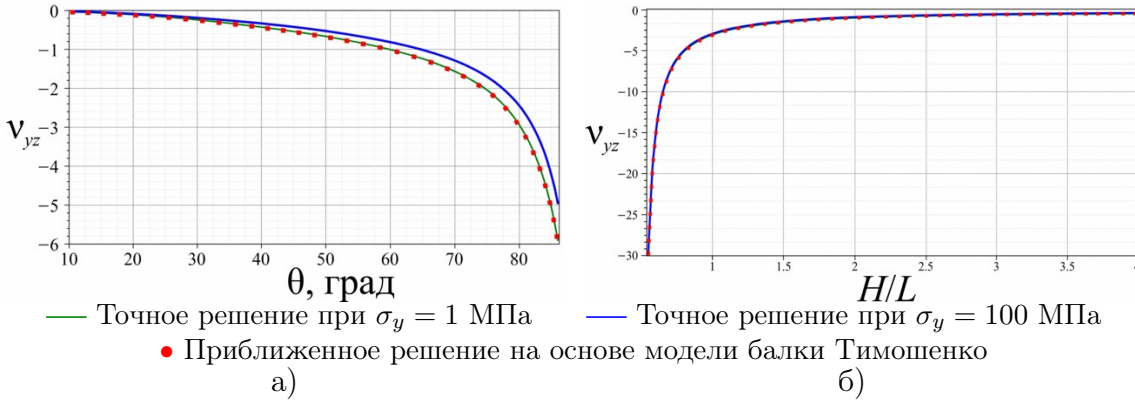


Рис. 8. Зависимость коэффициента Пуассона ν_{yz} от угла вогнутости (а) и отношения H/L (б) для точного решения при σ_y , равном 1 МПа (зеленый цвет) и 100 МПа (синий), а также приближенные решения на основе модели балки Тимошенко (красный).

В результате проведенного анализа угол вогнутости θ выступает как важный фактор ортотропии, поскольку при увеличении θ уменьшается жесткость по Z , но жесткость по Y увеличивается и усиливает ν_{yz} , тогда как $|\nu_{zx}|$ уменьшается. Тем самым угол θ позволяет целенаправленно смещать поведение структуры от жесткой по Z и сильно выраженных свойств ауксетика в ZX (при малых θ) к более жесткой по Y и сильно выраженных свойств ауксетика в YZ (при больших θ).

Увеличение масштабного фактора H/L повышает E_z и усиливает $|\nu_{zx}|$, но одновременно снижает E_y и делает ν_{yz} менее отрицательным. Таким образом, масштабный фактор H/L является вторым важным параметром для настройки ортотропных свойств и перераспределяет свойства ауксетика между парами направлений ZX и YZ .

При увеличении нагрузки σ_z и σ_y влияние геометрической нелинейности на эффективные ортотропные характеристики возрастает. При этом данный эффект оказывает большее влияние на коэффициенты Пуассона, чем на модули упругости.

7. Заключение. В работе проведено исследование по определению эффективных ортотропных механических характеристик трехмерных сотовых ауксетических конструкций с вогнутой структурой на основе балочной модели деформирования элементов.

Получено, что механический отклик рассматриваемой структуры при основных нагружениях в главных направлениях (направлениях ортотропии) в значительной степени определяется изгибно-сдвиговой податливостью наклонных стержней и осевой деформацией вертикальных стоек, тогда как продольные усилия в наклонных элементах оказываются вторичными для оценки деформативности и эффективных модулей. На уровне единичного элемента введена постановка в виде консольной балки для половины наклонного стержня, что позволило свести задачу больших прогибов к нелинейному уравнению для угла поворота $\varphi(s)$ и получить замкнутые выражения для локальных перемещений Δu и Δv через эллиптические интегралы.

На этапе гомогенизации сформулированы геометрические связи перехода от локальных перемещений Δu и Δv к изменениям размеров ячейки Δx , Δy и Δz , а далее к средним деформациям ε_x , ε_y и ε_z . В результате получены выражения для эффективных ортотропных модулей упругости $E_x = E_y$, E_z , а также коэффициентов Пуассона ν_{zx} , ν_{yz} и ν_{xy} представимые в виде функций геометрических параметров ячейки (L , H , θ , t) и линейно-упругих свойств исходного материала (E , G). Для инженерного применения дополнительно выведены замкнутые аналитические формулы в приближении малых деформаций, учитывающих сдвиг по модели балки Тимошенко, удобные для параметрических расчетов и последующего использования при задании эквивалентного ортотропного материала.

Показано, что при увеличении уровня напряжений возрастают эффекты геометрической нелинейности, при этом она заметнее влияет на коэффициенты Пуассона, чем на модули упругости. Следовательно, при проектировании высокодеформируемых ауксетических решеток (особенно из полимерных материалов) предпочтительно использовать точную (нелинейную) модель, а приближенные формулы рассматривать для первичной оценки.

Установлено, что угол вогнутости θ и масштабный параметр H/L являются главными управляющими параметрами ортотропности ауксетика. Угол θ перераспределяет свойства между парами направлений ZX и YZ (уменьшая E_z , увеличивая E_y и усиливая ν_{yz} , но ослабляя ν_{zx}), а H/L повышает E_z и усиливает ν_{zx} , одновременно снижая E_y и делая ν_{yz} менее отрицательным.

Выполнено исследование влияния геометрических параметров ауксетической ячейки на ортотропные характеристики и показано следующее:

1. Жесткость по направлению Z резко уменьшается при росте угла θ , поскольку увеличение угла вогнутости усиливает поперечную составляющую нагружения наклонных элементов и тем самым повышает их изгибно-сдвиговую податливость. При увеличении масштабного фактора H/L модуль E_z монотонно возрастает.

2. Жесткость вдоль направлений Y (и X) ведет себя противоположным образом, поскольку E_y возрастает с увеличением θ и демонстрирует особенно резкий рост при $\theta > 75^\circ$, в то же время с ростом H/L E_y уменьшается.

3. Во всем исследованном диапазоне параметров структура сохраняет ауксетическое поведение $\nu_{zx} < 0$ и $\nu_{yz} < 0$. При этом $|\nu_{zx}|$ максимален при малых углах θ (характерное значение $\nu_{zx} \approx -3.18$ при $\theta = 10^\circ$) и ослабевает при приближении к большим углам (порядка $\nu_{zx} \approx -0.28$ при приближении к $\theta \approx 85^\circ$). Увеличение H/L усиливает ауксетический эффект ν_{zx} , а для ν_{yz} наблюдается усиление с ростом угла θ . Также выявлен характерный режим при $H/L \rightarrow \cos(\theta)$, где малость вертикального размера подсистемы h_z приводит к резкому росту $|\nu_{yz}|$.

Ограничения модели связаны с принятыми идеализациями: балочная аппроксимация элементов, жесткость узловых соединений, линейно-упругий закон материала элементов ауксетического метаматериала и отсутствие учета локальных эффектов (контакт, локальная потеря устойчивости, технологические эффекты, связанные с методами изготовления, неоднородность и анизотропия исходного материала и т.п.). Тем не менее, предложенная в данной работе модель позволяет подбирать геометрию ячейки под требуемые ортотропные константы и использовать их в расчетах конструкций без явного моделирования ауксетической решетки.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. С. Г. Саиян - разработка физико-математической модели, написание текста рукописи; М. В. Шитикова - общее руководство работой, редактирование текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Данная работа была поддержана грантом 2026 года на проведение фундаментальных научных исследований (НИР/НИОКР) научными коллективами НИУ МГСУ, проект № 01-482/130.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. S. G. Saiyan - developing the physical-and-mathematical model, writing the draft of the manuscript, M. V. Shitikova - general supervision, editing the final manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The research was funded by the National Research Moscow State University of Civil Engineering (grant for fundamental scientific research, project No. 01-482/130).

ЛИТЕРАТУРА

1. Изучение свойств метаматериалов с отрицательным коэффициентом Пуассона при пробивании жестким ударником / С. Ю. Иванова [и др.] // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2023. – № 5. – С. 120–130. – DOI: 10.31857/S0572329923600366. – EDN: GBZWAQ.
2. Mechanical metamaterials with negative Poisson's ratio: A review / L. Zhang [и др.] // Engineering Structures. – 2025. – Т. 329. – С. 119838. – DOI: 10.1016/j.engstruct.2025.119838.

3. A review on the auxetic mechanical metamaterials and their applications in the field of applied engineering / V. Siniauskaya [и др.] // *Frontiers in Materials*. – 2024. – Т. 11. – С. 1453905. – DOI: 10.3389/fmats.2024.1453905.
4. Мазаев А. В., Аженеза О., Шитикова М. В. Ауксетические материалы: классификация, механические свойства и приложения // XXXI Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (МИКМУС - 2019) : Сборник трудов конференции. – 2020. – С. 32–35.
5. Ченцов А. В., Сокоренко А. В. Исследование моделей и механических свойств структур Миура-ори // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. – 2024. – 1 (59). – С. 39–49. – DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.003. – EDN: CSJSRK.
6. A new type of hierarchical honeycomb in-plane impact study / H. Song [и др.] // *Materials*. – 2021. – Т. 14, № 8. – С. 1917. – DOI: 10.3390/ma14081917.
7. Mechanical metamaterials with negative Poisson's ratio: A review / L. Zhang [и др.] // *Engineering Structures*. – 2025. – Т. 329. – С. 119838. – DOI: 10.1016/j.engstruct.2025.119838.
8. Ахметшин Л. Р., Смолин И. Ю. Анализ некоторых методов соединения ячеек в механическом тетрахиальном метаматериале // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2022. – № 77. – С. 27–37. – DOI: 10.17223/19988621/77/3. – EDN: BLXDFJ.
9. Recent developments of auxetic metamaterials / N. F. Mohamad Razali [и др.] // *Advances in Physics: X*. – 2025. – Т. 10, № 1. – С. 2548208. – DOI: 10.1080/23746149.2025.2548208.
10. Исследование влияния вязкого заполнителя на механические свойства метаматериалов с отрицательным и положительным коэффициентом Пуассона при пробивании жестким ударником / С. Ю. Иванова [и др.] // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. – 2024. – 4 (62). – С. 62–75. – DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.005. – EDN: SFQXCI.
11. Additive manufacturing of re-entrant structures: Well-tailored structures, unique properties, modelling approaches and real applications / W. T. Nugroho [и др.] // *Additive Manufacturing*. – 2023. – Т. 78. – С. 103829. – DOI: 10.1016/j.addma.2023.103829.
12. Скрипняк В. В., Чирков М. О., Скрипняк В. А. Моделирование механической реакции ауксетических метаматериалов на динамические воздействия // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2021. – № 2. – С. 144–152. – DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.13. – EDN: ELZBAF.
13. Contribution of tension–torsion coupling effect on elastic properties of chiral and anti-chiral structures / H. Tang [и др.] // *Thin-Walled Structures*. – 2023. – Т. 182. – С. 110199. – DOI: 10.1016/j.tws.2022.110199.
14. Geometric analysis and experimental studies of hexachiral structures / J. Plewa [и др.] // *Materials*. – 2025. – Т. 18, № 18. – С. 4344. – DOI: 10.3390/ma18184344.
15. Experimental characterization of nonlinear mechanical behavior and auxeticity in 3D-printed rotating-square auxetics with spatially variable materials / T. Paupst [и др.] // *Progress in Additive Manufacturing*. – 2025. – Т. 10. – С. 10783–10799. – DOI: 10.1007/s40964-025-01260-9.

16. Investigation and tailoring of rotating squares' and rectangles' auxetic structure behavior through computational simulations of 6082T6 Aluminum alloy structures / M. Elsamanty [и др.] // *Materials*. – 2023. – Т. 16, № 24. – С. 7597. – DOI: 10.3390/ma16247597.
17. Hassani F., Javanbakht Z., Malek S. Large deformation behavior and energy absorption of rotating square auxetics // *Composites Part B: Engineering*. – 2024. – Т. 283. – С. 111596. – DOI: 10.1016/j.compositesb.2024.111596.
18. Architectural design and additive manufacturing of mechanical metamaterials: a review / C. Lu [и др.] // *Engineering*. – 2022. – Т. 17, № 10. – С. 44–63. – DOI: 10.1016/j.eng.2021.12.023.
19. Hui W., Sihang X., Jianshan W. Disordered auxetic metamaterials architected by random peanut-shaped perturbations // *Materials & Design*. – 2021. – Т. 212. – С. 110291. – DOI: 10.1016/j.matdes.2021.110291.
20. Томин П. Ю. О понятии Representative elementary volume // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2011. – № 13. – С. 1–23. – EDN: NKZHEY.
21. On dissipative effects in thermo-electrically coupled systems: Hill–Mandel-type homogenisation, asymptotic expansions and two-scale convergence / D. Güzel [и др.] // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2026. – Т. 208. – С. 106427. – DOI: 10.1016/j.jmps.2025.106427.
22. Нассар М. Э. Численное исследование гомогенизации пьезоэлектрического композита с полыми сферическими металлическими включениями с использованием представительного объема, основанного на алгоритме случайной последовательной адсорбции // *Наука Юга России: достижения и перспективы : XVIII Ежегодная молодежная научная конференция : тезисы докладов*. – 2022. – С. 242. – EDN: ZPINWF.
23. Zona R., Minutolo V. Elastic to plastic lattice structure homogenization via Finite Element Limit Analysis // *Symmetry*. – 2025. – Т. 17, № 7. – С. 1120. – DOI: 10.3390/sym17071120.
24. Somnic J., Jo B. W. Status and challenges in homogenization methods for lattice materials // *Materials*. – 2022. – Т. 15, № 2. – С. 605. – DOI: 10.3390/ma15020605.
25. Kim J. E., Cho N. K., Park K. Computational homogenization of additively manufactured lightweight structures with multiscale topology optimization // *Journal of Computational Design and Engineering*. – 2022. – Т. 9, № 5. – С. 1602–1615. – DOI: 10.1093/jcde/qwac078.
26. Устенко А. Д. Исследование возможности применения микро-дилатационной теории упругости для моделирования метаматериалов с отрицательным коэффициентом Пуассона // *XLIII Гагаринские чтения : Материалы Международной молодежной научной конференции. Секция "Механика и моделирование материалов и технологий"*. – Москва : Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук, 2017. – С. 79–80. – EDN: ZDTPQL.
27. Novel compliant mechanism-based auxetic metamaterial: Kinematic and experimental analysis / O. Ochoa [и др.] // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2024. – Т. 279. – С. 109478. – DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2024.109478.
28. Shitikova M. V., Soloviev I. A., Levchenko A. V. Experimental identification of the measure of internal friction in plates with a two-dimensional Auxetic structure // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. – 2025. –

- Т. 21, № 1. – С. 177–187. – DOI: 10.22337/2587-9618-2025-21-1-177-187. – EDN: GJYCOC.
29. Multiscale experimental characterization of nonlinear mechanics and auxeticity in mechanical metamaterials with rotating squares / K. Z. Uddin [и др.] // *Composite Structures*. – 2025. – Т. 357. – С. 118931. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2025.118931.
 30. Исследование влияния температуры на структуру, твердость, термостабильность и фазовые переходы стали X16H4Д4Б, применяемой для изготовления деталей методом аддитивных технологий / Л. В. Свинцова [и др.] // *Аддитивные технологии: настоящее и будущее : Материалы VII Международной конференции*. – Москва : Всероссийский научно-исследовательский институт авиационных материалов Национального исследовательского центра "Курчатовский институт", 2021. – С. 87–95. – EDN: FANEFL.
 31. Прогрессивные технологии изготовления деталей высокой сложности / А. И. Пронин [и др.]. – Нижний Новгород : ННГАСУ, 2025. – 88 с. – EDN: BFXIDL. – Учебное пособие.
 32. Пархоменко А. В., Амосов А. П., Пастухов А. М. Разработка и применение гранулята на основе порошка нержавеющей стали 12Х18Н10Т для ММ-технологии // *Вестник Сибирского государственного индустриального университета*. – 2025. – 3 (53). – С. 73–81. – DOI: 10.57070/2304-4497-2025-3(53)-73-81. – EDN: TLQPXP.
 33. Применение функциональных и адаптивных материалов, полученных способом 3D-печати (обзор) / Е. Н. Каблов [и др.] // *Труды ВИАМ*. – 2022. – 2 (108). – С. 32–51. – DOI: 10.18577/2307-6046-2022-0-2-32-51. – EDN: YXDAOX.
 34. Paushkin A., Saiyan S. Numerical study of the applicability of the Saint-Venant principle // *MATEC Web of Conferences*. – 2017. – Т. 117. – С. 00134. – DOI: 10.1051/mateconf/201711700134.
 35. Saiyan S., Paushkin A. Numerical study of the shear stress distribution in an I-beam in the load application zone // *Materials Science Forum*. – 2019. – Т. 974. – С. 659–664. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.974.659.
 36. Саиян С. Г., Паушкин А. Г. Численное параметрическое исследование напряженно-деформированного состояния двутавровых балок с различными типами гофрированных стенок // *Вестник МГСУ*. – 2021. – Т. 16, № 6. – С. 676–687. – DOI: 10.22227/1997-0935.2021.6.676-687. – EDN: XDBUIJ.
 37. Timoshenko S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. – 1921. – Т. 41, № 245. – С. 744–746.

REFERENCES

1. Studying the properties of metamaterials with a negative Poisson's ratio when punched by a rigid impactor / S. Y. Ivanova [et al.] // *Mechanics of Solids*. – 2023. – Vol. 58, no. 5. – P. 1536–1544. – DOI: 10.3103/S0025654423600897. – EDN: MLVQTM.
2. Mechanical metamaterials with negative Poisson's ratio: A review / L. Zhang [et al.] // *Engineering Structures*. – 2025. – Vol. 329. – P. 119838. – DOI: 10.1016/j.engstruct.2025.119838.

3. A review on the auxetic mechanical metamaterials and their applications in the field of applied engineering / V. Siniauskaya [et al.] // *Frontiers in Materials*. – 2024. – Vol. 11. – P. 1453905. – DOI: 10.3389/fmats.2024.1453905.
4. Mazaev A. V., Ajeneza O., Shitikova M. Auxetics materials: classification, mechanical properties and applications // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. – 2020. – T. 747. – C. 012008. – DOI: 10.1088/1757-899X/747/1/012008.
5. *Chentsov A. V., Sokorenko A. V.* Investigation of models and mechanical properties of Miura-Ori structures // *Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. – 2024. – 1 (59). – P. 39–49. – DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.003. – EDN: CSJSRK. – (in Russian).
6. A new type of hierarchical honeycomb in-plane impact study / H. Song [et al.] // *Materials*. – 2021. – Vol. 14, no. 8. – P. 1917. – DOI: 10.3390/ma14081917.
7. Mechanical metamaterials with negative Poisson's ratio: A review / L. Zhang [et al.] // *Engineering Structures*. – 2025. – Vol. 329. – P. 119838. – DOI: 10.1016/j.engstruct.2025.119838.
8. *Akhmetshin L. R., Smolin I. Y.* Analysis of some methods of joining cells in a mechanical tetrachiral metamaterial // *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. – 2022. – No. 77. – P. 27–37. – DOI: 10.17223/19988621/77/3. – EDN: BLXDFJ. – (in Russian).
9. Recent developments of auxetic metamaterials / N. F. Mohamad Razali [et al.] // *Advances in Physics: X*. – 2025. – Vol. 10, no. 1. – P. 2548208. – DOI: 10.1080/23746149.2025.2548208.
10. Investigation of the effect of a viscous filler on the mechanical properties of metamaterials with negative and positive Poisson's ratio when punched by a rigid impactor / S. Y. Ivanova [et al.] // *Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. – 2024. – 4 (62). – P. 62–75. – DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.005. – EDN: SFQXCI. – (in Russian).
11. Additive manufacturing of re-entrant structures: Well-tailored structures, unique properties, modelling approaches and real applications / W. T. Nugroho [et al.] // *Additive Manufacturing*. – 2023. – Vol. 78. – P. 103829. – DOI: 10.1016/j.addma.2023.103829.
12. *Skripnyak V. V., Chirkov M. O., Skripnyak V. A.* Modeling the mechanical response of auxetic metamaterials to dynamic effects // *Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. Mechanics*. – 2021. – No. 2. – P. 144–152. – DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.13. – EDN: ELZBAF. – (in Russian).
13. Contribution of tension–torsion coupling effect on elastic properties of chiral and anti-chiral structures / H. Tang [et al.] // *Thin-Walled Structures*. – 2023. – Vol. 182. – P. 110199. – DOI: 10.1016/j.tws.2022.110199.
14. Geometric analysis and experimental studies of hexachiral structures / J. Plewa [et al.] // *Materials*. – 2025. – Vol. 18, no. 18. – P. 4344. – DOI: 10.3390/ma18184344.
15. Experimental characterization of nonlinear mechanical behavior and auxeticity in 3D-printed rotating-square auxetics with spatially variable materials / T. Paupst [et al.] // *Progress in Additive Manufacturing*. – 2025. – Vol. 10. – P. 10783–10799. – DOI: 10.1007/s40964-025-01260-9.
16. Investigation and tailoring of rotating squares' and rectangles' auxetic structure behavior through computational simulations of 6082T6 Aluminum alloy structures /

- M. Elsamanty [et al.] // *Materials*. – 2023. – Vol. 16, no. 24. – P. 7597. – DOI: 10.3390/ma16247597.
17. *Hassani F., Javanbakht Z., Malek S.* Large deformation behavior and energy absorption of rotating square auxetics // *Composites Part B: Engineering*. – 2024. – Vol. 283. – P. 111596. – DOI: 10.1016/j.compositesb.2024.111596.
 18. Architectural design and additive manufacturing of mechanical metamaterials: a review / C. Lu [et al.] // *Engineering*. – 2022. – Vol. 17, no. 10. – P. 44–63. – DOI: 10.1016/j.eng.2021.12.023.
 19. Hui W., Sihang X., Jianshan W. Disordered auxetic metamaterials architected by random peanut-shaped perturbations // *Materials & Design*. – 2021. – T. 212. – C. 110291. – DOI: 10.1016/j.matdes.2021.110291.
 20. *Tomin P. Y.* On the representative elementary volume concept // *Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics*. – 2011. – No. 13. – P. 23. – EDN: NKZHEY. – (in Russian).
 21. On dissipative effects in thermo-electrically coupled systems: Hill–Mandel-type homogenisation, asymptotic expansions and two-scale convergence / D. Güzel [et al.] // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2026. – Vol. 208. – P. 106427. – DOI: 10.1016/j.jmps.2025.106427.
 22. *Nassar M. E.* Numerical investigation of homogenization of a piezoelectric composite with hollow spherical metallic inclusions using a representative volume based on the random sequential adsorption algorithm // *Science of the South of Russia: Achievements and Prospects: XVIII Annual Youth Scientific Conference: Abstracts*. – Rostov-on-Don : Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, 2022. – P. 242. – (in Russian).
 23. *Zona R., Minutolo V.* Elastic to plastic lattice structure homogenization via Finite Element Limit Analysis // *Symmetry*. – 2025. – Vol. 17, no. 7. – P. 1120. – DOI: 10.3390/sym17071120.
 24. *Somnic J., Jo B. W.* Status and challenges in homogenization methods for lattice materials // *Materials*. – 2022. – Vol. 15, no. 2. – P. 605. – DOI: 10.3390/ma15020605.
 25. *Kim J. E., Cho N. K., Park K.* Computational homogenization of additively manufactured lightweight structures with multiscale topology optimization // *Journal of Computational Design and Engineering*. – 2022. – Vol. 9, no. 5. – P. 1602–1615. – DOI: 10.1093/jcde/qwac078.
 26. *Ustenko A. D.* Investigation of the possibility of applying the micro-dilatation theory of elasticity for modeling metamaterials with a negative Poisson’s ratio // *XLIII Gagarin Readings: Proceedings of the International Youth Scientific Conference. Section “Mechanics and Modeling of Materials and Technologies”*. – Moscow : Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 2017. – P. 79–80. – EDN: ZDTPQL. – (in Russian).
 27. Novel compliant mechanism-based auxetic metamaterial: Kinematic and experimental analysis / O. Ochoa [et al.] // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2024. – Vol. 279. – P. 109478. – DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2024.109478.
 28. *Shitikova M. V., Soloviev I. A., Levchenko A. V.* Experimental identification of the measure of internal friction in plates with a two-dimensional auxetic structure // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. – 2025. –

- Vol. 21, no. 1. – P. 177–187. – DOI: 10.22337/2587-9618-2025-21-1-177-187. – EDN: GJYCOC.
29. Multiscale experimental characterization of nonlinear mechanics and auxeticity in mechanical metamaterials with rotating squares / K. Z. Uddin [et al.] // *Composite Structures*. – 2025. – Vol. 357. – P. 118931. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2025.118931.
 30. Investigation of the effect of temperature on the structure, hardness, thermal stability, and phase transitions of Kh16N4D4B steel used for manufacturing parts by additive technologies / L. V. Svintsova [et al.] // *Additive Technologies: Present and Future: Proceedings of the VII International Conference*. – Moscow : All-Russian Research Institute of Aviation Materials of the Kurchatov Institute National Research Centre, 2021. – P. 87–95. – EDN: FAHEFL. – (in Russian).
 31. Progressive technologies for manufacturing highly complex parts / A. I. Pronin [et al.]. – Nizhny Novgorod : NNGASU, 2025. – 88 p. – EDN: BFXIDL. – Textbook (in Russian).
 32. *Parkhomenko A. V., Amosov A. P., Pastukhov A. M.* Development and application of granulate based on 12Kh18N10T stainless steel powder for MIM technology // *Bulletin of the Siberian State Industrial University*. – 2025. – 3 (53). – P. 73–81. – DOI: 10.57070/2304-4497-2025-3(53)-73-81. – EDN: TLQXPX. – (in Russian).
 33. Application of functional and adaptive materials obtained by 3D printing (review) / E. N. Kablov [et al.] // *Proceedings of VIAM*. – 2022. – 2 (108). – P. 32–51. – DOI: 10.18577/2307-6046-2022-0-2-32-51. – EDN: YXDAOX. – (in Russian).
 34. *Paushkin A., Saiyan S.* Numerical study of the applicability of the Saint-Venant principle // *MATEC Web of Conferences*. – 2017. – Vol. 117. – P. 00134. – DOI: 10.1051/matecconf/201711700134.
 35. *Saiyan S., Paushkin A.* Numerical study of the shear stress distribution in an I-beam in the load application zone // *Materials Science Forum*. – 2019. – Vol. 974. – P. 659–664. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.974.659.
 36. *Saiyan S. G., Paushkin A. G.* Numerical parametric study of the stress-strain state of I-beams with various types of corrugated webs // *Vestnik MGSU*. – 2021. – Vol. 16, no. 6. – P. 676–687. – DOI: 10.22227/1997-0935.2021.6.676-687. – EDN: XDBUIJ. – (in Russian).
 37. Timoshenko S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. – 1921. – T. 41, № 245. – C. 744–746.

К. К. Кукуджанов

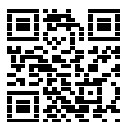
УЛУЧШЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК АДДИТИВНОЙ НЕРЖАВЕЮЩЕЙ СТАЛИ 03X16H15M3 ПРИ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОИМПУЛЬСНОЙ ОБРАБОТКЕ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Аннотация. За счет воздействия высокоэнергетическим импульсным электромагнитным полем (ВЭМП) на образцы из нержавеющей стали 03X16H15M3 (AISI 316L), изготовленные при помощи технологии селективного лазерного плавления (СЛП), удалось достичь существенного увеличения предельной деформации до разрушения при незначительном снижении предела прочности. Предложен новый подход к определению предпочтительного режима высокоэнергетической электроимпульсной обработки (ВЭИО), направленного на заживление микродефектов в аддитивных материалах. После применения предпочтительного режима ВЭИО механическое поведение материала стало более предсказуемым и менее вариабельным, о чем свидетельствует существенное снижение стандартных отклонений предела прочности и предельной деформации до разрушения. Подобная динамика макропоказателей является результатом заживления микродефектов в материале и существенного уменьшения его пористости в результате обработки образцов в предложенном режиме ВЭИО.

Ключевые слова: аддитивные материалы, селективное лазерное плавление, заживление, импульсные токи высокой плотности, технологические дефекты, микротрещины, микропоры, пористость, 03X16H15M3, 316L

Кукуджанов Константин Константинович, аспирант; e-mail: kkukudzhanov@yandex.ru; <https://orcid.org/0009-0004-8106-2453>; AuthorID: 9179-3855



для цитирования: Кукуджанов К. К. Улучшение механических характеристик аддитивной нержавеющей стали 03X16H15M3 при высокоэнергетической электроимпульсной обработке // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 55–74. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.003. EDN: DJXUOL

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

K. K. Kukudzhanov

IMPROVEMENT OF MECHANICAL CHARACTERISTICS OF ADDITIVE STAINLESS STEEL AISI 316L WITH HIGH-ENERGY ELECTRIC PULSE TREATMENT

I. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

Abstract. Significant improvement in mechanical properties of additively manufactured with selective laser melting (SLM) stainless steel 03X16H15M3 (AISI 316L) has been achieved by applying high-energy electric pulse treatment (HeEPT). Considerable increase of elongation with only a minor decrease in the ultimate strength is observed after applying the preferred route of HeEPT. A novel approach for determining the preferred HeEPT route aimed for healing of the microdefects in additively produced materials is proposed. HeEPT processing in the preferred route also made the material mechanical behavior more predictable, that is evidenced by the decreased standard deviations of ultimate stress and strain. This macro behavior is the result of healing internal microdefects and porosity reduction in the material.

Keywords: 03X16H15M3, 316L, additive manufacturing, SLM, healing, electric pulse treatment, microdefects, microcracks, micropores, porosity, mechanical properties

Konstantin K. Kukudzhanov, PhD student, IPMech RAS; e-mail: kkukudzhanov@yandex.ru; <https://orcid.org/0009-0004-8106-2453>; AuthorID: 9179-3855



to cite this article: Kukudzhanov K.K. Improvement of mechanical characteristics of additive stainless steel AISI 316L with high-energy electric pulse treatment // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 55–74. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.003

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Аддитивное производство (АП) позволяет создавать трехмерные объекты любой сложности на основе цифровых моделей. Наиболее распространенный метод АП — селективное лазерное плавление (СЛП). Механические свойства деталей, изготовленных методом СЛП, отличаются от изготовленных традиционными способами. Основные отличия:

1. повышенная пористость, снижающая прочность и усталостные характеристики из-за распространения макротрещин, особенно от пор неправильной формы;
2. тонкая микроструктура материала, повышающая твердость и прочность, но снижающая пластичность сталей;

Промышленное применение технологии СЛП, как и других методов АП, не позволяет достичь бездефектного изготовления металлических деталей. Неправильная оптимизация параметров процесса приводит к повышенной пористости и образованию большого количества технологических дефектов (таких как трещины и поры неполного сплавления и газовые поры). Эти дефекты снижают механические характеристики изделий, увеличивает их дисперсию, что делает аддитивные материалы (АМ) менее качественными и ограничивает возможности применения по сравнению с материалами, изготовленными традиционными методами, например, такими как литье.

Для улучшения характеристик деталей, изготовленных по технологии СЛП, используются термические (возврат, отжиг), термомеханические методы (высокотемпературный отжиг, горячее пластическое деформирование, горячее изостатическое прессование) и методы электроимпульсной обработки. Термические и термомеханические методы повышают пластичность за счет снятия остаточных напряжений и уменьшения пористости, но снижают предел прочности и усталостные характеристики. При этом происходит термическая деградация микроструктуры. Механизм залечивания пористости при применении термомеханических методов обработки основан на термодиффузии атомов при высоких температурах. Они требуют значительных затрат энергии и времени, что делает их менее эффективными.

Под залечиванием микродефектов в АМ, далее понимается восстановление сплошности материала за счет уменьшения в нем объема внутренних пор и трещин, а также сглаживание формы этих дефектов, уменьшающее концентрацию механических напряжений в их острых вершинах.

Методы электроимпульсной обработки (ЭИО) стали предполагать индуцирование в проводящем материале импульсов токов высокой плотности за счёт воздействия внешним интенсивным электромагнитным полем (ЭМП). При этом для изделий из сталей, изготовленных традиционными методами, используются широкий диапазон режимов ЭИО с импульсами длительности 10^{-5} – 10^{-2} с и плотностями токов порядка 10^7 – 10^9 А/м². Это приводит к рассеиванию в материале удельной энергии в диапазоне 10^5 – 10^9 Дж/м³.

Далее будем называть импульсное электромагнитное поле (ЭМП) высокоэнергетическим (далее — ВЭМП) в случае рассеивания в сталях удельной энергии в диапазоне 10^7 – 10^9 Дж/м³ при сравнительно малых длительностях единичных импульсов 10^{-5} – 10^{-4} с [1]. Электроимпульсную обработку образцов импульсами ВЭМП далее будем сокращённо называть — высокоэнергетической электроимпульсной обработкой (ВЭИО). Другие виды ЭИО будем называть низкоэнергетическими (НЭИО). Данное разделение основано на наблюдениях за значительными различиями в механизмах залечивания микродефектов при НЭИО и ВЭИО [1].

Следует заметить, что вопрос улучшения механических свойств аддитивных материалов посредством ЭИО является малоизученным. Исследованию воздействия ЭМП на механические свойства аддитивных материалов посвящено незначительное число работ [2–6]. Все они посвящены исследованиям в области НЭИО. Материалы для исследований не только сталь 316L, но и с другие АМ. Технологии изготовления также не ограничиваются СЛП, но и другими методами аддитивного производства.

Отдельно отметим работы [7] и [8], в которых их авторы не уделяли внимания исследованиям изменений пластических и прочностных свойств, однако наблюдали явления, схожие с исследуемыми в настоящей работе. В [7] при электромеханической обработке (одновременном действии НЭИО и прижимающего усилия) в образце из сплава Ti-6Al-4V авторы наблюдали сглаживание границ дефектов в образце из АМ после электромеханической обработки. В [8] при ВЭИО с последовательно возрастающими импульсами тока (всего 75 импульсов) в 2-х образцах из композитного АМ TiC/316L удалось частично залечить длинные макротрещины путем сварки их берегов. Кумулятивный нагрев, вызванный многократными импульсами тока, приводил к сильному термическому сжатию берегов трещин и способствовал их сварке и залечиванию. Улучшение механических свойств образцов после ВЭИО в [8] не изучалось.

В вышеуказанных работах наблюдались качественные изменения тонкой микроструктуры аддитивных материалов под действием НЭИО, вызванные кумулятивным высокотемпературным нагревом образцов, действие которого было аналогичным отжигу. Их авторы подтверждают значительный рост температуры и отмечают сходство воздействия НЭИО с термомеханической обработкой, как в части изменений микроструктуры, так и в части улучшения механических свойств. Более подробный обзор этих работ приведен в [9].

В аддитивных материалах (впрочем, как и в материалах, изготовленных традиционными методами) под действием ВЭИО будут происходить иные эволюционные изменения, чем при термомеханической обработке или НЭИО. В частности, при ВЭИО залечивание дефектов, приводящее к улучшению механических характеристик, протекает по иному механизму, нежели при термомеханической обработке или электромеханической обработке (НЭИО + механическое сжатие). Так, при воздействии импульсов ВЭМП в острых вершинах внутренних

микротрещин и микропор происходит сильная концентрация электромагнитного поля, интенсивное выделение Джоулева тепла в короткий промежуток времени, возникновение сжимающих термических напряжений с одновременным разупрочнением и плавлением металла в этих областях. В совокупности это приводит к тому, что внутренние микротрещины и микропоры изменяют форму, уменьшаются в объеме, а их берега свариваются расплавленным металлом [10].

Результаты моделирования [10–12] подтверждают реальность именно такого механизма залечивания внутренних дефектов в проводящем материале при ВЭИО. В данных работах на основе связанной конечноэлементной электротермоупругопластической модели [10] было показано, что при ВЭИО металла с микродефектами в нем происходит уменьшение объема микродефектов и, как следствие, пористости материала, вплоть до полного залечивания некоторых микропор и микротрещин посредством сварки их берегов расплавленным металлом. Экспериментальное подтверждение залечивания микротрещин в цинке при ВЭИО приводится [13]. Численное исследование залечивания макротрещин в стали 316L при ВЭИО по другой конечноэлементной модели [14] также косвенно подтверждают вышеописанный механизм. Сварка берегов и залечивание макротрещин при ВЭИО наблюдались в экспериментах с АМ TiC/316L [8] и в нержавеющей сталях, изготовленных традиционными методами [13–15].

При отжиге, термомеханической обработке (горячем изостатическом прессовании, горячей пластической деформации) и электромеханической обработке (одновременное воздействие механического сжатия и НЭИО), когда тепловая энергия выделяется в течение более продолжительных интервалов времени по сравнению с ВЭИО, залечивание дефектов происходит по иному механизму – за счет термодиффузии атомов между берегами дефектов при высоких температурах нагрева. При этом происходит образование связей (мостиков) между берегами дефектов. Интенсивное плавление в вершинах микродефектов и сварка их берегов при НЭИО не происходит.

Таким образом, исследования воздействия ВЭМП на АМ с целью улучшения их механических свойств не проводились. Возможность залечивания в них внутренних микродефектов в процессе ВЭИО также не изучалась.

Безотносительно ВЭИО, также следует отметить чрезвычайно широкий диапазон параметров импульсов (плотностей токов, форм и длительностей импульсов) используемый в исследованиях по НЭИО [9].

Кроме того, в [2–8, 14, 16] авторы никак не объясняли и не обосновывали выбор ими тех или иных значений параметров проведенной ЭИО (далее – режима ЭИО). То есть выбор режима ЭИО осуществлялся ими чисто эмпирическим путем.

Настоящая работа является попыткой восполнить эти пробелы. В работе используется новый подход для определения режима ВЭИО, ориентированный

на залечивание внутренних микродефектов в металлических материалах. Развиваемый подход применен для определения предпочтительного режима ВЭИО нержавеющей стали 03X16H15M3 (AISI 316L) изготовленной аддитивным методом (СЛП). Эта марка стали популярна в промышленности благодаря отличным физико-механическим свойствам, высокой стойкости к окислению и хорошей свариваемости. Она широко используется в СЛП печати. Стальные образцы для экспериментов имеют низкое качество печати с крупными дефектами, такими как несплавления с линейными размерами до $250\mu\text{m}$. Наличие этих дефектов предпочтительно для демонстрации возможностей ВЭИО по их залечиванию.

Цели работы:

- 1) экспериментально подтвердить залечивание микропор и микротрещин (в широком диапазоне линейных размеров 5-250мкм) в аддитивной стали 03X16H15M3, при предпочтительном режиме ВЭИО (ранее таких подтверждений не было);
- 2) исследовать изменения пористости и морфологии микродефектов при предпочтительном режиме ВЭИО и их влияние на макроскопические механические свойства стали 03X16H15M3.

Изучение тонкой микроструктуры было факультативным, так как оно влияло на механические свойства.

Материалы и методы. В работе исследовались образцы, изготовленные из порошка нержавеющей стали 03X16H15M3. Образцы с шейкой в центральной части имели размеры $120 \times 6 \times 3$ мм (рис. 1А). Образцы были изготовлены методом СЛП на 3D-принтере SLM Kings 3D Printer M280HD (Китай). Для целей эксперимента 10 случайных образцов были поровну разделены на две группы.

Первая группа тестировалась на разрыв без предварительной ВЭИО. Вторая группа проходила ВЭИО, а затем тестировалась на разрыв.

Все образцы подвергали растяжению до разрыва на испытательной машине ГОСТ МИМ.2-100 (Россия) со скоростью деформации 0,15 мм/мин (начальное расстояние между зажимами $l_0 = 35$ мм).

Для изготовления шлифов использовали 2 образца. От каждого отрезали кусочки размером $10 \times 6 \times 3$ мм до ВЭИО, затем образец обрабатывали током и вырезали аналогичные кусочки.

Шлифы для микроструктурного исследования делали вдоль широкой грани образцов (параллельно плоскости YZ на рис. 1А). Дефекты исследовали в 3 случайно выбранных плоскостях, суммарная площадь которых составила $9,9 \text{ мм}^2$.

Микроструктуру до и после ВЭИО исследовали с помощью сканирующего электронного микроскопа (СЭМ) Coхem EM-30AX Plus (Китай), а также оптического микроскопа Zeiss Axio Imager.D1m (Германия). Образцы, жестко зафиксированные в медных зажимах-электродах (38 мм между электродами),

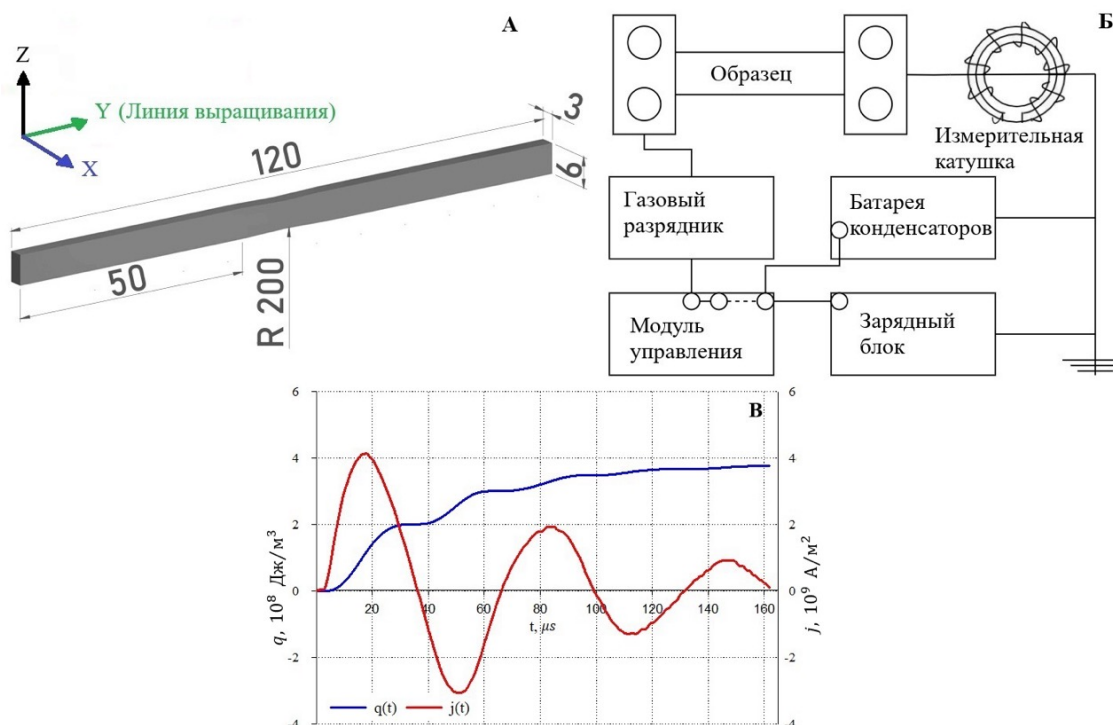


Рис. 1. Печатные образцы (размеры в мм) для экспериментов из стали 03X16N15M3(А), принципиальная схема экспериментальной установки (Б), измеренная в экспериментах зависимость плотности тока и рассчитанная зависимость удельной рассеянной энергии в образце от времени (В)

подвергались ВЭИО с помощью импульсного генератора ГИТ-20-40 (Россия) на специально разработанной лабораторной установке, схематично показанной на рис.1Б. Изменение силы тока в цепи от времени измерялась с помощью откалиброванной катушки Роговского, подключенной к осциллографу. В процессе ВЭИО в образцах индуцировались импульсы тока, имеющие форму, показанную на рис.1В.

Экспериментальная зависимость плотности тока $j_{\infty}(t)$ может быть аппроксимирована затухающей синусоидальной функцией

$$j_{\infty}(t) = j_{\max} e^{-\zeta \omega t} \sin(\omega t),$$

где ω — собственная угловая частота колебаний, ζ — коэффициент затухания, а время t изменяется в диапазоне $0 \leq t \leq \tau_0$.

Для импульсного генератора ГИТ-20-40 частота составляет

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 14,76 \text{ кГц},$$

коэффициент затухания равен $\zeta = 0,15$, а длительность импульса $\tau_0 = 162 \text{ мкс}$.

В проводимых экспериментах амплитуда плотности тока в импульсах $j_{\max}$ варьировалась, тогда как длительность всех импульсов оставалась одинаковой.

Интервал времени между импульсами составлял 120 с. За этот период образец полностью остывал до начальной температуры T_0 , вследствие чего кумулятивный эффект нагрева отсутствовал.

Режим высокоэнергетического импульсного воздействия (ВЭИО) был выбран в соответствии с подходом, предложенным в работе [1]. Данный подход использует единственный параметр управления — удельную энергию импульса тока q , вместо одновременного подбора нескольких параметров, таких как плотность тока $j_{\infty}(t)$, длительность импульса $t = \tau_0$ и форма импульса, что практиковалось в предшествующих исследованиях.

Удельная энергия импульса тока рассчитывалась по выражению

$$q = \int_0^{\tau_0} \frac{j_{\infty}^2(t)}{\sigma^E} dt, \quad (1)$$

где σ^E — коэффициент электропроводности материала.

Значительные различия размеров и форм дефектов создают существенные трудности при неэмпирическом определении параметров ВЭИО, необходимых для их залечивания и улучшения пластических макроскопических характеристик материала.

Анализ внутренних дефектов показывает, что для подавляющего большинства из них (за исключением газовых пор) характерным является негладкая форма с острыми выступами или вершинами. См.рис.2.

Одной из особенностей подхода, направленного на залечивание дефектов и изложенного в работе [1], является необходимость знания конкретной формы и относительных геометрических размеров залечиваемых дефектов.

В настоящей работе для упрощения будем считать, что все дефекты в материале образцов имеют форму эллиптических цилиндров с образующей, ориентированной вдоль оси Z (см.рис.1А). Основанием таких цилиндров являются эллипсы с большой полуосью a и малой полуосью b . Все эллипсы считаются одинаково ориентированными таким образом, что электрический ток в образце направлен вдоль их малой полуоси, то есть вдоль оси Y .

Для определения режима залечивания используются уравнения (31) и (32), приведённые в работе [1]. Как следует из указанных уравнений, связь удельной энергии импульса тока q с температурой металла T в вершине эллиптического дефекта, радиусом кривизны в вершине

$$R = \frac{b^2}{a}$$

, длиной дефекта a , средним расстоянием между центрами дефектов $2W$, а также с физическими свойствами материала, описывается следующим образом:

$$q = \frac{R}{a} \left(1 - \sqrt{\frac{R}{a}} \right)^2 \frac{\pi a}{2W} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} \frac{a}{W} \right) \rho c (T - T_0), \quad (2)$$

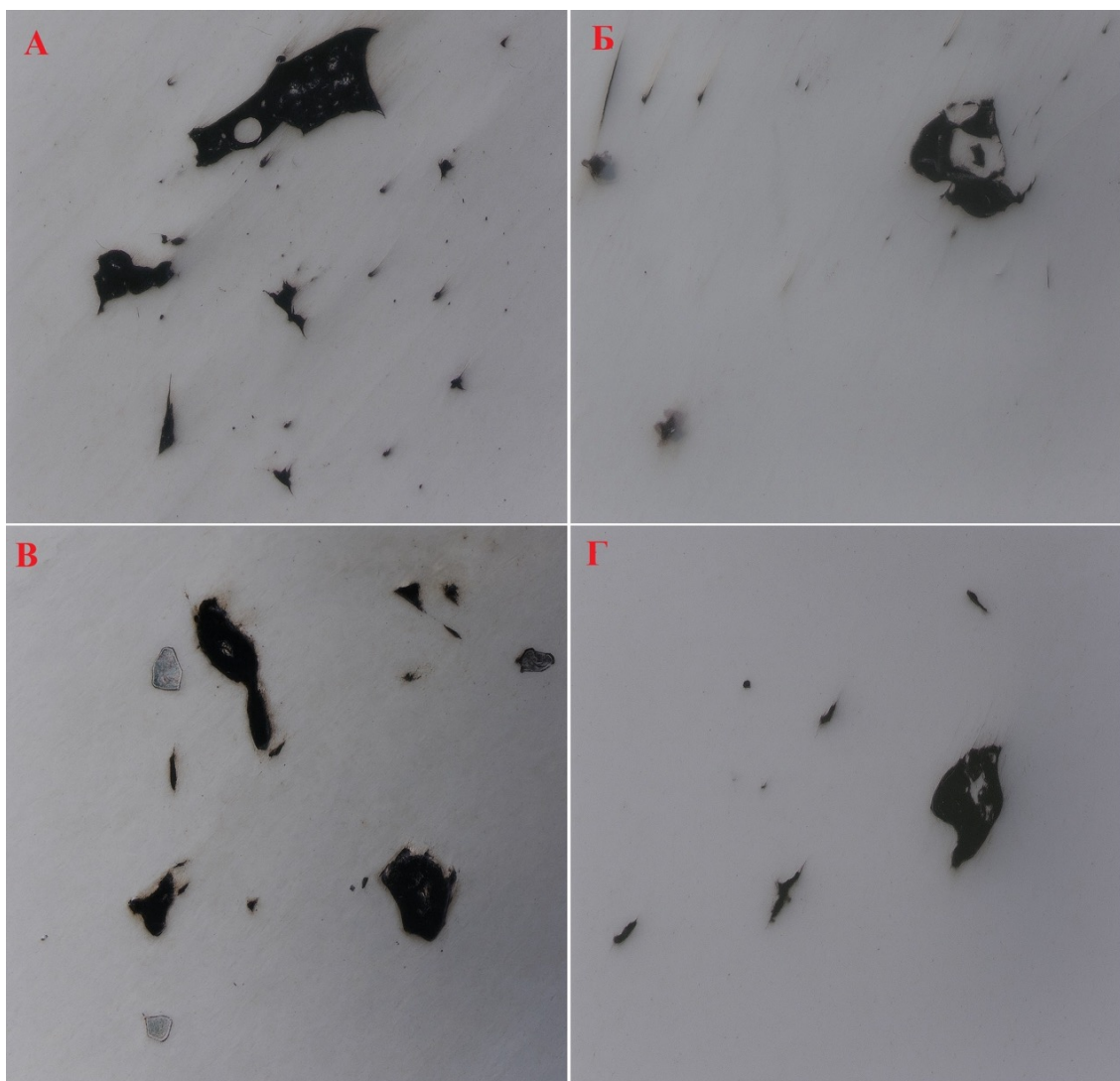


Рис. 2. Различные типы дефектов в материале образцов. Снимки оптического микроскопа с увеличением $\times 200$. Минимальная цифровая обработка - удаление дефектов шлифовки

где s — удельная теплоёмкость материала, ρ — плотность, а T_0 — начальная температура в вершине дефекта.

При этом зависимость (2) является автомодельной по отношению к безразмерным параметрам R/a и a/W . Первый параметр определяет форму микродефектов (далее — параметр формы), тогда как второй характеризует взаимное расположение микродефектов в материале. В дальнейшем все дефекты в исследуемых образцах будут описываться исключительно этими двумя параметрами.

Будем считать, что дефекты имеют вытянутую форму, то есть $b/a < 1$, так что $b^2/a^2 = R/a \ll 1$, и, следовательно, в выражении (2) можно пренебречь

членами порядка $o(R/a)$. Кроме того, будем предполагать, что среднее расстояние между дефектами значительно превышает их максимальный размер a , то есть $a/W \ll 1$, вследствие чего в формуле (2) можно также пренебречь членами порядка $o(a/W)$.

Данные предположения, с учётом наблюдаемой на шлифах геометрии дефектов в материале образцов и расстояний между ними, соответствуют действительности (см. рис.2).

Во введении отмечалось, что залечивание дефектов путём сварки их берегов происходит преимущественно в областях острых вершин дефектов, где импульс тока вызывает одновременное плавление металла и его сжатие. Процесс протекает пошагово: с каждым импульсом вершина дефекта смещается к центру эллипса вдоль его большой полуоси.

Пусть режим ВЭИО состоит из $N + 1$ импульсов с номерами $n = 0, 1, \dots, N$. В работе [1] предложено поддерживать для каждого импульса $n = 0, 1, \dots, N$ постоянную внутреннюю энергию в вершине дефекта, равную энергии первого импульса, что обеспечивает последовательные плавление и сварку дефекта.

Для этого энергия первого по порядку импульса из последовательности импульсов ВЭИО, q_0 , должна выбираться таким образом, чтобы при прохождении данного импульса залечивание в вершине дефекта заведомо происходило. Иными словами, в конкретных экспериментах энергия q_0 должна быть достаточной для обеспечения залечивания дефекта. Такой режим (или совокупность режимов в зависимости от выбранного значения q_0) далее будем называть предпочтительным.

Мерой внутренней энергии в вершине дефекта является температура $(T - T_0)$, входящая в уравнение (2). Тогда, с учётом сделанных выше допущений, из уравнения (2) следует, что предпочтительный режим описывается соотношением, аналогичным уравнению (35) в работе [1]:

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{R_{n+1} a_n}{R_n a_{n+1}}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (3)$$

Здесь q_{n+1} и q_n — энергии двух последовательных импульсов тока, R_{n+1} и R_n , а также a_{n+1} и a_n — соответствующие геометрические параметры дефекта, изменяющиеся в процессе прохождения этих импульсов. Уравнение (3) отношение энергий импульсов тока с изменяемыми в процессе залечивания геометрическими размерами дефекта.

Будем считать, что дефект залечивается равномерно: за каждый импульс заваривается одинаковый малый участок Δa в вершине дефекта, и через n импульсов его начальная длина a_0 уменьшится до $a_n = a_0 - n \cdot \Delta a$, при $\Delta a/a_0 \ll 1$.

Также будем считать, что с каждым n -м импульсом размер малой полуоси дефекта b_n изменяется незначительно, т. е. считаем $b_n = b_0$, где b_0 — начальный размер малой полуоси. Данное предположение соответствует результатам расчётов [11–13]. Поэтому на n -ом шаге для радиуса кривизны R_n в новой вершине дефекта имеем:

$$R_n = \frac{b_n^2}{a_n} = \frac{R_0}{1 - n(\Delta a/a_0)}, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (4)$$

где $R_0 = b_0^2/a_0$ — начальный радиус кривизны в вершине дефекта.

С учётом сделанных предположений, для того чтобы при каждом n -ом импульсе в вершинах происходило плавление и, соответственно, могло происходить заваривание берегов дефекта, из уравнений (3) и (4) следует, что энергия каждого n -го импульса q_n должна увеличиваться в соответствии с зависимостью:

$$q_n = \frac{q_0}{(1 - n(\Delta a/a_0))^2}, \quad (5)$$

где q_0 — энергия начального импульса.

Если выполняется условие $n(\Delta a/a_0) \ll 1$, то выражение (5) можно аппроксимировать линейной зависимостью

$$q_n = q_0 (1 + 2n(\Delta a/a_0)), \quad (6)$$

где q_0 — энергия начального импульса.

Для конкретизации выражения (5) применительно к дефектам в исследуемых образцах воспользуемся следующими соображениями.

В исследуемых образцах выявлены микродефекты с различными параметрами формы R_0/a_0 . В соответствии с уравнением (2), чем меньше R_0/a_0 (т. е. чем острее дефект), тем меньшая начальная энергия q_0 требуется для его заживления.

В наших экспериментах мы будем заживать микродефекты с параметром формы, лежащим в диапазоне $1,6 \cdot 10^{-3} \leq R_0/a_0 \leq 1,2 \cdot 10^{-1}$. Его нижняя граница соответствует по параметру формы усталостным трещинам [16], а верхняя — овальным порам.

По известным свойствам стали 316L, используя уравнение (2), определяем энергии импульсов, соответствующие нижней и верхней границам диапазона параметра формы R_0/a_0 :

$$1,1 \cdot 10^7 \text{ Дж/м}^3 < q_n < 3,8 \cdot 10^8 \text{ Дж/м}^3.$$

Из экспериментов по заживлению макротрещин в пластинах из нержавеющей стали с отношением $R_0/a_0 = (1,2-1,8) \cdot 10^{-3}$ нам известна начальная энергия импульса, при которой в вершине таких трещин начинается заживление путём сварки их берегов, $q_0 = 1,88 \cdot 10^7 \text{ Дж/м}^3$ [16].

Исходя из этих экспериментальных данных, скорректируем диапазон энергий импульсов:

$$1,37 \cdot 10^7 \text{ Дж/м}^3 \leq q_n \leq 4,75 \cdot 10^8 \text{ Дж/м}^3.$$

Таким образом, для зависимости (5) имеем $q_0 = 1,37 \cdot 10^7 \text{ Дж/м}^3$, $q_N = 4,75 \cdot 10^8 \text{ Дж/м}^3$. При $N = 9$ из уравнения (5) определяем, что для предпочтительного режима $\Delta a/a_0 = 0,083$.

Для простоты разделим залечиваемые микродефекты в материале образцов на две большие группы: с острыми вершинами, для которых $R_0/a_0 = 1,6 \cdot 10^{-3} - 2,25 \cdot 10^{-2}$, и с тупыми вершинами, для которых $R_0/a_0 = 2,25 \cdot 10^{-2} - 1,2 \cdot 10^{-1}$. Для этих двух групп аппроксимируем зависимость (5) двумя прямыми:

Для их залечивания используем режим ВЭИО с двумя линейными ветвями вида (5):

$$q_n = q'_0 \left(1 + \frac{2n\Delta a'}{a_0} \right), \quad n = 0, 1, \dots, 4,$$

где $q'_0 = 0,14 \cdot 10^8$ Дж/м³, $\Delta a'/a_0 = 1,33 \cdot 10^{-2}$.

$$q_n = q''_0 \left(1 + \frac{2(n-5)\Delta a''}{a_0} \right), \quad n = 5, \dots, 9,$$

где $q''_0 = 1,51 \cdot 10^8$ Дж/м³, $\Delta a''/a_0 = 2 \cdot 1,33 \cdot 10^{-2}$.

Изменение единственного параметра предпочтительного режима q_n представлено в табл. 1.

n	$q_n, 10^9$ Дж/м ³
0	0,014
1	0,027
2	0,042
3	0,058
4	0,074
5	0,151
6	0,221
7	0,301
8	0,376
9	0,475
Итого	1,739

Таблица 1. Изменение удельной энергии импульсов q_n в предпочтительном режиме ВЭИО

Результаты и обсуждение Для иллюстрации результатов эксперимента на рис. 3 приведены кривые номинальное напряжение–деформация. В табл. 2 указаны результаты испытаний на разрыв.

С помощью воздействия электромагнитным полем в предпочтительном режиме ВЭИО удалось увеличить показатель средней предельной пластической деформации до разрушения $\bar{\varepsilon}_F$ на 30% (с 24,73% до 32,30%) при незначительном снижении среднего предела прочности $\bar{\sigma}_b$ на 4% (с 0,655 кН/мм² до 0,629 кН/мм²). То есть в результате ВЭИО пластичность материала существенно возрастает при незначительных потерях в прочности материала.

Кроме того, в экспериментах наблюдается снижение показателей стандартного отклонения ε_F на 70% и σ_B на 32% соответственно. Снижение дисперсии говорит о том, что в результате предложенного воздействия ВЭМП пластические свойства образцов стали более предсказуемыми и менее изменчивыми от образца к образцу.

Группа	$\overline{\sigma_B}$, кН/мм ²	$\overline{\varepsilon_F}$, %	s_{σ_B} , кН/мм ²	s_{ε_F} , %	$\sum q_i$, 10 ⁹ Дж/м ³
Обработанные (5 шт.)	0,655	24,73	0,041	7,78	—
Необработанные (5 шт.)	0,629	32,30	0,028	2,29	1,739

Таблица 2. Результаты испытаний на разрыв обработанных ВЭМП и необработанных образцов

$\overline{\sigma_B}$ — средний предел прочности, $\overline{\varepsilon_F}$, % — среднее относительное удлинение, s_{σ_B} — стандартное отклонение предела прочности, s_{ε_F} — стандартное отклонение относительного удлинения, $\sum q_i$ — суммарная удельная рассеянная энергия.

Одной из целей настоящей работы является экспериментальное подтверждение заживления при ВЭИО в предпочтительном режиме микропор и микротрещин в широком диапазоне размеров (от 5 мкм до 250 мкм), образовавшихся в АМ в результате изготовления методом СЛП. До настоящего времени такие экспериментальные подтверждения отсутствовали. При этом объектом исследования являются непосредственно изменения пористости и микроструктуры дефектов АМ.

Для достижения данной цели был проведён анализ микроструктуры изломов (см. рис. 4). Исследование микростроения изломов необработанных образцов показывает, что их микроструктура характеризуется существенной неоднородностью. На изломах необработанных образцов наблюдаются многочисленные микродефекты-несплавления неправильной формы с острыми вершинами, внутри них видны нерасплавленные частицы порошка (рис. 4А). Вокруг этих пустот видны границы ванн расплава. Границы ванн расплава являются предпочтительными путями разрушения при растяжении по вязкому механизму, о чём свидетельствуют равноосные и вытянутые ямки на изломе (рис. 4А). Дефекты неправильной формы служат концентраторами напряжений и способствуют катастрофическому образованию макротрещин, распространяющихся по границам ванн расплава перпендикулярно направлению растяжения. В этом смысле механизм разрушения необработанных образцов имеет квазивязкий характер.

В обработанных образцах изломы отличаются значительной однородностью, с равноосными ямками и глубокими порами овальной формы, что указывает на чисто вязкий механизм разрушения (рис. 4Б).

Таким образом, в результате применения предпочтительного режима ВЭИО изменился механизм разрушения образцов. Если до обработки разрушение было

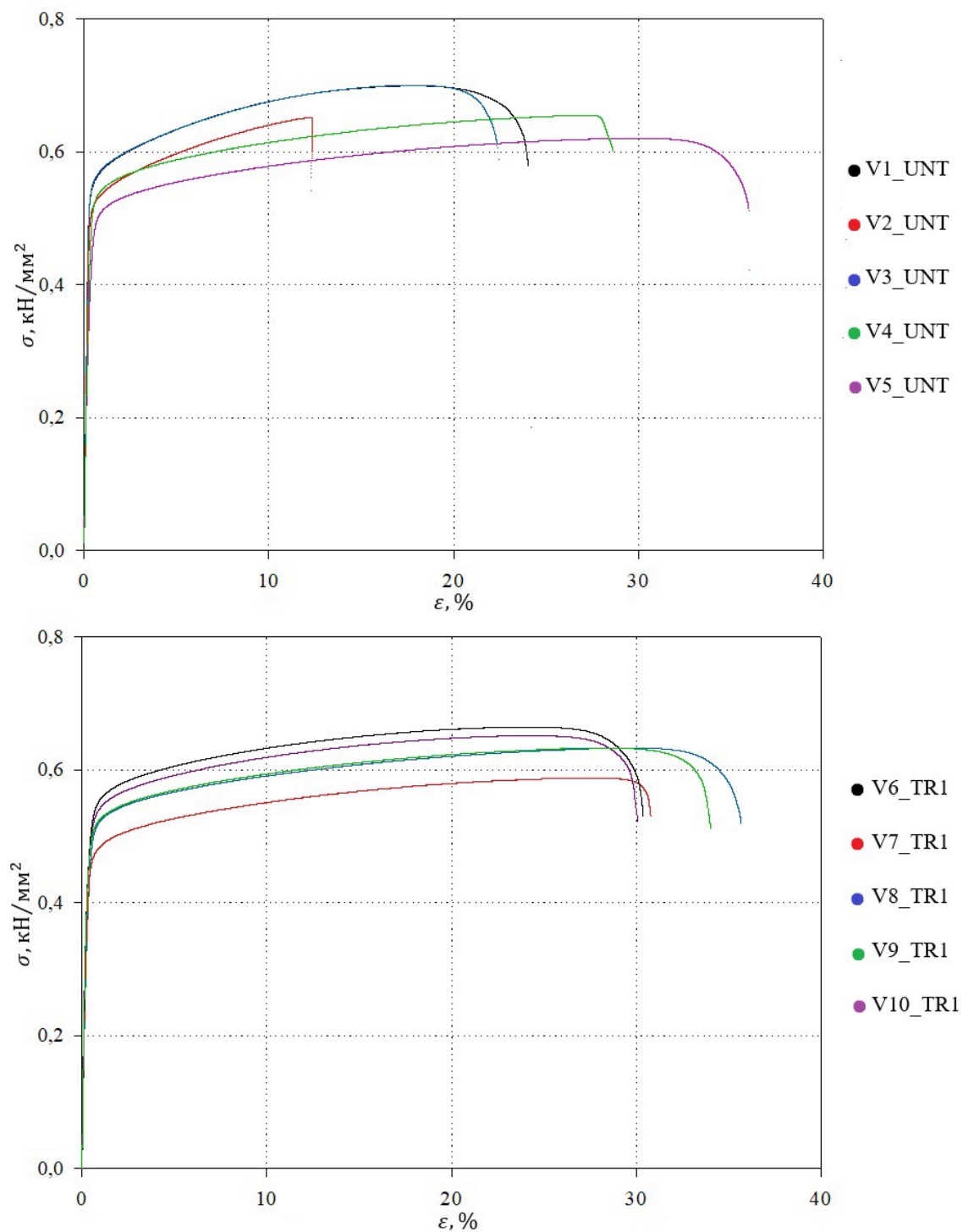


Рис. 3. Кривые номинальное напряжение-деформация необработанных образцов (сверху) и образцов, обработанных ВЭМП (снизу)

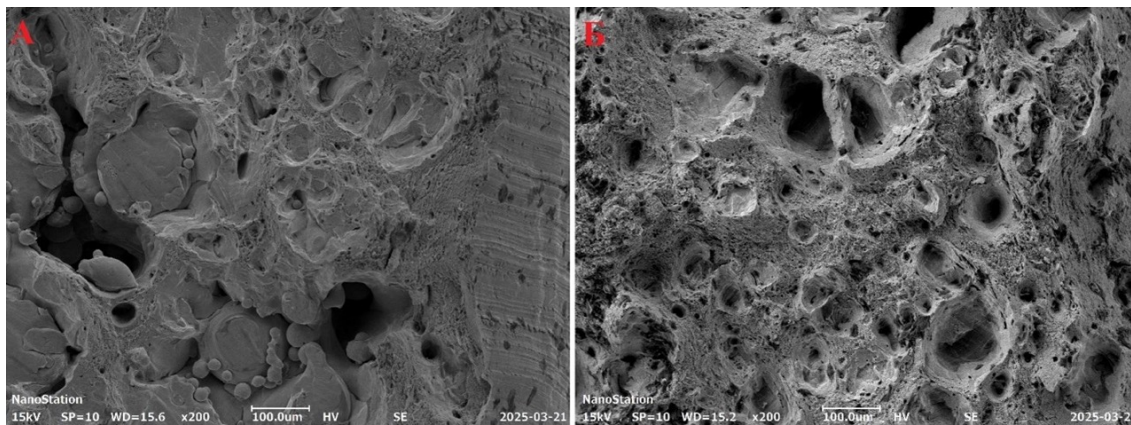


Рис. 4. Типичное микростроение изломов до (А) и после ВЭИО (Б)

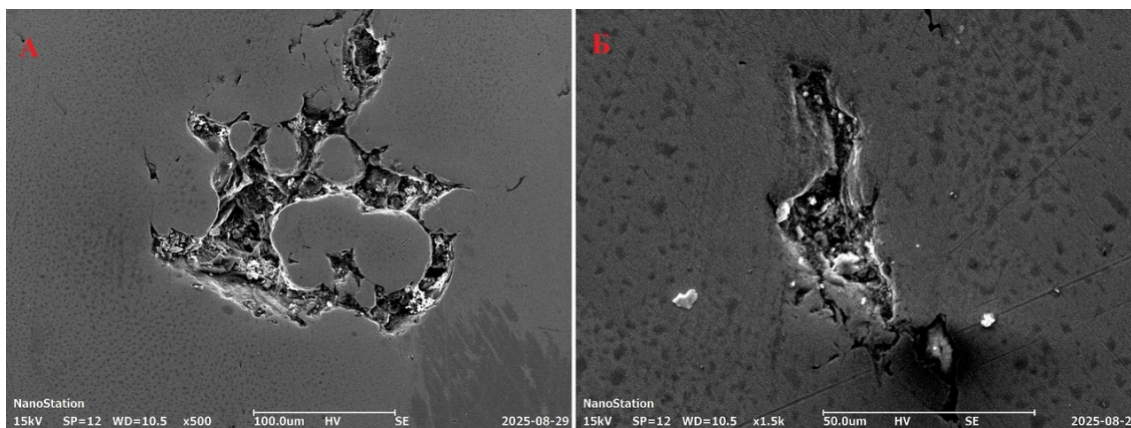


Рис. 5. Типичные внутренние микродефекты в образцах до ВЭИО (А) и после ВЭИО (Б)

квазивязким, то после ВЭИО оно стало чисто вязким. В том числе это связано с уменьшением количества и изменением формы концентраторов напряжений. Данный результат подтверждает, что предпочтительный режим ВЭИО способствует заживлению микродефектов в материале.

Исследование микроструктуры в оптическом микроскопе показало, что в необработанных образцах до ВЭИО содержится множество микродефектов различных форм и размеров: от 0,2 мкм до 250 мкм. Большинство дефектов имеют неправильные формы с острыми вершинами. Типичные формы микродефектов в образцах представлены ранее на рис. 2. Среди них: крупные несплавления (50–250 мкм), крупные поры и трещины (10–50 мкм), мелкие трещины и поры (< 10 мкм), а также газовые поры (0,2–2 мкм). После ВЭИО микродефекты

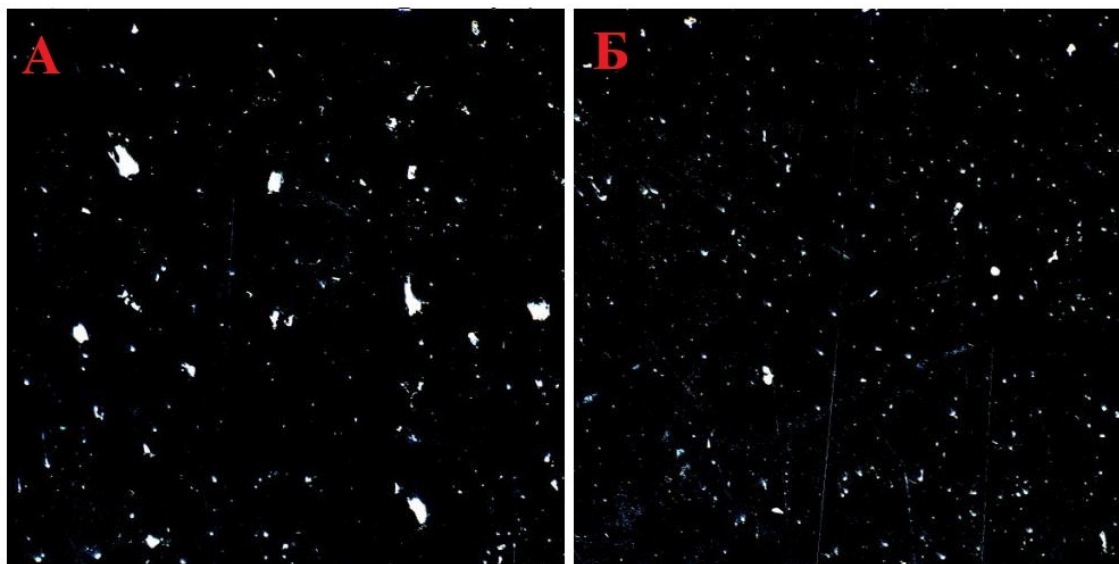


Рис. 6. Панорамные фотографии типичного шлифа, полученные в оптическом микроскопе: (А) до ВЭИО, (Б) после ВЭИО. Размер снимка (тёмного поля) составляет 1825 мкм × 1825 мкм.

существенно изменяются: их формы становятся более гладкими, без острых вершин (см. рис. 5).

Отметим, что после ВЭИО в стали произошли твердотельные фазовые переходы с образованием новой фазы (тёмные пятнышки на светлом фоне на рис. 5А). Тогда как в окрестности дефектов новая фаза отсутствует (светлая область вокруг дефекта на рис. 5Б). По нашему мнению, это свидетельствует о плавлении, произошедшем в окрестности дефекта, и заживлении микродефектов по механизму, описанному во введении.

Возможно предположить, что изменение фазового состава также повлияло на изменение типа разрушения обработанной стали, однако данное утверждение требует дальнейшего исследования.

На рис. 6А показана микроструктура шлифа необработанного образца, а на рис. 6Б — обработанного после ВЭИО. Микродефекты видны как белые области на чёрном фоне. Сравнение рис. 6А и 6Б показывает, что количество и распределение микродефектов существенно различаются. До ВЭИО образец более пористый и содержит больше крупных микродефектов (рис. 6А), тогда как после ВЭИО их количество значительно меньше (рис. 6Б). Визуально заметно, что предпочтительный режим ВЭИО эффективно снижает пористость и количество крупных микродефектов.

Для количественного анализа было использовано открытое программное обеспечение Porosity Calculator Matlab. С помощью Porosity Calculator рассчитывалась пористость по фотографиям поверхностей шлифов, аналогичным показанным на рис. 6. Всего с помощью Porosity Calculator было обработано и

рассчитана пористость на суммарной площади шлифов $9,9 \text{ мм}^2$ сечений образцов до и после ВЭИО (в трёх произвольно выбранных сечениях образцов).

Расчёты пористости показали, что в результате ВЭИО пористость залечилась с 0,93% до 0,63%, т. е. произошло уменьшение пористости на 32%.

Таким образом, проведённые исследования подтверждают, что в результате воздействия ВЭИО при предложенном определении параметров предпочтительного режима в СЛМ-стали 03X16H15M3 происходит залечивание микродефектов. Механизм этого залечивания следующий: при воздействии импульсом ВЭМП в острых вершинах внутренних микротрещин и микропор происходит сильная концентрация электромагнитного поля, интенсивное выделение джоулева тепла в короткий промежуток времени, возникновение сжимающих термических напряжений с одновременным разупрочнением и плавлением металла в этих областях. В совокупности это приводит к тому, что внутренние микротрещины и микропоры изменяют форму, уменьшаются в объёме, а их берега свариваются расплавленным металлом.

Выводы ВЭИО в предложенном предпочтительном режиме способна залечивать микротрещины и микропоры с линейными размерами 5–250 мкм в нержавеющей стали 03X16H15M3, изготовленной методом СЛП. Вследствие залечивания внутренних микродефектов произошло существенное улучшение механических характеристик образцов.

Проведённые исследования показывают, что высокоэнергетическая ЭИО даже при низком качестве печати позволяет улучшить механические характеристики АМ, повысить предсказуемость и уменьшить вариабельность его макроскопического поведения.

Полагаем, ВЭИО обладает большим потенциалом для применения при залечивании внутренних микродефектов и улучшения механических характеристик деталей из АМ.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. К. К. Кукуджанов: Автор внёс вклад во все этапы подготовки статьи. Конфликт интересов. Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена по теме государственного задания ИП-Мех РАН (номер госрегистрации 124013000674-0).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. K. K. Kukudzhyanov: The author contributed to all stages of the study.

Competing interests. The author declares that he has no competing interests.

Funding. The study was supported by the Government program (contract 124013000674-0).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kukudzhанov K. V., Chentsov A. V. The energy of short current pulses required for healing cracks in conductive materials // *Mechanics of Solids*. – 2024. – Т. 59, № 8. – С. 3929–3948. – DOI: 10.1134/S0025654424607031. – EDN: CDXWYM.
2. Noell P. J. Microstructural modification of additively manufactured metals by electropulsing // *Additive Manufacturing*. – 2020. – Т. 33. – DOI: 10.1016/j.addma.2020.101128. – EDN: RGZJOQ.
3. Xue L., Liao C. Improvement of mechanical properties and corrosion resistance of SLM- AlSi10Mg alloy by an eco-friendly electric pulse treatment // *Journal of Cleaner Production*. – 2024. – Т. 439. – DOI: 10.1016/j.jclepro.2024.140864. – EDN: DFKLCI.
4. Guo H., Liu P. Electroshock treatment dependent microstructural evolution and mechanical properties of near- β titanium alloy manufactured by directed energy deposition // *Materials & Design*. – 2021. – Т. 212. – DOI: 10.1016/j.matdes.2021.110286. – EDN: NECCVS.
5. Liu C., Yin F. Evolution of grain boundary and texture in TC11 titanium alloy under electroshock treatment // *Journal of Alloys and Compounds*. – 2022. – Т. 904. – DOI: 10.1016/j.jallcom.2022.163969. – EDN: BVDPZB.
6. Shijing F., He B. Effect of pulse current density on microstructure of Ti-6Al-4V alloy by laser powder bed fusion // *Metals*. – 2022. – Т. 12, № 8. – DOI: 10.3390/met12081327. – EDN: XZRAFU.
7. Yan X., Xu X. a. A novel electropulsing treatment to improve the surface strength and repair the pore of additively manufactured Ti-6Al-4V alloy // *Surface and Coatings Technology*. – 2023. – Т. 458. – DOI: 10.1016/j.surfcoat.2023.129364. – EDN: CCXPFO.
8. Cai Q., Rodriguez P. R. Crack healing via electropulsing treatment applied to additive-manufactured TiC/316L stainless steel composites // *Materials Letters*. – 2024. – Т. 365. – DOI: 10.1016/j.matlet.2024.136410. – EDN: QWBZJE.
9. Кукуджанов К. К. Обзор исследований по улучшению пластических характеристик аддитивных материалов под действием сильного импульсного тока // *Механика твердого тела*. – 2025. – Т. 60, № 4. – С. 2353–2369. – DOI: 10.1134/S0025654425600114. – EDN: CWZCNG.
10. Кукуджанов К. В. Моделирование воздействия высокоэнергетического импульсного электромагнитного поля на микротрещины в поликристаллическом металле // *Вестник ПНИПУ. Механика*. – 2015. – № 4. – С. 138–158. – DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.09. – EDN: VBWYKV.
11. Кукуджанов К. В., Левитин А. Л. Процессы трансформации и взаимодействия микротрещин в металле под воздействием высокоэнергетического импульсного электромагнитного поля // *Вестник ПНИПУ. Механика*. – 2016. – № 2. – С. 89–110. – DOI: 10.15593/perm.mech/2016.2.07. – EDN: WBWQAX.
12. Кукуджанов К. В. Моделирование заживления поврежденности металла высокоэнергетическим импульсным электромагнитным полем // *Письма о материалах*. – 2018. – Т. 8, № 1. – С. 27–32. – DOI: 10.22226/2410-3535-2018-1-27-32. – EDN: YRTPXY.
13. Kukudzhанov K. V., Khalikova G. Healing of long fatigue cracks in steel plates by high-density current pulses // *Mechanics of Solids*. – 2024. – Т. 59. – С. 3223–3234. – DOI: 10.1134/S0025654424605949. – EDN: KGIOUR.

14. Cai Q. New insight into crack-healing mechanism via electropulsing treatment // Metallurgical and Materials Transactions A. – 2023. – Т. 54, № 7. – С. 2960–2974. – DOI: 10.1007/s11661-023-07073-1. – EDN: DRCNYR.
15. Kukudzhанov K. V., Korznikova. A novel approach to determining the parameters of electric pulse healing of fatigue cracks // Materials Letters. – 2025. – DOI: 10.1016/j.matlet.2025.139565. – EDN: HYNPQC.
16. Kukudzhанov K. V. Healing of discontinuities in metal by the strong electromagnetic field treatment // Journal of Physics: Conference Series. – 2024. – Т. 2817, № 1. – DOI: 10.1088/1742-6596/2817/1/012032. – EDN: DVJXCK.

REFERENCES

1. Kukudzhанov K. V., Chentsov A. V. The energy of short current pulses required for healing cracks in conductive materials // Mechanics of Solids. – 2024. – Vol. 59, no. 8. – P. 3929–3948. – DOI: 10.1134/S0025654424607031. – EDN: CDXWYM.
2. Noell P. J. Microstructural modification of additively manufactured metals by electropulsing // Additive Manufacturing. – 2020. – Vol. 33. – P. 101128. – DOI: 10.1016/j.addma.2020.101128. – EDN: RGZJQJ.
3. Xue L., Liao C. Improvement of mechanical properties and corrosion resistance of SLM-AlSi10Mg alloy by an eco-friendly electric pulse treatment // Journal of Cleaner Production. – 2024. – Vol. 439. – P. 140864. – DOI: 10.1016/j.jclepro.2024.140864. – EDN: DFKLCI.
4. Guo H., Liu P. Electroshock treatment dependent microstructural evolution and mechanical properties of near- β titanium alloy manufactured by directed energy deposition // Materials & Design. – 2021. – Vol. 212. – P. 110286. – DOI: 10.1016/j.matdes.2021.110286. – EDN: NECCVS.
5. Liu C., Yin F. Evolution of grain boundary and texture in TC11 titanium alloy under electroshock treatment // Journal of Alloys and Compounds. – 2022. – Vol. 904. – P. 163969. – DOI: 10.1016/j.jallcom.2022.163969. – EDN: BVDPZB.
6. Shijing F., He B. Effect of pulse current density on microstructure of Ti-6Al-4V alloy by laser powder bed fusion // Metals. – 2022. – Vol. 12, no. 8. – DOI: 10.3390/met12081327. – EDN: XZRAFU.
7. Yan X., Xu X. A novel electropulsing treatment to improve the surface strength and repair the pore of additively manufactured Ti-6Al-4V alloy // Surface and Coatings Technology. – 2023. – Vol. 458. – P. 129364. – DOI: 10.1016/j.surfcoat.2023.129364. – EDN: CCXPFO.
8. Cai Q., Rodriguez P. R. Crack healing via electropulsing treatment applied to additive-manufactured TiC/316L stainless steel composites // Materials Letters. – 2024. – Vol. 365. – P. 136410. – DOI: 10.1016/j.matlet.2024.136410. – EDN: QWBZJE.
9. Kukudzhанov K. K. Review of studies on improving plastic properties of additively manufactured materials under strong pulsed current // Mechanics of Solids. – 2025. – Vol. 60, no. 4. – P. 2353–2369. – DOI: 10.1134/S0025654425600114. – EDN: CWZCNG. – (in Russian).
10. Kukudzhанov K. V. Modeling of the effect of a high-energy pulsed electromagnetic field on microcracks in a polycrystalline metal // Vestnik of Perm National Research

- Polytechnic University. Mechanics. – 2015. – No. 4. – P. 138–158. – DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.09. – EDN: VBWYKV. – (in Russian).
11. *Kukudzhanov K. V., Levitin A. L.* Transformation and interaction processes of microcracks in metal under high-energy pulsed electromagnetic field // Vestnik of Perm National Research Polytechnic University. Mechanics. – 2016. – No. 2. – P. 89–110. – DOI: 10.15593/perm.mech/2016.2.07. – EDN: WBWQAX. – (in Russian).
 12. *Kukudzhanov K. V.* Modeling of damage healing in metal by a high-energy pulsed electromagnetic field // Letters on Materials. – 2018. – Vol. 8, no. 1. – P. 27–32. – DOI: 10.22226/2410-3535-2018-1-27-32. – EDN: YRTPXY. – (in Russian).
 13. *Kukudzhanov K. V., Khalikova G.* Healing of long fatigue cracks in steel plates by high-density current pulses // Mechanics of Solids. – 2024. – Vol. 59. – P. 3223–3234. – DOI: 10.1134/S0025654424605949. – EDN: KGIOUR.
 14. *Cai Q.* New insight into crack-healing mechanism via electropulsing treatment // Metallurgical and Materials Transactions A. – 2023. – Vol. 54, no. 7. – P. 2960–2974. – DOI: 10.1007/s11661-023-07073-1. – EDN: DRCNYR.
 15. *Kukudzhanov K. V., Korznikova E. A.* A novel approach to determining the parameters of electric pulse healing of fatigue cracks // Materials Letters. – 2025. – P. 139565. – DOI: 10.1016/j.matlet.2025.139565. – EDN: HYNPQC.
 16. *Kukudzhanov K. V.* Healing of discontinuities in metal by the strong electromagnetic field treatment // Journal of Physics: Conference Series. – 2024. – Vol. 2817, no. 1. – P. 012032. – DOI: 10.1088/1742-6596/2817/1/012032. – EDN: DVJXCK.

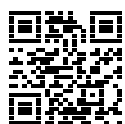
К. С. Стрелков¹

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ДАВЛЕНИЙ В УПЛОТНИТЕЛЬНОМ УЗЛЕ ПРЕМИАЛЬНЫХ РЕЗЬБОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

¹Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
Аннотация. В статье разработан аналитический подход к определению закона распределения контактных давлений в зоне радиального уплотнения премиальных резьбовых соединений, основанный на положениях теории контактных задач упругости и общей теории тонкостенных цилиндрических оболочек вращения. Актуальность исследования связана с необходимостью обеспечения требуемого уровня герметичности и эксплуатационной надежности соединений класса «Премиум», применяемых при строительстве нефтегазовых скважин. Построение аналитической модели осуществляется на основе системы допущений, позволяющих получить расчетные соотношения для определения распределения контактных давлений вдоль уплотнительного сопряжения герметизирующего узла. В расчетной постановке учитываются геометрия контактирующих тел, величина радиального натяга, а также упругие постоянные материалов взаимодействующих элементов. В качестве примера для проверки применимости предложенная расчетная схема рассматривается премиальное резьбовое соединение ОМК VEGA со сферической геометрией уплотнительной поверхности. Верификация аналитического решения выполнена путём сопоставления с результатами численного моделирования процесса сборки соединения в осесимметричной постановке методом конечных элементов. Также показано отсутствие влияния радиального натяга в резьбе на прогибы уплотнительного узла соединения. Получено удовлетворительное совпадение эпюр контактных давлений, что подтверждает адекватность принятых предположений и применимость разработанной модели. Предложенный аналитический инструмент может использоваться на стадии предварительного проектирования для оценки влияния конструктивных параметров на уровень контактных давлений и условия обеспечения герметичности. Кроме того, данный подход представляет интерес для решения более общего класса осесимметричных контактных задач теории упругости, связанных с радиально нагруженными оболочками вращения.

Ключевые слова: теория контактного взаимодействия, цилиндрическая оболочка, радиальное уплотнение типа «металл-металл», премиальное резьбовое соединение.

Стрелков Кирилл Сергеевич, аспирант лаборатории механики новых материалов и технологий; e-mail: ks.strelkov@yandex.ru; <https://orcid.org/0009-0001-9203-9599>



для цитирования: Стрелков К. С. Математическая модель распределения контактных давлений в уплотнительном узле премиальных резьбовых соединений // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 75–81. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.004. EDN: ENYDUP

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

K. S. Strelkov¹

MATHEMATICAL MODEL OF THE CONTACT PRESSURE DISTRIBUTION IN THE PREMIUM THREADED CONNECTIONS SEAL

¹I. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

Abstract. The paper develops an analytical approach for determining the law of contact pressure distribution in the radial sealing zone of premium threaded connections. It is based on elastic contact theory and the general theory of cylindrical shells. The relevance of the study is associated with the need to ensure the required level of gas sealability and operational reliability of premium threaded connections used in oil and gas wells. The analytical model is formulated on the basis of a set of assumptions enabling the derivation of relationships for evaluating the distribution of contact pressures along the interface of the metal-to-metal sealing. The problem formulation accounts for the geometry of the contact bodies, the magnitude of radial interference and material constants of the interacting bodies. The proposed structural model is validated using the OMK VEGA premium threaded connection model with a spherical sealing surface geometry. Verification of the analytical solution is carried out through comparison with numerical simulations of the connection make-up process performed in an axisymmetric formulation using the finite element method (FEM). A satisfactory agreement between the analytical and numerical contact pressure distributions is obtained, confirming the applicability of the proposed model. The developed analytical tool can be employed at the preliminary design stage to assess the influence of key geometric and mechanical parameters on contact pressure levels and sealing performance. Furthermore, the approach is applicable to a broader class of axisymmetric elastic contact problems involving radially loaded shells.

Keywords: contact theory, cylindrical shell, radial «metal-to-metal» sealing, premium threaded connection

Kirill S. Strelkov, Scientific Researcher; e-mail: ks.strelkov@yandex.ru;

<https://orcid.org/0009-0001-9203-9599>



to cite this article: Strelkov K.S. Mathematical model of the contact pressure distribution in the premium threaded connections seal // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 75–81. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.004

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. При строительстве нефтегазовых скважин важнейшим элементом для формирования колонны труб являются резьбовые соединения. Особое место среди присоединительных элементов труб нефтегазового сортамента занимают резьбовые соединения класса «Премиум». Такие соединения, помимо специальных профилей резьбы, обладают конструктивным элементом, обеспечивающим газовую герметичность в скважине – уплотнительным узлом, формирующим радиальный натяг при свинчивании соединения. При этом контактные поверхности уплотнения могут быть выполнены в различных геометрических комбинациях: конус-конус, сфера-конус, сфера-сфера и т.д. Для описания распределения контактных давлений на этих поверхностях и, в дальнейшем, оценки герметизирующей способности резьбового соединения, может быть использована теория контактного взаимодействия Герца. Одно из условий в постановке задачи Герца заключается в том, что тела вдавливаются друг в друга на заданное расстояние. В случае премиального резьбового соединения данный подход не отражает реальных условий взаимодействия тел, так как в трубах, соединяемых при помощи муфты, носик, на котором выполнено радиальное уплотнение, обладает определенной податливостью, что не соответствует постановке задачи Герца. В случае труб, соединяемых друг с другом без использования муфт, необходимо также учитывать податливость раструбной части соединения. Целью данной работы является создание аналитической модели, описывающей распределение контактных давлений с учетом податливости носика трубы резьбового соединения.

1. Описание перемещений при сборке резьбового соединения. Для того, чтобы в контактной модели учесть податливость носика с радиальным уплотнением, рассмотрим трубу с нарезанной конической резьбой как цилиндрическую оболочку [1] с усредненной толщиной, нагруженную сосредоточенным усилием P на расстоянии x_0 от торца трубы. Такая расчетная схема соответствует свинченному нишпелю с муфтой с учетом радиального натяга в уплотнительном узле. В данном случае, в соответствии с общей теорией деформирования цилиндрических оболочек, прогибы будут представлять собой следующую функцию осевой координаты [2]:

$$v(x) = e^{-\beta(x-x_0)} [C_1 \cos \beta(x-x_0) + C_2 \sin \beta(x-x_0)] \quad (1)$$

В выражении (1) $\beta = \sqrt{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2 h^2}}$ — коэффициент затухания перемещений, μ — коэффициент Пуассона, R — радиус оболочки, представляющий собой среднее значение между радиусом средней линии резьбы и уплотнения в измерительных плоскостях. Обоснование выбора такой величины приведено в [1], при этом h — соответствующая толщина оболочки для радиуса R , C_1 и C_2 — неизвестные постоянные.

В качестве примера рассмотрим трубу с резьбовым соединением ОМК VEGA [3] с внешним диаметром 177.8 мм, толщиной стенки 10.36 мм, длиной 12 метров, выполненной из стали группы прочности P110. Коэффициент

Пуассона примем равным 0.3. Для такого случая величина $\beta = 30 \text{ м}^{-1}$. Это означает, что уже на длине 100 мм прогибы затухают примерно в 460 раз, что подтверждает корректность применения указанного решения типа краевого эффекта (1).

Для нахождения постоянных в выражении (1), используем граничные условия для изгибающего момента и поперечной силы:

$$M_x \Big|_{x=0} = -D \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad Q_x \Big|_{x=x_0} = -D \frac{d^3 v}{dx^3} \Big|_{x=x_0} = -P \quad (2)$$

В условиях (2) $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость, E — модуль упругости.

Из граничных условий (2) находятся неизвестные постоянные $C_1 = -\frac{P}{2D\beta^3}$, $C_2 = 0$. В итоге выражение для прогибов ниппеля при действии радиальной нагрузки у торца принимает следующий вид:

$$v(x) = -\frac{P}{2D\beta^3} e^{-\beta(x-x_0)} \cos \beta(x-x_0) \quad (3)$$

На Рис. 1 представлено сравнение прогибов, полученных при помощи выражения (3) и метода конечных элементов (МКЭ) путем моделирования сборки резьбового соединения в осесимметричной постановке без учета натяга резьбы и с учетом натяга резьбы. Учитывая, что длина носика, содержащего уплотнительный узел составляет 13 мм, из полученных зависимостей видно, что натяг резьбовой части оказывает несущественное влияние на прогибы уплотнения и в рамках исследования напряженно-деформированного состояния радиального уплотнения им можно пренебречь.

Таким образом, из выражения (3) перемещение в месте приложения усилия (области формирования максимального контактного давления в уплотнении) можно получить в следующем виде:

$$v(x_0) = -\frac{P}{2D\beta^3} = \Delta \quad (4)$$

В выражении (4) Δ — радиальный натяг в уплотнительном узле. Стоит отметить, что выражение (4) получено в предположении, что муфта обладает значительно большей радиальной жесткостью, чем ниппельная часть трубы в виду значительно большей толщины в зоне уплотнительного узла. В случае безмуфтовых резьбовых соединений Δ будет представлять часть от суммарного перемещения ниппельной и раструбной части.

2. Контактная модель радиального уплотнения премиального резьбового соединения. В резьбовом соединении ОМК VEGA радиальное уплотнение имеет сферический тип [4] с выпуклой сферой на ниппеле и вогнутой сферой на

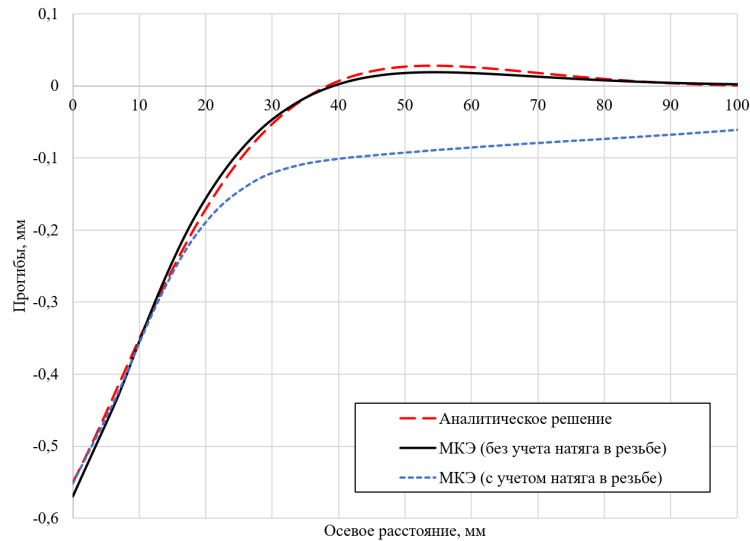


Рис. 1. Сравнение аналитического и численного решения для прогибов ниппеля с учетом и без учета натяга в резьбе.

муфте. Закон распределения контактного давления может быть определён на основе теории Герца для плоской контактной задачи цилиндрических тел [5]:

$$p(s) = \frac{E^*}{2R^*} \sqrt{a^2 - s^2}, \quad R^* = \frac{R_{s1}R_{s2}}{R_{s1} + R_{s2}}, \quad E^* = \frac{E}{2(1 - \mu^2)} \quad (5)$$

В выражении (2): R^* — эквивалентный радиус контактной области, R_{s1} — радиус сферы на уплотнительной поверхности ниппеля, R_{s2} — радиус сферы на уплотнительной поверхности муфты, a — полуширина контактной зоны, E^* — эквивалентный модуль упругости, используемый в плоских задачах теории упругости в случае одинаковых материалов контактирующих тел, s — координата вдоль контактной поверхности в локальной системе координат пятна контакта.

При этом стоит отметить, что в случае уплотнений типа «конус-конус» закон распределения контактных давлений (2) следует заменить на зависимость, полученную в задаче о вдавливании штампа [5].

В качестве нагрузки, используемой в выражениях (2) – (4), примем усилие от радиального натяга на поверхности уплотнения ниппеля, которое можно представить следующим образом [6]:

$$P = \int_{-a}^a p(s) ds \quad (6)$$

Предполагая, что распределение контактных давлений подчиняется закону (2), получим:

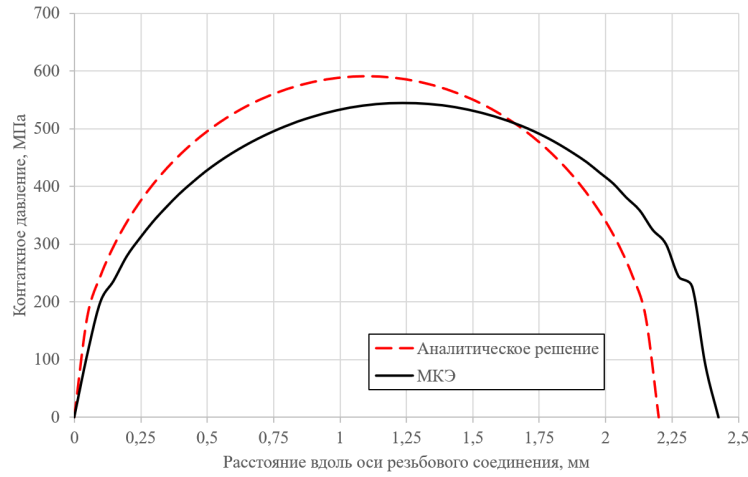


Рис. 2. Зависимость контактного давления от осевой координаты для аналитического и численного решения.

$$P = \frac{E^*}{2R^*} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - s^2} ds = \frac{\pi E^* a^2}{4R^*} \quad (7)$$

Выразив из соотношения (7) полуширину контактной зоны и подставив усилие из (4), получим следующее выражение для полуширины контактной зоны:

$$a = \sqrt{\frac{8D\Delta R^* \beta^3}{\pi E^*}} \quad (8)$$

Таким образом, выражение для распределения контактных давлений принимает следующий вид:

$$p(s) = \frac{E^*}{2R^*} \sqrt{\frac{8D\Delta R^* \beta^3}{\pi E^*} - s^2} \quad (9)$$

На Рис. 2 приведено сравнение распределения контактных давлений для аналитического решения (9) и численного решения, полученного при помощи МКЭ для резьбового соединения в осесимметричной постановке. Видно, что полученные решения хорошо согласуются.

Заключение. В работе приведена аналитическая модель распределения контактных давлений в уплотнительном узле премиального резьбового соединения, построенная на основе контактной задачи Герца с учетом податливости носика премиального резьбового соединения при помощи общей теории деформирования цилиндрических оболочек. Она может применяться как и при проектировании премиальных резьбовых соединений для оценки герметичности, так и в других контактных задачах тел, представляющих собой оболочки.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. К. С. Стрелков написание текста рукописи, обзор литературы по теме статьи, редактирование текста рукописи.

Конфликт интересов. Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Исследование выполнено по теме государственного задания (государственный регистрационный номер 124012500437-9).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. K. S. Strelkov writing the text of the manuscript, reviewing the literature on the topic of the article, editing the text of the manuscript.

Competing interests. The author declare that they have no competing interests.

Funding. The study was carried out on the topic of the state assignment (state registration number 124012500437-9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Билык С. Ф. Герметичность и прочность конических резьбовых соединений труб нефтяного сортамента. – 2-е изд. – Москва : Недра, 1981. – 352 с.
2. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. – 2-е изд. – Москва : Наука, 1966. – 636 с.
3. Резьбовое соединение трубных изделий нефтепромыслового сортамента : 2767871 / Д. В. Никифоров, К. С. Стрелков. – Заявл. 2022. – Оpubл. 22.03.2022. Бюл. № 9.
4. Yang B., et al. Effects of Make-Up Torque on the Sealability of Sphere-Type Premium Connection for Tubing and Casing Strings. Processes // Processes. – 2023. – Т. 11, № 1. – С. 1–19. – DOI: 10.1134/S0025654425607025.
5. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – Москва : Мир, 1989. – 510 с. – пер. с англ. М. Я. Леонов (ред.).
6. Xie J. FEA Modeling for Thermal Well Casing Connection Evaluation Programs. // Science in The Age of Experience. – 2017. – Т. 126. – С. 1–26. – DOI: 10.1115/1.1715103. – Conference abstract.

REFERENCES

1. Bilyk S. F. Sealability and strength of tapered threaded connections of oil-field tubular goods. – 2nd ed. – Moscow : Nedra, 1981. – 352 p. – (in Russian).
2. Timoshenko S., S. V.-K. Plates and shells. – 2nd ed. – Moscow : Nedra, 1981. – 352 p. – (in Russian).
3. Threaded connection of oil field tubular goods : 2767871 / D. V. Nikiforov, K. S. Strelkov. – 2021. – (in Russian).
4. Yang B., et al. Effects of Make-Up Torque on the Sealability of Sphere-Type Premium Connection for Tubing and Casing Strings. Processes // Processes. – 2023. – Vol. 11, no. 1. – P. 1–19. – DOI: 10.1134/S0025654425607025.
5. Johnson K. Contact Mechanics. – Moscow : Mir, 1989. – 510 p. – (in Russian).
6. Xie J. FEA Modeling for Thermal Well Casing Connection Evaluation Programs. // Science in The Age of Experience. – 2017. – Т. 126. – С. 1–26. – DOI: 10.1115/1.1715103. – Conference abstract.

А. Н. Спорыхин

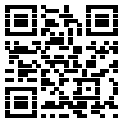
О ДИНАМИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК В РЫХЛЫХ ГОРНЫХ ПАРОДАХ

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В работе на основе реологической модели упруговязкопластической смеси исследуется напряженно-деформированное состояние горных выработок круговой формы поперечного сечения при динамической нагрузке. Приведены уравнения критического значения динамической нагрузки для горизонтальной и вертикальной горной выработки.

Ключевые слова: смесь, упругость, пластичность, вязкость, упрочнение, напряжение, перемещения

Спорыхин Анатолий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования; e-mail: anspor@mail.ru



для цитирования: Спорыхин А.Н. О динамическом деформировании горных выработок в рыхлых горных породах // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им.И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 82–88. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.005. EDN: HFZHMM

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

A. N. Sporykhin

ON THE DYNAMIC DEFORMATION OF MINE WORKINGS IN LOOSE ROCK FORMATIONS

I. Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. Based on a rheological model of an elastic-viscoplastic mixture, this paper investigates the stress-strain state of circular cross-section mine workings under dynamic loading. Equations are given for the critical value of dynamic loading for horizontal and vertical mine workings.

Keywords: mixture, elasticity, plasticity, viscosity, hardening, stress, displacement.

Anatoliy N. Sporykhin, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; e-mail: anspor@mail.ru



to cite this article: Sporykhin A. N. On the dynamic deformation of mine workings in loose rock formations // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 82–88. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.005

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

1. Введение. Известно, что горные выработки широко используются в хозяйственной деятельности, в частности, для хранения различного сырья. Расчет их поведения при воздействии динамических нагрузок необходим при прогнозировании критических ситуаций. В рамках плоской деформации рассматриваются горизонтальные и вертикальные выработки в смешанных горных породах, которое могут быть получены, в частности, в результате направленного взрыва. Образование газообразных продуктов взрыва в стенках выработки приводит к ее динамическому деформированию. Горная порода моделируется многокомпонентной упруговязкопластической средой. Получены соотношения для определения напряжения и деформаций в зоне упругого и пластического деформирования. В аналитической форме приведены уравнения для определения динамической нагрузки соответствующей моменту возникновения пластического течения при заданных физикомеханических и геометрических параметрах.

Имеющиеся решения [1–3] аналогичных задач выполнены, когда массив горных пород скального типа и процесс деформирования статический. В настоящей работе исследуется динамический процесс деформирования горизонтальной и вертикальной выработки, когда массив горных пород в области пластического деформирования моделируется упруговязкопластическим многокомпонентным телом [4, 5], что характерно для смешанных рыхлых горных пород [6].

1. Задача деформирования горных выработок рассматривается в квазистатической постановке. Заменяем горных массив с выработкой, как это обычно делается, невесомой бесконечной плоскостью с круговым отверстием радиуса r_1 , по контуру которого приложена равномерно распределенное давление P , например давление газа на породный контур при взрыве, а на бесконечности действует нагрузка q , выражения для которых имеют вид:

$$P = P_0 e^{\hat{a}t}, \quad q = q_0 = gh, \quad 0 \leq t < t_0,$$

где g – объемный вес породы, h – глубина заложения выработки, $\hat{a}$ – известная константа.

Согласно [4, 5] приведем полную систему уравнений, описывающих деформируемое состояние упруговязкопластической среды произвольного порядка.

Тело остается упругим при условии

$$S_{ij}S_{ij} \leq k_1^2, S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}, \sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{kk}, k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_L, \quad (1)$$

где S_{ij} – компоненты девиатора тензора напряжений.

При этом для последовательно соединённых моделей тела S_p^α выполняется закон Гука

$$S_{ij}^\alpha = 2\mu_\alpha \varepsilon_{ij}^{e\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, L \quad (2)$$

где μ_α – параметр Ламме.

Если $S_{ij}S_{ij} \geq k_1^2$, то полная деформация складывается из упругой и пластической

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{e1} + \varepsilon_{ij}^{p1} + \varepsilon_{ij}^{e2} + \varepsilon_{ij}^{p2} + \dots + \varepsilon_{ij}^{eL} + \varepsilon_{ij}^{pL} = \sum_{\alpha=1}^L (\varepsilon_{ij}^{e\alpha} + \varepsilon_{ij}^{p\alpha}), \quad (3)$$

здесь α определяет порядок обобщенной модели S_p^α .

Объемная деформация согласно (3) удовлетворяет условию несжимаемости

$$\varepsilon_{nn} = 0. \quad (4)$$

Усилия, приложенные к модели S_p^α одинаковы, следовательно

$$S_{ij}^1 = S_{ij}^2 = \dots S_{ij}^L, (\sigma_{ij}^1 = \sigma_{ij}^2 = \dots \sigma_{ij}^L) \quad (5)$$

Компоненты тензора скорости пластической деформации $e_{ij}^{p\alpha}$ связаны с компонентами тензора напряжений соотношениями ассоциированного законом течения

$$e_{ij}^{p\alpha} = \Psi_\alpha(S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^{p\alpha} - \eta_\alpha e_{ij}^{p\alpha}), \alpha = 1, 2, \dots, L \quad (6)$$

если выполняется условие пластичности

$$(S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^{p\alpha} - \eta_\alpha e_{ij}^{p\alpha})(S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^{p\alpha} - \eta_\alpha e_{ij}^{p\alpha}) = k_\alpha^2 \quad (7)$$

где c_α - коэффициент упрочнения, η_α - коэффициент вязкости, k_α - предел текучести, для каждой из моделей S_p^α .

Полные деформации удовлетворяют формулам Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (8)$$

Уравнениям равновесия удовлетворяют только действительные напряжения

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0. \quad (9)$$

Соотношения (1)-(9) полная система уравнений описывающая деформированное состояние “смешанной” упруговязкопластической среды тела S_p^α произвольного порядка.

2. Напряжённо-деформированное состояние горизонтальной и вертикальной выработки в случае плоской деформации определяются согласно (9) уравнением равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (10)$$

Законом Гука (2) и соотношением Коши (8) для области упругого деформирования и имеет вид:

$$\sigma_r^e = -\frac{\mu^* C^e}{r^2} + D, \sigma_\theta^e = \frac{\mu^* C^e}{r^2} + D, u_r^e = \frac{C^e}{r}, \quad (11)$$

здесь C^e и D - неизвестные интегрирования.

В пластической области из условия несжимаемости (4) получаем:

$$u_r^p = \frac{C_1^p}{r}, \varepsilon_r = -\varepsilon_\theta = -\frac{C_1^p}{r^2}. \quad (12)$$

Из соотношений (2),(3) и (5) следует

$$S_{ij} = \mu^* \varepsilon_{ij} - \mu^* \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p = \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_{ij}^{p\alpha} \mu^* = \left(\sum_{\alpha=1}^L \frac{1}{2\mu_\alpha^e} \right)^{-1}. \quad (13)$$

В полярных координатах

$$S_r = \mu^*(\varepsilon_r - \varepsilon_r^p) = -S_\theta, S_{33} = 0. \quad (14)$$

Для отдельно взятого тела S_p^α условие пластичности (7) с учётом (12) и (14) принимает вид

$$S_r = 2c_\alpha \varepsilon_r^{p\alpha} - 2\eta_\alpha \dot{\varepsilon}_r^{p\alpha} = \pm 2k_\alpha, \alpha = 1, 2 \dots L. \quad (15)$$

Откуда приходим к уравнению для определения $\varepsilon_r^{p\alpha}$ для отдельного взятого комплекса S_p^α

$$\eta_\alpha \dot{\varepsilon}_r^{p\alpha} + (\mu_\alpha + c_\alpha) \varepsilon_r^{p\alpha} = 2k_\alpha - \frac{\mu_\alpha C_1^p}{r^2}, \alpha = 1, 2 \dots L. \quad (16)$$

Решение уравнения (16) имеет вид

$$\varepsilon_r^{p\alpha} = \frac{k_\alpha r^2 - 2\mu_\alpha C_1^p}{r^2(2\mu_\alpha + c_\alpha)} \left(1 - e^{-\frac{(2\mu_\alpha + c_\alpha)}{\eta_\alpha} t} \right), \alpha = 1, 2 \dots L. \quad (17)$$

Неизвестная интегрирования определена из начального условия $\varepsilon_r^{p\alpha} = 0$ при $t = 0$. Подставляя (14) в уравнение равновесия (10) учитывая при этом (13), (17) и интегрируя находим

$$\begin{aligned} \sigma_r^p &= B_\alpha \ln r + \frac{A_\alpha C_1^p}{2r^2} + C_2^p, \\ \sigma_\theta^p &= \sigma_r^p + B_\alpha - \frac{A_\alpha C_1^p}{2r^2} = B_\alpha (1 + \ln r) - \frac{A_\alpha C_1^p}{2r^2} + C_2^p. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} A_\alpha &= -4 \sum_{\alpha=1}^L \frac{\mu^* \mu_\alpha}{(2\mu_\alpha + c_\alpha)} A_\alpha^\circ - 2\mu^*, B_\alpha = 2 \sum_{\alpha=1}^L \frac{\mu^* k_\alpha}{(2\mu_\alpha + c_\alpha)} A_\alpha^\circ, \\ A_\alpha^\circ &= e^{-\frac{(2\mu_\alpha + c_\alpha)}{\eta_\alpha} t} - 1. \end{aligned} \quad (19)$$

где C_1^p, C_2^p – неизвестные интегрирования.

Удовлетворяя полученные решения (10), (18) граничным условиям на внешней и внутренней поверхности выработки

$$\sigma_r^e = -gh = q_0 \text{ при } r = \infty, \sigma_r^p = -Pe^{\hat{a}t} = P_0 \text{ при } r = a, \quad (20)$$

а также условиям сопряжения напряжений и перемещений на упругопластической границе

$$\sigma_r^p = \sigma_r^e, \sigma_\theta^p = \sigma_\theta^e, u_r^p = u_r^e \text{ при } r = \gamma, \quad (21)$$

определяем неизвестные интегрирования.

$$\begin{aligned} C^e &= C_1^p = C = \frac{B_\alpha \gamma^2}{A_\alpha - 2\mu^*}, D = -gh = q_0, \\ C_2^p &= P - B_\alpha \ln a - \frac{A_\alpha C}{2a^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом для компонент напряжений и перемещений в упругой (11) и пластичной областях (18) учитывая (22) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_r^e &= -\frac{\mu^* C}{r^2} - q, \sigma_\theta^e = \frac{\mu^* C}{r^2} + q, u^e = \frac{C}{r}, \\ \sigma_r^p &= P + B_\alpha (\ln r - \ln a) + \frac{A_\alpha C}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right), \\ \sigma_\theta^p &= P + B_\alpha (1 + \ln r - \ln a) - \frac{A_\alpha C}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right), u^p = \frac{C}{r}. \end{aligned} \quad (23)$$

Радиус упругопластической границы γ удовлетворяют уравнению.

$$\frac{A^*}{a^2} \gamma^2 - B_\alpha \ln\left(\frac{\gamma}{a}\right) + A^* \left(1 + \frac{2\mu^*}{A_\alpha}\right) + P + gh = 0, \quad (24)$$

$$A^* = \frac{A_\alpha B_\alpha}{2(A_\alpha - 2\mu^*)}.$$

Динамическая нагрузка $P = P_0 e^{\hat{a}t}$ при которой начинает зарождаться пластическая зона на внутреннем контуре горизонтальной выработке в массиве рыхлых горных пород определяется из уравнения (24) при $\gamma = a$

В случае неподкреплённой вертикальной цилиндрической выработки, выходящей на поверхность, напряжённо-деформированное состояние массива около выработки и динамическая нагрузка, при которой зарождается пластическая зона на внутреннем контуре, также определяются соотношениями (23) и соответственно (24).

Отметим если в (24) положить $\alpha = 1$, $P = \text{const}$ ($A_\alpha = 1$) то приходим к результатам работы [5] соответствующим варианту теории течения упруговязкопластической среды [7], а при $\eta_\alpha = 0$ ($\alpha = 1$) приходим к результату работы [1] полученным в рамках классического варианта теории течения упругопластической среды [8].

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. 100%.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. 100%.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ершов Л. В. О проявлении горного давления в горизонтальных выработках // Доклады Академии наук СССР. – 1962. – Т. 145, № 2. – С. 298–300.
2. Спорыхин А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. – Воронеж : Воронежский государственный университет, 1997. – 361 с.
3. Спорыхин А. Н., Шашкин А. И. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород. – Москва : Физматлит, 2004. – 232 с.
4. Спорыхин А. Н. Об одной модели упруговязкопластической смеси // Сборник трудов IX Всероссийской конференции. – Воронеж, 2016. – С. 199–201.
5. Спорыхин А. Н. Моделирование процессов деформирования и потери устойчивости упруговязкопластических смесей // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2020. – № 6. – С. 144–148.
6. Михайлюк А. В. Горные породы при неравномерных нагрузках. – Киев : Наукова думка, 1980. – 153 с.
7. Спорыхин А. Н. Об устойчивости деформирования упруговязкопластических тел // Прикладная механика и техническая физика. – 1967. – С. 52–58.

8. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. – Москва : Физматлит, 2003. – 701 с.

REFERENCES

1. *Ershov L. V.* On the Manifestation of Rock Pressure in Horizontal Workings // Doklady of the USSR Academy of Sciences. – 1962. – Vol. 145, no. 2. – P. 298–300.
2. *Sporykhin A. N.* Method of Perturbations in Stability Problems of Complex Media. – Voronezh : Voronezh State University, 1997. – 361 p.
3. *Sporykhin A. N., Shashkin A. I.* Stability of Equilibrium of Spatial Bodies and Problems of Rock Mechanics. – Moscow : Fizmatlit, 2004. – 232 p.
4. *Sporykhin A. N.* On a Model of an Elastoviscoplastic Mixture // Proceedings of the IX All-Russian Conference. – Voronezh, 2016. – P. 199–201.
5. *Sporykhin A. N.* Modeling of Deformation Processes and Loss of Stability of Elastoviscoplastic Mixtures // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids. – 2020. – No. 6. – P. 144–148.
6. *Mikhailyuk A. V.* Rocks under Nonuniform Loads. – Kiev : Naukova Dumka, 1980. – 153 p.
7. *Sporykhin A. N.* On the Stability of Deformation of Elastoviscoplastic Bodies // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1967. – P. 52–58.
8. *Ishlinsky A. Y., Ivlev D. D.* Mathematical Theory of Plasticity. – Moscow : Fizmatlit, 2003. – 701 p.

Н. И. Петров

ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕАРИЗИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ МАЛЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Приволжский институт (филиал) МАДИ, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Полиномиальные решения ряда задач в теории упругости и пластичности рассмотрены в работах [1-5]. В настоящей работе рассматривается полиномиальное решение линеаризованных уравнений теории малых упругопластических деформаций в случае плоской задачи в полярных координатах.

Ключевые слова: линеаризация, растяжение, напряжение, деформация, функция Бесселя.

Петров Николай Ильич, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информатики и технологии транспортных процессов; e-mail: ni.petrov46@mail.ru



для цитирования: Петров Н. И. Полиномиальное решение линеаризованных уравнений теории малых упругопластических деформаций в полярных координатах // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 89–98. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.006. EDN: JDPHJX

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

N. I. Petrov

POLYNOMIAL SOLUTION OF LINEARIZED EQUATIONS OF THE THEORY OF SMALL ELASTOPLASTIC DEFORMATIONS IN POLAR COORDINATES

Volga Institute (branch) MADI, Cheboksary, Russia

Abstract. Polynomial solutions of a number of problems in the theory of elastoplasticity are considered in [1-3]. In this paper, we consider a polynomial solution of the linearized equations of the theory of small elastoplastic deformations in the case of a plane problem in polar coordinates.

Keywords: linearization, stretching, stress, deformation, Bessel function

Nikolay I. Petrov, Candidate Sci. Phys. & Math., Assoc. Prof.; e-mail: ni.petrov46@mail.ru



to cite this article: Petrov N.I. Polynomial solution of linearized equations of the theory of small elastoplastic deformations in polar coordinates // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 89–98. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.006

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Соотношения теории малых упругопластических деформаций [1—5] в полярной системе координат имеют вид

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} (e_r - e_\theta), \quad \tau_{r\theta} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_{r\theta} \quad (1)$$

где согласно степенному упрочнению

$$\sigma_i = A e_i^k \quad (A, k - \text{const}) \quad (2)$$

σ_i, e_i - соответственно интенсивность напряжения и интенсивность деформаций, определяемые соотношениями

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2}, \quad e_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(e_r - e_\theta)^2 + 4e_{r\theta}^2} \quad (3)$$

В силу (2) и условия несжимаемости, соотношения (1) и (3) примут вид

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{4}{3} A e_i^{k-1} e_r, \quad \tau_{r\theta} = \frac{2}{3} A e_i^{k-1} e_{r\theta} \quad (4)$$

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2}, \quad e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{e_r^2 + e_{r\theta}^2} \quad (5)$$

Линеаризуем компоненты напряжений и перемещений по безразмерному малому параметру δ

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \delta \sigma'_{ij}, \quad e_{ij} = e_{ij}^0 + \delta e'_{ij} \quad (6)$$

где индекс градус наверху приписан компонентами невозмущенного состояния, а индекс штрих - компонентам возмущения.

В невозмущенном состоянии в трубе, находящейся под действием внутреннего и внешнего нормальных давлений, перемещение вдоль оси θ $u_\theta^0 = 0$, а $u_r^0 = u_r^0(r)$

Тогда по формулам Коши получим

$$e_r^0 = \frac{\partial u_r^0}{\partial r}, \quad e_\theta^0 = \frac{u_r^0}{r}, \quad e_{r\theta}^0 = 0 \quad (7)$$

Используя соотношение (7) и условия несжимаемости находим

$$u_r^0 = \frac{C_l}{r}, \quad e_r^0 = -e_\theta^0 = \frac{-C_l}{r^2}, \quad C_l > 0 \quad (8)$$

Используя соотношения (5), (6) и (7) получим

$$e_i^0 = \frac{2}{\sqrt{3}} |e_r^0|, \quad e_i' = \frac{2}{\sqrt{3}} e_r' \quad (9)$$

Из соотношения (4) - (7) имеем

$$\tau_{r\theta}^0 = 0, \quad \sigma_i^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0), \quad \sigma_i' = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_r' - \sigma_\theta'), \quad \tau_{r\theta}' = 2Br^q e_{r\theta}' \quad (10)$$

$$q = 2(l - k), \quad B = \frac{A}{3} \left(\frac{2C_l}{\sqrt{3}} \right)^{k-l} \quad (11)$$

Используя соотношения (6), (8), (9) формулы (4) приведем к виду

$$\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0 = -4BC_l r e^{-2k} \quad (12)$$

$$\sigma'_r = \sigma' + 2Bkr^q e'_r, \quad \sigma'_\theta = \sigma' - 2Bkr^q e'_r \quad (13)$$

Подставив (12) в уравнение равновесия в основном (нулевом) состоянии

$$\frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} + \frac{\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0}{r} = 0 \quad (14)$$

получим

$$\sigma_r^0 = -\frac{2BC_l}{k} r^{-2k} + C_2, \quad C_2 = \text{const} \quad (15)$$

Тогда

$$\sigma_\theta^0 = -\frac{2BC_l}{k} r^{-2k} (l - 2k) + C_2 \quad (16)$$

Удовлетворим уравнению несжимаемости полагая

$$u'_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \theta}, \quad u'_\theta = \frac{\partial \eta}{\partial r} \quad (17)$$

Следовательно

$$\begin{aligned} e'_r &= \frac{\partial u'_r}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \eta}{\partial r \partial \theta} \\ e'_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \frac{u'_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

Используя формулы (13), (18) и (10), получим

$$\sigma'_r = \sigma' + B(2 - q) \left[r^{q-2} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - r^{q-1} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta \partial r} \right] \quad (19)$$

$$\sigma'_\theta = \sigma' - B(2 - q) \left[r^{q-2} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - r^{q-1} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta \partial r} \right] \quad (20)$$

$$\tau'_{r\theta} = B \left[r^q \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} - r^{q-1} \frac{\partial \eta}{\partial r} - r^{q-2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial r \partial \theta^2} \right] \quad (21)$$

Уравнения равновесия в первом приближении имеют вид

$$\frac{\partial \sigma'_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau'_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma'_r - \sigma'_\theta}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \tau'_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma'_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau'_{r\theta}}{r} = 0$$

Подставив (19), (20), (21) в эти уравнения получим

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial r} + B \left[(2-q)qr^{q-3} \frac{\partial \eta}{\partial r} + (q^2 - 2q - 1)r^{q-2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial r \partial \theta} + (q-1)r^{q-1} \frac{\partial^3 \eta}{\partial r^2 \partial \theta} - r^{q-3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial r \partial \theta^3} \right] = 0 \quad (22)$$

Уравнение (22) сводится к дифференциальному уравнению четвертого порядка в частных производных [4]

$$\nabla_1 \eta + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \nabla_2 \eta + \frac{\partial^4 \eta}{\partial \theta^4} = 0, \quad (23)$$

где операторы ∇_1 и ∇_2 имеют вид

$$\nabla_1 = r^4 \frac{\partial^4}{\partial r^4} + 2(q+1)r^3 \frac{\partial^3}{\partial r^3} + (q^2-1)r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - (q^2-1)r \frac{\partial}{\partial r}, \quad (24)$$

$$\nabla_2 = 2(1-q)r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2(1-q)^2 r \frac{\partial}{\partial r} + (q-2)^2. \quad (25)$$

Рассмотрим толстостенную трубу радиусов a и b ($a < b$), находящейся под действием внутреннего давления p и содержащую выточки на внутренней и внешней поверхностях трубы. Уравнение выточек имеют вид

$$r = 1 + \delta c_1 (\beta_1^2 - \theta^2) \quad (26)$$

и

$$r = \alpha + \delta c_2 (\theta^2 - \beta_2^2) \quad (27)$$

на внешней и внутренней поверхностях соответственно

где β_1 и β_2 - пологость выточек, а c_1 и c_2 - глубина выточек. Величины, имеющие размерность длины, отнесем к внешнему радиусу трубы b и $\alpha = \alpha/b$.

С учетом уравнений выточек (26) и (27) имеем линеаризованные граничные условия [4]

$$\sigma'_r + \frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} c_1 (\beta_1^2 - \theta^2) = 0, \quad (r = 1)$$

$$\tau'_{r\theta} - 2(\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0) c_1 \theta = 0 \quad (28)$$

$$\sigma'_r - \frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} c_2 (\beta_2^2 - \theta^2) = 0, \quad (r = \alpha)$$

$$\tau'_{r\theta} - \frac{2}{\alpha} (\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0) c_2 \theta = 0 \quad (29)$$

Подставив соотношения (15) и (16) в граничные условия в невозмущенном состоянии

$$\sigma_r^0(r=1)=0, \quad \sigma_r^0(r=\alpha)=-p \quad (30)$$

для C_1 и C_2 получим выражения

$$C_1 = \frac{p\alpha^2}{2B(1-\alpha^2)}, \quad C_2 = \frac{p\alpha^2}{1-\alpha^2} \quad (31)$$

(15) и (16) примут вид

$$\sigma_r^0 = \frac{p\alpha^2(r^2-1)}{r^2(1-\alpha^2)}, \quad \sigma_\theta^0 = \frac{p\alpha^2(r^2+1)}{r^2(1-\alpha^2)} \quad (32)$$

и будем иметь

$$\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0 = -2p \frac{\alpha^2 r}{r^2(1-\alpha^2)}, \quad \frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} = 2p \frac{\alpha^2}{r^3(1-\alpha^2)} \quad (33)$$

Поиск решения уравнения (23) в виде

$$\eta = R_3 \theta^3 + R_1 \theta \quad (34)$$

сведется к решению двух уравнений

$$\nabla_1 R_3 = 0, \quad \nabla_1 R_1 + 6\nabla_2 R_3 = 0 \quad (35)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} R_3 &= A_3 r^2 + B_3 r^{2-q} + C_3 r^{-q} + D_3 \\ R_1 &= A_1 r^2 + B_1 r^{2-q} + C_1 r^{-q} + D_1 - \frac{3(4-3q^2)A_3}{2q(q+2)} r^2 (2 \ln r - 1) + \\ &+ \frac{3B_3}{q} r^{2-q} ((2-q) \ln r - 1) + \frac{3(4-3q^2)C_3}{q^2(q+2)} r^{-q} (q \ln r + 1) + \frac{3(q-2)D_3}{q} \ln r \end{aligned} \quad (36)$$

где $q \neq 0$, а $k \neq 1$. Из соотношений (36), (34) и (19)-(22) находим

$$\begin{aligned} \sigma_r' &= B \left[\frac{q(2-q)}{2} B_3 \theta^4 - \left(q(q-2)B_1 + \frac{6(q-2)}{q} A_3 r^q + \right. \right. \\ &+ \frac{3(3q^2) - 6q^2 - 8q + 8}{2q} B_3 - 3(q-2)^2 B_3 \ln r + \frac{3(q^2 - 4q - 4)}{2} C_3 r^{-2} - \\ &- 6D_3 r^{q-2} \Big) \theta^2 - \frac{2(q-2)}{q} A_1 r^q - (q-2)(q-1)B_1 + (q-2)^2 B_1 \ln r - \\ &- \frac{q^2 - 4q - 4}{2} C_1 r^{-2} + 2D_1 r^{q-2} + \frac{6(4-3q^2)(q-2)}{q^2(q+2)} A_3 r^q \ln r - \\ &- \frac{3(q-2)(3q^3 - 2q^2 + 8)}{q^3(q+2)} A_3 r^q - \frac{3(q-2)^3}{2q} B_3 \ln^2 r - 3(q-4)B_3 \ln r + \frac{3(q-2)}{q} B_3 - \\ &- \frac{3(4-3q^2)(q^2 - 4q - 4)}{2q(q+2)} C_3 r^{-2} \ln r + \frac{3(3q^5 - 6q^4 - 8q^3 - 24q^2 + 32)}{4q^2(q+2)} C_3 r^{-2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{6(q-2)}{q} D_3 r^{q-2} \ln r - \frac{6(q-4)(q-1)}{q(q-2)} D_3 r^{q-2} \Big] \\
\sigma'_\theta = B & \left[\frac{q(2-q)}{2} B_3 \theta^4 - \left(q(q-2) B_1 + \frac{6(q-2)(q+1)}{q} A_3 r^q - \frac{3(q-2)^3}{2q} B_3 - \right. \right. \\
& - 3(q-2)^2 B_3 \ln r - \frac{3(3q^2-4)}{2} C_3 r^{-2} - 6(q-1) D_3 r^{q-2} \Big) \theta^2 - \\
& - \frac{2(q-2)(q+1)}{q} A_1 r^q - (q-2)(1-q) B_1 \ln r - \frac{3(3q^2-4)}{2} C_1 r^{-2} + \\
& + 2(q-1) D_1 r^{q-2} + \frac{6(4-3q^2)(q-2)(q+1)}{q^2(q+2)} A_3 r^q \ln r - \\
& - \frac{3(q-2)(3q^4+3q^3-6q^2+8)}{q^3(q+2)} A_3 r^q - \frac{3(q-2)^3}{2q} B_3 \ln^2 r - \\
& - \frac{3(2q^3-9q^2+12q-8)}{q} B_3 \ln r - \frac{3(q-2)}{q} B_3 - \frac{3(3q^2-4)^2}{2q(q+2)} C_3 r^{-2} \ln r + \\
& - \frac{3(3q^5-6q^4-32q^3+24q^2+32q-32)}{4q^2(q+2)} C_3 r^{-2} + \\
& + \frac{6(q-2)(q-1)}{q} D_3 r^{q-2} \ln r - \frac{6(q^3-5q^2+7q-4)}{q(q-2)} D_3 r^{q-2} \Big] \\
\tau'_{r\theta} = B & \left[\left(q(q-2) B_3 + q(q+2) C_3 r^{-2} \right) \theta^3 + \left(q(q-2) B_1 + q(q+2) C_1 r^{-2} + \right. \right. \\
& + \frac{12(q-2)(q+1)}{q(q+2)} A_3 r^q - 3(q-2)^2 B_3 \ln r + \frac{3(q^2-6q+4)}{q} B_3 + \\
& + 3(4-3q^2) C_3 r^{-2} \ln r + \frac{3(3q+4)(q-2)}{(q+2)} C_3 r^{-2} - \frac{12(q-1)}{q} D_3 r^{q-2} \Big) \theta \Big]
\end{aligned}$$

Подставив полученные соотношения в граничные условия (28), (29) и определим коэффициенты

$$A_3 = \frac{pq\alpha(q+2) [c_2 [q(1-\alpha^2) + 2(\alpha^q-1)] + c_1 [q\alpha^{q+1}(1-\alpha^2) + 2\alpha^3(\alpha^q-1)]]}{3B(2-q)(1-\alpha^2) [q^2\alpha^q(\alpha^2-1)^2 - 4\alpha^2(\alpha^q-1)^2]}$$

$$D_3 = \frac{pq\alpha [c_2 [q(1-\alpha^2) + 2\alpha^2(\alpha^q-1)] + c_1 [q\alpha^{q+3}(1-\alpha^2) + 2\alpha^3(\alpha^q-1)]]}{3B(1-\alpha^2) [q^2\alpha^q(\alpha^2-1)^2 - 4\alpha^2(\alpha^q-1)^2]}$$

$$\begin{aligned}
A_1 = & \frac{q}{2(q-2)\alpha^{q-2}(1-\alpha^2)} \left[B_1 \left((q-2)(q-1)(1-\alpha^{q-2}) - (q-2)^2 \ln \alpha \right) + \right. \\
& + C_1 \frac{(q^2-4q-4)(1-\alpha^q)}{2\alpha^2} + A_3 \left(\frac{3(q-2)(3q^3-2q^2+8)\alpha^{q-2}}{q^3(q+2)} (\alpha^2-1) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{6(4-3q^2)(q-2)}{q^3(q+2)}\alpha^q \ln \alpha \Big) + D_3 \frac{6(2-q)}{q} \alpha^{q-2} \ln \alpha + \frac{2p}{B\alpha(1-\alpha^2)} (\alpha^q c_1 \beta_1^2 + c_2 \beta_2^2) \Big] \\
B_1 &= \frac{2p\alpha \left[c_2 (2q\alpha^q(\alpha^2-1) - 4(\alpha^q-1)) + c_1 (2q\alpha^{q+1}(\alpha^2-1) - 4\alpha^q(\alpha^q-1)) \right]}{Bq(2-q)(1-\alpha^2) [q^2\alpha^q(\alpha^2-1)^2 - 4\alpha^2(\alpha^q-1)^2]} \\
C_1 &= \frac{2p\alpha \left[c_2 (2q\alpha^q(1-\alpha^2) - 4\alpha^2(\alpha^q-1)) + c_1 (2q\alpha^{q+3}(1-\alpha^2) + 4\alpha^{q+3}(\alpha^q-1)) \right]}{Bq(2-q)(1-\alpha^2) [q^2\alpha^q(\alpha^2-1)^2 - 4\alpha^2(\alpha^q-1)^2]} \\
D_1 &= \frac{1}{2\alpha^{q-2}(1-\alpha^2)} \left[B_1 ((q-2)(q-1)(1-\alpha^q) - (q-2)^2 \ln \alpha) + \right. \\
& + C_1 \frac{(q^2-4q-4)}{2\alpha^2} (1-\alpha^{q+2}) + A_3 \left(\frac{6(q-2)(3q^2-4)}{q^3(q+2)} \alpha^q \ln \alpha + \right. \\
& + D_3 \left(\frac{6(q^2-5q+4)}{q(q-2)} \alpha^{q-2}(\alpha^2-1) - \frac{6(q-2)}{q} \alpha^{q-2} \ln \alpha \right) + \\
& \left. \left. - \frac{2p}{B\alpha(1-\alpha^2)} (\alpha^{q+3} c_1 \beta_1^2 + c_2 \beta_2^2) \right] \right]
\end{aligned}$$

Для упругого материала $k = 1$ и $q = 0$. Следовательно соотношения (24) и (25) примут вид

$$\nabla_1 = r^4 \frac{\partial^4}{\partial r^4} + 2r^3 \frac{\partial^3}{\partial r^3} - r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \quad (37)$$

$$\nabla_2 = 2r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2r \frac{\partial}{\partial r} + 4 \quad (38)$$

Решение уравнения (23), ищем в виде (34) и определяются соотношениями

$$R_3 = A_3 r^2 \ln r + B_3 r^2 + C_3 \ln r + D_3$$

$$\begin{aligned}
R_1 &= A_1 r^2 \ln r + B_1 r^2 + C_1 \ln r + D_1 - A_3 r^2 \ln^3 r - 3B_3 r^2 \ln^2 r + \\
& + 3B_3 r^2 \ln r - \frac{3}{2} B_3 r^2 - C_3 \ln^3 r - 3D_3 \ln^2 r
\end{aligned} \quad (39)$$

Из соотношения (39), (34) и (19)-(22) находим

$$\begin{aligned}
\sigma'_r &= B \left[-A_3 \theta^4 + \left(-2A_1 + 6A_3 (\ln^2 r + \ln r - 1) + 12B_3 \ln r + \right. \right. \\
& + \frac{6C_3}{r^2} (\ln r + 1) + \frac{6D_3}{r^2} \Big) \theta^2 + 2A_1 (\ln^2 r + \ln r - 1) + 2B_1 (2 \ln r - 1) + \\
& + \frac{2C_1}{r^2} (\ln r - 1) + \frac{2D_1}{r^2} - A_3 \ln^2 r (\ln^2 r + 2 \ln r + 3) - B_3 (4 \ln^3 r - 3 \ln r + 3) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2C_3 \ln^2 r}{r^2}(\ln r - 3) - \frac{6D_3 \ln r}{r^2}(\ln r - 2) \Big] \\
\sigma'_\theta = & B \left[\left(-2A_1 + 12B_3(\ln r + 1) - \frac{6D_3}{r^2} \right) \theta^2 + \right. \\
& + 2A_1(\ln^2 r + 3 \ln r + 1) + 2B_1(2 \ln r + 1) - \frac{2C_1}{r^2}(\ln r - 1) - \frac{2D_1}{r^2} - \\
& \left. - B_3(4 \ln^3 r + 12 \ln^2 r - 3) + \frac{6D_3 \ln r}{r^2}(\ln r - 2) \right] \\
\tau'_{r\theta} = & B \left[\left(2A_3 - \frac{2C_3}{r^2} \right) \theta^3 + \left(2A_1 - \frac{2C_1}{r^2} - 6A_3 \ln r(\ln r + 2) - \right. \right. \\
& \left. \left. - 6B_3(2 \ln r + 1) + \frac{6C_3 \ln r}{r^2}(\ln r - 2) + \frac{12D_3}{r^2}(\ln r - 1) \right) \theta \right] \quad (40)
\end{aligned}$$

Коэффициенты $A_3, B_3, C_3, D_3, A_1, B_1, C_1, D_1$ определяются из граничных условий (28), (29) и принимают вид $A_3 = C_3 = 0$

$$\begin{aligned}
B_3 = & \frac{-pc_1\alpha^2(\alpha^2 - 2\alpha^2 \ln \alpha - 1) - pc_2\alpha(\alpha^2 - 2 \ln \alpha - 1)}{3B(1 - \alpha^2) \left[(1 - \alpha^2)^2 - 4\alpha^2 \ln^2 \alpha \right]} \\
D_3 = & \frac{-pc_1\alpha^4(1 - \alpha^2 + 2 \ln \alpha) - pc_2\alpha(1 - \alpha^2 - 2\alpha^2 \ln \alpha)}{3B(1 - \alpha^2) \left[(1 - \alpha^2)^2 - 4\alpha^2 \ln^2 \alpha \right]} \\
C_1 = & \frac{-4pc_1\alpha^4 \ln^2 \alpha - pc_2\alpha \ln \alpha(1 - \alpha^2)}{B(1 - \alpha^2) \left[(1 - \alpha^2)^2 - 4\alpha^2 \ln^2 \alpha \right]} \\
A_1 = & \frac{-pc_1\alpha^2(1 - \alpha^2 - 4\alpha^2 \ln^2 \alpha + 2\alpha^2 \ln \alpha) - pc_2\alpha(1 - \alpha^2 + 2\alpha^2 \ln \alpha)}{B(1 - \alpha^2) \left[(1 - \alpha^2)^2 - 4\alpha^2 \ln^2 \alpha \right]} \\
B_1 = & \frac{-\alpha^2}{(1 - \alpha^2 + 2\alpha^2 \ln \alpha)B(1 - \alpha^2) \left[(1 - \alpha^2)^2 - 4\alpha^2 \ln^2 \alpha \right]} \cdot \\
& \cdot \left(-pc_1 \left[-\frac{8}{3}\alpha^2 \ln^3 \alpha (\alpha^2 \ln \alpha + \alpha^2 - 1) + 2\alpha^2 \ln \alpha (\alpha^2 \ln \alpha - \alpha^2 + 1) + \frac{1}{2}(1 - \alpha^2)^2 \right] - \right. \\
& - pc_2 \left[-\frac{4}{3}\alpha \ln^3 \alpha (\alpha^2 - 1 + \ln \alpha) + \alpha^3 \ln \alpha (\ln \alpha - 1) + \frac{1}{2}(2 \ln^2 \alpha + 2 \ln \alpha + 1 + \alpha^4 - 2\alpha^2)/\alpha \right] - \\
& \left. - \left[(1 - \alpha^2)^2 - 4\alpha^2 \ln^2 \alpha \right] (pc_1\beta_1^2 + pc_2\beta_2^2/\alpha) \right) \\
D_1 = & \frac{-\alpha^2}{(1 - \alpha^2 + 2\alpha^2 \ln \alpha)B(1 - \alpha^2) \left[(1 - \alpha^2)^2 - 4\alpha^2 \ln^2 \alpha \right]} \cdot \\
& \cdot \left(-pc_1 \left[-\frac{8}{3}\alpha^2 \ln^3 \alpha (\alpha^2 \ln \alpha + \alpha^2 - 1) - 4\alpha^2 \ln \alpha \right] - \right.
\end{aligned}$$

$$-pc_2 \left[-\frac{4}{3} \alpha \ln^3 \alpha (\alpha^2 - 1 + \ln \alpha) + \alpha^3 \ln^2 \alpha + \frac{1}{2} (\alpha \ln^2 \alpha + 1 - 4\alpha^2 \ln^2 \alpha) / \alpha \right] - \\ - \left[(1 - \alpha^2)^2 - 4\alpha^2 \ln^2 \alpha \right] (pc_1 \beta_1^2 \alpha^2 (1 - 2 \ln \alpha) + \frac{1}{2} pc_2 \beta_2^2) \Bigg)$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. 100%.

Конфликт интересов. Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. 100%.

Competing interests. The author declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П. Теория упругости. – Москва : Наука, 1937. – 452 с.
2. Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластических деформаций. – Москва : Наука, 1978. – 208 с.
3. Захарова Т. Л. Об образовании шейки при растяжении идеально пластической изотропной полосы // ДАН. – 1998. – Т. 358, № 3. – С. 340–342.
4. Михайлова М. В., Петров Н. И. Применение полиномиальных решений линеаризированных уравнений теории малых упругопластических деформаций к задаче о трубе из упругого материала // Известия ИТА ЧР. – 1997–1998. – 3(8)–2(11). – С. 61–67.
5. Ильюшин А. А. Пластичность. – Москва : Гостехиздат, 1948. – 376 с.

REFERENCES

1. *Timoshenko S. P.* Theory of Elasticity. – Moscow : Nauka, 1937. – 452 p.
2. *Ivlev D. D., Ershov L. V.* Perturbation Method in the Theory of Elastic-Plastic Deformations. – Moscow : Nauka, 1978. – 208 p.
3. *Zakharova T. L.* On Neck Formation in Tension of an Ideally Plastic Isotropic Strip // *Doklady Akademii Nauk.* – 1998. – Vol. 358, no. 3. – P. 340–342.
4. *Mikhaylova M. V., Petrov N. I.* Application of Polynomial Solutions of the Linearized Equations of the Theory of Small Elastic-Plastic Deformations to the Problem of a Tube Made of Elastic Material // *Izvestiya ITA ChR.* – 1997–1998. – 3(8)–2(11). – P. 61–67.
5. *Ilyushin A. A.* Plasticity. – Moscow : Gostekhizdat, 1948. – 376 p.

М. В. Петров, О. А. Алексеева, Б. В. Михайлов

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК СРЕДНЕЙ ДЛИНЫ ПРИ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ

Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, Чебоксары, Россия

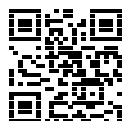
Аннотация. Теоретически и экспериментально исследован процесс потери устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек средней длины при прямом изгибе в зонах максимальных нормальных и касательных напряжений. Рекомендован график зависимости критических сил от длины цилиндрической оболочки для определения потери устойчивости в зонах максимальных нормальных и касательных напряжений. Экспериментально потеря устойчивости при прямом изгибе в большинстве случаев наблюдалась в зоне максимальных нормальных напряжений. По мере укорочения длины оболочек средней длины, влияние поперечной силы увеличивается, что сказывается на потере местной устойчивости в виде одновременно появления вмятин в зонах максимальных нормальных и касательных напряжений. При дальнейшем нагружении тонкостенной цилиндрической оболочки средней длины происходит полная потеря устойчивости. Потеря устойчивости происходит образованием впадин, расположенных по полуокружности в один ряд в обе стороны к растянутой зоне.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, прямой изгиб, устойчивость, начальные несовершенства, поправочные коэффициенты, ожидаемая критическая сила, радиус срединной поверхности.

Петров Михаил Васильевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры строительных конструкций; e-mail: 21pmv@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-7355-8553>; AuthorID: 831162

Алексеева Олеся Анатольевна, аспирант кафедры строительных конструкций; e-mail: aask21@yandex.ru; <https://orcid.org/0009-0001-1155-8013>; AuthorID: 1250072

Михайлов Борис Васильевич, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры строительных конструкций; e-mail: boris.mihaylov.63@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0001-6511-6985>; AuthorID: 780012



для цитирования: Петров М. В., Алексеева О. А., Михайлов Б. В. Теоретическое и экспериментальное исследование потери устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек средней длины при прямом изгибе // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 99–112. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.007. EDN: MRYKNN

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

M. V. Petrov, O. A. Alekseeva, B. V. Mikhailov

THEORETICAL AND EXPERIMENTAL STUDY OF THE LOSS OF STABILITY OF THIN-WALLED CYLINDRICAL SHELLS OF MEDIUM LENGTH UNDER DIRECT BENDING

I.N. Ulianov Chuvash State University, Cheboksary, Russia

Abstract. The process of loss of stability of thin-walled cylindrical shells of medium length under direct bending in the zones of maximum normal and tangential stresses is theoretically and experimentally investigated. A graph of the dependence of critical forces on the length of a cylindrical shell is recommended to determine the loss of stability in the zones of maximum normal and tangential stresses. In most cases, the loss of stability during straight bending was experimentally observed in the zone of maximum normal stresses. As the length of the medium-length shells decreases, the effect of the lateral force increases, resulting in the loss of local stability in the form of simultaneous indentation in the zones of maximum normal and tangential stresses. Further loading of the medium-length thin-walled cylindrical shell leads to a complete loss of stability. The loss of stability occurs through the formation of depressions arranged in a single row along the semi-circle in both directions towards the stretched zone.

Keywords: cylindrical shell, straight bending, stability, initial imperfections, correction factors, expected critical force, and radius of the middle surface.

Mikhail V. Petrov, Doctor of Technical Sciences, Professor; e-mail: 21pmv@mail.ru;
<https://orcid.org/0000-0002-7355-8553>; AuthorID: 831162

Olesya A. Alekseeva, Postgraduate Student; e-mail: aosk21@yandex.ru;
<https://orcid.org/0009-0001-1155-8013>; AuthorID: 1250072

Boris V. Mikhailov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor; e-mail: boris.mihaylov.63@mail.ru;
<https://orcid.org/0000-0001-6511-6985>; AuthorID: 780012



to cite this article: Petrov M. V., Alekseeva O. A., Mikhailov B. V. Theoretical and Experimental Study of the Loss of Stability of Thin-Walled Cylindrical Shells of Medium Length under Direct Bending // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 99–112. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.007

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Устойчивость тонкостенных цилиндрических оболочек при различных видах нагружения теоретически и экспериментально исследованы во многих научных трудах [1–10]. Теоретический и экспериментальный анализ устойчивости цилиндрических оболочек при изгибе приведен в следующих источниках [2, 3]. Влияние геометрических параметров на устойчивость цилиндрических оболочек теоретически и экспериментально исследовалось в [2, 3, 11, 12]. Решение задачи при прямом изгибе (под действием сосредоточенной силы) обусловлено тем, что в зависимости от геометрических и жесткостных параметров оболочки потеря устойчивости может происходить по двум типам: от действия касательных напряжений (по типу кручения) и нормальных напряжений (по типу сжатия-изгиба) [2, 3]. Серьезное влияние на потерю устойчивости тонкостенных оболочек оказывают начальные несовершенства геометрии оболочки и другие факторы [1, 4, 7].

Целью настоящей работы является теоретическое и экспериментальное изучение потери устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек средней длины при прямом изгибе.

1. Теоретическое исследование потери устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек средней длины при прямом изгибе. Для рассмотрения теоретического исследования потери устойчивости тонкостенной цилиндрической оболочки средней длины при прямом изгибе использовали расчетную схему представленную на рис. 1.

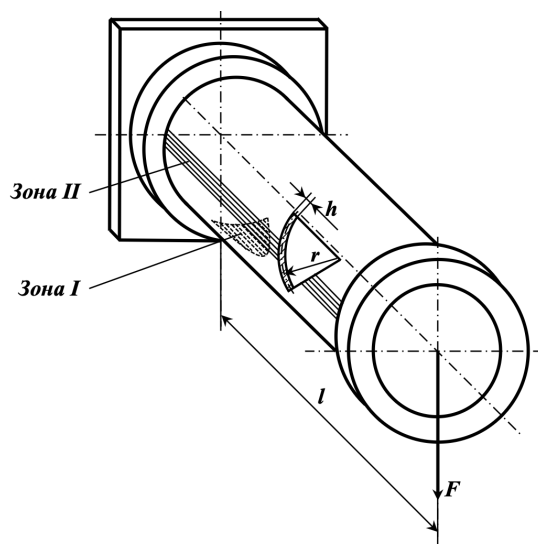


Рис. 1.

При прямом изгибе (рис. 1) создаются в стенке цилиндрической оболочки нормальные и касательные напряжения [7]. Тогда опасными для потери устойчивости будут зоны максимальных нормальных напряжений (зона I) и максимальных касательных напряжений (зона II).

Для исследований использовалась тонкостенная цилиндрическая оболочка из алюминиевого сплава марки 3004 в состоянии Н-19 у которой радиус срединной поверхности $r = 31,48$ мм, толщина оболочки $h = 0,1$ мм, длина оболочки $l = 140$ мм, модуль упругости $E = 0,7 \cdot 10^{11}$ Па [13], коэффициент Пуассона $\nu = 0,33$ [14].

Для тонкостенной оболочки средней длины при прямом изгибе выполняется условие (1) [7]:

$$1,2\sqrt{\frac{h}{r}} < \frac{l}{r} < 3\sqrt{\frac{r}{h}} \quad (1)$$

После подстановки данных в условие (1), получим: $0,068 < 4,45 < 53,23$. Согласно формуле (1), разброс длины рассматриваемой тонкостенной цилиндрической оболочки, у которой отношение радиуса срединной поверхности к толщине данной оболочки равна 314,8, составляет от 2,14 мм до 1675,68 мм.

Приравнивая критическое нормальное напряжение в первой зоне ($\sigma_{икр}$) к критическому напряжению при осевом сжатии ($\sigma_{кр}$) для оболочек средней длины, вычислили ожидаемую критическую силу [7].

Предварительно вычислили критическое нормальное напряжение в первой зоне ($\sigma_{кр}$) с помощью формулы (2) [1, 7].

$$\sigma_{кр} = \frac{E \cdot h}{r \sqrt{3(1 - \nu^2)}} \quad (2)$$

После подстановки значений в формулу (2) получили следующее выражение:

$$\sigma_{кр} = 0,612 \cdot E \frac{h}{r}$$

Тогда [7],

$$\sigma_{икр} = \frac{F_{кр}^{(I)} \cdot l}{\pi \cdot r^2 \cdot h} = 0,612 \cdot E \frac{h}{r};$$

$$F_{кр}^{(I)} = 1,345 \cdot 10^{11} \cdot \frac{h^2 \cdot r}{l} \quad (3)$$

Из формулы (3) определили критическую силу ($F_{кр}^{(I)}$), которая равна $F_{кр}^{(I)} = 302,43$ Н.

Для определения критической силы при потере устойчивости во второй зоне ($F_{кр}^{(II)}$), приравнивали касательное напряжение при изгибе ($\tau_{икр}$) критическому касательному напряжению при кручении ($\tau_{кр}$) для оболочек средней длины.

Предварительно определили критическое напряжение при кручении ($\tau_{кр}$) для оболочек средней длины, у которых выполняется условие (4) [7].

$$3\sqrt{\frac{h}{r}} < \frac{l}{r} < 9\sqrt{\frac{r}{h}}. \quad (4)$$

После подстановки данных в условие (4), получим: $0,169 < 4,45 < 159,69$. Согласно формуле (4), разброс длины рассматриваемой тонкостенной цилиндрической оболочки, у которой отношение радиуса срединной поверхности к толщине данной оболочки равна 314,8, составляет от 5,32 мм до 5027,04 мм.

С учетом выполнения условия (4) определили критическое напряжение при кручении ($\tau_{кр}$) с помощью формулы (5) [1, 7].

$$\tau_{кр} = \frac{0,74 \cdot E \cdot h}{r(1 - \nu^2)^{5/8}} \cdot \sqrt[4]{\frac{h \cdot r}{l^2}}. \quad (5)$$

После подстановки значений в формулу (5) получили следующее выражение:

$$\tau_{кр} = 0,796 \cdot E \cdot \frac{h}{r} \cdot \sqrt[4]{\frac{h \cdot r}{l^2}}.$$

Тогда [7],

$$\begin{aligned} \tau_{икр} &= \frac{F_{кр}^{(II)} \cdot l}{\pi \cdot r \cdot h} = 0,796 \cdot E \cdot \frac{h}{r} \cdot \sqrt[4]{\frac{h \cdot r}{l^2}}; \\ F_{кр}^{(II)} &= 0,557 \cdot 10^{11} \cdot h^2 \cdot \sqrt[4]{\frac{h \cdot r}{l^2}}; \end{aligned} \quad (6)$$

Из формулы (6) определили критическую силу ($F_{кр}^{(II)}$), которая равна $F_{кр}^{(II)} = 197,64Н$.

В качестве расчетного значения критической силы принимали минимальное значение ($F_{кр}$) с учетом поправочных коэффициентов [7] по формуле (7)

$$F_{кр} = \min \begin{cases} 1,2 \cdot \alpha_c \cdot F_{кр}^{(I)}; \\ \alpha_k \cdot F_{кр}^{(II)}, \end{cases} \quad (7)$$

где α_c – поправочный коэффициент на начальные непрямолинейности [7]; α_k – поправочный коэффициент на начальные отклонения при кручении [7].

Коэффициент α_c для отношения радиуса срединной поверхности вышеуказанной цилиндрической оболочки к толщине цилиндрической оболочки равной 314,8 определили интерполяцией из табличных данных источника [7], который равен $\alpha_c = 0,282$.

После подстановки значений в формулу (7) определили ожидаемую критическую силу из условия устойчивости в первой зоне, которая равна $F_{кр} = 102,34Н$.

Значение поправочного коэффициента на начальные отклонения при кручении α_k так же определили интерполяцией из табличных данных источника [7], который равен $\alpha_k = 0,774$.

После подстановки значений в формулу (7) определили ожидаемую критическую силу из условия устойчивости во второй зоне, которая равна $F_{кр} = 152,97 \text{ Н}$.

Исходя из вышеприведенных расчетов окончательно выбирали минимальную ожидаемую критическую силу, т.е. $F_{кр} = 102,34 \text{ Н}$.

В связи с тем, что при прямом изгибе разброс длины рассматриваемой тонкостенной цилиндрической оболочки, у которой отношение радиуса срединной поверхности к толщине данной оболочки равна 314,8, составляет от 5,32 мм до 1675,68 мм необходимо исследовать потерю устойчивости в первой и во второй зонах. Для этого из формул (3) и (6), рассмотрели функции $F_{кр}^{(I)} = f(l)$ и $F_{кр}^{(II)} = f(l)$ и построили их графики зависимости (рис. 2).

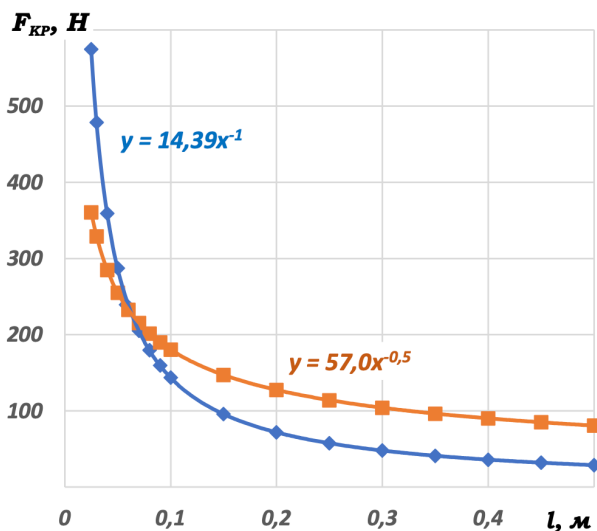


Рис. 2. График зависимости критических сил в первой и во второй зонах от длины цилиндрической оболочки.

Функция $y = 14,39 \cdot x^{-1}$ – график зависимости критической силы из условия устойчивости в первой зоне. Функция $y = 57,0 \cdot x^{-0,5}$ – график зависимости критической силы из условия устойчивости во второй зоне. Точка пересечения вышеуказанных функций имеет следующие координаты $F_{кр} = 224,84 \text{ Н}$, $l = 0,064 \text{ м}$.

Анализ графиков зависимости приведенных на рис.2 указывает на то, что при длине от 0,00532 м до 0,064 м ожидаемая потеря устойчивости должна происходить во второй зоне, а при длине от 0,064 м до 1,676 м ожидаемая потеря устойчивости должна происходить в первой зоне. Для проверки вышеуказанного анализа графиков нами были проведены серии опытов с образцами длиной 40 мм и 140 мм.

2. Экспериментальное исследование потери устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек средней длины при прямом изгибе. Для определения потери устойчивости при изгибе тонкостенной цилиндрической оболочки из алюминиевого сплава марки 3004 в состоянии Н-19 изготовлена и собрана специальная экспериментальная установка рис.3а. Исследуемые образцы (1) одним концом жестко закреплялись к оправке (2). В свою очередь, оправка жестко закреплялась к станине (3). Для контроля прогиба свободного конца оправки установлен высококачественный микронный цифровой индикатор (4). Для измерения прогиба свободного конца образца установлен так же высококачественный микронный цифровой индикатор (5). Для придания жесткости на свободный конец испытываемого образца, закреплялось жесткое кольцо (6), к которому прикреплялся крючок (7). Соосность центра оправки и центра свободного конца цилиндрической оболочки контролировали с помощью лазерного уровня (нивелира) рис.3б. На крючок устанавливался подвес (8).

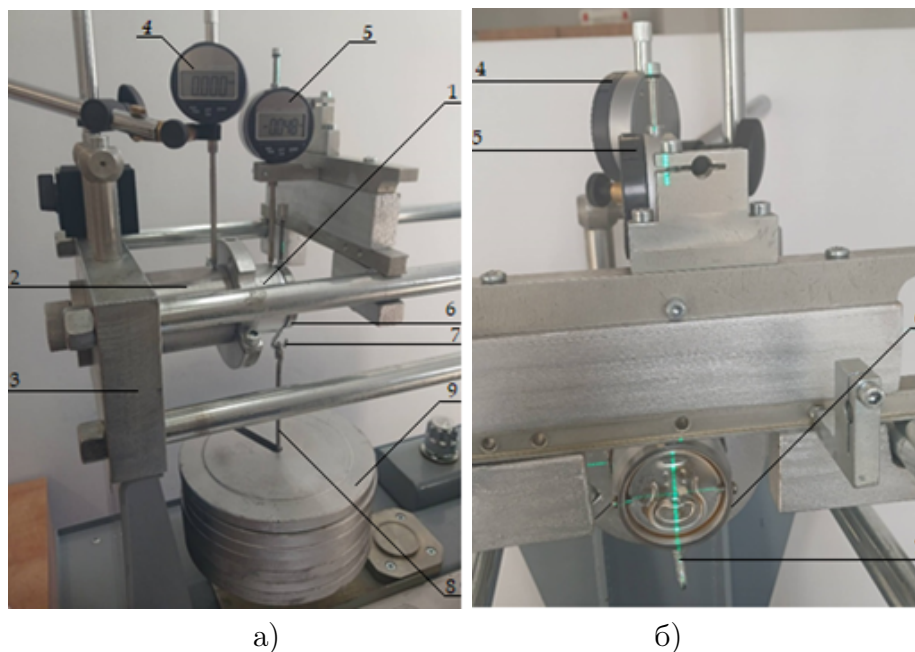


Рис. 3. Специальная экспериментальная установка

Испытуемый образец из алюминиевого сплава 3004 в состоянии Н19 имел следующие размеры: внешний диаметр $D = 63,05$ мм, внутренний диаметр $d = 62,85$ мм, расчетные длины образцов $l = 40$ мм и 140 мм, толщина стенки $h = 0,1$ мм.

После сборки специальной экспериментальной установки (рис. 3а) до нагружения показания высококачественных микронных цифровых индикаторов (4) и (5) устанавливали на "0". Затем на подвес (8) устанавливали груз (9), который

создавал изгибающий момент. После этого нагружали образец вначале большими, а затем малыми ступенями, отмечая после каждой ступени нагружения вертикальное перемещение на свободном конце образца (1). Ступени малых нагружений выбирали так, чтобы до достижения потери устойчивости было не менее пяти ступеней малых нагружений. После потери устойчивости фиксировались данные критической нагрузки и показания микронных цифровых индикаторов (4) и (5), которые записывали в журнал испытаний. Размеры образцов приведены в табл. 1.

В каждой серии испытывались по десять образцов с последующей статистической обработкой результатов [15]. В первой серии испытаний образец терял устойчивость в две стадии: первая – потеря местной устойчивости, вторая – полная потеря устойчивости образца.

Серия испытаний	Радиус срединной поверхности r , мм	Толщина оболочки h , мм	Длина оболочки l , мм	$\frac{l}{r}$
1	31,48	0,1	40	1,27
2	31,48	0,1	140	4,45

Таблица 1. Размеры испытываемых образцов

В первой стадии местная потеря устойчивости наблюдалась в нескольких вариантах. Один из вариантов – появление вмятины между зоной максимальных напряжений прямого изгиба (зона I) и максимальных касательных напряжений (зона II) рис. 4а. Затем при дальнейшем нагружении образца одновременно появляются вмятина в первой зоне рис. 4а, 4б и во второй зоне рис. 4в. Другой вариант одновременное появление вмятин в первой и во второй зонах. Во второй зоне, где действуют максимальные касательные напряжения появились впадины, наклоненные под углом к образующей тонкостенной цилиндрической оболочки рис. 4в.

При дальнейшем нагружении наступала вторая стадия – полная потеря устойчивости образца. Образец первой серии испытаний после полной потери устойчивости приведен на рис. 5а. Количество впадин в образцах первой серии испытаний 11 впадин, одна впадина в центре первой зоны и по пять впадин наклоненные под углом к образующей тонкостенной цилиндрической оболочки с одной и другой стороны. Из этих пяти впадин с одной и другой стороны одна впадина № 4 (рис. 5а) в центре зоны 2 на всю длину тонкостенной цилиндрической оболочки.

Во второй серии испытаний образец терял устойчивость в одну стадию – полная потеря устойчивости образца. Оболочки средней длины при прямом изгибе теряют устойчивость с образованием одного ряда впадин [9]. Образец второй серии испытаний после полной потери устойчивости приведен на рис. 5б. Образцы второй серии теряют устойчивость, образуя впадины, расположенные

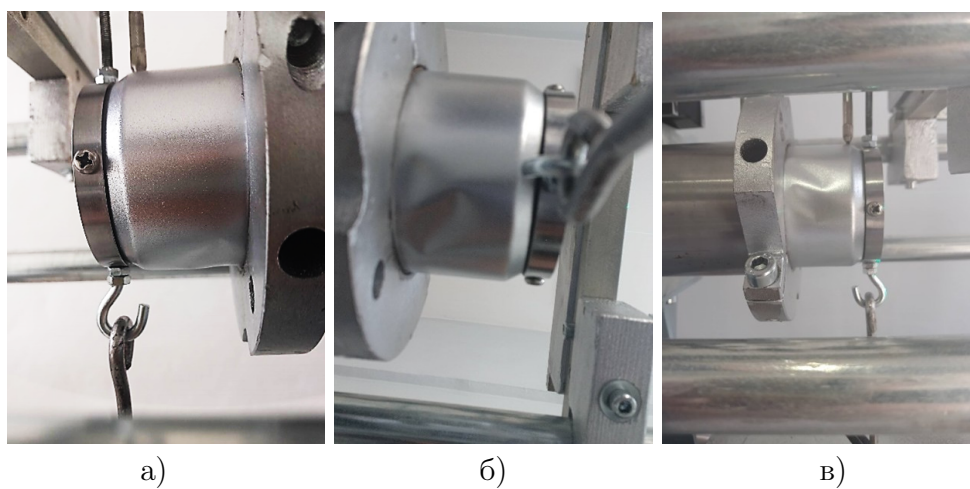


Рис. 4. Этапы местной потери устойчивости первой серии испытаний

по полуокружности в один ряд в обе стороны к растянутой зоне. При этом в первой зоне образуются мелкие впадины с большой глубиной, глубина впадин уменьшается по полуокружности при приближении к растянутой зоне (рис.5б).



Рис. 5. Образцы первой и второй серий испытаний после полной потери устойчивости

Результаты статистической обработки испытаний с доверительной вероятностью $P = 0,95$ приведены в таблице 2.

Серии испытаний	Значение критической силы $F_{кр}^{exp}$, Н	Среднее квадратическое отклонение, Н	Доверительный интервал, Н	Коэффициент вариации, ν , %	Коэффициент асимметрии, S_μ	Коэффициент эксцесса, E_x	Средняя квадратическая ошибка асимметрии, S_A^2	Средняя квадратическая ошибка эксцесса, S_E^2
1 серия испытаний: местная потеря устойчивости	264,28	46,23	$(264,28 \pm 33,04)$	17,49	-1,146	0,664	0,377	0,569
1 серия испытаний: полная потеря устойчивости	328,39	19,92	$(328,39 \pm 14,24)$	6,07	0,548	-0,483	0,377	0,569
2 серия испытаний: полная потеря устойчивости	106,83	14,11	$(106,83 \pm 10,08)$	13,21	-0,738	-0,804	0,377	0,569

Таблица 2. Результаты статистической обработки испытаний

По данным статистической обработки испытаний проверили, подчиняются ли они нормальному закону распределения при помощи неравенств (8) и (9) [15].

$$|S_\mu| \leq 3 \cdot \sqrt{S_A^2} \quad (8)$$

$$\text{где } S_A^2 = \frac{6 \cdot (n-1)}{(n+1) \cdot (n+3)}$$

$$|E_x| \leq 5 \cdot \sqrt{S_E^2}, \quad (9)$$

$$\text{где } S_E^2 = \frac{24 \cdot n \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{(n+1)^2 \cdot (n+3) \cdot (n+5)}$$

Подставив значения в формулу (8), проверили соблюдение условий:

- 1 серия испытаний, местная потеря устойчивости $|-1,146| \leq 3 \cdot \sqrt{0,377}$;
- 1 серия испытаний, полная потеря устойчивости $|0,548| \leq 3 \cdot \sqrt{0,377}$;
- 2 серия испытаний, полная потеря устойчивости $|-0,738| \leq 3 \cdot \sqrt{0,377}$.

Подставив значения в формулу (9), проверили соблюдение условий:

- 1 серия испытаний, местная потеря устойчивости $|0,664| \leq 5 \cdot \sqrt{0,569}$;
- 1 серия испытаний, полная потеря устойчивости $|-0,483| \leq 5 \cdot \sqrt{0,569}$;
- 2 серия испытаний, полная потеря устойчивости $|-0,804| \leq 5 \cdot \sqrt{0,569}$.

Вышеуказанные условия соблюдаются, т.е. асимметрия и эксцесс несущественны, вызваны влиянием случайных факторов. Следовательно, приведенные в табл.2 результаты подчиняются нормальному закону распределения.

Значение критической силы в первой серии испытаний для местной потери составило $F_{кр}^{exp} = 264,28$ Н. Согласно графику зависимости критических сил во второй зоне от длины цилиндрической оболочки (рис. 2) ожидаемая критическая сила имеет значение $F_{кр} = 285$ Н. Несоответствие экспериментального значения критической силы с ожидаемой критической силой составило 7,27%.

Значение критической силы в первой серии испытаний для полной потери составило

$F_{кр}^{exp} = 328,39$ Н. Согласно графику зависимости критических сил в первой зоне от длины цилиндрической оболочки (рис.2) ожидаемая критическая сила имеет значение $F_{кр} = 359,75$ Н. Несоответствие экспериментального значения критической силы с ожидаемой критической силой составило 8,72%.

Значение критической силы во второй серии испытаний для полной потери составило $F_{кр}^{exp} = 106,83$ Н. Согласно графику зависимости критических сил в первой зоне от длины цилиндрической оболочки (рис. 2) ожидаемая критическая сила имеет значение $F_{кр} = 102,79$ Н. Несоответствие экспериментального значения критической силы с ожидаемой критической силой составило 3,78%.

В целом наблюдается хорошее соответствие результатов критической силы по теоретическим и экспериментальным исследованиям.

Закключение. По результатам проведенных теоретических исследований рекомендован график зависимости критических сил от длины цилиндрической оболочки для определения потери устойчивости оболочек средней длины в зонах максимальных нормальных и касательных напряжений. Анализ результатов экспериментальных исследований показал, что приведенные результаты статистической обработки испытаний значения критической силы подчиняются нормальному закону распределения и эксперименты выполнены с доверительной вероятностью $P = 0,95$. Расхождение теоретических и экспериментальных значений критических сил составило от 3,78 % до 8,72 %, что подтверждает удовлетворительное соответствие результатов теоретических и экспериментальных исследований.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. М.В. Петров – постановка задачи, написание текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, О.А. Алексеева – обзор литературы, постановка и проведение экспериментов, обработка данных, Б.В. Михайлов – постановка и проведение экспериментов, обработка данных, анализ результатов, оформление таблиц и рисунков.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. M.V. Petrov – formulation of the task, writing of the manuscript text, coordination of the final version of the manuscript, O.A. Alekseeva – literature review, formulation and execution of experiments, data processing, B.V. Mikhailov – formulation and execution of experiments, data processing, analysis of results, and design of tables and figures.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. В 2 частях. Ч. 2. – 3-е изд. – Москва : Издательство Юрайт, 2025. – 480 с. – (Высшее образование). – Учебник для вузов.
2. Маневич А. И., Пономаренко Е. А., Прокопало Е. Ф. Устойчивость ортотропных цилиндрических оболочек при изгибе поперечной силой. Сообщение 1. Теория // Проблемы прочности. – 2013. – № 1. – С. 101–111.
3. Маневич А. И., Пономаренко Е. А., Прокопало Е. Ф. Устойчивость ортотропных цилиндрических оболочек при изгибе поперечной силой. Сообщение 2. Эксперимент // Проблемы прочности. – 2013. – № 2. – С. 114–120.
4. Теоретическое и экспериментальное исследование потери устойчивости и закритического поведения тонкостенной цилиндрической оболочки при изгибе / В. Г. Баженов [и др.] // Проблемы прочности и пластичности. – 2009. – № 71. – С. 77–83.
5. Гоник Е. Г., Петров М. В., Федорова Т. Г. Экспериментальное исследование потери устойчивости консольно закрепленных цилиндрических тонкостенных оболочек при поперечном изгибе // Проблемы прочности и пластичности. – 2016. – Т. 78, № 2. – С. 228–235.
6. Петров М. В., Федорова Т. Г., Гоник Е. Г. Экспериментальное исследование потери устойчивости тонкостенных оболочек при чистом изгибе // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – № 2. – С. 119–125.
7. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Иосилевич Г. Б. Расчет на прочность деталей машин: Справочник. – 4-е изд. – Москва : Машиностроение, 1993. – 640 с.
8. Сысоев О. Е., Намоконов А. Н., Сысоев Е. О. Численные исследования колебаний тонкостенной цилиндрической оболочки в пластической зоне деформации // Вестник Чувашского государственного университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2025. – 4(66). – С. 173–184. – DOI: 10.37972/chgru.2025.66.4.012. – EDN: ESVEFT.
9. Вольмир А. С., Григорьев Ю. П., Станкевич А. И. Сопротивление материалов. – Москва : Дрофа, 2007. – 591 с. – Учебник для вузов.
10. Ильюшин А. А., Огибалов П. М. Упругопластические деформации полых цилиндров. – Москва : Изд-во Моск. ун-та, 1960. – 227 с.
11. *Rotter J. M., Sadowski A. J.* Full plastic resistance of tubes under bending and axial force: exact treatment and approximations // Structures. – 2016. – Vol. 10. – P. 30–38. – DOI: 10.1016/j.istruc.2016.11.004.

12. Stability and supercritical behavior of large size tankers for transportation of loose goods / V. G. Bazhenov [et al.] // J. Mach. Manuf. Reliab. – 2015. – Vol. 44, no. 5. – P. 422–427. – DOI: 10.3103/S1052618815050039.
13. URL: <https://ru.mfgrobots.com/material/metal/1010037377.html>. – (Дата обр. 02.03.2026).
14. URL: <https://www.makeitfrom.com/material-properties/3004-H19-Aluminum>. – (Visited on 03/02/2026).
15. Золотухин Ю. Д. Испытание строительных конструкций. – Минск : Выш. школа, 1983. – 208 с. – Учебное пособие для вузов по специальности «Промышленное и гражданское строительство».

REFERENCES

1. *Volmir A. S.* Stability of Deformable Systems. In 2 Parts. Part 2. – 3rd ed. – Moscow : Yurayt Publishing House, 2025. – 480 p. – (Higher Education). – Textbook for universities.
2. *Manevich A. I., Ponomarenko E. A., Prokopalo E. F.* Stability of orthotropic cylindrical shells under bending by a transverse force. Part 1. Theory // Strength Mater. – 2013. – No. 1. – P. 101–111.
3. *Manevich A. I., Ponomarenko E. A., Prokopalo E. F.* Stability of orthotropic cylindrical shells under bending by a transverse force. Part 2. Experiment // Strength Mater. – 2013. – No. 2. – P. 114–120.
4. Theoretical and experimental study of the loss of stability and the post-critical behavior of a thin-walled cylindrical shell under bending / V. G. Bazhenov [et al.] // Problems of Strength and Plasticity. – 2009. – No. 71. – P. 77–83.
5. *Gonik E. G., Petrov M. V., Fedorova T. G.* Experimental study of the loss of stability of cantilevered cylindrical thin-walled shells under transverse bending // Problems of Strength and Plasticity. – 2016. – Vol. 78, no. 2. – P. 228–235.
6. *Petrov M. V., Fedorova T. G., Gonik E. G.* Experimental study of the loss of stability of thin-walled shells during pure bending // Vestnik Chuvash State Pedagogical University I.Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of the Limit State. – 2015. – No. 2. – P. 119–125.
7. *Birger I. A., Shorr B. F., Iosilevich G. B.* Strength Calculation of Machine Parts: Handbook. – 4th ed. – Moscow : Mechanical Engineering, 1993. – 640 p. – Revised and expanded edition.
8. *Sysoev O. E., Namokonov A. N., Sysoev E. O.* Numerical study of vibrations of a thin-walled cylindrical shell in the plastic strain zone // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost. – 2025. – 4(66). – P. 173–184. – DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.012.
9. *Volmir A. S., Grigoriev Y. P., Stankevich A. I.* Resistance of Materials. – Moscow : Drofa, 2007. – 591 p. – Textbook for universities.
10. *Ilyushin A. A., Ogibalov P. M.* Elastoplastic Deformations of Hollow Cylinders. – Moscow : Moscow University Press, 1960. – 227 p.
11. *Rotter J. M., Sadowski A. J.* Full plastic resistance of tubes under bending and axial force: exact treatment and approximations // Structures. – 2016. – Vol. 10. – P. 30–38. – DOI: 10.1016/j.istruc.2016.11.004.

12. Stability and supercritical behavior of large size tankers for transportation of loose goods / V. G. Bazhenov [et al.] // J. Mach. Manuf. Reliab. – 2015. – Vol. 44, no. 5. – P. 422–427. – DOI: 10.3103/S1052618815050039.
13. URL: <https://ru.mfgrobots.com/material/metal/1010037377.html>. – (Visited on 03/02/2026) ; Electronic resource.
14. URL: <https://www.makeitfrom.com/material-properties/3004-H19-Aluminum>. – (Visited on 03/02/2026) ; Electronic resource.
15. *Zolotukhin Y. D.* Testing of Building Structures. – Moscow : Higher School, 1983. – 208 p. – Textbook for universities.

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

ФАКТОРИЗАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ГЕМИТРОПНОГО МИКРОПОЛЯРНОГО УПРУГОГО ТЕЛА

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Аннотация. В настоящем исследовании рассматривается факторизация характеристического полинома квадратичной энергетической формы гемитропной микрополярной упругой среды. Энергия деформации рассматривается как функция, зависящая от несимметричных тензоров деформации и изгиба-кручения, которые трактуются как термодинамические переменные состояния. Приведено А-представление энергии деформации гемитропной микрополярной упругой среды, характеризующейся 9 изоэнтропийными механическими модулями. Получен характеристический полином алгебраической степени 18 указанной квадратичной формы и проводится его мультипликативное разложение на 4 полинома меньшей алгебраической степени. Вычислены собственные числа и определена их алгебраическая кратность. Получены односторонние ограничения, накладываемые на определяющие константы, обеспечивающие положительную определенность квадратичной формы, и три существенных определяющих неравенства, гарантирующих устойчивость равновесия гемитропного микрополярного упругого тела.

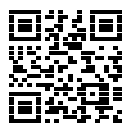
Ключевые слова: энергия деформации, внутренняя энергия, энтропия, устойчивость равновесия, гемитропная микрополярная среда, упругость, диагонализация, каноническая квадратичная форма, положительная определенность, определяющие неравенства

Мурашкин Евгений Валерьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: murashkin@ipmnet.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Радаев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radayev@ipmnet.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116



для цитирования: Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Факторизация характеристического полинома энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 113–125. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.008. EDN: NEIVZA

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

E. V. Murashkin, Y. N. Radayev

ON A CHARACTERISTIC POLYNOMIAL FACTORIZATION OF THE ENERGY FORM OF A HEMITROPIC MICROPOLAR ELASTIC SOLID

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The present study considers the factorization of the characteristic polynomial of a quadratic energy form of a hemitropic micropolar elastic solid. The strain energy is considered as a function dependent on asymmetric strain and wryness tensors, which are treated as thermodynamic state variables. An A-representation of the strain energy of a hemitropic micropolar elastic medium characterized by 9 isentropic mechanical moduli is presented. A characteristic polynomial of algebraic degree 18 for the given quadratic form is obtained and its multiplicative decomposition into 4 polynomials of lower algebraic degree is obtained. The eigenvalues are calculated and their algebraic multiplicity is determined. One-sided constraints imposed on the constitutive constants ensuring the positive definiteness of the quadratic form and three essential constitutive inequalities required for the equilibrium stability of a hemitropic micropolar elastic solid are established.

Keywords: strain energy, internal energy, entropy, equilibrium stability, hemitropic micropolar medium, elasticity, diagonalization, canonical quadratic form, positive definiteness, constitutive inequalities

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; e-mail: evmurashkin@gmail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Yuri N. Radayev, Dr. Sci. Phys. & Math., Prof., Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; e-mail: radayev@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116



to cite this article: Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a characteristic polynomial factorization of the energy form of a hemitropic micropolar elastic solid // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 113–125. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.008

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Математическое моделирование механического поведения микрополярных упругих тел начинается с построения энергии деформации [1–10]. Энергия деформации есть внутренняя энергия, поскольку мы ограничиваемся изоэнтропийными (адиабатическими) процессами. Для изотермических процессов энергию деформации следует интерпретировать как свободную энергию Гельмгольца. В большинстве доступных литературных источников внутренняя энергия вводится как термодинамический потенциал состояния на единицу инвариантного объема и обозначается U . В ходе обсуждения рассматриваются только изоэнтропийные процессы. Таким образом, для внутренней энергии имеем

$$U = \bar{U}(\bar{S}, \epsilon_{ij}, \kappa_{ij}), \quad (1)$$

где ϵ_{ij} — несимметричный тензор деформации, κ_{ij} — тензор изгиба-кручения, $\bar{S}$ — энтропия на единицу инвариантного объема, черта над символом относится к термодинамическому потенциалу состояния в отличие от самой физической полевой величины (в (1) это замечание относится к U и S).

Второй (взаимный) принцип Гиббса гласит (см. [11]): «для локального равновесия необходимо и достаточно, чтобы при всех возможных изменениях состояния системы, не меняющих ее энтропии, изменение ее энергии либо обращалось в нуль, либо было положительным: $\delta\bar{U} \geq 0$ ».

Исходная формулировка взаимного принципа может быть аналогично усилена согласно

$$\bar{U}(\bar{S}, \epsilon_{ij}, \kappa_{ij}) \longrightarrow \min \quad (\delta\bar{S} = 0), \quad (2)$$

т.е. поскольку $\delta\bar{S} = 0$, то

$$\begin{aligned} \delta\bar{U} &= 0, \quad \delta^2\bar{U} \geq 0, \\ \delta^2\bar{U} &= 0, \text{ тогда и только тогда, когда } \delta\epsilon_{ij} = 0 \text{ и } \delta\kappa_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В силу двустороннего ограничения $\delta\bar{U} = 0$, $\bar{U}$ не должна зависеть от линейных членов по вариациям переменных состояния. Это обстоятельство подтверждается простой оценкой приращения внутренней энергии:

$$\bar{U} - \bar{U}\Big|_{\text{equilibrium}} = \delta\bar{U} + \frac{1}{2!}\delta^2\bar{U} + \dots, \quad (4)$$

где первая вариация вычисляется как

$$\delta\bar{U}[\delta\epsilon_{ij}, \delta\kappa_{ij}] = \frac{\partial\bar{U}}{\partial\epsilon_{ij}}\Big|_{\bar{S}=\text{fixed}} \delta\epsilon_{ij} + \frac{\partial\bar{U}}{\partial\kappa_{ij}}\Big|_{\bar{S}=\text{fixed}} \delta\kappa_{ij}, \quad (5)$$

а вторая — определяется выражением

$$\begin{aligned} \delta^2\bar{U}[\delta\epsilon_{ij}, \delta\kappa_{ij}] &= \frac{\partial^2\bar{U}}{\partial\epsilon_{ij}\partial\epsilon_{kl}}\Big|_{\bar{S}=\text{fixed}} \delta\epsilon_{ij}\delta\epsilon_{kl} + \frac{\partial^2\bar{U}}{\partial\epsilon_{ij}\partial\kappa_{kl}}\Big|_{\bar{S}=\text{fixed}} \delta\epsilon_{ij}\delta\kappa_{kl} + \\ &+ \frac{\partial^2\bar{U}}{\partial\kappa_{ij}\partial\kappa_{kl}}\Big|_{\bar{S}=\text{fixed}} \delta\kappa_{ij}\delta\kappa_{kl}. \end{aligned} \quad (6)$$

В силу первой формулы в (3) уравнение (5) преобразуется к виду

$$\overline{U} - \overline{U} \Big|_{\text{equilibrium}} = \frac{1}{2} \delta^2 \overline{U} + \dots \quad (7)$$

Основываясь на взаимном принципе, критерий устойчивости изоэнтропийного равновесия формулируется односторонним ограничением на вторые вариации внутренней энергии $\delta^2 \overline{U}$:

$$\delta^2 \overline{U}(0, 0) [\delta \epsilon_{ij}, \delta \kappa_{ij}] = \delta^2 \overline{U} \Big|_{\epsilon_{ij}=0, \kappa_{ij}=0} [\delta \epsilon_{ij}, \delta \kappa_{ij}] \geq 0, \quad (8)$$

$\delta^2 \overline{U} = 0$, тогда и только тогда, когда $\delta \epsilon_{ij} = 0$ и $\delta \kappa_{ij} = 0$.

В настоящем исследовании широко используется терминология, обозначения, методы и результаты, представленные в наших предыдущих работах [8, 9, 12–17].

1. Энергия деформации гемитропного микрополярного упругого тела. В этом разделе ограничимся рассмотрениями в трехмерном пространстве, снабженном декартовой системой координат.

Микрополярное твердое тело называется гемитропным, если компоненты определяющих тензоров не изменяются при поворотах системы координат, т.е. они инвариантны относительно группы полуизометрических преобразований, а именно изометрических преобразований, за исключением зеркальных отражений и инверсий трехмерного евклидова пространства. В этом случае корректная запись основных уравнений может быть представлена только с использованием формализма псевдотензоров. Однако, простой алгоритм преобразования псевдотензора в соответствующий ему абсолютный тензор позволяет нам провести наше исследование в терминах абсолютных тензоров.

Введем энергию деформации $\mathcal{U} \Big|_{\text{adiabatic}}$ [9, 13, 14], рассчитанную на единичный инвариантный элемент объема при постоянной энтропии ($S = \text{const}$), в виде:

$$\overline{U} \Big|_{\text{adiabatic}} = \overline{U} \Big|_{S=\text{const}} = \mathcal{U} \Big|_{\text{adiabatic}} (\epsilon_{(ij)}, \kappa_{(ij)}, \varphi_i, \kappa_i), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \partial_i u_j - e_{ijk} \varphi_k, & 2\epsilon_{(ij)} &= \partial_i u_j + \partial_j u_i, & \kappa_{ij} &= \partial_i \phi_j, \\ \kappa_{(ij)} &= \partial_i \phi_j + \partial_j \phi_i, & \varphi_i &= \phi_i - \frac{1}{2} e_{ikl} \partial_{[k} u_{l]}, & \kappa_i &= \frac{1}{2} e_{ijs} \kappa_{[js]}. \end{aligned} \quad (10)$$

В уравнениях (5) и (6) используются следующие обозначения: u_i — трансляционные перемещения; ϕ_i — спинорные перемещения; ϵ_{kl} — асимметричный тензор деформации; κ_{kl} — тензор изгиба-кручения; ∂_i обозначает частную производную по пространственной координате x_i ; e_{ijk} — альтернирующий тензор; φ_i — относительные микроповороты; круглые скобки обозначают алгебраическую симметризацию; квадратные скобки обозначают алгебраическое альтернирование.

Следует отметить, что $\mathcal{U} \Big|_{\text{adiabatic}}$ по сути является потенциалом силовых и моментных напряжений. В дальнейшем вместо $\mathcal{U} \Big|_{\text{adiabatic}}$ используется сокращенное обозначение $\mathcal{U}$.

Энергия деформации $\mathcal{U}$ инвариантна относительно вращений и трансляций пространства, а также относительно преобразований пространственной инверсии и зеркальных отражений, т.е. для полной изометрической группы. Существуют три различных подхода к определению энергии деформации, подробно описанные в статье [9]. Первый из них — это А-представление. А-представление [8] основано на понятиях теории рациональных алгебраических инвариантов и является линейной оболочкой индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов несимметричного тензора деформации и пространственного градиента поля микровращений. Основы теории целых рациональных алгебраических инвариантов подробно обсуждаются в фундаментальных монографиях [18, 19].

Инварианты полной неприводимой системы индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических квадратичных инвариантов симметричных компонент несимметричных тензоров деформации, тензора изгиба-кручения и связанных с ними векторов для гемитропного твердого тела, вычисляются в декартовых координатах следующим образом [17]

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_1 &= \delta_{ik} \delta_{lm} \epsilon_{(ik)} \epsilon_{(lm)}, & \mathbb{I}_2 &= \delta_{ik} \delta_{lm} \kappa_{(ik)} \kappa_{(lm)}, & \mathbb{I}_3 &= \delta_{ik} \delta_{lm} \epsilon_{(il)} \epsilon_{(km)}, \\ \mathbb{I}_4 &= \delta_{ik} \delta_{lm} \kappa_{(il)} \kappa_{(km)}, & \mathbb{I}_5 &= \delta_{ik} \varphi_i \varphi_k, & \mathbb{I}_6 &= \delta_{ik} \kappa_i \kappa_k, \\ \mathbb{I}_7 &= \delta_{ik} \delta_{lm} \epsilon_{(ik)} \kappa_{(lm)}, & \mathbb{I}_8 &= \delta_{ik} \delta_{lm} \epsilon_{(ik)} \kappa_{(lm)}, & \mathbb{I}_9 &= \delta_{ik} \kappa_i \varphi_k, \end{aligned} \quad (11)$$

где δ_{lm} — символ Кронекера.

В силу формул (7) для инвариантов $\mathbb{I}_c$ ($c = 1, \dots, 9$) энергия деформации (5) представляется в виде (см. [8, 9, 13]):

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= A_1 \delta_{is} \delta_{lm} \epsilon_{(is)} \epsilon_{(lm)} + A_2 \delta_{is} \delta_{lm} \kappa_{(is)} \kappa_{(lm)} + A_3 \delta_{is} \delta_{lm} \epsilon_{(il)} \epsilon_{(sm)} + \\ &+ A_4 \delta_{is} \delta_{lm} \kappa_{(il)} \kappa_{(sm)} + A_5 \delta_{is} \varphi_i \varphi_s + A_6 \delta_{is} \kappa_i \kappa_s + \\ &+ A_7 \delta_{is} \delta_{lm} \epsilon_{(is)} \kappa_{(lm)} + A_8 \delta_{is} \delta_{lm} \epsilon_{(is)} \kappa_{(lm)} + A_9 \delta_{is} \kappa_i \varphi_s, \end{aligned} \quad (12)$$

где A_c ($c = 1, \dots, 9$) — произвольные константы. Очевидно, эти константы могут интерпретироваться как определяющие упругие модули (абсолютные скаляры) при спецификации модели гемитропного микрополярного упругого твердого тела.

Для упрощения дальнейшего изложения введем формальные замены независимых переменных состояния $\epsilon_{(ij)}$, $\kappa_{(ij)}$, φ_i , κ_i энергии деформации $\mathcal{U}$ согласно

следующим правилам:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{(11)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{1}}, & \varphi_1 &\longleftrightarrow Y_{\underline{7}}, & \kappa_{(11)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{10}}, & \kappa_1 &\longleftrightarrow Y_{\underline{16}}, \\
\epsilon_{(22)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{2}}, & \varphi_2 &\longleftrightarrow Y_{\underline{8}}, & \kappa_{(22)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{11}}, & \kappa_2 &\longleftrightarrow Y_{\underline{17}}, \\
\epsilon_{(33)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{3}}, & \varphi_3 &\longleftrightarrow Y_{\underline{9}}; & \kappa_{(33)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{12}}, & \kappa_3 &\longleftrightarrow Y_{\underline{18}}; \\
\epsilon_{(23)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{4}}, & & & \kappa_{(23)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{13}}, & & \\
\epsilon_{(13)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{5}}, & & & \kappa_{(13)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{14}}, & & \\
\epsilon_{(12)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{6}}; & & & \kappa_{(12)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{15}}; & &
\end{aligned} \tag{13}$$

где мы подчеркиваем индекс, чтобы отличить двузначные векторные индексы от двух соседних однозначных тензорных индексов. Вектор формальных переменных¹ $[Y]$ принадлежит формальному векторному пространству алгебраической размерности 18.

С учетом замен (9) квадратичная форма энергии деформации (8) записывается как:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} = & \frac{1}{1}AY_{\underline{1}}^2 + \frac{1}{3}AY_{\underline{1}}^2 + \frac{1}{7}AY_{\underline{1}}Y_{\underline{10}} + \frac{1}{8}AY_{\underline{1}}Y_{\underline{10}} + \frac{1}{2}AY_{\underline{10}}^2 + \frac{1}{4}AY_{\underline{10}}^2 + \frac{1}{7}AY_{\underline{1}}Y_{\underline{11}} + \frac{1}{2}AY_{\underline{10}}Y_{\underline{11}} + \\
& + \frac{1}{2}AY_{\underline{11}}^2 + \frac{1}{4}AY_{\underline{11}}^2 + \frac{1}{7}AY_{\underline{1}}Y_{\underline{12}} + \frac{1}{2}AY_{\underline{10}}Y_{\underline{12}} + \frac{1}{2}AY_{\underline{11}}Y_{\underline{12}} + \frac{1}{2}AY_{\underline{12}}^2 + \frac{1}{4}AY_{\underline{12}}^2 + \\
& + \frac{1}{4}AY_{\underline{13}}^2 + \frac{1}{4}AY_{\underline{14}}^2 + \frac{1}{4}AY_{\underline{15}}^2 + \frac{1}{6}AY_{\underline{16}}^2 + \frac{1}{6}AY_{\underline{17}}^2 + \frac{1}{6}AY_{\underline{18}}^2 + \frac{1}{1}AY_{\underline{1}}Y_{\underline{2}} + \frac{1}{7}AY_{\underline{10}}Y_{\underline{2}} + \\
& + \frac{1}{7}AY_{\underline{11}}Y_{\underline{2}} + \frac{1}{8}AY_{\underline{11}}Y_{\underline{2}} + \frac{1}{7}AY_{\underline{12}}Y_{\underline{2}} + \frac{1}{1}AY_{\underline{2}}^2 + \frac{1}{3}AY_{\underline{2}}^2 + \frac{1}{1}AY_{\underline{1}}Y_{\underline{3}} + \frac{1}{7}AY_{\underline{10}}Y_{\underline{3}} + \\
& + \frac{1}{7}AY_{\underline{11}}Y_{\underline{3}} + \frac{1}{7}AY_{\underline{12}}Y_{\underline{3}} + \frac{1}{8}AY_{\underline{12}}Y_{\underline{3}} + \frac{1}{1}AY_{\underline{2}}Y_{\underline{3}} + \frac{1}{1}AY_{\underline{3}}^2 + \frac{1}{3}AY_{\underline{3}}^2 + \frac{1}{8}AY_{\underline{13}}Y_{\underline{4}} + \\
& + \frac{1}{3}AY_{\underline{4}}^2 + \frac{1}{8}AY_{\underline{14}}Y_{\underline{5}} + \frac{1}{3}AY_{\underline{5}}^2 + \frac{1}{8}AY_{\underline{15}}Y_{\underline{6}} + \frac{1}{3}AY_{\underline{6}}^2 + \frac{1}{9}AY_{\underline{16}}Y_{\underline{7}} + \\
& + \frac{1}{5}AY_{\underline{7}}^2 + \frac{1}{9}AY_{\underline{17}}Y_{\underline{8}} + \frac{1}{5}AY_{\underline{8}}^2 + \frac{1}{9}AY_{\underline{18}}Y_{\underline{9}} + \frac{1}{5}AY_{\underline{9}}^2. \tag{14}
\end{aligned}$$

Отметим, что уравнение (10) может быть представлено в компактных матричных обозначениях в виде:

$$\mathcal{U} = [Y]^T[A][Y], \tag{15}$$

где $[Y] = [Y_{\underline{1}}, Y_{\underline{2}}, Y_{\underline{3}}, Y_{\underline{4}}, Y_{\underline{5}}, Y_{\underline{6}}, Y_{\underline{7}}, Y_{\underline{8}}, Y_{\underline{9}}, Y_{\underline{10}}, Y_{\underline{11}}, Y_{\underline{12}}, Y_{\underline{13}}, Y_{\underline{14}}, Y_{\underline{15}}, Y_{\underline{16}}, Y_{\underline{17}}, Y_{\underline{18}}]^T$ — транспонированная вектор-строка алгебраической размерности 18, составленная из формальных переменных; $[A]$ — формальная матрица размерности 18×18 изоэнтропийных механических модулей микрополярной среды. В случае гемитропного микрополярного твердого тела матрица $[A]$ имеет следующую блочную

¹В настоящей статье используются векторно-матричные обозначения. Они отличаются от векторно-тензорных обозначений. Например, $Y \cdot A \cdot Y = [Y]^T[A][Y]$, где квадратные скобки указывают на матрицу или вектор-столбец.

структуру (к сожалению, не диагональную, но по меньшей мере трехдиагональную):

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [0] & [0] & [A_{14}] & [0] & [0] \\ [0] & [A_{22}] & [0] & [0] & [A_{25}] & [0] \\ [0] & [0] & [A_{33}] & [0] & [0] & [A_{36}] \\ [A_{41}] & [0] & [0] & [A_{44}] & [0] & [0] \\ [0] & [A_{52}] & [0] & [0] & [A_{55}] & [0] \\ [0] & [0] & [A_{63}] & [0] & [0] & [A_{66}] \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где $[0]$ — нулевой матричный блок 3×3 ; $[A_{hk}]$ ($h, k = 1, \dots, 6$) — симметричные блочные матрицы алгебраической размерности 3×3 , которые определяются через микрополярные упругие механические модули A_a ($a = 1, \dots, 9$) согласно следующим формулам:

$$\begin{aligned} [A_{11}] &= \begin{bmatrix} A_1 + A_3 & A_1 & A_1 \\ A_1 & A_1 + A_3 & A_1 \\ A_1 & A_1 & A_1 + A_3 \end{bmatrix}, \quad [A_{44}] = \begin{bmatrix} A_2 + A_4 & A_2 & A_2 \\ A_2 & A_2 + A_4 & A_2 \\ A_2 & A_2 & A_2 + A_4 \end{bmatrix}, \\ [A_{14}] = [A_{41}] &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_7 + A_8 & A_7 & A_7 \\ A_7 & A_7 + A_8 & A_7 \\ A_7 & A_7 & A_7 + A_8 \end{bmatrix}, \\ 2[A_{36}] = 2[A_{63}] &= A_9 \operatorname{diag}[1, 1, 1], \quad [A_{25}] = [A_{52}] = A_8 \operatorname{diag}[1, 1, 1], \\ [A_{22}] &= 2A_3 \operatorname{diag}[1, 1, 1], \quad [A_{33}] = A_5 \operatorname{diag}[1, 1, 1], \\ [A_{55}] &= 2A_4 \operatorname{diag}[1, 1, 1], \quad [A_{66}] = A_6 \operatorname{diag}[1, 1, 1]. \end{aligned} \quad (17)$$

2. Факторизация характеристического полинома квадратичной энергетической формы. Канонический диагональный вид квадратичной формы (10) может быть представлен в терминах собственных чисел λ_i ($i = 1, \dots, 18$) матрицы $[A]$. В этом случае исходная квадратичная форма, преобразованная к каноническим переменным $X_1, \dots, X_{18}$, принимает каноническое диагональное представление:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\text{diag}} = \sum_{s=1}^{18} \lambda_s X_s^2. \quad (18)$$

Собственные числа симметричной матрицы $[A]$ квадратичной формы $\mathcal{U}$ являются корнями характеристического уравнения, следующего вида:

$$\det [A - \lambda \operatorname{diag}[1, 1, 1]] = 0. \quad (19)$$

Уравнение (19) является уравнением алгебраической степени 18. Причем в силу симметричности матрицы $[A]$ квадратичной формы $\mathcal{U}$ корни уравнения (19) будут вещественными числами. В случае общего линейного анизотропного микрополярного упругого тела аналитическое представление корней в обозримом виде весьма затруднительно, поскольку требует явного определения корней

полинома 18. Однако, для гемитропного микрополярного упругого тела, характеристическое уравнение (19) допускает факторизацию, обусловленную трехдиагональной формой матрицы $[A]$, в следующем виде:

$$\begin{aligned} & [(2A_3 - \lambda)(2A_4 - \lambda) - A_8^2]^3 [4(A_5 - \lambda)(A_6 - \lambda) - A_9^2]^3 [4(A_3 - \lambda)(A_4 - \lambda) - A_8^2]^2 \times \\ & \times [4(3A_1 + A_3 - \lambda)(3A_2 + A_4 - \lambda) - (3A_7 + A_8)^2] = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Отметим, что уравнение (20) имеет: 4 корня кратности 3, 2 корня кратности 2 и 2 корня кратности 1. Кроме того, что все указанные корни являются корнями, соответствующих квадратных уравнений, и могут быть представлены в явной форме в радикалах:

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 &= 2\lambda_2 = 2\lambda_3 = A_3 + A_4 - \sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2}, \\ 2\lambda_4 &= 2\lambda_5 = 2\lambda_6 = A_3 + A_4 + \sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2}, \\ 2\lambda_7 &= 2\lambda_8 = 2\lambda_9 = A_5 + A_6 - \sqrt{(A_5 - A_6)^2 + A_9^2}, \\ 2\lambda_{10} &= 2\lambda_{11} = 2\lambda_{12} = A_5 + A_6 + \sqrt{(A_5 - A_6)^2 + A_9^2}, \\ \lambda_{13} &= \lambda_{14} = A_3 + A_4 - \sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2}, \\ \lambda_{15} &= \lambda_{16} = A_3 + A_4 + \sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2}, \\ 2\lambda_{17} &= 3A_1 + 3A_2 + A_3 + A_4 - \sqrt{(3A_1 - 3A_2 + A_3 - A_4)^2 + (3A_7 + A_8)^2}, \\ 2\lambda_{18} &= 3A_1 + 3A_2 + A_3 + A_4 + \sqrt{(3A_1 - 3A_2 + A_3 - A_4)^2 + (3A_7 + A_8)^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Нетрудно заметить, что все подкоренные выражения в (21) должны быть неотрицательны, что определяется вещественнозначностью собственных чисел симметричной матрицы. Вместе с тем, можно установить дополнительные соотношения между собственными числами в (21):

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 &= 2\lambda_2 = 2\lambda_3 = \lambda_{13} = \lambda_{14}, \\ 2\lambda_4 &= 2\lambda_5 = 2\lambda_6 = \lambda_{15} = \lambda_{16}. \end{aligned} \quad (22)$$

Положительная определенность энергетической квадратичной формы (19) и, тем самым, устойчивость равновесия линейного микрополярного упругого тела [8] обеспечивается следующими очевидными неравенствами

$$\lambda_s > 0 \quad (s = 1, \dots, 18). \quad (23)$$

Учитывая выражения (21) и (22), система неравенств (53) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_3 + A_4 > \sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2}, \\ A_3 + A_4 > -\sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2}, \\ A_5 + A_6 > \sqrt{(A_5 - A_6)^2 + A_9^2}, \\ A_5 + A_6 > -\sqrt{(A_5 - A_6)^2 + A_9^2}, \\ 3A_1 + 3A_2 + A_3 + A_4 > \sqrt{(3A_1 - 3A_2 + A_3 - A_4)^2 + (3A_7 + A_8)^2}, \\ 3A_1 + 3A_2 + A_3 + A_4 > -\sqrt{(3A_1 - 3A_2 + A_3 - A_4)^2 + (3A_7 + A_8)^2}. \end{array} \right. \quad (24)$$

Если возвести в квадрат неравенства (54), то останется всего три существенных неравенства, следующих из (54):

$$\begin{aligned} (A_3 + A_4)^2 &> (A_3 - A_4)^2 + A_8^2, \\ (A_5 + A_6)^2 &> (A_5 - A_6)^2 + A_9^2, \\ (3A_1 + 3A_2 + A_3 + A_4)^2 &> (3A_1 - 3A_2 + A_3 - A_4)^2 + (3A_7 + A_8)^2, \end{aligned} \quad (25)$$

которые после несложных преобразований примут вид:

$$\begin{aligned} 4A_3 A_4 &> A_8^2, \\ 4A_5 A_6 &> A_9^2, \\ 4(3A_1 + A_3)(3A_2 + A_4) &> (3A_7 + A_8)^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Преобразуем систему неравенств (56) к виду:

$$\begin{aligned} -C_i &< A_8 < C_i, \\ -C_u &< A_9 < C_u, \\ -C_{ii} &< 3A_7 + A_8 < C_{ii}. \end{aligned} \quad (27)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} C_i^2 &= 4A_3 A_4, \\ C_u^2 &= 4A_5 A_6, \\ C_{ii}^2 &= 4(3A_1 + A_3)(3A_2 + A_4). \end{aligned} \quad (28)$$

Система неравенств (58) может трактоваться как 3 двусторонних неравенства или 6 — односторонних. Очевидно, что левые части неравенств в (59) должны быть неотрицательны.

Заключительные обсуждения и выводы. В настоящем исследовании рассмотрена факторизация характеристического полинома квадратичной энергетической формы гемитропной микрополярной упругой среды. Энергия деформации рассматривается как функция, зависящая от несимметричных тензоров деформации и изгиба-кручения, которые трактуются как термодинамические переменные состояния. Кроме того, она может одновременно рассматриваться как потенциал силовых и моментных напряжений. Обсужден второй вариационный принцип Гиббса и применен к формулировке критерия устойчивости равновесия для гемитропного микрополярного упругого твердого тела. Обобщая результаты исследования, приходим к следующим выводам:

- (1) Получено изометрически инвариантное A -представление квадратичной формы энергии деформации гемитропного микрополярного упругого твердого тела, определяемое 9 изоэнтропийными (адиабатическими) механическими модулями.
- (2) Для оперирования с A -представлением введены формальные переменные $Y_1, \dots, Y_{18}$.
- (3) Получен характеристический полином алгебраической степени 18 энергетической квадратичной формы в терминах $Y_1, \dots, Y_{18}$. Построено мультипликативное разложение характеристического полинома на 4 полинома меньшей степени.
- (4) Вычислены собственные числа и определена их алгебраическая кратность.
- (5) Найдены ограничения на определяющие механические модули, обеспечивающие таким образом положительную определенность квадратичной формы энергии деформации и устойчивость равновесия микрополярного упругого твердого тела.
- (6) Для гемитропной микрополярной среды определены три существенных определяющих неравенства, обеспечивающих устойчивость равновесия исследуемого тела.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 124013000674-0).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number 124013000674-0).

ЛИТЕРАТУРА

1. Cosserat E. M. P., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. – Paris : A. Hermann et fils, 1909. – VI+226.
2. Kessel S. *Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-kontinuums* // *Abhandlungen der Braunschweig. Wiss. Ges.* – 1964. – Т. 16. – С. 1–22.
3. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. – Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. – viii+383.
4. Neuber H. *Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper* // *Acta Mechanica*. – 1966. – Т. 2. – С. 48–69. – DOI: 10.1007/BF01176729.
5. Neuber H. *On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua* // *Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964*. – Springer. 1966. – С. 153–158. – DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
6. Neuber H. *On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua* // *Mechanics of Generalized Continua* / под ред. E. Kröner. – Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. – С. 109–113.
7. Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*. – Berlin : Springer Science & Business Media, 1986. – xv+345. – (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics).
8. Радаев Ю. Н. *Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума* // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. – 2018. – Т. 22, вып. 3. – С. 504–517. – DOI: 10.14498/vsgtu1635.
9. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. *О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел* // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. – 2022. – 3(53). – С. 86–100. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
10. Besdo D. *A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum* // *Acta Mechanica*. – 1974. – Т. 20. – С. 105–131.
11. Gibbs J. *On the equilibrium of heterogeneous substances* // *Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences*. – 1875. – Т. 3. – 108–248 and 343–524.
12. Радаев Ю., Мурашкин Е. *Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред* // *Проблемы прочности и пластичности*. – 2020. – Т. 82, № 4. – С. 399–412. – DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
13. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. *Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным* // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. – 2022. – 4(54). – С. 108–115. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009.
14. Мурашкин Е. В. *О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния* // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. – 2023. – 1(55). – С. 110–121. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
15. Murashkin E. V., Radayev Y. N. *A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity* // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. –

- Russian Federation, 2023. – T. 44, № 6. – С. 2440–2449. – DOI: 10.1134 / s1995080223060392.
16. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2024. – T. 45, № 5. – С. 2378–2390. – DOI: 10.1134 / s1995080224602480.
 17. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Cubic Approximation of Stress Potential for a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2025. – T. 46, № 5. – С. 2391–2400. – DOI: 10.1134 / S1995080225606514.
 18. Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. – М., Л. : ГИТТЛ, 1948. – 408 с. – [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.]
 19. Спенсер Э. Теория инвариантов. – Мир, 1974.

REFERENCES

1. *Cosserat E. M. P., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. – Paris : A. Hermann et fils, 1909. – VI+226.
2. *Kessel S.* Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-kontinuums // Abhandlungen der Braunschweig. Wiss. Ges. – 1964. – Vol. 16. – P. 1–22.
3. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. – Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. – viii+383.
4. *Neuber H.* Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. – 1966. – Vol. 2. – P. 48–69. – DOI: 10.1007/BF01176729.
5. *Neuber H.* On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964. – Springer. 1966. – P. 153–158. – DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
6. *Neuber H.* On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua / ed. by E. Kröner. – Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. – P. 109–113.
7. *Dyzlewicz J.* Micropolar Theory of Elasticity. – Berlin : Springer Science & Business Media, 1986. – xv+345. – (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics).
8. *Radaev Y. N.* The multiplier rule in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics // Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. – 2018. – Vol. 22, iss. 3. – P. 504–517. – DOI: 10.14498/vsgtu1635.
9. *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* On Two Main Natural Forms of the Potential of Asymmetric Tensors of Force and Couple Stresses in the Mechanics of Hemitropic Solids // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. – 2022. – 3(53). – P. 86–100. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
10. *Besdo D.* A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // Acta Mechanica. – 1974. – Vol. 20. – P. 105–131.
11. *Gibbs J. W.* On the equilibrium of heterogeneous substances // Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences. – 1875. – Vol. 3. – 108–248 and 343–524.

12. *Radaev Y. N., Murashkin E. V.* Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problems of strength and ductility. – 2020. – Vol. 82, no. 4. – P. 399–412. – DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
13. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* Reducing Natural Forms of Hemitropic Energy Potentials to Conventional Ones // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. – 2022. – 4(54). – P. 108–115. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009.
14. *Murashkin E. V.* On the Relationship Between Micropolar Constitutive Parameters of Thermodynamic Potentials // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. – 2023. – 1(55). – P. 110–121. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
15. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2023. – Vol. 44, no. 6. – P. 2440–2449. – DOI: 10.1134/s1995080223060392.
16. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2024. – Vol. 45, no. 5. – P. 2378–2390. – DOI: 10.1134/s1995080224602480.
17. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* Cubic Approximation of Stress Potential for a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2025. – Vol. 46, no. 5. – P. 2391–2400. – DOI: 10.1134/s1995080225606514.
18. *Gurevich G. B.* Fundamentals of the Theory of Algebraic Invariants. – Moscow : GITTL, 1948. – 408 p.
19. *Spencer E.* Invariant theory. – Moscow : Mir, 1974.

К. З. Хайрнасов

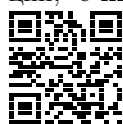
АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЗУБНОГО ИМПЛАНТАТА С КОРОНКОЙ ПРИ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ НАГРУЗКАХ

Московский государственный строительный университет (Национальный
исследовательский университет), Москва, Россия

Аннотация. Рассматриваются вопросы контактного взаимодействия и напряженно-деформированное состояние зубных коронок и имплантатов при эксплуатационных нагрузках. Задача решается методом конечных элементов в системе автоматизированного проектирования. Сходимость результатов проверяется сгущением сетки конечных элементов. Коронки состоят из нескольких материалов с характеристиками, приведенными в работе. В результате проведенного исследования определены прочностные характеристики, рассматриваемой модели коронок и имплантатов при эксплуатационных нагрузках. Полученные материалы могут быть применены в практике протезирования зубов.

Ключевые слова: дентальный имплантат, напряженно-деформированное состояние, метод конечных элементов, запасы прочности.

Хайрнасов Камил Зайнутдинович, доцент кафедры железобетонных и каменных конструкций; e-mail: kamilh@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0003-0111-2947>; AuthorID: 600738



для цитирования: Хайрнасов К. З. Анализ напряженно-деформированного состояния зубного имплантата с коронкой при эксплуатационных нагрузках // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 126–136. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.019. EDN: JIZAАK

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

K. Z. Khayrnasov

ANALYSIS OF THE STRESS-STRAIN STATE OF A DENTAL IMPLANT WITH A CROWN UNDER OPERATIONAL LOADS

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow,
Russia

Abstract. This paper examines the contact interaction and stress-strain behavior of dental crowns and implants under operational loads. The problem is solved using the finite element method in a computer-aided design system. The convergence of the results is verified by refining the finite element mesh. The crowns are composed of several materials with the characteristics given in the paper. The study determined the strength characteristics of the crown and implant models under operational loads. The resulting materials can be used in dental prosthetics.

Keywords: dental implant, stress-strain behavior, finite element method, safety margins.

Kamil Z. Khayrnasov, PhD, Assoc. Prof.; e-mail: kamilh@mail.ru;
<https://orcid.org/0000-0003-0111-2947>; AuthorID: 600738



to cite this article: Khayrnasov K. Z. Analysis of the stress-strain state of a dental implant with a crown under operational loads // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 126–136. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.019

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

1. Введение. Современные стоматологические имплантаты – сложное изделие, состоящее из различных материалов и сложных геометрических поверхностей, требует большого объёма теоретических и экспериментальных исследований в процессе проектирования и эксплуатации. Поэтому вопросы изготовления надежных изделий, заменяющих природные экземпляры важная и актуальная тема. Для математического моделирования современных имплантатов применяются системы автоматизированного проектирования и численные методы расчета: метод конечных элементов, позволяющие определить прочностные характеристики имплантатов при различных нагрузках и по проведенным расчетам изготовить прототипы для проведения клинических испытаний. Клинические испытания на прочность имплантатов, эксплуатационным испытаниям имплантатов на усталостную прочность, нелегированного титана применяемого в имплантатах регламентированы нормативными документами [1–3]. В работе [4] проведены экспериментальные исследования пористых титановых имплантатов на растяжение с фиксацией деформаций. Проведенные исследования способствуют широкому применению высокопористых титановых имплантатов, полученных с применением 3D- печати, для восстановительной и ревизионной хирургии в отношении, как замещения костных дефектов, так и восстановления поврежденных мышц. В статье [5] изучено влияние цилиндрического и конусного дентальных имплантатов на прочностные характеристики. В результате проведенных исследований выявлено преимущество конического соединения, перед плоскостным. В работе [6] проведено сравнение имплантатов фирмы цилиндрической формы и конусной формы методом конечных элементов в физически нелинейной постановке. В результате проведенных исследований выявлено, что цилиндрические имплантаты имеют лучшие прочностные характеристики по сравнению с имплантатом конической формы. В работе [7] с применением современных САПР проведено статическое и динамическое исследование имплантатов отличающихся способом соединения имплантата. Осуществлен сравнительный анализ локализации напряженных областей и распределения нагрузки при приложении различных осевых нагрузок. Выявлено, что предложенный вариант соединения предложенным видом способен выдерживать гораздо большие нагрузки по сравнению со стандартным вариантом. В работе [8] рассмотрены вопросы исследования напряжённо-деформированного состояния имплантатов из керамики и от их формы. В работе [9] исследуется напряженно-деформированное состояния имплантатов методом граничных интегральных уравнений. Установлено, что наибольшие напряжения возникают в первом витке резьбы имплантата. В статье [10] рассматриваются несъемные ортопедические конструкции, опирающиеся на дентальные имплантаты в дистальных отделах верхней и нижней челюсти, при действии вертикальной эксплуатационной нагрузке, характерной для жевательной нагрузки.

2. Методы решения. При изготовлении стоматологических имплантатов с пломбой применяются несколько видов материалов, для получения прочной конструкции.

№	Наименование материала	Модуль упругости, (сдвига) Па	Коэффициент Пуассона	Предел прочности, МПа
1	Губчатая кость	$1,37 \cdot 10^9$	0.3	23
2	Кортикальная кость	$1,37 \cdot 10^{10}$	0.3	90-150
3	Дентин	$1,86 \cdot 10^{10}$	0.31	1358
4	Керамика	$7,0 \cdot 10^{10}$	0.2	320
5	Латекс	$6,89 \cdot 10^7$	0.45	
6	Титан	$1,1 \cdot 10^{11}$ ($4,1 \cdot 10^{10}$)	0.32	1048
7	Зубная эмаль	$8,1 \cdot 10^{10}$	0.3	4009
8	Пломба	$6,9 \cdot 10^9$	0,3	400

Таблица 1. Физико-механические характеристики материалов, применяемых в конструкции

Для моделирования имплантата применялась бесконтактная система ATOS, обеспечивающая точность 5 мкм. При расчетах на конструкцию действовала вертикальная нагрузка 100Н, показанная на рис. 5. Размерные характеристики конструкции составляли 38.8 мм по оси X, 38.0 мм по оси Y и 69.5 мм по оси Z (рис. 2).

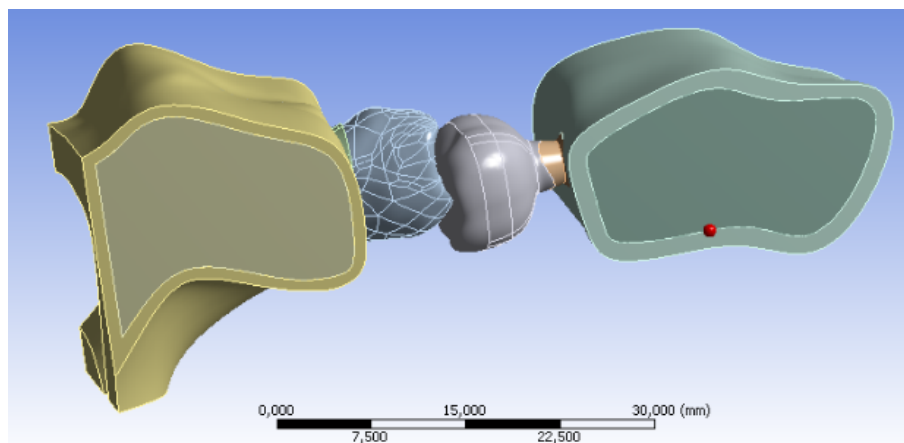


Рис. 1. Модель имплантата с пломбой (справа) и естественного зуба

В качестве метода решения в системе автоматизированного проектирования применяется метод конечных элементов. Сходимость решения проверялся сгущением сетки конечных элементов: сравнивались решения исходного разбиения

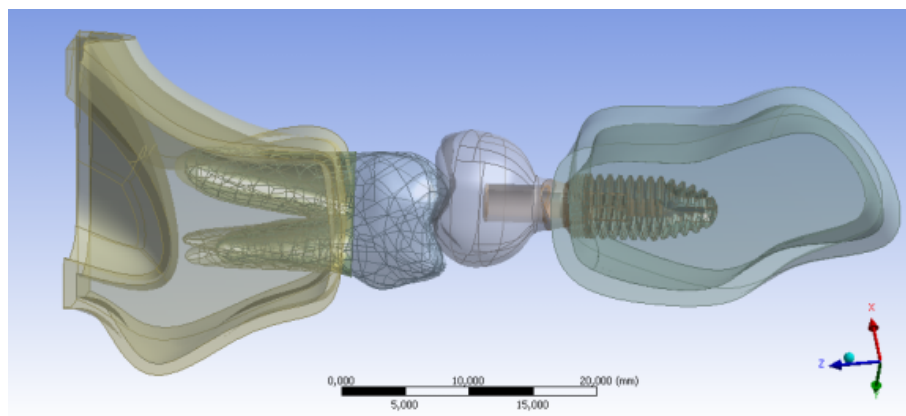


Рис. 2. Структура естественного зуба и имплантата внутри

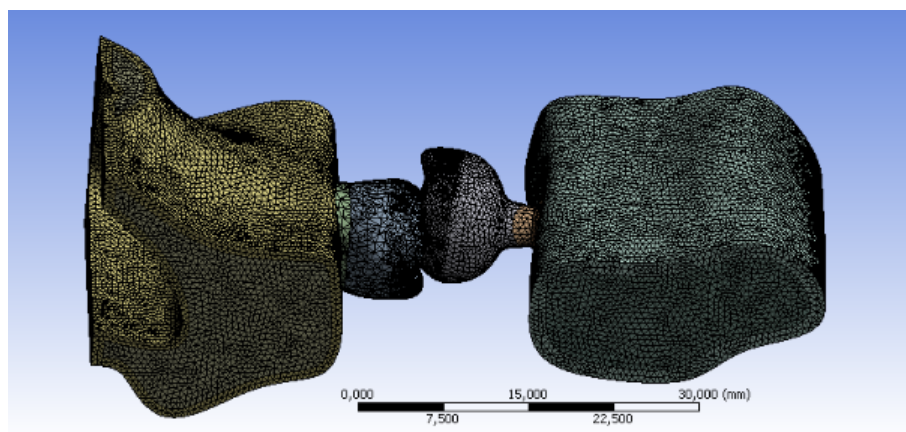


Рис. 3. Конечно-элементная аппроксимация конструкции. Число конечных элементов составило 1356214

и при полуторном увеличении числа конечных элементов по сравнению с исходным. Сравнивались напряженно-деформированные состояния исходного состояния и сгущенной сетки конечных элементов. Если результаты отличались не более чем на 3%, то исходное состояние разбиения принималось достаточным для получения достоверного решения, если нет, то процедура сгущения сетки конечных элементов продолжалась.

Число конечных элементов конструкции составило 1356214. В местах соприкосновения поверхностей естественного зуба и имплантата коэффициент трения принимался 0,2.

Решение задачи определения напряженно-деформированного состояния имплантата под нагрузкой сводится к решению системы алгебраических уравнений в физически нелинейной постановке.

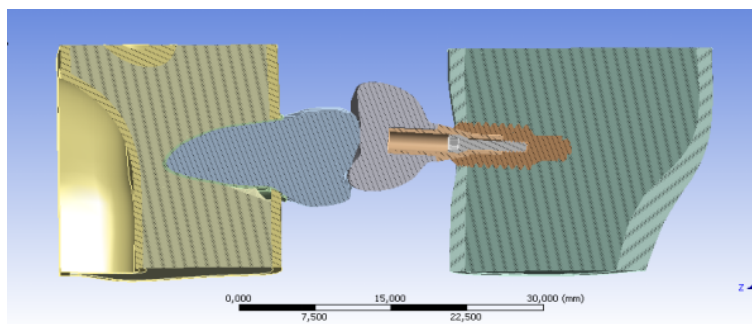


Рис. 4. Конструкция имплантата с пломбой и естественного зуба в разрезе

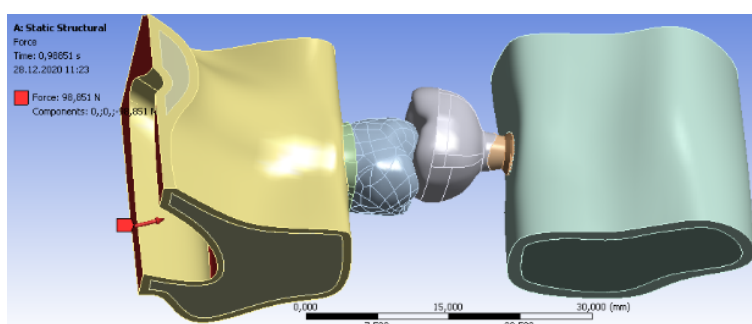


Рис. 5. Осевая нагрузка

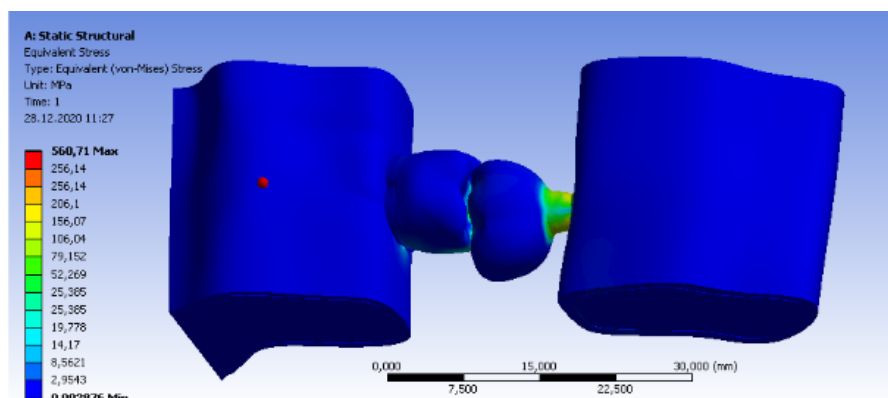


Рис. 6. Общее напряженное состояние конструкции. Максимальное напряжение по Мизесу 256МПа.

В результате проведенного исследования модель конструкции имплантата с пломбой и естественного зуба аппроксимирована конечными элементами (рис. 3), Подтверждена сходимость аппроксимации, получено напряженно-деформированное состояние имплантата с пломбой при соприкосновении с естественным зубом (рис. 6-11), определены перемещения элементов конструкции

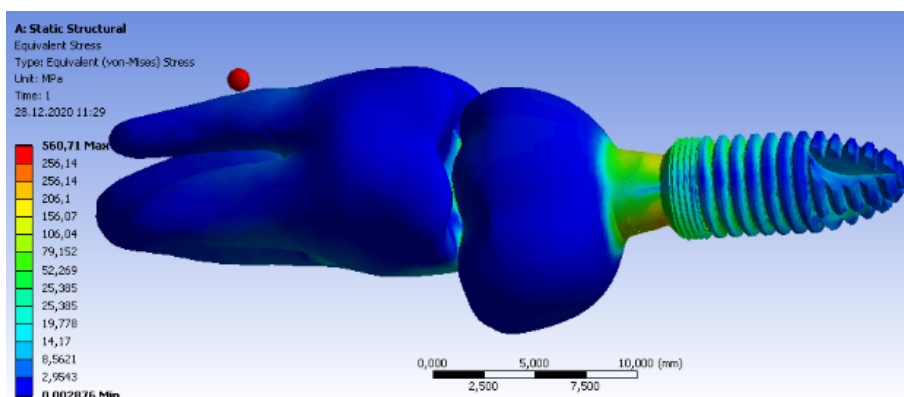


Рис. 7. Распределение напряжений в имплантате материала титан. Максимальное напряжение по Мизесу 256МПа. В материале из Дентина 156МПа.

(рис. 12, 13). Вычислен запас прочности материалов имплантата с пломбой и естественного зуба, приведенные в таблице 2.

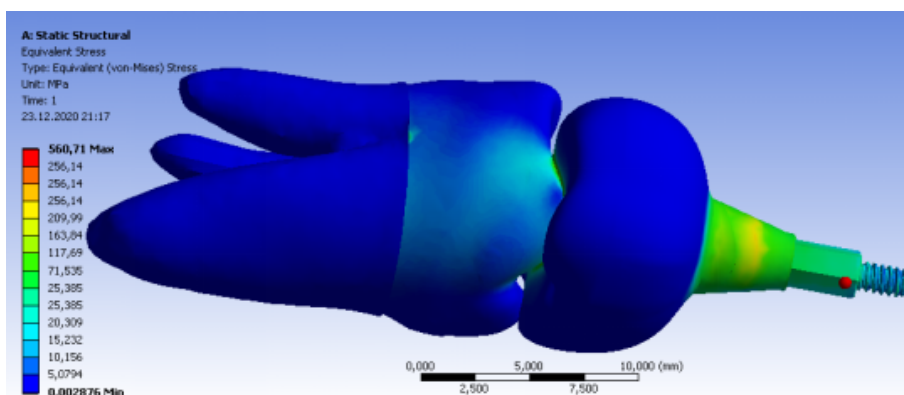


Рис. 8. Распределение напряжений в имплантате. Максимальное напряжение по Мизесу 256МПа в материале из титана и 156МПа в материале из Дентина.

В табл. 2 показаны запасы прочности материалов, применяемых в конструкции.

3. Выводы. В результате проведенного исследования напряженно-деформированного состояния конструкции имплантата с пломбой и естественного зуба при их эксплуатации получены значения напряжений и деформаций в 8 элементах конструкции. Определены максимальные напряжения и деформации в элементах конструкции. Приведены модели имплантатов с пломбой и

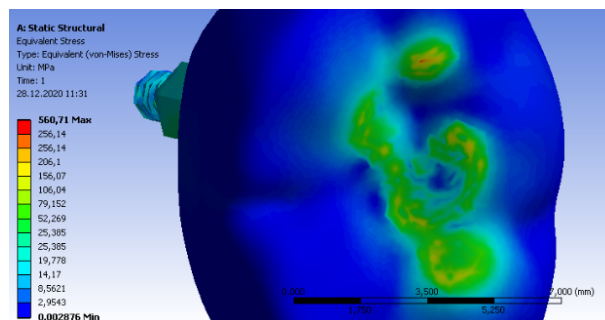


Рис. 9. Распределение напряжений на поверхности имплантата. Максимальное напряжение по Мизесу 156МПа в материале керамика имплантата.

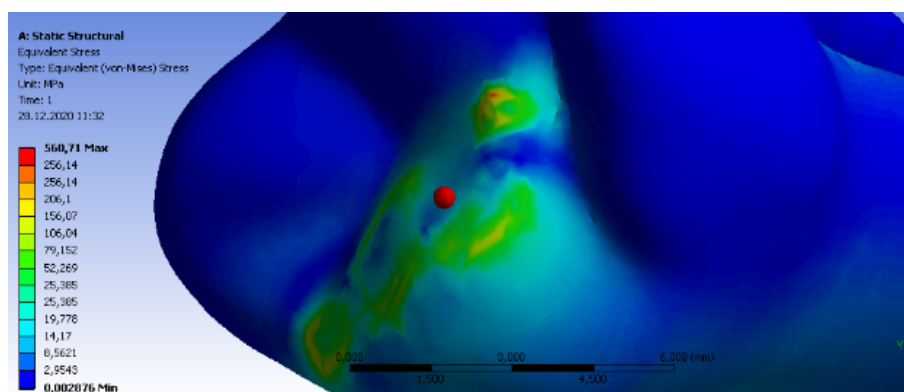


Рис. 10. Распределение напряжений на поверхности имплантата. Максимальное напряжение по Мизесу 256МПа в материале зубной эмали.

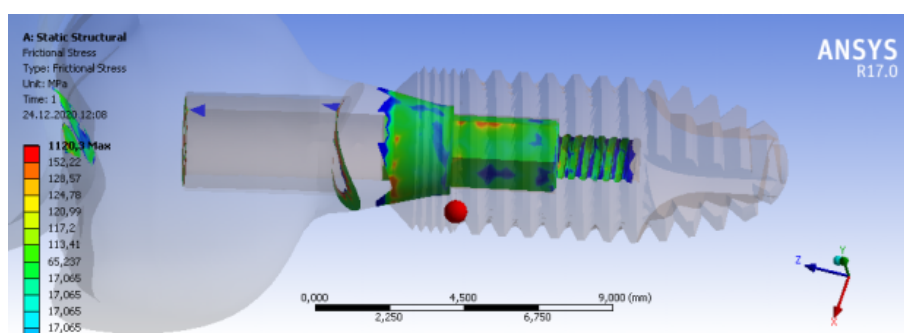


Рис. 11. Распределение напряжений внутри имплантата. Максимальное напряжение по Мизесу 152МПа в материале титан имплантата.

естественного зуба. Расчеты проиллюстрированы на 13 рисунках. По результатам, проведенных расчетов определены запасы прочности материалов, входящих в конструкцию. Минимальный запас прочности составил 1,5 (табл.2).

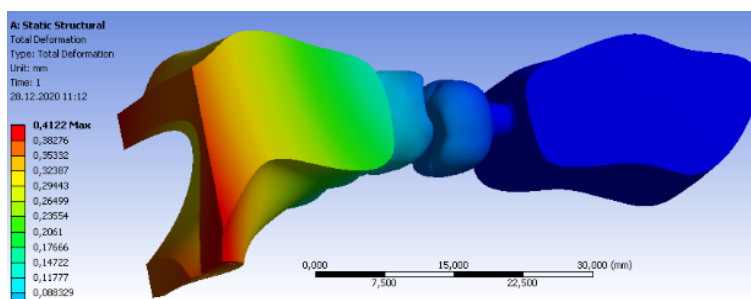


Рис. 12. Распределение перемещений имплантата. Максимальное перемещение 0,4122 мм.

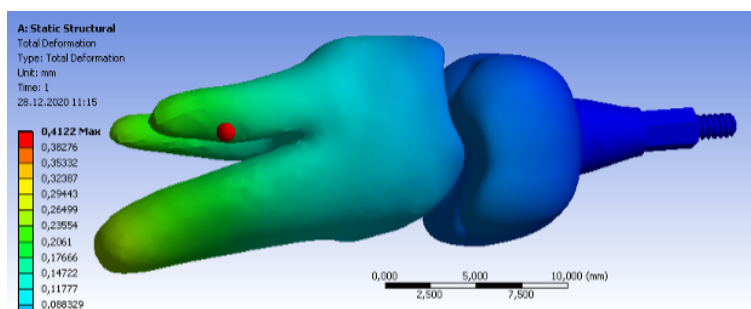


Рис. 13. Распределение перемещений внутри конструкции. Максимальное перемещение 0,4122 мм.

Наименование материала	Предел прочности, МПа	Максимальное напряжение в конструкции, МПа,	Запас прочности
Керамика	320	156 (9)	2,1
Титан	880	256 (6-8,11)	3,4
Пломба	400	156 (9)	2,5
Зубная эмаль	3000	256 (10)	11,7
Губчатая кость	23	10 (6,7)	2,3
Кортикальная кость	90	60 (6,7)	1,5
Дентин	369	156 (7, 8)	2,3

Таблица 2. Запасы прочности и максимальные напряжения в конструкции

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. 100%.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. 100%.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. ГОСТ Р ИСО 14801-2012. Методы определения усталостной прочности внутрикостных стоматологических имплантатов. – 2012. – kzn.etalon-profit.ru; files.stroyinf.ru.
2. ГОСТ Р ИСО 12189-2017. Метод усталостных испытаний сборных спинальных имплантатов с использованием передней опоры. – 2017. – base.garant.ru; ohranatruda.ru.
3. ГОСТ Р ИСО 5832-2-2014. Характеристики и методы испытания нелегированного титана, используемого в производстве хирургических имплантатов. – 2014. – gost.gtsever.ru.
4. Тихилов Р. М., Шубняков И. И., Денисов А. О. Костная и мягкотканная интеграция пористых титановых имплантатов (экспериментальное исследование) // Травматология и ортопедия России. – 2018. – Т. 24, № 2.
5. Прялкин С. В., Рубникович С. П., Бусько В. Н. Анализ прочностных характеристик цементно-винтовой фиксации мульти-юнит абатментов к дентальным имплантатам с плоскостным и коническим типом соединения в эксперименте // Медицинский журнал. – 2025. – № 4.
6. Расчет деформаций и оценка статической прочности импланционных систем различных форм и конструкций на примере дентальных имплантатов LIKO 4X10 / А. В. Сергеев, А. А. Долгалев, В. М. Ованесян [и др.] // Медицинский альманах. – 2023.
7. Головкин А. С. Изучение супраструктуры стоматологических имплантатов на основе метода конечных элементов // Современная стоматология. – 2019. – № 4. – С. 32–36.
8. Федорова Н. Б. Исследование напряженно-деформированного состояния стоматологических имплантатов из керамики в зависимости от их формы и степени минерализации кости // Российский журнал биомеханики. – 2019. – Т. 23, № 3. – С. 451–459.
9. Перельмутер М. Н. Исследование напряженно-деформированного состояния стоматологических имплантатов методом граничных интегральных уравнений // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 2. – С. 83–95. – DOI: 10.15593/peim.mech/2018.2.08.
10. *Wassardorp J., Reynolds M. A.* Allogeneic bone onlay grafts for alveolar ridge augmentation: a systematic review // International Journal of Oral and Maxillofacial Implants. – 2010. – Vol. 25, no. 3. – P. 525–531.

REFERENCES

1. GOST R ISO 14801-2012. Methods for Determining the Fatigue Strength of Endosseous Dental Implants. – 2012. – kzn.etalon-profit.ru; files.stroyinf.ru.
2. GOST R ISO 12189-2017. Fatigue Test Method for Prefabricated Spinal Implants Using an Anterior Support. – 2017. – base.garant.ru; ohranatruda.ru.
3. GOST R ISO 5832-2-2014. Characteristics and Test Methods of Unalloyed Titanium Used in the Manufacture of Surgical Implants. – 2014. – gost.gtsever.ru.
4. *Tikhilov R. M., Shubnyakov I. I., Denisov A. O.* Bone and Soft Tissue Integration of Porous Titanium Implants (Experimental Study) // Traumatology and Orthopedics of Russia. – 2018. – Vol. 24, no. 2.
5. *Pryalkin S. V., Rubnikov S. P., Busko V. N.* Analysis of the Strength Characteristics of Cement-Screw Fixation of Multi-Unit Abutments to Dental Implants with Planar and Conical Connection Types in an Experiment // Medical Journal. – 2025. – No. 4.
6. Calculation of Deformations and Assessment of Static Strength of Implantation Systems of Various Shapes and Designs Using LIKO 4X10 Dental Implants as an Example / A. V. Sergeev, A. A. Dolgalev, V. M. Ovanesyan, [et al.] // Medical Almanac. – 2023.
7. *Golovko A. S.* Study of the Superstructure of Dental Implants Based on the Finite Element Method // Modern Dentistry. – 2019. – No. 4. – P. 32–36.
8. *Fedorova N. B.* Study of the Stress-Strain State of Ceramic Dental Implants Depending on Their Shape and the Degree of Bone Mineralization // Russian Journal of Biomechanics. – 2019. – Vol. 23, no. 3. – P. 451–459.
9. *Perelmuter M. N.* Study of the Stress-Strain State of Dental Implants Using the Boundary Integral Equation Method // Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. Mechanics. – 2018. – No. 2. – P. 83–95. – DOI: 10.15593/peim.mech/2018.2.08.
10. *Waasdorp J., Reynolds M. A.* Allogeneic Bone Onlay Grafts for Alveolar Ridge Augmentation: A Systematic Review // International Journal of Oral and Maxillofacial Implants. – 2010. – Vol. 25, no. 3. – P. 525–531.

Р. И. Непершин

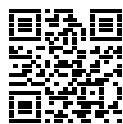
СДАВЛИВАНИЕ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ ПУАНСОНАМИ С ГЛАДКОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Московский государственный технологический университет “СТАНКИН”,
Москва, Россия

Аннотация. Приведено численное моделирование поперечного сдавливания идеально пластической полосы двумя пуансонами с гладкой криволинейной цилиндрической границей при плоской деформации. Рассматривается изменение пластической области от вдавливания пуансонов в полупространство с увеличением контактной границы, переходящее в деформацию по толщине толстой полосы при заданной длине границе контакта, с последующим уменьшением контактной границы вследствие увеличения скорости перемещения свободных жестких концов полосы до контакта пуансонов в центре полосы. Моделирование представляет практический интерес для оценки предельной нагрузки при поперечном вдавливании в толстую полосу штампов с выпуклой криволинейной цилиндрической границей, и образовании цилиндрических каналов с криволинейной образующей в толстой плоской заготовке на кузнечно-прессовом оборудовании.

Ключевые слова: толстая полоса, идеальная пластичность, плоская деформация, поперечное сдавливание, гладкий пуансон, криволинейная граница контакта, линии скольжения, годограф скоростей, контактное давление.

Непершин Ростислав Иванович, доктор технических наук, профессор;
e-mail: nepershin_ri@rambler.ru; AuthorID: 109974



для цитирования: Непершин Р. И. Сдавливание идеально пластической полосы пуансонами с гладкой криволинейной границей // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 137–158. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.010. EDN: SPBWNX

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

R. I. Nepershin

IDEAL PLASTIC STRIP COMPRESSION BY THE PUNCHES WITH SMOOTH CURVILINEAR BOUNDARY

Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia

Abstract. Computer simulation of the rigid-plastic strip transverse compression by the two punches with smooth curvilinear cylindrical boundaries is presented using plane strain ideal plastic theory. Increase of plastic region and contact boundary during the punch penetration in-to plastic half-space at the initial stage followed by plastic region penetration through the strip thickness with specified punch contact boundary at the second stage, and decrease of contact boundary up to upper and lower punches contact with velocity increase of rigid strip regions at the final stage are considered. The computer simulation can be used for the limit loads estimation of transverse plastic penetration of the punches with curvilinear cylindrical boundaries into thick strips, and for plastic forming of curvilinear transverse channels in thick slab on the press-forging equipment.

Keywords: thick strip, ideal plasticity, plane strain, transverse compression, smooth punch, curved contact boundary, slip lines, velocity hodograph, contact pressure.

Rostislav I. Nepershin, Doctor of Technical Sciences, Professor; e-mail: nepershin_ri@rambler.ru; AuthorID: 109974



to cite this article: Nepershin R. I. Ideal plastic strip compression by the punches with smooth curvilinear boundary // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 137–158. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.010

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. В начальный период развития математической теории пластичности, основанной на гиперболических дифференциальных уравнениях плоской деформации, получены аналитические решения фундаментальных задач о несущей способности пластического полупространства при давлении плоского штампа и сдавливании пластического слоя Прандтля; вдавливании клина в пластическое полупространство и несущей способности пластического клина при давлении плоского штампа [1, 2]. Пластическая область при сдавливании толстой полосы плоскими штампами по Прандтлю определяется прямолинейными и круговыми линиями скольжения около штампа и криволинейными линиями скольжения при решении смешанной задачи на оси симметрии численными методами, или решением телеграфного уравнения на плоскости характеристик.

Эти решения относятся к статически определимым задачам плоской деформации: линии скольжения вычисляются по уравнениям Генки с граничными условиями для напряжений с последующим вычислением поля скоростей по уравнениям Гейрингер при удовлетворении условиям несущей способности жесткой области и положительности диссипативной функции в пластической области [3].

В [2, 4] приведены решения кинематически определимой задачи о пластическом течении при вдавливании штампа с выпуклой криволинейной границей в толстую идеально пластическую полосу. В этом случае неизвестное распределение контактного давления на границе штампа определяется на годографе скоростей по условию непрерывности нормальной скорости на контактной границе, а затем вычисляются линии скольжения на физической плоскости решением статически определимых задач Коши и смешенного типа. В [2] годограф скоростей и линии скольжения находятся численным интегрированием дифференциальных уравнений на плоскости характеристик. В [4] решается телеграфное уравнение для скоростей и кривизны линий скольжения на плоскости характеристик с последующими вычислениями координат линий скольжения на физической плоскости.

В настоящей работе приводится численное моделирование плоского пластического течения при поперечном вдавливании в толстую полосу двух пуансонов с гладкой эллиптической, гиперболической и параболической цилиндрическими границами контакта с пластической областью. На первой стадии используется решение задачи о вдавливании пуансонов с гладкой выпуклой границей в пластическое полупространство. Линии скольжения и годограф скоростей вычисляются по алгоритму численного решения статически определимой задачи о вдавливании кругового и эллиптического цилиндров [5, 6] с использованием численных процедур решения основных краевых задач гиперболических уравнений идеальной пластичности при плоской деформации [7].

Переход ко второй стадии вдавливания определяется равенством контактного давления, зависящего от отношения толщины полосы к ширине горизонтальной проекции границы контакта, и давления пуансонов на первой стадии при

увеличении длины контактной границы до предельного значения при вырождении угла веера в сингулярной точке линий скольжения. Линии скольжения на плоскости годографа скоростей с граничными условиями непрерывности нормальной скорости на границе контакта и разрывом скорости на жесткопластической границе в центре полосы определяют распределение контактного давления с последующими вычислениями линий скольжения на физической плоскости решением задачи Коши от контактной границы и смешанного типа при заданной длине границы контакта. Глубина вдавливания пуансонов на второй стадии ограничена вырождением веера линий скольжения в сингулярной точке на границе контакта.

Третья стадия вдавливания моделируется линиями скольжения с непрерывным полем скоростей пластического течения при отношении горизонтальной проекции контактной границы к толщине пластического слоя на конце границы контакта больше единицы. На третьей стадии при большой длине или большой кривизне контактной границы происходит уменьшение длины контактной границы, ограниченной контактом верхнего и нижнего пуансонов в центре полосы, вследствие высокой скорости перемещения свободной жесткой области полосы.

1. Контактная граница. При сдавливании полосы шириной B и толщиной $2H$ двумя пуансонами по нормали к границам полосы имеют место две ортогональные плоскости симметрии. При условии $2H \ll B$ в нормальном сечении к цилиндрической границе контакта принимаем условие плоской пластической деформации, зависящей от глубины вдавливания s относительно поверхности полосы.

Образующую контактной границы задаем каноническими уравнениями эллипса, сопряженной гиперболы и параболы, смещенными по оси y на расстояние $H - s$ от центра O и начальной точкой контакта $s = 0$, $y = H$, $x = 0$ в первом квадранте плоскости x, y нормального сечения полосы

$$\text{эллипс} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y + s - H - 1)^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

$$\text{сопряженная гипербола} \quad \frac{(y + s - H - 1)^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad (2)$$

$$\text{парабола} \quad y = ax^2 + H - s, \quad (3)$$

где a и b – полуоси эллипса и гиперболы по направлениям осей координат x и y ; параметр a в уравнении параболы равен обратной величине удвоенного фокального расстояния $2p$.

За единицу длины принимаем значения b и $2p$ для эллипса, гиперболы и параболы, соответственно. При вычислении линий скольжения и годографа скоростей за единицу напряжений и скоростей принимаем удвоенную пластическую постоянную $2k$ и скорость V вдавливания пуансона по нормали к границе полосы относительно центра O .

Первая стадия. На рис. 1 показаны линии скольжения в пластической области на первой стадии вдавливания пуансона с гладкой границей контакта. Вследствие малой длины границы контакта O_1A по сравнению с полутолщиной полосы H пластическое течение приводит к выдавливанию материала на поверхность полосы с образованием свободной границы AB с главными напряжениями $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -1$ по нормали и касательной к этой границе. Линии скольжения ξ пересекают гладкую границу O_1A и границу AB с углами наклона касательной $\varphi = -\pi/4 + \alpha$ и $\varphi = \pi/4 + \beta$; где $\alpha \geq 0$ и $\beta \leq 0$ – углы наклона касательной к границам O_1A и AB . При заданном значении угла α_A в точке A на границе контакта угол β_A связан с углом веера η линий скольжения ψ соотношением

$$\beta_A = \psi + \alpha_A - \pi/2. \quad (4)$$

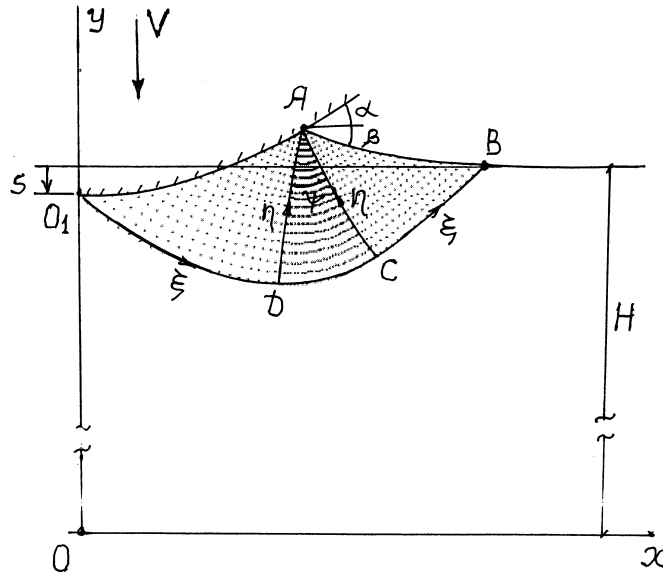


Рис. 1. Линии скольжения на первой стадии вдавливания пуансона.

Границу AB находим интегрированием дифференциального соотношения $dy/dx = \operatorname{tg} \beta$ и угол β задаем степенной функцией координаты x

$$\beta = \beta_A[(x - x_A)^m - 1], \quad x_A \leq x \leq x_B, \quad (5)$$

где $m < 1$ – заданный параметр.

На границе AB известны углы наклона касательной ξ линий скольжения $\varphi = -\pi/4 + \alpha$ и среднее напряжение $\sigma = -1/2$, которые определяют линии

скольжения и напряжения в области ABC решением задачи Коши с соотношениями Генки для σ и φ . Затем решается задача Гурса в области ACD с вырожденной η линией скольжения в точке A с углом веера ψ и задача смешанного типа в области ADO_1 на гладкой границе контакта O_1A с определением контактного давления $p = -\sigma + 1/2$. Годограф скоростей определяется условиями непрерывности нормальной компоненты скорости на контактной границе O_1A и на жесткопластической границе O_1B с разрывом скорости $[V] = \sqrt{2}$. В области ADO_1 решается задача смешанного типа и задача Гурса с вычислением скоростей V_ξ, V_η по уравнениям Гейрингер в области $ADCB$ и на границе AB с контролем положительности диссипативной функции.

Напряжения и скорости в пластической области зависят от кривизны границы O_1A и от сингулярной точки A . Неоднородность полей напряжений и скоростей на физической плоскости и на годографе скоростей выражается концентрацией точек пересечения линий скольжения при вычислениях с постоянным шагом по углу $\Delta\varphi$ в точке A и по углу наклона касательной $\Delta\alpha$ на границе A , на которой координаты точек вычисляются в зависимости от угла α , при $b = 1$ в уравнениях (1) и (2)

$$\text{эллипс : } x = a^2 \operatorname{tg} \alpha (1 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-1/2}, \quad y = 1 + H - s - (1 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-1/2}, \quad (6)$$

сопряженная гипербола :

$$x = a^2 \operatorname{tg} \alpha (1 - a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-1/2}, \quad y = H - s - 1 + (1 - a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-1/2}, \quad (7)$$

$$\text{парабола : } x = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2a}, \quad y = ax^2 + H - s. \quad (8)$$

Параметры линий скольжения ψ и x_B определяются варьированием в исходных данных вычислительной программы по условиям $x = 0$ в точке O_1 и равенству площадей сегмента сечения цилиндра ниже границы полосы и пластической области выше границы полосы. В [5, 6] приведен алгоритм вычислений линий скольжения и годографа скоростей при вдавливании кругового и эллиптического цилиндра.

Результаты численного моделирования при вдавливании гладкого кругового цилиндра [5] показывают, что при малых углах контакта $\alpha_A \rightarrow 0$, $\psi \rightarrow \pi/2$, угол β_A и $s \rightarrow 0$, контактное давление приближается к значению $1 + \pi/2$ для плоского штампа Прандтля. Угол веера линий скольжения ψ вырождается при $\alpha_A \approx 0.8$, среднем контактном давлении $q = 1.938$ и глубине вдавливания $s = 0.311$.

На рис. 2 и 3 показаны линии скольжения с распределениями контактного давления и годографы скоростей для $\alpha_A = 0.5$ и $s = 0.092$ и 0.035 при вдавливании пуансонов с гиперболической и параболической границами. Около пуансона образуется вогнутая свободная граница пластической области AB с углом наклона касательной β_A в точке A , что приводит к уменьшению угла веера линий скольжения ψ и нормального давления $p_A = 1 + \psi$ в точке A с увеличением до

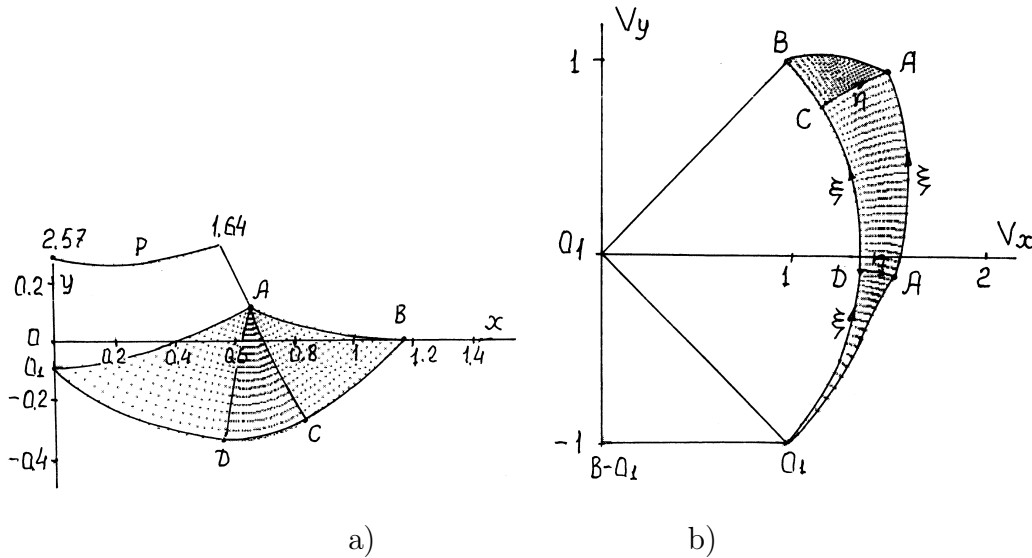


Рис. 3. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б) на первой стадии вдавливания параболического пуансона.

является кинематически определимой [2], в которой распределение среднего напряжения σ на контактной границе O_1A определяется на плоскости годографа скоростей (рис. 4b) по условию непрерывности нормальной скорости к границе контакта

$$V_y = \operatorname{tg} \alpha V_x - 1, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_A. \quad (9)$$

Затем вычисляются линии скольжения на физической плоскости (рис. 4a) решением задачи Коши с известными значениями σ и $\varphi = -\pi/4 + \alpha$ на границе O_1A , задачи Гурса в области ABE с сингулярной точкой A и смешанного типа в области O_1BO при $\varphi = -\pi/4$ на линии симметрии. Среднее напряжение σ_0 в центре O определяется из равенства нулю горизонтальной силы на жесткопластической границе $A-O$.

В [2] линии скольжения на физической плоскости и на плоскости годографа скоростей находятся численным интегрированием дифференциальных уравнений на плоскости характеристик ξ, η . В настоящей работе задача решается численным интегрированием дифференциальных уравнений линий скольжения ξ, η на плоскости годографа скоростей с соотношениями Генки для σ и φ

$$\frac{dV_y}{dV_x} = -\operatorname{ctg} \varphi \quad \text{для } \xi, \quad \frac{dV_y}{dV_x} = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{для } \eta, \quad (10)$$

$$d\sigma - d\varphi = 0 \quad \text{вдоль } \xi, \quad d\sigma + d\varphi = 0 \quad \text{вдоль } \eta, \quad (11)$$

Таблица 1. Вдавливание пуансона с эллиптической границей контакта в пластическое полупространство

α_A	$-\beta_A$	ψ	x_A	x_B	s	q
$a = 1/3$						
0.2	0.123	1.245	0.023	0.050	0.001	2.404
0.3	0.203	1.068	0.034	0.064	0.002	2.344
0.4	0.294	0.877	0.046	0.085	0.005	2.253
0.5	0.410	0.661	0.060	0.107	0.009	2.098
0.6	0.521	0.450	0.074	0.130	0.014	2.010
0.7	0.664	0.207	0.090	0.154	0.017	1.996
$a = 1$						
0.2	0.128	1.243	0.199	0.380	0.015	2.383
0.3	0.199	1.072	0.295	0.556	0.021	2.355
0.4	0.286	0.885	0.389	0.715	0.037	2.235
0.5	0.371	0.700	0.479	0.866	0.068	2.144
0.6	0.476	0.495	0.565	0.999	0.079	2.105
0.7	0.591	0.280	0.644	1.115	0.105	2.015
$a = 3$						
0.2	0.116	1.255	1.559	3.011	0.071	2.455
0.3	0.179	1.092	2.041	3.835	0.124	2.345
0.4	0.230	0.941	2.356	4.372	0.173	2.298
0.5	0.273	0.798	2.561	4.725	0.214	2.282
0.6	0.322	0.649	2.697	4.905	0.241	2.230
0.7	0.357	0.514	2.790	5.044	0.268	2.207

с последующим численным интегрированием дифференциальных уравнений линий скольжения на физической плоскости

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{для } \xi, \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \varphi \quad \text{для } \eta. \quad (12)$$

Система уравнений (10), (11) замкнута для переменных V_x , V_y , σ , φ на плоскости годографа скоростей. При решении элементарной задачи Коши с известными значениями V_x , V_y , σ , φ в двух точках контура Коши на ξ и η линиях скольжения из соотношений (11) находим σ и φ в точке пересечения линий скольжения. Затем из линейной системы конечно-разностных уравнений (10) при средних значениях углов φ вдоль ξ и η линий скольжения находим V_x , V_y – координаты линий скольжения на плоскости годографа скоростей.

Область OBO_1 на плоскости годографа определяется равенством потоков скорости при вдавливании пуансона со скоростью $V = -1$ по оси y и перемещении жесткой области полосы по оси x со скоростью $V_1 = x_A/y_A$ аналогично задаче о вдавливании плоского штампа. В центре O возникает разрыв скорости вдоль жесткопластической границы OBA , равный $\sqrt{2}$, который отображается

Таблица 2. Вдавливание пуансона с гиперболической и параболической границами контакта в пластическое полупространство

α_A	$-\beta_A$	ψ	x_A	x_B	s	q
Гипербола, $a = 1$						
0.1	0.061	1.410	0.101	0.199	0.005	2.453
0.2	0.128	1.243	0.207	0.398	0.010	2.433
0.3	0.210	1.061	0.325	0.611	0.025	2.343
0.4	0.309	0.862	0.466	0.847	0.051	2.190
0.5	0.433	0.638	0.652	1.166	0.092	2.134
0.6	0.609	0.362	0.938	1.619	0.176	1.976
0.65	0.718	0.203	1.170	1.985	0.257	1.891
Парабола, $a = 1$						
0.1	0.062	1.409	0.050	0.098	0.001	2.462
0.2	0.124	1.243	0.101	0.195	0.005	2.439
0.3	0.208	1.069	0.155	0.789	0.011	2.322
0.4	0.297	0.874	0.211	0.387	0.021	2.235
0.5	0.399	0.672	0.273	0.491	0.035	2.164
0.6	0.536	0.435	0.372	0.596	0.054	1.976
0.7	0.691	0.180	0.421	0.713	0.080	1.926

круговой η линией скольжения OBA , и напряжение σ определяется вторым соотношением в (11) с точностью до σ_0 в центре O . В области OBO_1 переменные $V_x, V_y, \sigma, \varphi$ находим решением смешанной задачи по известным значениям на η линии скольжения OB и граничным условиям $\varphi = -\pi/4, V_x = 0$ на оси y численным интегрированием уравнений (10), (11) при конечно-разностной аппроксимации первого уравнения (10). Координаты точки B на круговой η линии скольжения OB и угол веера ψ_1 до ξ линии скольжения AB находим по условию $V_y = -1$ в точке O_1 при вычислении линии скольжения O_1B .

Скорости в области O_1BA с сингулярной точкой A на плоскости годографа вычисляем по условию (9). Угол наклона вектора скорости γ относительно скорости пуансона $(0, -1)$ в точках годографа (V_x, V_y) определяется уравнением $\operatorname{tg} \gamma = (1 + V_y)/V_x$ и условие непрерывности нормальной скорости (9) на границе O_1A имеет вид $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \gamma$. Равенство $\alpha = \varphi + \pi/4$ приводит к уравнению для угла φ на границе O_1A при $0 \leq \alpha \leq \alpha_A$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \gamma - 1}{1 + \operatorname{tg} \gamma}. \quad (13)$$

Выше границы O_1A углы γ и α удовлетворяют неравенству $\alpha < \gamma$, из которого следует неравенство для разности левой и правой части уравнения (13) на ξ линиях скольжения над границей O_1A на плоскости годографа скоростей

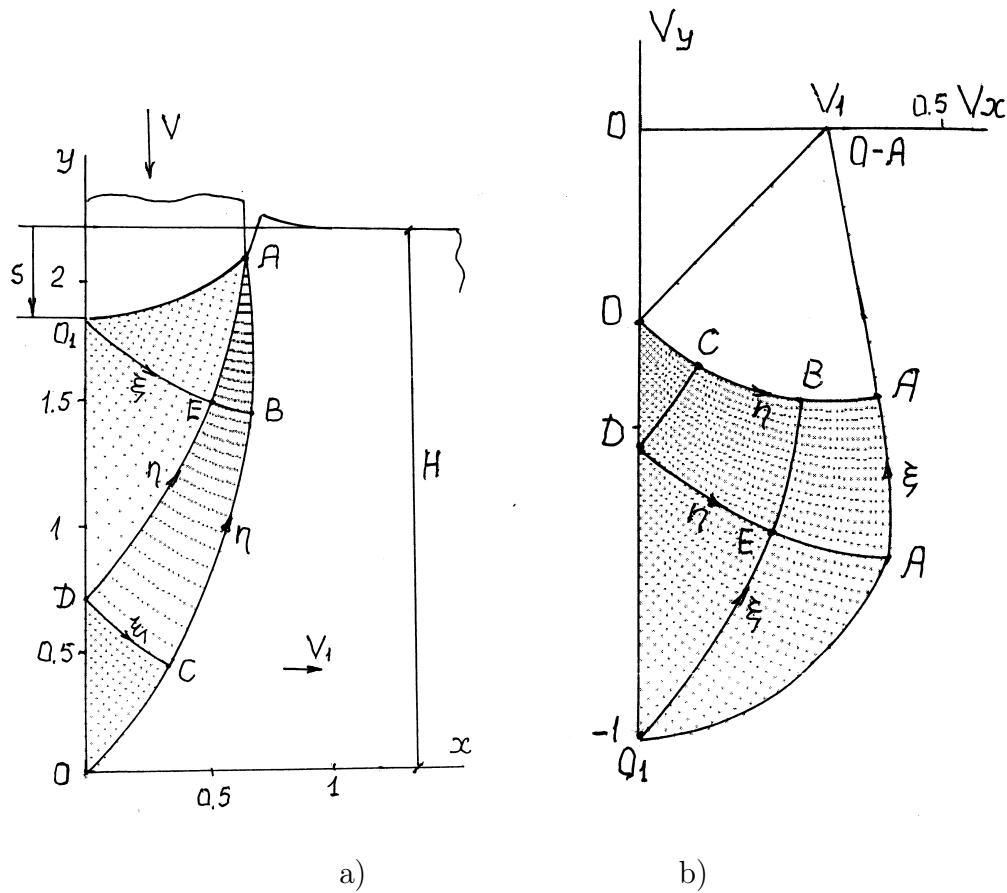


Рис. 4. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б) на второй стадии вдавливания кругового пуансона.

(рис. 4b)

$$f = \operatorname{tg} \varphi + \frac{1 - \operatorname{tg} \gamma}{1 + \operatorname{tg} \gamma} < 0, \quad (14)$$

при $f = 0$ на границе O_1A на ξ линиях скольжения, и $f > 0$ ниже этой границы. Изменение знака функции f используем для вычисления σ , φ и углов наклона касательной α на границе O_1A по следующему алгоритму.

Линии скольжения в области O_1BA находим решением задачи Гурса по известным значениям V_x , V_y , σ , φ на ξ линии скольжения BO_1 и на круговой η линии скольжения BA . На линиях скольжения находим точки i и $i + 1$, между которыми произведение функций $f_i f_{i+1}$ меняет знак, и при $f = 0$ на границе O_1A линейной интерполяцией находим V_x , V_y , σ , φ и угол $\alpha = \varphi + \pi/4$. Угол вектора ψ_2 до ξ линии скольжения AA на плоскости годографа находим по условию $\alpha = \alpha_A$ при $0 \leq \alpha \leq \alpha_A$ на границе O_1A .

Затем на границе O_1A находим $\varphi = \alpha - \pi/4$, координаты x, y , и вычисляем линии скольжения на плоскости x, y решением задачи Коши в области O_1AE , смешанного типа в области O_1ED , Гурса в области $ABCDE$ с углом веера η линий скольжения $\psi = \psi_2 - \psi_1$ в точке A , и задачи смешанного типа в области DCO .

Погрешность вычисления линий скольжения при заданных значениях H и угла контакта α_A составляла $|y| \sim 10^{-3}$. После вычисления линий скольжения определяется жесткопластическая граница $O-A$. Условие равновесия жестких концов полосы по оси x и соотношения для нормального и касательного напряжений $\sigma = \sigma_0 - (\pi/4 + \varphi)$, $\tau = 1/2$ на жесткопластической границе $O-A$ приводят к уравнению для среднего напряжения в центре O

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\int_0^{y_A} \varphi dy + x_A/2}{y_A}, \quad (15)$$

при напряжении $\sigma_1 = \sigma_0 + 1/2 > 0$ по оси x в окрестности центра O , переходящие в напряжения сжатия при приближении к контактной границе O_1A .

На рис. 5, 6, 7 показаны линии скольжения и годографы скоростей на второй стадии вдавливания пуансонов с гладкой контактной границей при $\alpha_A = 0.5$: с параметрами $a = 3$ для эллипса и $a = 1$ для гиперболы и параболы для отношений $y_A/x_A = 2.69, 6.08$ и 5.27 , соответственно. В табл. 3 приведены зависимости контактного давления p от угла наклона касательной α к границам контакта O_1A . Значения среднего давления $q = 1.375, 2.125$ и 1.980 на этих границах близки к давлениям на первой стадии вдавливания при $\alpha_A = 0.5$. Отношения y_A/x_A определяют предельный угол веера ψ линий скольжения в точке A и полутолщину полосы H при переходе от первой стадии вдавливания ко второй. При постоянном значении α_A и увеличении глубины вдавливания значения $y_A/x_A, q$ и ψ уменьшаются. Нижний предел для линий скольжения второй стадии, отношение y_A/x_A и перемещение пуансона s_2 определяются при снижении угла веера ψ в точке до нуля.

Таблица 3. Давление p на контактной границе O_1A при $\alpha_A = 0.5$ для линий скольжения на рис. 5а, 6а, 7а

рис. 5а		рис. 6а		рис. 7а	
α	p	α	p	α	p
0.000	1.392	0.000	2.162	0.000	2.013
0.075	1.389	0.076	2.159	0.076	2.010
0.154	1.382	0.155	2.152	0.155	2.003
0.237	1.372	0.240	2.140	0.240	1.991
0.325	1.356	0.332	2.121	0.331	1.972
0.417	1.336	0.429	2.096	0.427	1.948
0.500	1.317	0.500	2.075	0.500	1.927

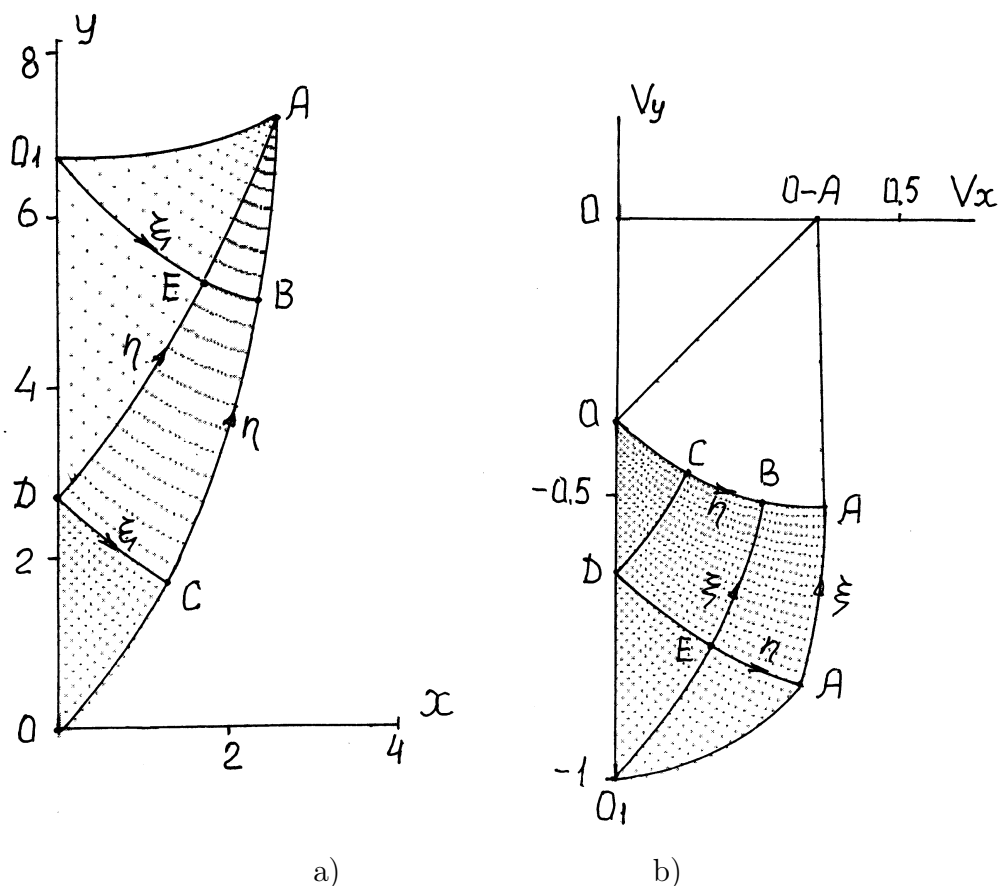


Рис. 5. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б) на второй стадии вдавливания эллиптического пуансона.

В табл. 4 и 5 приведены зависимости давления q при $\alpha_A = 0.7$ на второй стадии вдавливания от координаты y_A и отношения y_A/x_A для эллиптической, гиперболической и параболической границы контакта O_1A . Давления q для угла $\alpha_A = 0.7$ при максимальных значениях y_A/x_A выше значений q при вдавливании пуансонов на первой стадии. Минимальные значения q вычислены для малых углов веера ψ линий скольжения при приближении отношения y_A/x_A к двум.

Третья стадия. При отношениях $y_A/x_A \leq 1$ увеличивается скорость перемещения жестких концов полосы, и при выполнении неравенства $\operatorname{tg} \alpha_A > ds/dx$ происходит уменьшение длины границы контакта и угла наклона касательной α_A в точке A до контакта верхнего и нижнего пуансонов в центре полосы при $s = H$. Пластическая область уменьшается с уменьшением угла α_A и границы контакта и моделируется линиями скольжения с непрерывным полем скоростей.

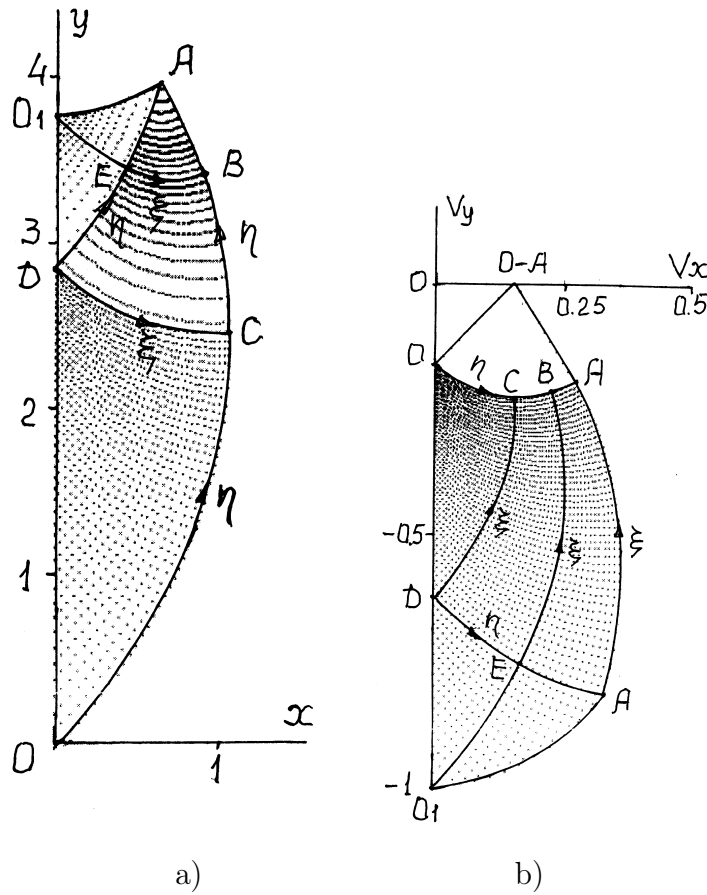


Рис. 6. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б) на второй стадии вдавливания гиперболического пуансона.

На рис. 8 показаны линии скольжения и годограф скоростей на третьей стадии при вдавливании кругового пуансона с параметрами $\alpha_A = 0.5$ и $y_A/x_A = 0.777$. В области O_1BO имеет место однородное напряженное состояние $\sigma_0 = \text{const}$, $\varphi = -\pi/4$ и линейное распределение скоростей

$$V_x = \frac{x}{x_B}, \quad 0 \leq x \leq x_B, \quad V_y = -\frac{y}{y_{O_1}}, \quad x_B = y_{O_1}. \quad (16)$$

В области O_1AB линии скольжения ξ прямые с постоянными значениями $\varphi = -\pi/4 + \alpha$ и $\sigma = \sigma_0 - \alpha$, определяемыми по соотношениям (11). Нормальное давление на границе контакта O_1A определяется линейной зависимостью от угла α

$$p = \frac{1}{2} + \alpha - \sigma_0, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_A. \quad (17)$$

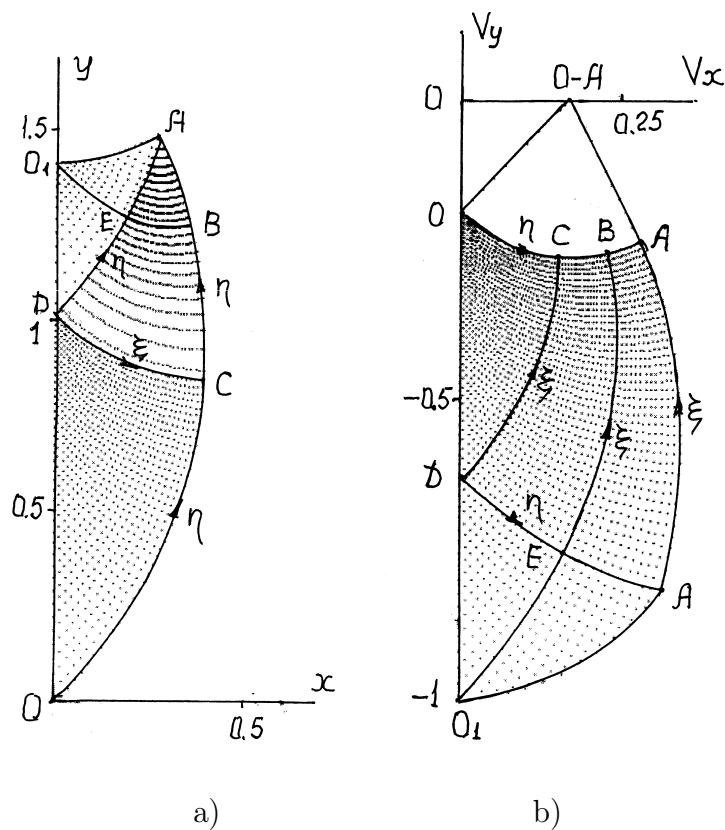


Рис. 7. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б) на второй стадии вдавливания параболического пуансона.

Таблица 4. Давление q на эллиптической границе контакта $\alpha_A = 0.7$. Вторая стадия

$a = 1/3, x_A = 0.09$			$a = 1, x_A = 0.644$			$a = 3, x_A = 2.79$		
y_A	y_A/x_A	q	y_A	y_A/x_A	q	y_A	y_A/x_A	q
0.192	2.130	1.179	1.372	2.130	1.181	5.925	2.124	1.195
0.217	2.408	1.255	1.551	2.408	1.256	6.668	2.391	1.272
0.251	2.786	1.325	1.742	2.704	1.343	7.495	2.687	1.358
0.279	3.096	1.457	2.011	3.122	1.456	8.644	3.099	1.472
0.325	3.608	1.575	2.316	3.595	1.579	9.960	3.571	1.594
0.428	4.757	1.842	2.667	4.140	1.709	11.47	4.112	1.724
0.483	5.356	1.954	3.439	5.338	1.959	13.21	4.735	1.861
0.556	6.172	2.101	3.963	6.152	2.106	14.79	5.302	1.975
0.641	7.118	2.253				17.04	6.109	2.123
						19.65	7.046	2.277

Таблица 5. Давление q на гиперболической и параболической границах контакта, $a = 1$. Вторая стадия

гипербола, $\alpha_A = 0.65$, $x_A = 1.066$			парабола, $\alpha_A = 0.7$, $x_A = 2.375$		
y_A	y_A/x_A	q	y_A	y_A/x_A	q
1.924	2.051	1.164	0.878	2.085	1.153
2.216	2.362	1.257	1.013	2.404	1.248
2.545	2.713	1.360	1.164	2.715	1.352
3.345	3.566	1.586	1.319	3.132	1.452
4.271	4.553	1.807	1.520	3.608	1.574
5.071	5.260	1.945	1.750	4.157	1.704
5.606	5.977	2.082	2.003	4.757	1.842
6.429	6.854	2.227	2.257	5.359	1.953
7.380	7.868	2.376	2.601	6.176	2.100
			3.000	7.123	2.252

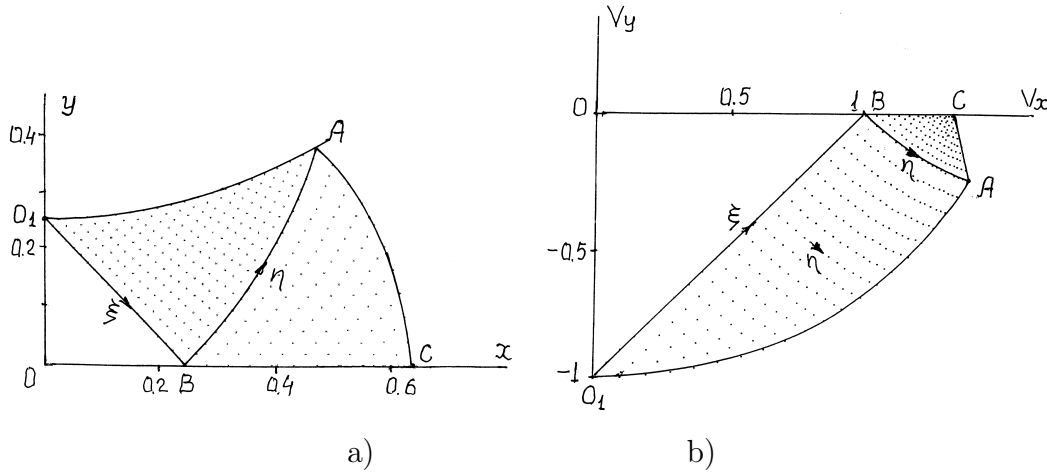


Рис. 8. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б) на третьей стадии вдавливания кругового пуансона.

В области ABC линии скольжения криволинейны и определяются решением смешанной задачи для уравнений (11), (12) с известными значениями φ и σ на η линии скольжения AB и граничным условием $\varphi = -\pi/4$, $y = 0$ на BC . Жесткопластическая граница AC является линией постоянных значений главных напряжений $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -1$, $\sigma = -1/2$ при контактном давлении $p = 1$ в точке A и тождественном удовлетворении условия равенства нулю силы по оси x . Напряжение σ_0 в области O_1BO и нормальное давление p_1 в точке O_1

находим из (17) при $\alpha = \alpha_A$ и $p = 1$ в точке A

$$\sigma_0 = \alpha_A - \frac{1}{2}, \quad p_1 = 1 - \alpha_A. \quad (18)$$

Область O_1BO на годографе скоростей ограничена прямой ξ линией скольжения O_1B с углом $\varphi = \pi/4$. Скорости в области O_1BA определяются решением смешанной задачи для уравнений (10), (11) при известных значениях V_x , V_y , σ , φ на линии скольжения O_1B и условиях (9) и $\varphi = -\pi/4 + \alpha$ на границе O_1A . Скорости V_x , V_y в точках границы O_1A находим используя конечно-разностную аппроксимацию уравнений (10) и (11) для линий скольжения η и уравнение (9), начиная от точки на ξ линии скольжения O_1B , ближайшей к точке O_1 , с последующими вычислениями скоростей в регулярных точках сетки линий скольжения при конечно-разностной аппроксимации уравнений (10), (11). Скорости в области ABC находим решением смешанной задачи для уравнений (10), (11) по известным значениям V_x , V_y , σ , φ на η линии скольжения BA и условиям $V_y = 0$, $\varphi = -\pi/4$ на BC с использованием конечно-разностной аппроксимации уравнений (10) и (11) для линий скольжения ξ . В приведенном примере среднее отклонение расчетной скорости V_x на границе AC от значения $x_A/y_A = 1.287$ по условию пластической несжимаемости равно 0.014.

Из годографа скоростей следуют отрицательные значения скорости деформации ε_2 на границе AC и положительные значения скорости деформации ε_1 на границе контакта O_1A и на линиях симметрии x , y и положительные значения диссипативной функции в пластической области. При $\alpha_A = 1/2$ в пластической области в центре полосы, ограниченной ξ линией скольжения и линиями симметрии $x = 0$, $y = 0$, имеет место пластический сдвиг с напряжениями $\sigma_1 = 1/2$, $\sigma_2 = -1/2$. При $\alpha_A = 1$ давление p_1 в точке O_1 контактной границы равно нулю. При $\alpha_A > 1$ в центре полосы образуется свободная граница пластической области с растяжением по оси x при $\sigma_1 = 1$ и $\sigma_2 = 0$.

В табл. 6 и 7 приведены зависимости среднего давления q и координат x_A , y_A точки A от угла контакта $0.1 \leq \alpha_A \leq 0.7$ при отношениях $y_A/x_A < 1$ на третьей стадии вдавливания с эллиптической, гиперболической и параболической границами. С уменьшением угла контакта α_A давление q увеличивается, приближаясь к единице при отношении $y_A/x_A \rightarrow 1/2$. При эллиптической границе с увеличением параметра a кривизна границы контакта уменьшается и приводит к снижению давления q .

Сила вдавливания и форма канала. Зависимость силы вдавливания $Q = 2q(s)x_A$ от перемещения s относительно начальной границы полосы при $y_A = H - s$ определяется формой контактной границы и углом α_A по уравнениям (6) – (8). Значения $q(s)$ на первой и второй стадиях вдавливания приведены в табл. 4 и 5. Полутолщина полосы определяется равенством $H = y_A + s_1$, где s_1 – глубина вдавливания на первой стадии при заданном угле α_A , приведенная в [6] и в табл. 1 и 2. Значение y_A при переходе от первой стадии вдавливания ко второй находим по табл. 4 и 5 при $q = q_1$ и $s = s_1$. Переход от второй стадии

Таблица 6. Координаты x_A , y_A и давление q при снижении угла α_A на эллиптической границе контакта. Третья стадия

$a = 1/3$				$a = 1$			$a = 3$		
α_A	x_A	y_A	q	x_A	y_A	q	x_A	y_A	q
0.7	0.090	0.087	0.675	0.644	0.586	0.635	2.790	2.084	0.515
0.6	0.074	0.065	0.716	0.565	0.475	0.691	2.697	1.956	0.600
0.5	0.060	0.047	0.759	0.483	0.373	0.745	2.561	1.793	0.681
0.4	0.046	0.034	0.805	0.390	0.279	0.797	2.356	1.582	0.758
0.3	0.034	0.023	0.852	0.296	0.195	0.849	2.041	1.300	0.829
0.2	0.022	0.014	0.901	0.199	0.120	0.900	1.559	0.930	0.893
0.1	0.011	0.006	0.950	0.100	0.055	0.950	0.865	0.476	0.949

Таблица 7. Координаты x_A , y_A и давление q при снижении угла α_A на гиперболической и параболической границах контакта, $a = 1$. Третья стадия

гипербола				парабола		
α_A	x_A	y_A	q	x_A	y_A	q
0.7	—	—	—	0.421	0.411	0.682
0.65	1.170	1.170	0.763	0.380	0.352	0.700
0.6	0.938	0.833	0.765	0.342	0.301	0.719
0.5	0.652	0.538	0.783	0.273	0.218	0.761
0.4	0.466	0.344	0.815	0.211	0.153	0.805
0.3	0.325	0.217	0.856	0.155	0.102	0.852
0.2	0.207	0.125	0.902	0.101	0.061	0.901
0.1	0.101	0.057	0.950	0.050	0.028	0.950

вдавливания к третьей определяется неравенствами $y_A/x_A < 1$ при $s > s_2$ и $\alpha_A < \alpha_A^*$, где α_A^* – постоянное значение угла контакта α_A на второй стадии при вдавливании в толстую полосу, и значениями $q(s)$ приведенными в табл. 6 и 7.

На первой стадии вдавливания при $s \leq s_1$ жесткая область полосы неподвижна и форма пластического отпечатка определяется по уравнениям (6) – (8) при вдавливании в пластическое полупространство с выдавливанием материала на поверхность полосы.

На второй и третьей стадиях форма дна поперечного канала определяется по уравнениям (6) – (8) в зависимости от угла $0 \leq \alpha \leq \alpha_A$ наклона касательной к контактной границе. Форма свободной границы канала справа от границы контакта при $x > x_A$ и $y > y_A$ определяется в зависимости от скорости пуансона $V = 1$ и перемещения жесткой области полосы по оси x со скоростью

$$\frac{dx}{ds} = \frac{x_A}{H - s}, \quad s_1 \leq s \leq H - y_A. \quad (19)$$

На второй стадии угол контакта α_A^* имеет постоянное значение, координата x_A точки A не зависит от s , и уравнение свободной границы канала при $x > x_A$ находим интегрированием уравнения (19)

$$x = x_A \left\{ 1 + \ln \left[\frac{H - s_1}{H - s} \right] \right\}, \quad y = H - s. \quad (20)$$

При $\alpha_A < \alpha_A^*$ на третьей стадии координата x_A в уравнении (19), определяемая по уравнениям (6) – (8) является неявной функцией s , и увеличение перемещения жестких концов полосы по оси x находим численным интегрированием уравнения (19).

На рис. 9 показана зависимость силы $Q(s)$ и формы канала при вдавливании пуансона с параболической границей контакта в полосу с полутолщиной $H = 2.017$ при $\alpha_A^* = 0.7$ и $x_A = 0.421$. При переходе от первой стадии при $s_1 = 0.08$ сила Q принимает максимальное значение 1.622. При переходе к третьей стадии при $s = 1.85$ сила Q снижается до 0.574. Расчеты выполнены с шагом $\Delta s = 0.03$ на второй и третьей стадиях до конечного значения $s = 2$ при снижении угла контакта α_A до значения 0.282 в конце третьей стадии.

На рис. 10 показана зависимость $Q(s)$ и формы канала при вдавливании плоского гладкого пуансона с полушириной $a = 0.421$ в полосу с полутолщиной $H = 2.017$, для сравнения с вдавливанием параболического пуансона на рис. 9. Зависимость давления q от отношения y_A/a при $y_A = H - s$ для плоского пуансона приведена в табл. 8 и $q = 1$ при $y_A/a < 1$. В этом случае сдавливание полосы начинается при $s \geq 0$ без образования наплыва материала на границе полосы при постоянной длине контактной границы с формой канала, определяемой по уравнениям (20) при $s_1 = 0$, $x_A = a$, $s < H$, $x > a$. Из табл. 8 находим $q = 1.926$ при $s = 0$, $H/a = 4.791$ и $Q = 1.622$ равно максимальной силе вдавливания параболического пуансона на рис. 9а при переходе от первой стадии ко второй. Зависимости $Q(s)$ для плоского и параболического пуансонов практически совпадают до глубины вдавливания $s = 1.5$, при $q = 1$ и $Q = 0.845$ и $y_A/a = 1$ для параболического пуансона, и $y_A/x_A = 1.708$ для плоского пуансона.

Таблица 8. Давление q на гладкий плоский пуансон по Прандтлю. $\alpha_A = 0$, $a = x_A = 0.421$. Вторая стадия

y_A/a	q	y_A/x_A	q	y_A/x_A	q
1.000	1.000	2.440	1.342	5.431	2.056
1.221	1.019	2.867	1.463	6.382	2.227
1.469	1.069	3.363	1.596	7.510	2.405
1.750	1.143	3.944	1.740	8.152	2.496
2.071	1.234	4.627	1.893	8.700	2.571

При вдавливании гладкого плоского пуансона при $s > 1.5$ и $y_A/a < 1$ значения q и Q остаются постоянными. При вдавливании параболического пуансона до $s = 1.805$ при переходе к третьей стадии значения q и Q снижаются до 0.694

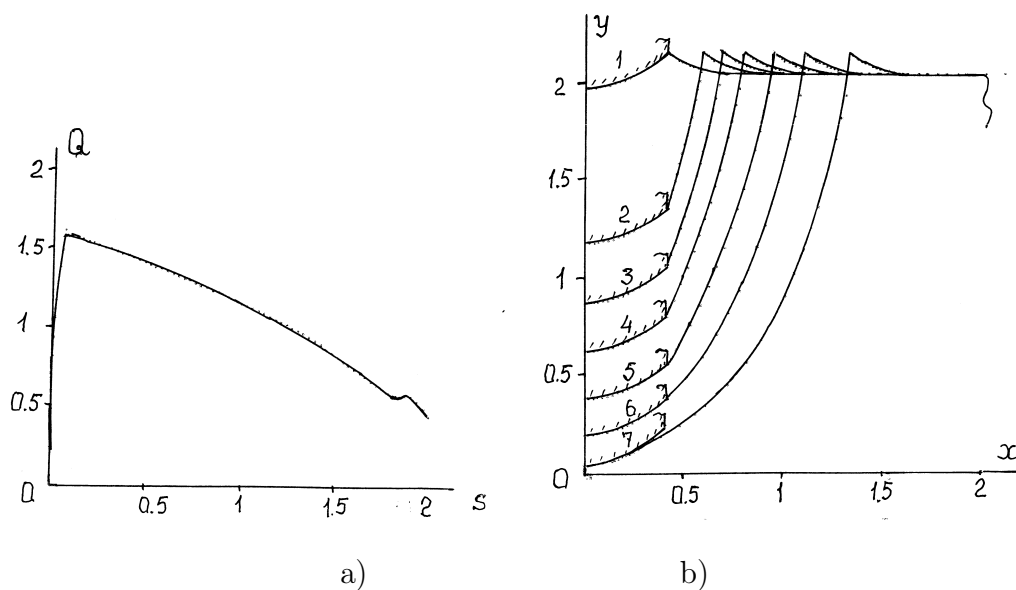


Рис. 9. Зависимость $Q(s)$ и формы канала при вдавливании параболического пуансона. 1 – переход ко второй стадии при $s = 0.08$; 2–6 – формы канала на второй стадии при $s = 0.89, 1.19, 1.43, 1.67, 1.85$; 7 – форма канала на третьей стадии при $s = 2$.

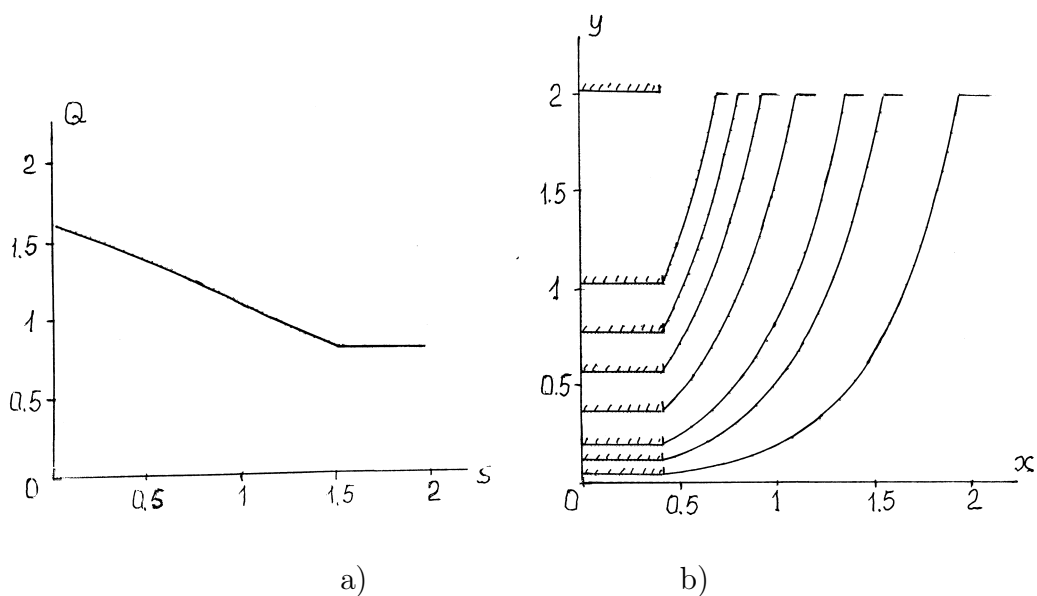


Рис. 10. Зависимость силы $Q(s)$ и формы канала при вдавливании плоского пуансона.

и 0.585 соответственно и незначительно изменяются при увеличении s до 1.88

при постоянных значениях α_A и x_A . При $s > 1.88$ происходит уменьшение угла контакта α_A до 0.282 при $s = 2$, снижение длины границы контакта и силы Q до 0.450 при повышении давления q до 0.796.

Форма свободной границы канала при $x > x_A$ одинакова при вдавливании плоского и параболического пуансонов с постоянным значением x_A . На третьей стадии вдавливания плоского пуансона при $s > 1.88$ скорость перемещения жестких концов полосы увеличивается при сдавливании тонкого слоя, что приводит к быстрому расширению канала по сравнению с вдавливанием параболического пуансона.

Закключение. Приведено численное моделирование поперечного вдавливания гладких пуансонов с эллиптической, гиперболической и параболической цилиндрическими контактными границами в толстую полосу на основе уравнений теории идеальной пластичности при плоской деформации. Вследствие выпуклости цилиндрической контактной границы вдавливание пуансонов начинается с линейного контакта с полосой при увеличении пластической области с образованием наплыва материала на поверхности полосы по модели вдавливания в пластическое полупространство. Пластическая область ограничена конечной длиной контактной границы в нормальном сечении пуансонов при вырождении веера линий скольжения в сингулярной точке и снижении контактного давления. На второй стадии вдавливания в толстую полосу длина контактной границы с пластической областью по толщине полосы между верхним и нижним пуансонами остается постоянной. Линии скольжения вычисляются на плоскости годографа скоростей с кинематическими граничными условиями на контактной границе с определением контактного давления, линий скольжения на физической плоскости и криволинейной границы канала при раздвижении свободных жестких концов полосы. Толщина полосы определяется равенством среднего давления при переходе от первой стадии вдавливания ко второй. Вторая стадия ограничена вырождением веера линий скольжения с приближением среднего давления к единице при отношении проекции контактной границы к толщине пластической области близкого к двум. При снижении указанного отношения меньше единицы на третьей стадии вдавливания пластическая область моделируется линиями скольжения с непрерывным полем скоростей и снижении длины контактной границы при сближении верхнего и нижнего пуансонов. При малой кривизне и большой длине контактной границы линии скольжения и годографы скоростей приближаются к задаче Прандтля о вдавливании плоских пуансонов в толстую полосу при давлении ниже $1 + \pi/2$ на второй стадии равно единице на третьей стадии при постоянной длине контактной границы и силы вдавливания с быстрым увеличением ширины канала при сдавливании тонкого пластического слоя.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Непершин Р.И. – написание текста рукописи, обзор литературы по теме статьи, проведение экспериментов, редактирование текста рукописи, согласование финальной версии рукописи.

Конфликт интересов. Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Автор заявляет об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. Nepershin R.I. – writing the text of the manuscript, reviewing the literature on the topic of the article, conducting experiments, editing the text of the manuscript, agreeing on the final version of the manuscript.

Competing interests. The author declares that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – М. : Гостехиздат, 1956. – 407 с.
2. Соколовский В. Теория пластичности. – М. : Высшая школа, 1969. – 608 с.
3. Ишлинский А., Ивлев Д. Математическая теория пластичности. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.
4. Druyanov B., Nepershin R. Problems of Technological Plasticity. – Amsterdam : Elsevier, 1994. – 406 с.
5. Непершин Р. О вдавливании цилиндра в идеально-пластическое полупространство с учетом контактного трения // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. – 2018. – 4 (38). – С. 102–119.
6. Непершин Р. Вдавливание эллиптического цилиндра в идеально пластическое полупространство // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. – 2023. – 1 (55). – С. 69–85. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.009.
7. Nepershin R. Applied Problems of Plasticity. – Moscow : MSTU "STANKIN", 2016. – 310 с.

REFERENCES

1. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. – Oxford University Press, 1985.
2. Sokolovskii V. V. The Theory of Plasticity. – Moscow : Vyshaya Shkola, 1969. – 608 p. – (In Russian).
3. Ishlinskii A. Y., Ivlev D. D. Mathematical Theory of Plasticity. – Moscow : Fizmatlit, 2001. – 704 p. – (In Russian).
4. Druyanov B. A., Nepershin R. I. Theory of Technological Plasticity. – Amsterdam : Elsevier, 1994. – 426 p.
5. Nepershin R. I. On the ideal plastic half-space indentation by the cylinder with contact friction consideration // Vestnik I.Ya. Yakovlev ChSPU. Series of Mechanical limit state. – 2018. – 1 (35). – P. 26–38. – (In Russian).
6. Nepershin R. I. Ideal plastic half-space indentation by the elliptical cylinder // Vestnik I.Ya. Yakovlev ChSPU. Series of Mechanical limit state. – 2023. – 1 (55). – P. 69–85. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.009. – (In Russian).
7. Nepershin R. I. Applied Problems of Plasticity. – Moscow : MSTU "STANKIN", 2016. – 310 p.

ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ГЕМИТРОПНОГО МИКРОПОЛЯРНОГО УПРУГОГО ТЕЛА. МЕТОД МНОГОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Аннотация. Настоящая работа посвящена построению канонической диагональной энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела. Энергия деформации задается квадратичной формой, зависящей от асимметричных тензора деформации и тензора изгиба-кручения. Наиболее удобным для целей настоящего исследования оказывается А-представление энергии деформации гемитропной микрополярной упругой среды, характеризующейся 9 изоэнтропийными механическими модулями. Квадратичная форма энергии деформации диагонализуется методом последовательных двумерных поворотов Якоби. Несвязанные двумерные повороты путем их композиции можно объединить в один многомерный поворот. Для диагонализации матрицы квадратичной формы оказалось достаточно 5 различных вращений. В результате применения метода Якоби получается диагональная матрица, подобная матрице квадратичной энергетической формы. Причем на главной диагонали располагаются собственные числа. Композиция указанных 5 поворотов, являющихся преобразованием подобия, определяют переход к новым каноническим переменным. Каноническая форма энергии деформации позволяет явно и наиболее просто сформулировать критерии устойчивости равновесия (equilibrium stability) для гемитропного микрополярного упругого тела. Получены односторонние ограничения, накладываемые на определяющие константы, обеспечивающие положительную определенность квадратичной формы, гарантирующих устойчивость равновесия гемитропного микрополярного упругого тела. Показана эквивалентность систем неравенств полученных ранее методом Лагранжа и методом Якоби. Ключевые слова: энергия деформации, внутренняя энергия, энтропия, устойчивость равновесия, гемитропная микрополярная среда, упругость, диагонализация, каноническая квадратичная форма, положительная определенность, определяющие неравенства

Мурашкин Евгений Валерьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: murashkin@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Радаев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radayev@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116



для цитирования: Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Диагонализация энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела. Метод многомерных вращений // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 159–179. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.021. EDN: UNKYZ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. 2026

Поступила: 12.02.2026; принята в печать: 24.04.2026; опубликована: 01.07.26.

E. V. Murashkin, Y. N. Radayev

DIAGONALIZATION OF THE ENERGY FORM OF A HEMITROPIC MICROPOLAR ELASTIC BODY. METHOD OF MULTIDIMENSIONAL ROTATIONS

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. This paper is devoted to a canonical diagonal energy form for a hemitropic micropolar elastic solid. The strain energy is given by a quadratic form dependent on the asymmetric strain tensor and wryness tensor. The A-representation of the strain energy of a hemitropic micropolar elastic medium, characterized by nine isentropic mechanical moduli, is most convenient for the aims of this study. The quadratic form of the strain energy is diagonalized by using the method of two-dimensional Jacobi rotations. Undepend two-dimensional rotations can be combined into a single multidimensional rotation by their composition. Five different rotations were found to be sufficient for diagonalizing the matrix of the quadratic form. Application of the Jacobi method yields a diagonal matrix similar to the matrix of the quadratic energy form. The eigenvalues are located on the main diagonal. The composition of mentioned five rotations, which constitute a similarity transformation, determines the transition to new canonical variables. The canonical form of the strain energy allows for the explicit and simple formulation of equilibrium stability criteria for a hemitropic micropolar elastic body. Unilateral constraints are obtained on the constitutive constants, assuring the positive definiteness of the quadratic form and the equilibrium stability of a hemitropic micropolar elastic body. The equivalence of the systems of inequalities previously obtained by the Lagrange method and the Jacobi method is demonstrated.

Keywords: strain energy, internal energy, entropy, equilibrium stability, hemitropic micropolar medium, elasticity, diagonalization, canonical quadratic form, positive definiteness, constitutive inequalities

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; e-mail: vmurashkin@gmail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Yuri N. Radayev, Dr. Sci. Phys. & Math., Prof., Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; e-mail: radayev@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116



to cite this article: Murashkin E. V., Radayev Y. N. Diagonalization of the energy form of a hemitropic micropolar elastic body. Method of multidimensional rotations // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 159–179. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.021

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Условия устойчивости равновесия деформируемого тела позволяют говорить о пределах применимости той или иной математической модели упругого тела. Наиболее просто они получаются для линейных упругих тел. В этом случае достаточно определить условия положительной определенности квадратичной формы энергии деформации. Для канонических (диагональных) форм такие условия соответствуют положительности их коэффициентов. В теории квадратичных форм известно несколько способов диагонализации: метод отделения квадратов Лагранжа [1–3], метод последовательных поворотов Якоби [1–7] и т.д.

Математическое моделирование механического поведения микрополярных упругих тел начинается с построения энергии деформации [8–16]. Энергия деформации есть внутренняя энергия, поскольку мы ограничиваемся изоэнтропийными (адиабатическими) процессами. Для изотермических процессов энергию деформации следует интерпретировать как свободную энергию Гельмгольца. В большинстве доступных литературных источников внутренняя энергия вводится как термодинамический потенциал состояния на единицу инвариантного объема и обозначается U . В ходе обсуждения рассматриваются только изоэнтропийные процессы. Таким образом, для внутренней энергии имеем

$$U = \bar{U}(\bar{S}, \epsilon_{ij}, \kappa_{ij}), \quad (1)$$

где ϵ_{ij} — несимметричный тензор деформации, κ_{ij} — тензор изгиба-кручения, $\bar{S}$ — энтропия на единицу инвариантного объема, черта над символом относится к термодинамическому потенциалу состояния в отличие от самой физической полевой величины (в (1) это замечание относится к U и S).

Второй (взаимный) принцип Гиббса гласит (см. [17]): «для локального равновесия необходимо и достаточно, чтобы при всех возможных изменениях состояния системы, не меняющих ее энтропии, изменение ее энергии либо обращалось в нуль, либо было положительным: $\delta \bar{U} \geq 0$.»

Исходная формулировка взаимного принципа может быть аналогично усилена согласно

$$\bar{U}(\bar{S}, \epsilon_{ij}, \kappa_{ij}) \longrightarrow \min \quad (\delta \bar{S} = 0), \quad (2)$$

т.е. поскольку $\delta \bar{S} = 0$, то

$$\begin{aligned} \delta \bar{U} &= 0, \quad \delta^2 \bar{U} \geq 0, \\ \delta^2 \bar{U} &= 0, \text{ тогда и только тогда, когда } \delta \epsilon_{ij} = 0 \text{ и } \delta \kappa_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Основываясь на взаимном принципе, критерий устойчивости изоэнтропийного равновесия формулируется односторонним ограничением на вторые вариации внутренней энергии $\delta^2 \bar{U}$:

$$\begin{aligned} \delta^2 \bar{U}(0, 0)[\delta \epsilon_{ij}, \delta \kappa_{ij}] &= \delta^2 \bar{U} \bigg|_{\epsilon_{ij}=0, \kappa_{ij}=0} [\delta \epsilon_{ij}, \delta \kappa_{ij}] \geq 0, \\ \delta^2 \bar{U} &= 0, \text{ тогда и только тогда, когда } \delta \epsilon_{ij} = 0 \text{ и } \delta \kappa_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В силу того, что вторая вариация внутренней энергии $\delta^2 \bar{U}$ является квадратичной формой от вариаций $\delta \epsilon_{ij}$ и $\delta \kappa_{ij}$ критерий устойчивости равновесия определяется условиями положительной определенности указанной квадратичной формы.

В настоящем исследовании широко используется терминология, обозначения, методы и результаты, представленные в наших предыдущих работах [14, 15, 18–23].

1. Энергия деформации гемитропного микрополярного упругого тела. В этом разделе ограничимся рассмотрениями в трехмерном пространстве, снабженном декартовой системой координат.

Микрополярное твердое тело называется гемитропным, если компоненты определяющих тензоров не изменяются при поворотах системы координат, т.е. они инвариантны относительно группы полуизометрических преобразований, а именно изометрических преобразований, за исключением зеркальных отражений и инверсий трехмерного евклидова пространства. В этом случае корректная запись основных уравнений может быть представлена только с использованием формализма псевдотензоров. Однако, простой алгоритм преобразования псевдотензора в соответствующий ему абсолютный тензор позволяет нам провести наше исследование в терминах абсолютных тензоров.

Введем энергию деформации $\mathcal{U} \Big|_{\text{adiabatic}}$ [15, 19, 20], рассчитанную для единичного инвариантного элемента объема при постоянной энтропии ($S = \text{const}$), в виде:

$$\bar{U} \Big|_{\text{adiabatic}} = \bar{U} \Big|_{\bar{S}=\text{const}} = \mathcal{U} \Big|_{\text{adiabatic}} (\epsilon_{(ij)}, \kappa_{(ij)}, \varphi_i, \kappa_i), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \partial_i u_j - e_{ijk} \varphi_k, & 2\epsilon_{(ij)} &= \partial_i u_j + \partial_j u_i, & \kappa_{ij} &= \partial_i \phi_j, \\ \kappa_{(ij)} &= \partial_i \phi_j + \partial_j \phi_i, & \varphi_i &= \phi_i - \frac{1}{2} e_{ikl} \partial_{[k} u_{l]}, & \kappa_i &= \frac{1}{2} e_{ijs} \kappa_{[js]}. \end{aligned} \quad (6)$$

В уравнениях (5) и (6) используются следующие обозначения: u_i — трансляционные перемещения; ϕ_i — спинорные перемещения; ϵ_{kl} — асимметричный тензор деформации; κ_{kl} — тензор изгиба–кручения; ∂_i обозначает частную производную по пространственной координате x_i ; e_{ijk} — альтернирующий тензор; φ_i — относительные микроповороты; круглые скобки обозначают алгебраическую симметризацию; квадратные скобки обозначают алгебраическое альтернирование.

Следует отметить, что $\mathcal{U} \Big|_{\text{adiabatic}}$ по сути является потенциалом силовых и моментных напряжений. В дальнейшем вместо $\mathcal{U} \Big|_{\text{adiabatic}}$ используется сокращенное обозначение $\mathcal{U}$.

Энергия деформации $\mathcal{U}$ инвариантна относительно вращений и трансляций пространства, а также относительно преобразований пространственной инверсии и зеркальных отражений, т.е. для полной изометрической группы. Существуют три различных подхода к определению энергии деформации, подробно описанные в статье [15]. Первый из них — это А-представление. А-представление [14] основано на понятиях теории рациональных алгебраических инвариантов и является линейной оболочкой индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов несимметричного тензора деформации и пространственного градиента поля микровращений. Основы теории целых рациональных алгебраических инвариантов подробно обсуждаются в фундаментальных монографиях [24, 25].

Инварианты полной неприводимой системы индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических квадратичных инвариантов симметричных компонент несимметричных тензоров деформации, тензора изгиба-кручения и связанных с ними векторов для гемитропного твердого тела, вычисляются в декартовых координатах следующим образом [23]

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \delta_{ik} \delta_{lm} \epsilon_{(ik)} \epsilon_{(lm)}, & \mathbf{I}_2 &= \delta_{ik} \delta_{lm} \kappa_{(ik)} \kappa_{(lm)}, & \mathbf{I}_3 &= \delta_{ik} \delta_{lm} \epsilon_{(il)} \epsilon_{(km)}, \\ \mathbf{I}_4 &= \delta_{ik} \delta_{lm} \kappa_{(il)} \kappa_{(km)}, & \mathbf{I}_5 &= \delta_{ik} \varphi_i \varphi_k, & \mathbf{I}_6 &= \delta_{ik} \kappa_i \kappa_k, \\ \mathbf{I}_7 &= \delta_{ik} \delta_{lm} \epsilon_{(ik)} \kappa_{(lm)}, & \mathbf{I}_8 &= \delta_{ik} \delta_{lm} \epsilon_{(ik)} \kappa_{(lm)}, & \mathbf{I}_9 &= \delta_{ik} \kappa_i \varphi_k, \end{aligned} \quad (7)$$

где δ_{lm} — символ Кронекера.

В силу формул (7) для инвариантов $\mathbf{I}_c$ ($c = 1, \dots, 9$) энергия деформации (5) представляется в виде (см. [14, 15, 19]):

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= A_1 \delta_{is} \delta_{lm} \epsilon_{(is)} \epsilon_{(lm)} + A_2 \delta_{is} \delta_{lm} \kappa_{(is)} \kappa_{(lm)} + A_3 \delta_{is} \delta_{lm} \epsilon_{(il)} \epsilon_{(sm)} + \\ &+ A_4 \delta_{is} \delta_{lm} \kappa_{(il)} \kappa_{(sm)} + A_5 \delta_{is} \varphi_i \varphi_s + A_6 \delta_{is} \kappa_i \kappa_s + \\ &+ A_7 \delta_{is} \delta_{lm} \epsilon_{(is)} \kappa_{(lm)} + A_8 \delta_{is} \delta_{lm} \epsilon_{(is)} \kappa_{(lm)} + A_9 \delta_{is} \kappa_i \varphi_s, \end{aligned} \quad (8)$$

где A_c ($c = 1, \dots, 9$) — произвольные константы. Очевидно, эти константы могут интерпретироваться как определяющие упругие модули (абсолютные скаляры) при спецификации модели гемитропного микрополярного упругого твердого тела.

Для упрощения дальнейшего изложения введем формальные замены независимых переменных состояния $\epsilon_{(ij)}$, $\kappa_{(ij)}$, φ_i , κ_i энергии деформации $\mathcal{U}$ согласно следующим правилам:

$$\begin{aligned} \epsilon_{(11)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{1}}, & \varphi_1 &\longleftrightarrow Y_{\underline{7}}, & \kappa_{(11)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{10}}, & \kappa_1 &\longleftrightarrow Y_{\underline{16}}, \\ \epsilon_{(22)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{2}}, & \varphi_2 &\longleftrightarrow Y_{\underline{8}}, & \kappa_{(22)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{11}}, & \kappa_2 &\longleftrightarrow Y_{\underline{17}}, \\ \epsilon_{(33)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{3}}, & \varphi_3 &\longleftrightarrow Y_{\underline{9}}, & \kappa_{(33)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{12}}, & \kappa_3 &\longleftrightarrow Y_{\underline{18}}, \\ \epsilon_{(23)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{4}}, & & & \kappa_{(23)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{13}}, & & \\ \epsilon_{(13)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{5}}, & & & \kappa_{(13)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{14}}, & & \\ \epsilon_{(12)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{6}}, & & & \kappa_{(12)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{15}}, & & \end{aligned} \quad (9)$$

где мы подчеркиваем индекс, чтобы отличить двузначные векторные индексы от двух соседних одноместных тензорных индексов. Вектор формальных переменных² $[Y]$ принадлежит формальному векторному пространству алгебраической размерности 18.

С учетом замен (9) квадратичная форма энергии деформации (8) записывается как:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & AY_1^2 + AY_3^2 + AY_7Y_{10} + AY_1Y_{10} + AY_{10}^2 + AY_{10}^2 + AY_1Y_{11} + 2AY_{10}Y_{11} + \\ & + AY_{11}^2 + AY_{11}^2 + AY_7Y_{12} + 2AY_{10}Y_{12} + 2AY_{11}Y_{12} + AY_{12}^2 + AY_{12}^2 + \\ & + 2AY_{13}^2 + 2AY_{14}^2 + 2AY_{15}^2 + AY_{16}^2 + AY_{17}^2 + AY_{18}^2 + 2AY_1Y_2 + AY_{10}Y_2 + \\ & + AY_{11}Y_2 + AY_{11}Y_2 + AY_{12}Y_2 + AY_2^2 + AY_2^2 + 2AY_1Y_3 + AY_{10}Y_3 + \\ & + AY_{11}Y_3 + AY_{12}Y_3 + AY_{12}Y_3 + 2AY_2Y_3 + AY_3^2 + AY_3^2 + 2AY_{13}Y_4 + \\ & + 2AY_4^2 + 2AY_{14}Y_5 + 2AY_5^2 + 2AY_{15}Y_6 + 2AY_6^2 + AY_{16}Y_7 + \\ & + AY_7^2 + AY_{17}Y_8 + AY_8^2 + AY_{18}Y_9 + AY_9^2. \quad (10) \end{aligned}$$

Отметим, что уравнение (10) может быть представлено в компактных матричных обозначениях в виде:

$$\mathcal{U} = [Y]^T[A][Y], \quad (11)$$

где $[Y] = [Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7, Y_8, Y_9, Y_{10}, Y_{11}, Y_{12}, Y_{13}, Y_{14}, Y_{15}, Y_{16}, Y_{17}, Y_{18}]^T$ — транспонированная вектор-строка алгебраической размерности 18, составленная из формальных переменных; $[A]$ — формальная квадратная симметричная матрица размерности 18×18 механических модулей микрополярной среды с элементами a_{ij} ($i, j = 1, \dots, 18$). В случае гемитропного микрополярного упругого тела матрица $[A]$ имеет следующую блочную структуру (к сожалению, не диагональную, но, по меньшей мере, блочную трехдиагональную):

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [0] & [0] & [A_{14}] & [0] & [0] \\ [0] & [A_{22}] & [0] & [0] & [A_{25}] & [0] \\ [0] & [0] & [A_{33}] & [0] & [0] & [A_{36}] \\ [A_{41}] & [0] & [0] & [A_{44}] & [0] & [0] \\ [0] & [A_{52}] & [0] & [0] & [A_{55}] & [0] \\ [0] & [0] & [A_{63}] & [0] & [0] & [A_{66}] \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где $[A_{hk}]$ ($h, k = 1, \dots, 6$) — симметричные блочные матрицы алгебраической размерности 3×3 ; h и k метаиндексы, нумерующие блочные элементы; $[0]$ —

²В настоящей статье используются векторно-матричные обозначения. Они отличаются от векторно-тензорных обозначений. Например, $Y \cdot A \cdot Y = [Y]^T[A][Y]$, где квадратные скобки указывают на квадратную матрицу или вектор-столбец. Отметим, что система символьных вычислений (например, Wolfram Mathematica) оперирует с векторно-матричными обозначениями.

нулевые блочные матрицы размерности 3×3 . При этом, ненулевые блоки расположены на трех диагоналях:

$$[A_{hk}] = [A_{kh}] \neq [0] \text{ при } h = k, k = h + 3, h = k + 3. \quad (13)$$

Ненулевые блочные матрицы $[A_{hk}]$ определяются через микрополярные упругие механические модули A_a ($a = 1, \dots, 9$) согласно следующим формулам:

$$\begin{aligned} [A_{11}] &= \begin{bmatrix} A_1 + A_3 & A_1 & A_1 \\ A_1 & A_1 + A_3 & A_1 \\ A_1 & A_1 & A_1 + A_3 \end{bmatrix}, \quad [A_{44}] = \begin{bmatrix} A_2 + A_4 & A_2 & A_2 \\ A_2 & A_2 + A_4 & A_2 \\ A_2 & A_2 & A_2 + A_4 \end{bmatrix}, \\ [A_{14}] &= [A_{41}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_7 + A_8 & A_7 & A_7 \\ A_7 & A_7 + A_8 & A_7 \\ A_7 & A_7 & A_7 + A_8 \end{bmatrix}, \\ 2[A_{36}] &= 2[A_{63}] = A_9 \text{ diag}[1, 1, 1], \quad [A_{25}] = [A_{52}] = A_8 \text{ diag}[1, 1, 1], \\ [A_{22}] &= 2A_3 \text{ diag}[1, 1, 1], \quad [A_{33}] = A_5 \text{ diag}[1, 1, 1], \\ [A_{55}] &= 2A_4 \text{ diag}[1, 1, 1], \quad [A_{66}] = A_6 \text{ diag}[1, 1, 1]. \end{aligned} \quad (14)$$

2. Метод последовательных поворотов (Метод Якоби) матрицы квадратичной энергетической формы. Метод последовательных поворотов [1, 2, 4–7], предложенный К.Г.Я. Якоби в 1846 г. в работе [5, Р. 65–66], предназначен для приведения квадратичной формы к каноническому виду. В основе метода лежит ключевое понятие линейной алгебры — подобные матрицы, которые задают один и тот же тензор, представленный в разных базисах.

Квадратные матрицы $[A]$ и $[B]$ алгебраической размерности $N \times N$ называются подобными, если существует невырожденная (обратимая) матрица $[P]$ размерности $N \times N$ такая, что:

$$[B] = [P]^{-1}[A][P]. \quad (15)$$

Матрицу $[P]$ называют матрицей перехода (или матрицей преобразования подобия). Подобные матрицы обладают важными для приложений свойствами: одинаковыми собственными значениями, определителем, следом, рангом и характеристическим многочленом. Последнее обстоятельство особенно важно при использовании в качестве матрицы перехода матрицы поворота, относящейся к группе изометрических/ортогональных невырожденных матриц. Обратная матрица к ортогональной/изометрической получается из исходной транспонированием, т.е. $[P]^{-1} = [P]^T$.

Для теории квадратичных форм использование подобных матриц означает следующее. Зададим переход от старых переменных $[Y]$ к новым переменным $[X]$ с помощью преобразования вращения/поворота согласно:

$$[X] = [P][Y], \quad [Y] = [P]^{-1}[X]. \quad (16)$$

Представление квадратичной формы (11) в новых координатах (16) после несложных преобразований примет следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= [Y]^T[A][Y] = ([P]^{-1}[X])^T[A]([P]^{-1}[X]) = \\ &= [X]^T([P][A][P]^T)[X] = [X]^T[A]_{\text{sim}}[X],\end{aligned}\quad (17)$$

где введено обозначение для подобной матрицы $[A]_{\text{sim}} = [P][A][P]^T$.

Все вышесказанное приводит нас к, очевидному, утверждению [1, 2], что всякая симметричная матрица $[A]$ алгебраической размерности $N \times N$ может быть представлена в виде:

$$[A] = [P]^T[A]_{\text{diag}}[P], \quad (18)$$

где $[A]_{\text{diag}} = \text{diag}[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N] = -$ диагональная матрица; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ — собственные числа симметричной матрицы $[A]$; $[P]$ ($[P]^{-1} = [P]^T$) — матрица поворота (изометрическая/ортогональная).

Следует отметить, что если матрица $[A]$ является матрицей квадратичной формы $\mathcal{U}$, тогда диагональные элементы матрицы $[A]_{\text{diag}}$, кроме того, являются коэффициентами канонической формы, представленной в новых формальных переменных ($[X] = [P][Y]$):

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\text{diag}} = [X]^T[A]_{\text{diag}}[X] = \sum_{s=1}^{18} \alpha_j X_j^2. \quad (19)$$

Представление (18) можно преобразовать к виду:

$$[A][P]^T = [P]^T[A]_{\text{diag}}, \quad (20)$$

Если выписать систему равенств (20) по столбцам, то окажется, что столбец с индексом i матрицы $[P]^T$ является собственным вектором, соответствующим собственному числу α_i .

Умножив равенство (18) слева и справа на изометрические матрицы $[P]$ и $[P]^T$, соответственно, получим

$$[A]_{\text{diag}} = [P][A][P]^T. \quad (21)$$

Суть метода Якоби состоит в построении такой композиции плоских вращений с помощью изометрических матриц $[P_1]$, ..., $[P_n]$, так чтобы выполнялось условие

$$[\Pi_n][A][\Pi_n]^T \xrightarrow{n \rightarrow \infty} [A]_{\text{diag}}, \quad (22)$$

где преобразования подобия Π_n , являющиеся композицией последовательных поворотов P_1 , ..., P_n определяется согласно

$$[\Pi_n] = [P_n] \cdot \dots \cdot [P_1] = [P_n] \dots [P_1]. \quad (23)$$

Введем в рассмотрение матрицу $[P^{kl}](\theta)$ с элементами p_{ij} , определяющимися согласно правилам:

$$p_{ij} = \begin{cases} p_{kk}(\theta) = p_{ll}(\theta) = \cos \theta, \\ p_{kl}(\theta) = -p_{lk}(\theta) = \sin \theta, \\ p_{ii} = 1, \text{ при } i \neq k, i \neq l, \\ p_{ij} = 0, \text{ в остальных случаях,} \end{cases} \quad (24)$$

или в матричном представлении

$$[P^{kl}](\theta) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cos \theta & \cdots & \sin \theta & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -\sin \theta & \cdots & \cos \theta & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Очевидно, что матрица $[P^{kl}](\theta)$ является изометрической и осуществляет поворот в плоскости $Y_k Y_l$ на угол θ . Нетрудно вычислить угол θ , такой чтобы после преобразования подобия $[P^{kl}](\theta)$ на симметричную матрицу $[A]$ согласно (18) ее элементы a_{kl} и a_{lk} стали бы равны нулю.

В результате несложных вычислений получим уравнение для определения угла θ [1]:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2a_{kl}}{a_{kk} - a_{ll}}. \quad (26)$$

Важно отметить, что угол θ определяет угол наклона к горизонту главной оси, соответствующей наибольшему собственному значению. Кроме того, равенство (26) определяет двустороннее ограничение на угол θ :

$$-\pi \leq 4\theta \leq \pi. \quad (27)$$

Причем равенство в (27) достигается только при условии $a_{kk} = a_{ll}$, т.е.

$$|\theta| = \frac{\pi}{4} \text{ при } a_{kk} = a_{ll}. \quad (28)$$

В расчетах удобно использовать следующие формулы, следующие из (26):

$$\tau = \operatorname{ctg} 2\theta, \quad t = \frac{\operatorname{sgn}(\tau)}{|\tau| + \sqrt{1 + \tau^2}}, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad \sin \theta = t \cos \theta. \quad (29)$$

Перейдем к пошаговой реализации метода последовательных изометрических преобразований. Будем объединять в один шаг повороты на один и тот же угол относительно не связанных пар матричных индексов.

Шаг 1. В матрице $[A]$ присутствуют несколько пар диагональных элементов, которые удовлетворяют условию (28):

$$a_{\underline{1}\underline{1}} = a_{\underline{2}\underline{2}} = a_{\underline{3}\underline{3}}, \quad a_{\underline{7}\underline{7}} = a_{\underline{8}\underline{8}} = a_{\underline{9}\underline{9}}. \quad (30)$$

Из двух указанных наборов можно выбрать только два независимых преобразования подобия. Произведем поворот на угол $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ в плоскостях Y_1Y_2 и $Y_{11}Y_{12}$. Элементы матрицы $[P_1]$ такого преобразования примут вид:

$$p_{ij}^{(1)} = \begin{cases} p_{11}^{(1)} = p_{22}^{(1)} = p_{12}^{(1)} = p_{1010}^{(1)} = p_{1111}^{(1)} = p_{1011}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ p_{21}^{(1)} = p_{1110}^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ p_{ii}^{(1)} = 1, \text{ при } i \neq 1, i \neq 2, i \neq 10, i \neq 11, \\ p_{ij}^{(1)} = 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \quad (31)$$

Результат преобразования подобия (31) получим по формуле:

$$[A_1] = [P_1][A][P_1]^T. \quad (32)$$

Причем, в матрице $[A]$ изменятся только следующие блочные элементы:

$$[A_{11}] = \begin{bmatrix} 2A_1 + A_3 & 0 & \sqrt{2}A_1 \\ 0 & A_3 & 0 \\ \sqrt{2}A_1 & 0 & A_1 + A_3 \end{bmatrix}, \quad [A_{44}] = \begin{bmatrix} 2A_2 + A_4 & 0 & \sqrt{2}A_2 \\ 0 & A_4 & 0 \\ \sqrt{2}A_2 & 0 & A_2 + A_4 \end{bmatrix}, \quad (33)$$

$$[A_{14}] = [A_{41}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2A_7 + A_8 & 0 & \sqrt{2}A_7 \\ 0 & A_8 & 0 \\ \sqrt{2}A_7 & 0 & A_7 + A_8 \end{bmatrix}.$$

Шаг 2. Выполним поворот на угол θ_2 в плоскостях Y_1Y_3 и $Y_{10}Y_{12}$. Для определения матрицы $[P_2]$, в соответствии с (26) и (29), вычислим необходимые соотношения:

$$\operatorname{tg} 2\theta_2 = \tau_2^{-1} = 2\sqrt{2}, \quad t_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \theta_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \sin \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (34)$$

Тогда элементы матрицы вращения $[P_2]$ будут вычисляться согласно:

$$p_{ij}^{(2)} = \begin{cases} p_{11}^{(2)} = p_{33}^{(2)} = p_{1010}^{(2)} = p_{1212}^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \\ p_{13}^{(2)} = p_{1012}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ p_{31}^{(2)} = p_{1210}^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ p_{ii}^{(2)} = 1, \text{ при } i \neq 1, i \neq 2, i \neq 10, i \neq 12, \\ p_{ij}^{(2)} = 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \quad (35)$$

В результате следующего преобразования подобия

$$[A_2] = [P_2][A_1][P_2]^T, \quad (36)$$

изменяться те же самые блоки, что и на первом шаге алгоритма по формулам:

$$\begin{aligned} [A_{11}] &= \text{diag}[3A_1 + \frac{A}{3}, \frac{A}{3}, \frac{A}{3}], \quad [A_{44}] = \text{diag}[3A_2 + \frac{A}{4}, \frac{A}{4}, \frac{A}{4}], \\ [A_{14}] &= [A_{41}] = \frac{1}{2} \text{diag}[3A_7 + \frac{A}{8}, \frac{A}{8}, \frac{A}{8}]. \end{aligned} \quad (37)$$

После выполнения первого и второго многомерных поворотов получаем трех-диагональную матрицу $[A_2]$.

Шаг 3. Вычислим угол поворота θ_3 в плоскости $Y_1 Y_{10}$ для определения матрицы $[P_3]$, в соответствии с (26) и (29), достаточно вычислить τ_3 :

$$\tau_3 = \text{ctg} 2\theta_3 = \frac{3A_1 - 3A_2 + \frac{A}{3} - \frac{A}{4}}{\frac{A}{7} + \frac{A}{8}}. \quad (38)$$

Тогда элементы матрицы преобразования подобия $[P_3]$ будут вычисляться согласно:

$$p_{ij}^{(3)} = \begin{cases} p_{11}^{(3)} = p_{1010}^{(3)} = \cos \theta_3, \\ p_{110}^{(3)} = \sin \theta_3, \\ p_{101}^{(3)} = -\sin \theta_3, \\ p_{ii}^{(3)} = 1, \text{ при } i \neq 1, i \neq 10, \\ p_{ij}^{(3)} = 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \quad (39)$$

В результате следующего преобразования подобия:

$$[A_3] = [P_3][A_2][P_3]^T, \quad (40)$$

изменяться те же самые блоки, что и на первом шаге алгоритма по формулам:

$$\begin{aligned} [A_{11}] &= \text{diag}[3A_1 + 3A_2 + \frac{A}{3} + \frac{A}{4} + \sqrt{(3A_1 - 3A_2 + \frac{A}{3} - \frac{A}{4})^2 + (3A_7 + \frac{A}{8})^2}, \frac{A}{3}, \frac{A}{3}], \\ [A_{44}] &= \text{diag}[3A_1 + 3A_2 + \frac{A}{3} + \frac{A}{4} - \sqrt{(3A_1 - 3A_2 + \frac{A}{3} - \frac{A}{4})^2 + (3A_7 + \frac{A}{8})^2}, \frac{A}{4}, \frac{A}{4}], \\ [A_{14}] &= [A_{41}] = \frac{1}{2} \text{diag}[0, \frac{A}{8}, \frac{A}{8}]. \end{aligned} \quad (41)$$

Шаг 4. В силу полученной на предыдущем шаге матрицы квадратичной формы можно объединить повороты в плоскостях $Y_2 Y_{11}$, $Y_3 Y_{12}$, $Y_4 Y_{13}$, $Y_5 Y_{14}$, $Y_6 Y_{15}$. При этом, угол поворота θ_4 определяется из соотношения:

$$\tau_4 = \text{ctg} 2\theta_4 = \frac{3A_1 - 3A_2 + \frac{A}{3} - \frac{A}{4}}{\frac{A}{7} + \frac{A}{8}}. \quad (42)$$

Элементы матрицы преобразования подобия $[P_3]$ на текущем шаге алгоритма будут вычисляться согласно:

$$p_{ij}^{(4)} = \begin{cases} p_{22}^{(4)} = p_{33}^{(4)} = p_{44}^{(4)} = p_{55}^{(4)} = p_{66}^{(4)} = \cos \theta_4, \\ p_{11\ 11}^{(4)} = p_{12\ 12}^{(4)} = p_{13\ 13}^{(4)} = p_{14\ 14}^{(4)} = p_{15\ 15}^{(4)} = \cos \theta_4, \\ p_{21}^{(4)} = p_{32}^{(4)} = p_{43}^{(4)} = p_{54}^{(4)} = p_{65}^{(4)} = \sin \theta_4, \\ p_{11\ 2}^{(4)} = p_{12\ 3}^{(4)} = p_{13\ 4}^{(4)} = p_{14\ 5}^{(4)} = p_{15\ 6}^{(4)} = -\sin \theta_4, \\ p_{ii}^{(4)} = 1, \text{ при } i \neq 2, \dots, 6, i \neq 11, \dots, 15, \\ p_{ij}^{(4)} = 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \quad (43)$$

В результате следующего преобразования подобия

$$[A_4] = [P_4][A_3][P_4]^T, \quad (44)$$

получим

$$\begin{aligned} [A_{11}] &= \text{diag}[3A_1 + 3A_2 + A_3 + A_4 + \sqrt{(3A_1 - 3A_2 + A_3 - A_4)^2 + (3A_7 + A_8)^2}, \\ &\quad \frac{1}{2}(A_3 + A_4 + \sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2}), \frac{1}{2}(A_3 + A_4 + \sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2})], \\ [A_{44}] &= \text{diag}[3A_1 + 3A_2 + A_3 + A_4 - \sqrt{(3A_1 - 3A_2 + A_3 - A_4)^2 + (3A_7 + A_8)^2}, \\ &\quad \frac{1}{2}(A_3 + A_4 - \sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2}), \frac{1}{2}(A_3 + A_4 - \sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2})], \\ [A_{22}] &= (A_3 + A_4 + \sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2}) \text{diag}[1, 1, 1], \\ [A_{55}] &= (A_3 + A_4 - \sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2}) \text{diag}[1, 1, 1], \\ [A_{14}] &= [A_{41}] = [A_{25}] = [A_{52}] = [0]. \end{aligned} \quad (45)$$

Блочные элементы $[A_{33}]$, $[A_{66}]$, $[A_{36}]$, $[A_{63}]$ при этом не изменяются.

Шаг 5. В силу полученной на предыдущем шаге матрицы квадратичной формы можно объединить повороты в плоскостях Y_7Y_{16} , Y_8Y_{17} , Y_9Y_{18} . При этом, угол поворота θ_5 определяется из соотношения:

$$\tau_5 = \text{ctg} 2\theta_5 = \frac{A_5 - A_6}{A_9}. \quad (46)$$

Элементы матрицы преобразования подобия $[P_3]$ на текущем шаге алгоритма будут вычисляться согласно:

$$p_{ij}^{(5)} = \begin{cases} p_{77}^{(5)} = p_{88}^{(5)} = p_{99}^{(5)} = \cos \theta_5, \\ p_{1616}^{(5)} = p_{1717}^{(5)} = p_{1818}^{(5)} = \cos \theta_5, \\ p_{716}^{(5)} = p_{817}^{(5)} = p_{918}^{(5)} = \sin \theta_5, \\ p_{167}^{(5)} = p_{178}^{(5)} = p_{189}^{(5)} = -\sin \theta_4, \\ p_{ii}^{(5)} = 1, \text{ при } i \neq 7, 8, 9, i \neq 16, 17, 18, \\ p_{ij}^{(5)} = 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \quad (47)$$

В результате следующего преобразования подобия

$$[A_5] = [P_5][A_4][P_5]^T, \quad (48)$$

получим

$$\begin{aligned} [A_{11}] &= \text{diag}[3A_1 + 3A_2 + \frac{A}{3} + \frac{A}{4} + \sqrt{(3A_1 - 3A_2 + \frac{A}{3} - \frac{A}{4})^2 + (3\frac{A}{7} + \frac{A}{8})^2}, \\ &\quad \frac{1}{2}(\frac{A}{3} + \frac{A}{4} + \sqrt{(\frac{A}{3} - \frac{A}{4})^2 + \frac{A^2}{8}}), \frac{1}{2}(\frac{A}{3} + \frac{A}{4} + \sqrt{(\frac{A}{3} - \frac{A}{4})^2 + \frac{A^2}{8}})], \\ [A_{44}] &= \text{diag}[3A_1 + 3A_2 + \frac{A}{3} + \frac{A}{4} - \sqrt{(3A_1 - 3A_2 + \frac{A}{3} - \frac{A}{4})^2 + (3\frac{A}{7} + \frac{A}{8})^2}, \\ &\quad \frac{1}{2}(\frac{A}{3} + \frac{A}{4} - \sqrt{(\frac{A}{3} - \frac{A}{4})^2 + \frac{A^2}{8}}), \frac{1}{2}(\frac{A}{3} + \frac{A}{4} - \sqrt{(\frac{A}{3} - \frac{A}{4})^2 + \frac{A^2}{8}})], \\ [A_{22}] &= (\frac{A}{3} + \frac{A}{4} + \sqrt{(\frac{A}{3} - \frac{A}{4})^2 + \frac{A^2}{8}}) \text{diag}[1, 1, 1], \\ [A_{55}] &= (\frac{A}{3} + \frac{A}{4} - \sqrt{(\frac{A}{3} - \frac{A}{4})^2 + \frac{A^2}{8}}) \text{diag}[1, 1, 1], \\ [A_{33}] &= (\frac{A}{5} + \frac{A}{6} + \sqrt{(\frac{A}{5} - \frac{A}{6})^2 + \frac{A^2}{9}}) \text{diag}[1, 1, 1], \\ [A_{66}] &= (\frac{A}{5} + \frac{A}{6} - \sqrt{(\frac{A}{5} - \frac{A}{6})^2 + \frac{A^2}{9}}) \text{diag}[1, 1, 1], \\ [A_{14}] &= [A_{41}] = [A_{25}] = [A_{52}] = [A_{36}] = [A_{63}] = [0]. \end{aligned} \quad (49)$$

В результате выполнения пяти шагов преобразование подобия приводящее матрицу $[A]$ к диагональному виду можно получить согласно формуле:

$$[\Pi_5] = [P_5][P_4][P_3][P_2][P_1]. \quad (50)$$

Матрица канонической квадратичной формы будет определяться преобразованием подобия:

$$[A]_{\text{diag}} = [\Pi_5][A][\Pi_5]^T = [A_5]. \quad (51)$$

Причем переход от старых переменных $[Y]$ к новым переменным $[X]$ осуществляется с помощью изометрического преобразования согласно:

$$[X] = [\Pi_5][Y]. \quad (52)$$

3. Положительная определенность квадратичной энергетической формы. Положительная определенность квадратичной энергетической формы (19) и, тем самым, устойчивость равновесия линейного микрополярного упругого тела [14] обеспечивается следующими очевидными неравенствами

$$\alpha_s > 0 \quad (s = 1, \dots, 18). \quad (53)$$

Система неравенств (53) с учетом кратных собственных чисел примет вид:

$$\begin{cases} A_3 + A_4 > \sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2}, \\ A_3 + A_4 > -\sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2}, \\ A_5 + A_6 > \sqrt{(A_5 - A_6)^2 + A_9^2}, \\ A_5 + A_6 > -\sqrt{(A_5 - A_6)^2 + A_9^2}, \\ 3A_1 + 3A_2 + A_3 + A_4 > \sqrt{(3A_1 - 3A_2 + A_3 - A_4)^2 + (3A_7 + A_8)^2}, \\ 3A_1 + 3A_2 + A_3 + A_4 > -\sqrt{(3A_1 - 3A_2 + A_3 - A_4)^2 + (3A_7 + A_8)^2}. \end{cases} \quad (54)$$

Кроме того, второе, четвертое и шестое неравенства в (54) заведомо выполняются в силу первого, третьего и пятого неравенств. Поэтому систему неравенств (54) можно представить в виде:

$$\begin{cases} A_3 + A_4 > \sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2}, \\ A_5 + A_6 > \sqrt{(A_5 - A_6)^2 + A_9^2}, \\ 3A_1 + 3A_2 + A_3 + A_4 > \sqrt{(3A_1 - 3A_2 + A_3 - A_4)^2 + (3A_7 + A_8)^2}. \end{cases} \quad (55)$$

Избавимся в системе неравенств (55) от радикалов, возведя их в квадрат. Тогда получим неравенства:

$$\begin{aligned} (A_3 + A_4)^2 &> (A_3 - A_4)^2 + A_8^2, \\ (A_5 + A_6)^2 &> (A_5 - A_6)^2 + A_9^2, \\ (3A_1 + 3A_2 + A_3 + A_4)^2 &> (3A_1 - 3A_2 + A_3 - A_4)^2 + (3A_7 + A_8)^2, \end{aligned} \quad (56)$$

которые после несложных преобразований примут вид:

$$\begin{aligned} 4A_3 A_4 &> A_8^2, \\ 4A_5 A_6 &> A_9^2, \\ 4(3A_1 + A_3)(3A_2 + A_4) &> (3A_7 + A_8)^2. \end{aligned} \quad (57)$$

Преобразуем систему неравенств (57) к виду:

$$\begin{aligned} -\frac{C}{I} &< \frac{A}{8} < \frac{C}{I}, \\ -\frac{C}{II} &< \frac{A}{9} < \frac{C}{II}, \\ -\frac{C}{III} &< 3\frac{A}{7} + \frac{A}{8} < \frac{C}{III}. \end{aligned} \quad (58)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \frac{C}{I}^2 &= 4\frac{A}{3}\frac{A}{4} > 0, \\ \frac{C}{II}^2 &= 4\frac{A}{5}\frac{A}{6} > 0, \\ \frac{C}{III}^2 &= 4(3\frac{A}{1} + \frac{A}{3})(3\frac{A}{2} + \frac{A}{4}) > 0, \\ \text{sign}\frac{C}{I} &= \text{sign}\frac{C}{II} = \text{sign}\frac{C}{III} = +1. \end{aligned} \quad (59)$$

Система неравенств (58) может трактоваться как 3 двусторонних неравенства или 6 — односторонних. Очевидно, что левые части неравенств в (59) неотрицательны в силу (57).

Коэффициенты квадратичной формы A ($\alpha = 1, \dots, 9$) в A -представлении энергии деформаций (8) могут быть заменены альтернативными определяющими константами гемитропного микрополярного упругого тела [14]:

$$\begin{aligned} \frac{A}{1} &= G\nu(1 - 2\nu)^{-1}, & \frac{A}{2} &= GL^2c_3, & \frac{A}{3} &= G, \\ \frac{A}{4} &= GL^2, & \frac{A}{5} &= 2Gc_1, & \frac{A}{6} &= GL^2c_2, \\ \frac{A}{7} &= GLc_4, & \frac{A}{8} &= GLc_5, & \frac{A}{9} &= GLc_6, \end{aligned} \quad (60)$$

где G — модуль сдвига упругости; ν — коэффициент Пуассона; L — характеристическая микродлина теории микрополярной упругости; $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ — безразмерные константы.

Тогда, учитывая представления (60) гемитропных механических модулей, неравенства (58) и (59) примут вид:

$$\begin{aligned} -\frac{C}{I} &< GLc_5 < \frac{C}{I}, & \frac{C}{I}^2 &= 4G^2L^2 > 0, \\ -\frac{C}{II} &< GLc_6 < \frac{C}{II}, & \frac{C}{II}^2 &= 8G^2L^2c_1c_2 > 0, \\ -\frac{C}{III} &< GL(3c_4 + c_5) < \frac{C}{III}, & \frac{C}{III}^2 &= 4G^2L^2\frac{1+\nu}{1-2\nu}(1+3c_3) > 0. \end{aligned} \quad (61)$$

После несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} -2 &< c_5 < 2, & c_1c_2 &> 0, \\ -2\sqrt{2c_1c_2} &< c_6 < 2\sqrt{2c_1c_2}, & \frac{1+\nu}{1-2\nu}(1+3c_3) &> 0, \\ -2\sqrt{\frac{1+\nu}{1-2\nu}(1+3c_3)} &< GL(3c_4 + c_5) < 2\sqrt{\frac{1+\nu}{1-2\nu}(1+3c_3)}. \end{aligned} \quad (62)$$

Следует отметить, что система неравенств (61) эквивалентна системе неравенств полученных в работе [26], где рассматривался метод отделения квадратов Лагранжа.

Неравенства устойчивости равновесного состояния для изотропного микрополярного твердого тела, могут быть получены путем редукции неравенств (61) или (62) вследствие предельного перехода: $c_4 \rightarrow 0$, $c_5 \rightarrow 0$, $c_6 \rightarrow 0$. В итоге для изотропной микрополярной упругой среды имеем

$$4G^2L^2 > 0, \quad 8G^2L^2c_1c_2 > 0, \quad 4G^2L^2\frac{1+\nu}{1-2\nu}(1+3c_3) > 0. \quad (63)$$

Откуда, очевидно, возникает возможность снять ограничения на определяющие постоянные G и L , и в результате получить два существенных неравенства:

$$c_1c_2 > 0, \quad \frac{1+\nu}{1-2\nu}(1+3c_3) > 0. \quad (64)$$

Следует подчеркнуть, что последнее неравенство в (64) указывает на существование ауксетиков среди микрополярных твердых тел, а определяющая константа c_3 играет важную роль, аналогичную коэффициенту Пуассона ν , известному из закона упругости Гука, и может быть названа вторым микрополярным коэффициентом Пуассона.

Заключительные замечания и выводы. В настоящем исследовании рассмотрено приведение к каноническому виду (диагонализация) квадратичной энергетической формы гемитропной микрополярной упругой среды методом последовательных плоских поворотов Якоби. Энергия деформации рассматривается как функция, зависящая от несимметричных тензоров деформации и изгиба-кручения, которые трактуются как термодинамические переменные состояния. Кроме того, она может одновременно рассматриваться как потенциал силовых и моментных напряжений. Обобщая результаты исследования, приходим к следующим выводам:

- (1) Получено изометрически инвариантное А-представление квадратичной формы энергии деформации гемитропного микрополярного упругого твердого тела, определяемое 9 изоэнтропийными (адиабатическими) механическими модулями.
- (2) Для оперирования с А-представлением введены формальные переменные $Y_1, \dots, Y_{18}$.
- (3) Квадратичная форма энергии деформации приводится к сумме квадратов методом последовательных поворотов Якоби. Для диагонализации матрицы квадратичной формы оказалось достаточно 5 шагов алгоритма.
- (4) В результате применения метода Якоби на главной диагонали итоговой матрицы квадратичной формы располагаются ее собственные числа, а итоговая матрица поворота определяет переход к новым координатам.
- (5) Найдены ограничения на определяющие механические модули, обеспечивающие таким образом положительную определенность квадратичной

формы энергии деформации и устойчивость равновесия микрополярного упругого твердого тела.

- (6) Показана эквивалентность систем неравенств полученных методом Лагранжа и методом Якоби. Характерные отличия двух указанных методов сведем в Таблицу.

Метод Лагранжа	Метод Якоби
Невырожденное преобразование	Ортогональное/изометрическое преобразование, за вычетом зеркальных отражений, т.е. поворот
Диагональная матрица	Диагональная матрица
Диагональные элементы матрицы квадратичной формы — обязательно собственные значения	Диагональные элементы матрицы квадратичной формы — собственные значения
Изменяет метрику пространства	Сохраняет метрику пространства
Проще для ручного счета, но не выдает на выходе собственные значения	Сложен для реализации, но на выходе получаются собственные значения
Только целые рациональные операции	В ходе вычислений возникают иррациональности, требуется извлечение квадратных радикалов

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 124013000674-0).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number 124013000674-0).

ЛИТЕРАТУРА

1. Wilkinson J. The algebraic eigenvalue problem. Т. 662. – Oxford : Clarendon Press, 1965.
2. Бахвалов Н. Численные методы (анализ, алгебра, дифференциальные уравнения). – Москва : Наука, 1975.
3. Johnson C., Horn R. Matrix analysis. – Cambridge : Cambridge university press, 1985.

4. Jacobi C. G. Ueber eine neue Auflösungsart der bei der Methode der kleinsten Quadrate vorkommenden lineären Gleichungen // *Astronomische Nachrichten*. – 1845. – Т. 22, № 20. – С. 297–306.
5. Jacobi C. Über ein leichtes Verfahren die in der Theorie der Säcularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen*). // *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. – 1846. – Т. 30. – С. 51–94. – DOI: doi:10.1515/crll.1846.30.51.
6. Henrici P. On the speed of convergence of cyclic and quasicyclic Jacobi methods for computing eigenvalues of Hermitian matrices // *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*. – 1958. – Т. 6, № 2. – С. 144–162.
7. Wilkinson J. Note on the quadratic convergence of the cyclic Jacobi process // *Numerische Mathematik*. – 1962. – Т. 4, № 1. – С. 296–300.
8. Cosserat E. M. P., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. – Paris : A. Hermann et fils, 1909. – VI+226.
9. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. – Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. – viii+383.
10. Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // *Acta Mechanica*. – 1966. – Т. 2. – С. 48–69. – DOI: 10.1007/BF01176729.
11. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // *Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964*. – Springer. 1966. – С. 153–158. – DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
12. Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // *Mechanics of Generalized Continua* / под ред. E. Kröner. – Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. – С. 109–113.
13. Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*. – Berlin : Springer Science & Business Media, 1986. – xv+345. – (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics).
14. Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. – 2018. – Т. 22, вып. 3. – С. 504–517. – DOI: 10.14498/vsgtu1635.
15. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. – 2022. – 3(53). – С. 86–100. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
16. Besdo D. A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // *Acta Mechanica*. – 1974. – Т. 20. – С. 105–131.
17. Gibbs J. On the equilibrium of heterogeneous substances // *Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences*. – 1875. – Т. 3. – 108–248 and 343–524.
18. Радаев Ю., Мурашкин Е. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // *Проблемы прочности и пластичности*. – 2020. – Т. 82, № 4. – С. 399–412. – DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
19. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. – 2022. – 4(54). – С. 108–115. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009.

20. Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. – 2023. – 1(55). – С. 110–121. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
21. Murashkin E. V., Radayev Y. N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2023. – Т. 44, № 6. – С. 2440–2449. – DOI: 10.1134/S1995080223060392.
22. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2024. – Т. 45, № 5. – С. 2378–2390. – DOI: 10.1134/S1995080224602480.
23. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Cubic Approximation of Stress Potential for a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2025. – Т. 46, № 5. – С. 2391–2400. – DOI: 10.1134/S1995080225606514.
24. Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. – М., Л. : ГИТТЛ, 1948. – 408 с. – [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.]
25. Спенсер Э. Теория инвариантов. – Мир, 1974.
26. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Диагонализация энергетической формы гемитропного тела и система определяющих неравенств. Метод отделения квадратов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. – Самара, 2026. – Т. 30, ??

REFERENCES

1. *Wilkinson J.* The algebraic eigenvalue problem. Vol. 662. – Oxford : Clarendon Press, 1965.
2. *Bakhvalov N.* Chislennyye metody (analiz, algebra, differentsialnye uravneniya). – Moskva : Nauka, 1975.
3. *Johnson C., Horn R.* Matrix analysis. – Cambridge : Cambridge university press, 1985.
4. *Jacobi C. G.* Ueber eine neue Auflösungsart der bei der Methode der kleinsten Quadrate vorkommenden lineären Gleichungen // Astronomische Nachrichten. – 1845. – Vol. 22, no. 20. – P. 297–306.
5. *Jacobi C.* Über ein leichtes Verfahren die in der Theorie der Säcularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen*). // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1846. – Vol. 30. – P. 51–94. – DOI: doi:10.1515/crll.1846.30.51.
6. *Henrici P.* On the speed of convergence of cyclic and quasicyclic Jacobi methods for computing eigenvalues of Hermitian matrices // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. – 1958. – Vol. 6, no. 2. – P. 144–162.
7. *Wilkinson J.* Note on the quadratic convergence of the cyclic Jacobi process // Numerische Mathematik. – 1962. – Vol. 4, no. 1. – P. 296–300.
8. *Cosserat E. M. P., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. – Paris : A. Hermann et fils, 1909. – VI+226.
9. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. – Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. – viii+383.

10. *Neuber H.* Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // *Acta Mechanica*. – 1966. – Vol. 2. – P. 48–69. – DOI: 10.1007/BF01176729.
11. *Neuber H.* On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // *Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964*. – Springer. 1966. – P. 153–158. – DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
12. *Neuber H.* On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // *Mechanics of Generalized Continua* / ed. by E. Kröner. – Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. – P. 109–113.
13. *Dyzlewicz J.* Micropolar Theory of Elasticity. – Berlin : Springer Science & Business Media, 1986. – xv+345. – (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics).
14. *Radaev Y. N.* Pravilo mnozhitel'ey v kovariantnykh formulirovках mikropolyarnykh teoriy mekhaniki kontinuum // *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki*. – 2018. – Vol. 22, iss. 3. – P. 504–517. – DOI: 10.14498/vsgtu1635. – (in Russian).
15. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* O dvukh osnovnykh estestvennykh formakh potentsiala asimmetrichnykh tenzorov silovykh i momentnykh napryazheniy v mekhanike gemitropnykh tel // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya mekhanika predelnogo sostoyaniya*. – 2022. – 3(53). – P. 86–100. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010. – (in Russian).
16. *Besdo D.* A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // *Acta Mechanica*. – 1974. – Vol. 20. – P. 105–131.
17. *Gibbs J.* On the equilibrium of heterogeneous substances // *Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences*. – 1875. – Vol. 3. – 108–248 and 343–524.
18. *Radaev Y., Murashkin E.* Psevdotenzornaya formulirovka mekhaniki gemitropnykh mikropolyarnykh sred // *Problemy prochnosti i plastichnosti*. – 2020. – Vol. 82, no. 4. – P. 399–412. – DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
19. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* Privedenie estestvennykh form gemitropnykh energeticheskikh potentsialov k konventsionalnym // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya mekhanika predelnogo sostoyaniya*. – 2022. – 4(54). – P. 108–115. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009. – (in Russian).
20. *Murashkin E. V.* O svyazi mikropolyarnykh opredelyayushchikh parametrov termodinamicheskikh potentsialov sostoyaniya // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya mekhanika predelnogo sostoyaniya*. – 2023. – 1(55). – P. 110–121. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012. – (in Russian).
21. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – Russian Federation, 2023. – Vol. 44, no. 6. – P. 2440–2449. – DOI: 10.1134/s1995080223060392.

22. *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2024. – Vol. 45, no. 5. – P. 2378–2390. – DOI: 10.1134/S1995080224602480.
23. *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* Cubic Approximation of Stress Potential for a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2025. – Vol. 46, no. 5. – P. 2391–2400. – DOI: 10.1134/S1995080225606514.
24. *Gurevich G. B.* Osnovy teorii algebraicheskikh invariantov. – M., L. : GITTL, 1948. – 408 p. – [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.]
25. *Spenser E.* Teoriya invariantov. – Mir, 1974.
26. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* Diagonalizatsiya energeticheskoy formy gemitropnogo tela i sistema opredelyayushchikh neravenstv. Metod otdeleniya kvadratov // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki. – Samara, 2026. – Vol. 30, ?? – (in Russian).

Л. А. Максимова

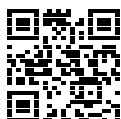
ПАМЯТИ РОСТИСЛАВА ИВАНОВИЧА НЕПЕРШИНА (1938–2026)

Российский университет транспорта (МИИТ), Москва, Россия

Аннотация. Статья посвящена доктору технических наук, профессору Непершину Ростиславу Ивановичу. В настоящей библиографической заметке приводятся биографические сведения об этом крупном ученом-механике.

Ключевые слова: механика предельного состояния, пластичность, персоналии.

Максимова Людмила Анатольевна, доктор физико-математических наук; профессор кафедры высшей математики и естественных наук; e-mail: maximova_ng@mail.ru



для цитирования: Максимова Л. А. Памяти Ростислава Ивановича Непершина (1938–2026) // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 180–183. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.011. EDN: SRXHUF

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

L. A. Maximova

IN MEMORY OF ROSTISLAV IVANOVICH NEPERSHIN (1938–2026)

Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia

Abstract. This article is dedicated to Doctor of Technical Sciences, Professor Rostislav Ivanovich Nepershin. This bibliographic note provides biographical information about this leading mechanical scientist.

Keywords: limit state mechanics, plasticity, personalities.

Lyudmila A. Maximova, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; e-mail: maximova_ng@mail.ru



to cite this article: Maximova L. A. In memory of Rostislav Ivanovich Nepershin (1938–2026) // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 180–183. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.011

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Ростислав Иванович Непершин принадлежит к числу выдающихся крупнейших ученых России в области технологии обработки металлов. Ему принадлежат замечательные результаты в области пространственной теории предельного состояния тел и конструкций, получены результаты, вошедшие в золотой фонд науки прикладной теории пластичности.

Р.И. Непершин родился 28 июля 1938 года в городе Москва. Высшее образование получил в Московском государственном техническом университете «Станкин» (1962), что заложило основу всей его научной деятельности. Более тридцати лет он работал в лаборатории института машиноведения АН СССР под руководством выдающегося специалиста Александра Дмитриевича Томленова. С 2003 года Р.И. Непершин возвращается в «Альма матер» – «Станкин» профессором кафедры Системы пластического деформирования. Несколько лет Ростислав Иванович (по приглашению) работал в лаборатории профессора Ричмонда в США.

Непершин Р.И. автор около 150 научных работ. Его монографии слали библиографической редкостью. Они опубликованы не только в отечественных издательствах, но и международных издательствах. Его ученики (кандидаты и доктора наук) продолжают его исследования.

Непершин Р. И. имеет несколько патентов. Его работы посвящены контактному и технологическим задачам прикладной теории пластичности, теплопередачи в системе инструмент-заготовка в процессах штамповки, листовой прокатки и в машинах непрерывного литья заготовок. Ростислав Иванович был фундаментальным ученым, он занимался моделированием пластического течения

в процессахковки, прокатки, объемной и листовой штамповки, оптимальным проектированием волокнистых композитов.

Ростислав Иванович принимал активное участие в работе диссертационных советов: по специальности 05.03.05 «Технологии и машины обработки давлением» при МГТУ «Станкин», по специальности 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела» при ЧГПУ им. И.Я. Яковлева (Чебоксары). Ростислав Иванович был членом Российского Национального Комитета по теоретической и прикладной механики РАН. Неоднократно был приглашенным спикером на международных конференциях.

Ростислав Иванович отличался скромностью, педантичностью и в работе, и в жизни. Он был спокойным и в тоже время общительным собеседником. Кроме работы он много путешествовал, вел здоровый образ жизни. Он был отличным отцом и дедушкой. По любым вопросам истину доносил своим примером.

Р.И. Непершин пользовался известностью и признанием среди широких кругов научно-технической общественности. Он многократно был рецензентом диссертационных работ, активно участвовал в работе диссертационных советов. Слушать его и общаться с ним было огромное удовольствие. Я много нового почерпнула из общих бесед с ним и с академиком А.Ю. Ишлинским, профессором Д.Д. Ивлевым и другими. Он также выступал на обсуждении при защите моей докторской диссертации и как всегда его выступление было великолепно.

Ростислав Иванович Непершин принадлежит к числу ученых, определивших развитие прикладной теории пластичности. Скончался Р.И. Непершин 09 февраля 2026 года на 88-году жизни. Имя Ростислава Ивановича Непершина – в ряду лучших представителей мировой науки прикладной пластичности.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. 100%.

Конфликт интересов. Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Автор заявляет об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. 100%.

Competing interests. The author declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

А. Н. Богданов¹, А. Г. Петров²

О НАУЧНОМ НАСЛЕДИИ ОЛЕГА ВАСИЛЬЕВИЧА ВОИНОВА

¹Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия

²Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Аннотация. Олег Васильевич Воинов (1944–2024) принадлежит к знаменитому поколению советских ученых-механиков. Его отношение к работе отличала глубина разработки научных проблем, тщательность анализа полученных результатов. Им был получен ряд пионерских научных результатов в разных областях механики жидкости и газа. Широкую известность в мировой научной литературе получила статья «Гидродинамика смачивания», опубликованная в 1976 году в журнале "Известия АН СССР. Механика жидкости и газа" и к настоящему времени имеющая более 1350 ссылок в Шпрингере, (каждый год это число увеличивается примерно на 100 ссылок). В указанной работе для объяснения опытов, проведенных химиками, автор первым применил методы механики сплошной среды. Многие результаты О.В. Воинова имеют большое прикладное значение. Публикуемые материалы ярко характеризуют и советское университетское образование 1960-х годов.

Ключевые слова: О.В. Воинов, гидродинамика, метод граничных элементов, многофазные среды.

Богданов Андрей Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник НИИ механики; e-mail: bogdanov@imec.msu.ru; <https://orcid.org/0000-0001-9541-0579>

Петров Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории механики систем; e-mail: petrov@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0618-2285>; AuthorID: 14501



для цитирования: Богданов А. Н., Петров А. Г. О научном наследии Олега Васильевича Воинова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 184–207. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.009. EDN: OZNODB

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

A. N. Bogdanov¹, A. G. Petrov²

ON THE SCIENTIFIC LEGACY OF OLEG VASILYEVICH VOINOV

¹Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

²Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. Oleg Vasilyevich Voinov (1944–2024) belongs to a renowned generation of Soviet mechanical engineers. His approach to his work was distinguished by the depth of his research into scientific problems and the meticulous analysis of his results. He obtained a number of pioneering scientific results in various fields of fluid and gas mechanics. His article "Wetting Hydrodynamics," published in 1976 in the journal "Izvestiya AN SSSR: Mechanics of Liquids and Gases," gained widespread recognition in the international scientific literature. It currently has over 1,350 citations in Springer (this number increases by approximately 100 citations each year). In this work, the author was the first to apply methods of continuum mechanics to explain experiments conducted by chemists. Many of O.V. Voinov's results have significant practical application. The published materials vividly characterize Soviet university education in the 1960s.

Keywords: O.V. Voinov, hydrodynamics, boundary element method, multiphase media.

Andrey N. Bogdanov, Cand. Sci. (Phys. & Math.), Associate Professor, Leading Research Fellow, Research Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University; e-mail: bogdanov@imec.msu.ru;

<https://orcid.org/0000-0001-9541-0579>

Alexander G. Petrov, Dr. Sci. (Phys. & Math.), Professor, Chief Research Fellow, Laboratory of Mechanics of Systems; e-mail: petrov@ipmnet.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-0618-2285>; AuthorID: 14501



to cite this article: Bogdanov A. N., Petrov A. G. On the scientific legacy of Oleg Vasilyevich Voinov // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 184–207. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.009

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Олег Васильевич родился в Москве в семье инженера¹. Отец, Василий Иванович Войнов, состоялся в профессии, был автором ряда авторских свидетельств еще с довоенных времен, в том числе «Башмак металлических колонн» (1933), «Способ соединения металлических конструкций» (1934), «Перегрузочный мост с ездой по низу» (1944, в соавторстве с ведущим советским специалистом в области строительной механики и теории металлических конструкций Николаем Прокофьевичем Мельниковым), «Монтажный стык неразрезных балок» (1951), «Эстакада» (1955), а также некоторых других, неподлежащих опубликованию (секретных). Олег гордился отцом, рассказывал об его участии в создании организации – флагмана отечественной авиационной техники – ЦАГИ имени проф. Н.Е. Жуковского, сотрудничестве с самим С.А. Чаплыгиным. К несчастью Войнов-старший рано ушел из жизни сына, тогда еще школьника, утонув во время купания в Черном море 22 августа 1960 года. Мама, Вера Ивановна (1903–1990), получила гимназическое образование, свободно владела французским языком, работала экономистом, однако еще в период ученичества младшего сына уже не могла трудиться по состоянию здоровья.

Старший брат Олега, Владимир (1940–2012) после школы поступил на физический факультет МГУ. Вероятно, под его влиянием Олег также решил получить профессию ученого-физика. Впрочем, его школьные оценки были отличными только по естественным (десяти включенным в аттестат о среднем образовании) предметам и лишь хорошими – по (шести) гуманитарным. Школьником он посещал математический кружок, ряд лет был его старостой, а также участвовал в математических олимпиадах. Однако при поступлении на физический факультет МГУ его постигла неудача – он получил низкую оценку на

¹Архив МГУ. Фонд № 2. Опись № 5л. Ед. хр. 192. Коробка № 13.

устном экзамене, не смог отстоять более высокую на апелляции. Тогда он подал документы на отделение механики механико-математического факультета МГУ и успешно сдал туда вступительные экзамены в том же, 1961, году. Его письменная работа по математике получила оценку хорошо, устный экзамен по математике он сдал на отлично, физику – на отлично, иностранный язык – на удовлетворительно. Его сочинение на тему «Мы рождены, чтоб сказку сделать былью», и с эпиграфом «Сегодня мы не на параде, мы к коммунизму на пути», с первым предложением – «В какое удивительное время мы живем!» также получило только удовлетворительную оценку – экзаменатором было указано: «тема раскрыта правильно, достаточно полно, содержание изложено логично, убедительно», но в работе имелись ошибки, и хотя их было всего три (!): слово «Программа» (имелась в виду Программа КПСС) Олег написал с маленькой буквы и ни к месту поставил две запятые – рука экзаменатора дрогнула, и первоначальная оценка хорошо была исправлена на удовлетворительно... Впрочем, набранных баллов оказалось вполне достаточно для зачисления в студенты.

В начале обучения Олега Воинова в университете материальные условия их семьи из двух студентов и пенсионера были очень скромными, и он поставил себе задачу учиться на отлично, на повышенную стипендию. Не сразу (была даже и двойка по математическому анализу за второй семестр, пересданная на тройку), но к третьему семестру он своей цели достиг, даже на отлично сдав в этот раз экзамен самой Зое Михайловне Кишкиной²(!). Теоретическую механику за 5-й семестр он на отлично сдал весьма строгому экзаменатору – Л.Н. Сretenскому (вероятно, Леонид Николаевич не сразу убедился в знаниях экзаменуемого – первоначально поставленную оценку хорошо он потом собственноручно переправил на отлично, сопроводив комментарием – исправленному верить). С третьего курса Олег получал повышенную стипендию (тогда, в 1964 году, это было 56 рублей 25 копеек).

Студентом он был романтиком, дважды ездил на целину, был командиром студенческих стройотрядов. Характеризовался как способный, активно участвующий в учебном процессе студент: «активно посещает спецсеминар», «сделал несколько интересных докладов», «с большим интересом и упорством относится к изучению своей специальности», вместе с тем – «очень активно участвует в работе семинаров по общественным наукам, выступления на этих семинарах продуманы и интересны», при этом – «принципиален во всех вопросах». Как

²И.В. Новожилов: «С благоговейным трепетом наше поколение мехматчиков пятидесятых годов вспоминает Зою Михайловну Кишкину и Наталию Алексеевну Айзенштадт. Они вели упражнения по матанализу на первых двух курсах. Любили нас и драли по семь шкур. Десяносто интегралов за одно домашнее задание – это Вам не сочинение на вольную тему. Как новобранца делает солдатом старшина, так и наше поколение сделали людьми незабвенные Зоя Михайловна и Наталья Алексеевна».

вспоминает одноклассник Олега В.В. Прокофьев, в учебе Воинову было присуще необыкновенное упорство, так, при выполнении задачи по физмехпрактикуму легендарный преподаватель Л.А. Шенявский³ задал им двоим вопрос об определении интегральной излучающей способности твердого тела. Получив два разных ответа, Лев Александрович порекомендовал им, посоветовавшись, выработать общее мнение и сообщить его ему. Окажется оно правильным – обоим зачет, нет – не обессудьте. В последовавшем выяснении существа Олег защищал свое мнение упорно, даже очень упорно, но все же истину установить удалось (кое в чем он все же уступил), зачет получили.

Отмечалась учебной частью и хорошая спортивная форма Олега.

Первым научным руководителем О.В. Воинова на 3-м курсе в 1963 году стал Г.Г. Черный, тогда чл.-корр АН СССР. Темой первой курсовой работы Олега стало исследование ползущих движений, рецензентом по выполнению оно было оценено на отлично. На следующем курсе Воинов занялся диффузионным разделением двухфазных потоков. Рецензировавший выполненную работу С.А. Регирер рекомендовал продолжить дальнейшие исследования по этой теме, которую квалифицировал как представляющую большой теоретический и практический интерес, но оценивший выполненную работу лишь на хорошо. Научный руководитель с этой оценкой согласился.

В 1965 году О.В. Воинов перешел на открывшуюся 1 сентября 1964 года на факультете новую кафедру химической механики⁴ к новому научному руководителю – В.В. Толмачеву. Производственную практику проходил в лаборатории новых процессов электробурения ЦКТБЭ (без зачисления в штат и начисления зарплаты).

Как студент-отличник учебы уже в феврале 1966 года Воинов получил рекомендацию в аспирантуру. Его дипломная работа «Применение диаграммного метода к изучению стационарной изотропной турбулентности» получила отличную оценку. Отзыв на нее научного руководителя, В.В. Толмачева, был краток – семь неполных строк («получен ряд интересных результатов»). Обстоятельный положительный отзыв на дипломный проект пришел из Института электрохимии («проявил себя способным математиком», «Работа выполненная им весьма трудоемка и технически сложна», «Дипломник нашел способ вычисления весьма сложных асимптотических интегралов»).

В 1966 году Олег Воинов с красным дипломом окончил мехмат по кафедре химической механики, лишь две оценки из 23 в дипломе были не отличными – высшая алгебра и та самая курсовая на 4-м курсе.⁵

³«Тщедушный маленький физик, у которого, казалось, ноги-спички растут прямо из спины, обладал железной волей и стойкими педагогическими принципами». Владимир Попов Этажи МГУ // «День и ночь». 2006. № 11.

⁴Механика в Московском университете / Под ред. И.А. Тюлиной, Н.Н. Смирнова. М.: Айрис-Пресс, 2005. 352 с. ISBN 5-8112-1474-X.

⁵Архив МГУ. Фонд № 51. Опись № 2л. Ед. хр. 64.

На вступительных экзаменах в аспирантуру Воинов отвечал на вопросы: «Зависимость числа степеней свободы в турбулентном потоке от числа Рейнольдса», «Сопротивление при ламинарном и турбулентном движении жидкости в трубе», «Уравнения Гамильтона», «Метод Фурье для решения уравнений в частных производных». Комиссия в составе В.Г. Левича, А.М. Головина, В.В. Карамышкина поставила отлично, на хорошо были сданы История КПСС и немецкий язык.

Научное руководство О. Воиновым продолжил В.В. Толмачев, темой диссертации были выбраны «Некоторые задачи движения многих сфер в идеальной жидкости». Через год Толмачева сменил А.М. Головин. Темой диссертационного исследования было утверждено «Движение жидкостей в присутствии поверхностно-активных веществ».

Были сданы экзамены кандидатского минимума. По философии Воинову было предложено ответить на вопросы:

«Философские взгляды Р. Декарта и Б. Спинозы и их историческое значение»

«Возможность и действительность. Категория вероятности. Особенности превращения возможности в действительность в природе и в обществе».

«Диктатура пролетариата и ее роль в социалистической революции. В.И. Ленин о сломе государственной машины».

«Специфика роли практики в развитии математики». Философия была сдана на отлично.

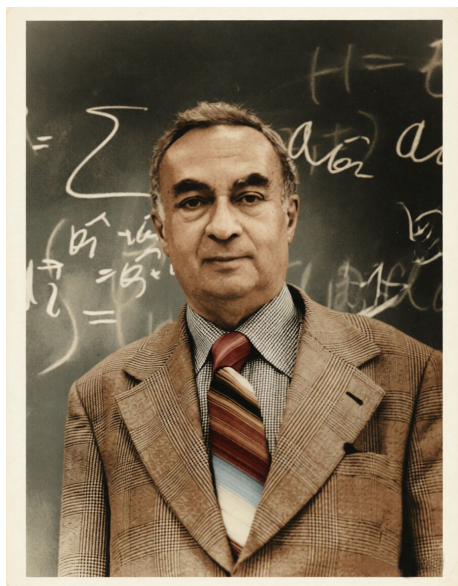
Экзамен по иностранному языку заключался в письменном переводе со словарем книги «Ordinary difference-differential equation», устном переводе без словаря и чтении той же книги, передаче на английском языке отрывка из газеты «Morning Star». Знание английского языка было оценено как удовлетворительное, экзамен принимали М.М. Глушко и Е.А. Снесарева. Заметим здесь, что студентом и школьником Воинов изучал немецкий язык.

Кандидатский экзамен по специальности включил вопросы:

«Теплопередача в окрестности критической точки при плоскопараллельном течении», «Зависимость степени ионизации водородной плазмы от температуры», «Температура в газовой среде вокруг излучающего точечного источника». Комиссия в составе В.Г. Левича, В.П. Мясникова, А.М. Головина поставила отлично.

Из дополнительных учебных курсов Воинов посещал лекции по статистической физике профессора А.М. Бродского.

На втором году аспирантуры тема диссертации была указана как «Об установлении распределения пузырей по размерам в результате процессов «слияния» и дробления». К этому времени Воиновым уже было получено точное решение задачи об одномерном столкновении двух пузырей в жидкости малой вязкости и рассмотрены две задачи об устойчивости пленок.



Вениамин Григорьевич Левич



Преподаватели кафедры химической механики. Не позднее 1972 г.

15 мая 1970 года О.В. Воинов защитил кандидатскую диссертацию на тему «Некоторые задачи гидродинамики и распределения тепла в системе нескольких тел»⁶, ее основные результаты были опубликованы в четырех статьях в журналах ПММ, Вестник МГУ, МЖГ, одних тезисах, одна статья была в печати. Официальными оппонентами на защите выступили М.И. Гуревич и Ю.Л. Якимов, ведущей организацией – Институт проблем механики АН СССР. Защита прошла в ученом совете механико-математического факультета МГУ под председательством Г.Г. Черного. В прениях по докладу соискателя выступил профессор Н.А. Слезкин, спросивший, чем отличаются полученные результаты в качественном отношении от результатов Бьеркнеса и какое значение будут

⁶Архив МГУ. Фонд № 51. Опись № 1л. Ед. хр. 58.

иметь решенные задачи для развития соответствующего научного направления? Ответ Воинова был кратким: «Знак сил взаимодействия остается таким же, как и на большом расстоянии». В отношении же технологических применений он указал, что непосредственной целью задачи ставился вопрос о движении системы пузырей при барботаже и построении кинетических уравнений для такой системы, это требует знания задачи о парном столкновении, а одна из решенных в диссертации задач сводилась к выяснению характера взаимодействия газового пузырька с твердой стенкой. Неудовлетворенный таким ответом, Слезкин повторил вопросы о значении результатов диссертанта и направлении, в котором они могут быть использованы. Воинов уточнил свой ответ, сообщив, что результаты могут быть использованы для составления кинетических уравнений, а в случае схлопывания пузырька у стенки позволяют решить вопрос о разрушающем воздействии этого процесса на стенку. Г.И. Баренблатт спросил о связи результатов соискателя с работами О. Нэйла и Стерциона. По мнению Воинова значение, в смысле отличия, имел лишь диапазон рассматриваемых чисел Рейнольдса, упомянутые же в вопросе работы относились к малым числам Рейнольдса, когда основную роль играет вязкость, а в выкладках появляются логарифмические члены. Отвечая на замечание в отзыве на автореферат диссертации об отсутствии сравнения с работами Бренера, Кокса и Мейсона, а также об отсутствии конкретных числовых значений в рассмотренных задачах, соискатель указал, что упомянутые работы относились к существенно другому направлению, а все конкретные примеры в диссертации как раз доведены до чисел, но, конечно, все практические задачи охватить невозможно. После выступления научного руководителя, А.М. Головина, последовал вопрос и к нему от В.М. Панферова – в чем законченность работы в смысле выхода? Руководитель ответил, что выполненная работа позволяет ответить на вопрос о месте захлопывания пузыря в рассмотренных диссертантом условиях, хотя совсем не обязательно, что такие условия будут иметь место в действительности. С замечаниями обоих оппонентов соискатель согласился. В выступлениях по диссертации Г.И. Баренблатт назвал постановку задачи классической и отметил, что диссертанту и его руководителю следует поставить в заслугу их занятия, но все же настаивал на проведении сравнения результатов соискателя с работами О. Нэйла и Стерциона. В последовавшем затем выступлении В.Г. Левич указал, что реши соискатель задачу не для одного пузырька, а для системы, дело завершилось бы докторской (да и для докторской эта задача была бы сложна), им было также отмечено, что он и сам затрудняется ответить на вопрос, как эта одна задача отражается на технических приложениях (и этим, по его мнению, объясняется не очень внятный ответ соискателя на заданный ему ранее вопрос). Особо Вениамином Григорьевичем была отмечена мехматовская выучка соискателя: «если бы не его образование, он усумнился бы в возможности применения метода Лагранжа», «он продемонстрировал умение решать довольно сложные математические задачи», но «это, как раз, пример того плохого, что у

нас есть, когда людей недостаточно приучают к приближенным вычислениям» – это тоже «выучка мехмата»» (Баренблатт с места – «Да, конечно!»).

Здесь уместно сделать замечание. Критика диссертации относилась больше не к соискателю, а к заведующему кафедрой – В.Г. Левичу. Н.А. Слезкин, будучи деканом механико-математического факультета МГУ с 1958 по 1962 год, был резко против создания кафедры химической механики на факультете и считал, что тема диссертации О.В. Воинова не оригинальна и эта работа могла бы выполняться на других кафедрах факультета.

Голосование по диссертации показало 21 голос за присуждение степени, один – против, один бюллетень был признан недействительным.

В октябре 1969 года О.В. Воинов по распределению поступил на работу в лабораторию олеоколлоидов и монослоев в Институт химической физики АН СССР, где быстро получил ряд уникальных научных результатов. В 1978 году он перешел на работу в созданный академиком В.В. Струминским в Москве Сектор механики неоднородных сред АН СССР. Там он работал в должности заместителя директора и в 1980 году защитил докторскую диссертацию «Динамика двухфазных систем с учетом изменения формы границ раздела фаз». Одним из оппонентов его диссертации был будущий академик Л.В. Овсянников. Однако после защиты Олег Васильевич, проявив принципиальное несогласие с административными действиями руководства, был вынужден покинуть это место работы. Научная деятельность была продолжена им в отраслевых организациях, а в 1989 году он был принят на работу в должности заведующего лабораторией в организованный академиком Р.И. Нигматулиным Институт механики многофазных систем СО РАН в Тюмени (с 1998 года это Тюменский филиал ИТПМ СО РАН). Это были сложные для науки, но плодотворные для научной деятельности Воинова годы.

Признанием заслуг О.В. Воинова перед наукой его коллегами служит его избрание членом Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике. В жизни он был скромным, отзывчивым, всегда готовым прийти на помощь, охотно делился с коллегами своими знаниями и научными идеями.

Олег Васильевич Воинов ушел из жизни 30 сентября 2024 года, на следующий день после своего 80-летия. Это – большая потеря для отечественной и мировой науки.

Настоящая статья – дань памяти многолетней дружбе и сотрудничеству А.Г. Петрова с О.В. Воиновым.

Обзор научных результатов. Научные интересы Олега Васильевича Воинова находились в различных областях гидродинамики: течения жидкости со свободными границами, механика многофазных сред.

Первый результат, ставший известным в гидродинамике, Олег Васильевич Воинов получил в 1970 г., это было обобщение рядов Хикса. Данное им точное решение для сил, действующих на движущиеся и пульсирующие сферы, в виде

быстро сходящихся рядов вплоть до контакта является основой для построения теории слияния пузырьков в жидкости.

В 1974 г. Воиновым совместно с М.И. Гуревичем выведены формулы для силы и момента, действующих на осесимметричное тело, ориентированное параллельно дну.

В 1974–1975 гг. Воинов О.В. разработал метод граничных интегральных уравнений для решения задач гидродинамики со свободными границами. В статье 1975 года «Гидродинамика смачивания» он изложил разработанную им теорию этого процесса, эта статья имеет в Шпрингере более 1300 ссылок. В 1975 году Воинов первым выполнил расчет кумулятивной струи при захлопывании кавитационного пузыря около стенки, создав при этом метод, который впоследствии стал называться методом граничных элементов. Эти результаты стали называться «задачей Воинова». Олег Васильевич является основоположником теории растекания тонких пленок.

В 1980-х годах он заложил основы теории растекания сверхтонких пленок по поверхности твердых тел, выполнил ряд пионерских работ по теории смачивания и моделям термокапиллярного движения эмульсии и газожидкостной смеси.

В 1981–1982 гг. Воинов определил кривую устойчивости осаждения и всплытия концентрированных систем твердых частиц и пузырьков в жидкости. Его теория имеет приложения для описания барботажа, эволюции псевдооживленного слоя, эмульсий, отделяя эффективные режимы от нежелательных.

В 2002 г. им было открыто явление кавитации при ползущем движении жидкости (малые числа Рейнольдса) и дано объяснение парадоксальных эффектов в опытах А.Н. Прокунина

В 2005 г. Воинов О.В. получил общую форму представления решения уравнений Стокса, в котором поля скорости и давления при осесимметричном обтекании тела представлены через две гармонические функции, которые определяются методом граничных элементов.

1. Гидродинамическое взаимодействие тел в жидкости. Для описания движущихся в жидкости двух сфер с произвольно меняющимися размерами, скоростями и взаимным расположением О.В. Воинов предложил пользоваться уравнениями Лагранжа, функцией Ланранжа в этой задаче является кинетическая энергия T , определенная Воиновым в виде быстро сходящихся рядов по степеням отношения радиуса сферы к расстоянию между сферами (как обобщение рядов Хикса для двух твердых сфер) [71–73]

$$\frac{T}{2\pi\rho} = \sum_{i=1}^2 (A_i u_i^2 + B u_i u_k + D_i \dot{a}_i^2 + E \dot{a}_i \dot{a}_k + C_{ik} u_i \dot{a}_k + C_{ii} u_i \dot{a}_i),$$

$$2A_i = \frac{a_i^3}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_i}{A_n^i} \right)^3, \quad 2B = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{B_n^i} \right)^3,$$

$$D_i = a_i^3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_i^3}{A_n^i} \left[1 + ((B_n^k)^2 - 1) \ln \left(1 - \frac{1}{(B_n^k)^2} \right) \right],$$

$$E = \frac{(a_1 a_2)^2}{a_k} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{B_{n+1}^k} - B_n^i \ln \left(1 + \frac{1}{B_{n+1}^k B_n^i} \right) \right),$$

$$C_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_i^3}{(A_n^i)^2 B_n^k}, \quad C_{ki} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_k^3}{(B_n^i)^2 A_{n-1}^k}, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, 2$$

$$B_n^i = \frac{r}{a_i} A_{n-1}^k - \frac{a_k}{a_i} B_{n-1}^i, \quad A_n^i = \frac{r}{a_i} B_n^k - \frac{a_k}{a_i} A_{n-1}^i, \quad n = 1, 2, \dots, \quad A_0^i = 1, \quad B_0^i = 0,$$

где ρ – плотность жидкости, a_i – радиусы сфер, r – расстояние между центрами сфер, скорость центра сферы $u_i > 0$, если она направлена к другой сфере. Были определены силы гидродинамического взаимодействия, в том числе и в контакте, например

1). При расширении сфер в контакте $r = 2a$, $a = -u$ сила притяжения была определена в виде (точкой над символом обозначено дифференцирование по времени)

$$F = 2\pi\rho a^2 (0.785a^2 + 0.18a\ddot{a})$$

2). При сближении сфер к контакту $r \rightarrow 2a$ с равными скоростями имеет место отталкивание с силой

$$F = \pi\rho a^2 u^2 \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{r}{a} - 2 \right) - 0.0948 \right)$$

3). При движении сфер в одном направлении в контакте отталкивание определяется силой (ζ – дзита-функция)

$$F = \pi\rho a^2 u^2 \left(\frac{3}{4} \zeta(3) - \ln 2 \right) = 0.2084\pi\rho a^2 u^2$$

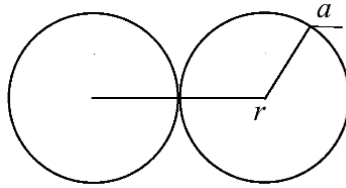


Рис. 1.

Точное решение Воинова для сил, действующих на движущиеся и пульсирующие сферы, представленное в виде быстро сходящихся рядов для всех стадий процесса сближения сфер вплоть до контакта, стало основой для построения теории слияния пузырьков в жидкости.

2. Сила, действующая на ориентированное параллельно дну осесимметричное тело. Совместно с М. И. Гуревичем Воиновым была решена следующая задача [54]. Осесимметричное тонкое тело движется параллельно дну на расстоянии c от него

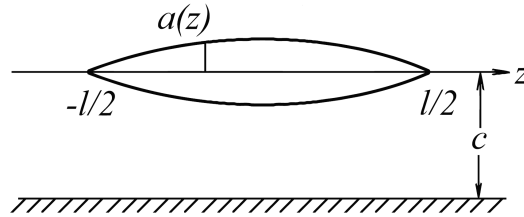


Рис. 2.

Радиус сечения на отрезке $z \in (-l/2, l/2)$ определяется произвольной функцией $a(z)$. Определены сила F и момент M , действующие на него

$$F = -\pi \rho u^2 \int_{-l/2}^{l/2} \frac{(aa')^2}{\sqrt{c^2 - a^2}} dz, \quad M = -2\pi \rho \dot{u} \int_{-l/2}^{l/2} (c - \sqrt{c^2 - a^2}) aa'(z) z dz.$$

штрихом отмечено дифференцирование.

3. Метод граничных интегральных уравнений. О.В. Воиновым первым в мире был разработан метод граничных интегральных уравнений для решения задач динамики жидкости со свободной границей [56]. Внутренняя плоская или осесимметричная задачи для уравнения Лапласа была сведена им к решению интегрального уравнения

$$AV(s) + B\Phi(s) = 0,$$

а внешняя задача к интегральному уравнению

$$AV(s) + B\Phi(s) = 4\pi(C - \Phi(s))$$

Для интегральных операторов осесимметричной задачи были получены формулы ($\frac{\partial}{\partial n'}$ означает дифференцирование по нормали, относящейся к точке, переменной по контуру, рис. 3)

$$\begin{aligned} AV(s) &= - \int_0^l r(s') G(s, s') V(s') ds', \\ B\Phi(s) &= \int_0^l r(s') \frac{\partial G}{\partial n'}(s, s') (\Phi(s) - \Phi(s')) ds' G(s, s') = - \frac{8}{r_1 + r_2} K(k), \\ k &= \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2}, \quad r_{1,2} = \sqrt{(z' - z)^2 + (r' \mp r)^2} \\ K(k) &= \frac{\pi}{2} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!} \right]^2 k^{2i} \right) = \frac{1}{\pi} K(\sqrt{1-k^2}) \ln \frac{16}{1-k^2} - h(\sqrt{1-k^2}) \end{aligned}$$

$$h(k) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!} \right]^2 \sum_{n=1}^i \frac{1}{(2n-1)n} \right] k^{2i}$$

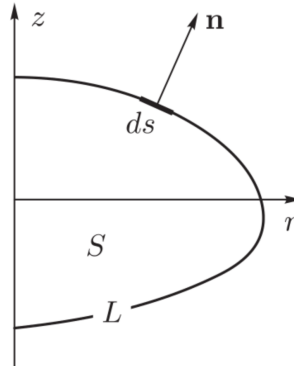


Рис. 3.

где интегралы берутся вдоль свободной границы течения жидкости, ds — элемент дуги контура.

Интегральные операторы имеют логарифмическое ядро, для интегрирования Воинов предложил квадратурные формулы

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\tau) \ln |\tau| d\tau = f(\tau_1)A_1 + f(\tau_2)A_2 + f(\tau_0)A_0, \quad \tau_0 = (\tau_1 + \tau_2)/2$$

точные для квадратичных функций $f(\tau) = a\tau^2 + b\tau + c$. A_i — квадратурные коэффициенты, вычисляемые из требования точности этой формулы для квадратного трехчлена при любых a, b, c .

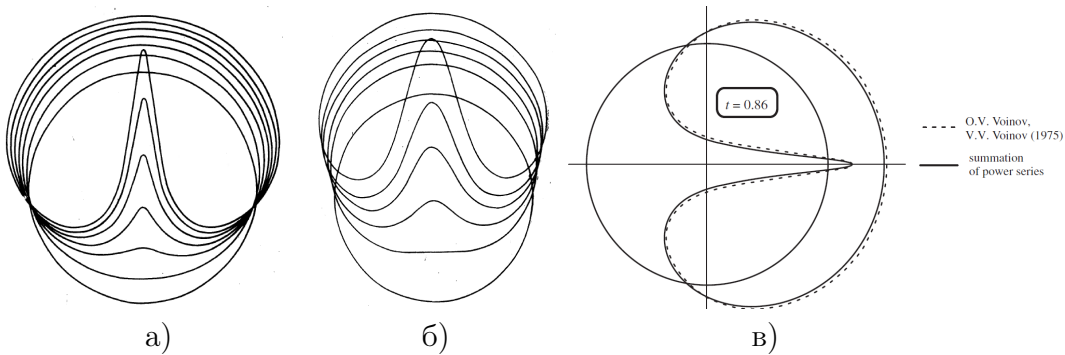


Рис. 4.

Разработанным методом О.В. Воинов провел ряд расчетов для всплытия пустой полости, в которой создается кумулятивная струя. Результаты изображены

на рис. 4а (плоская задача), рис. 4б (осесимметричная задача). Спустя 40 лет Карабут с соавторами⁷ построил точное решение задачи Воинова и привел сопоставление своего решения с расчетом Воинова на рис. 4в, показавшее очень хорошее согласие с точным решением.

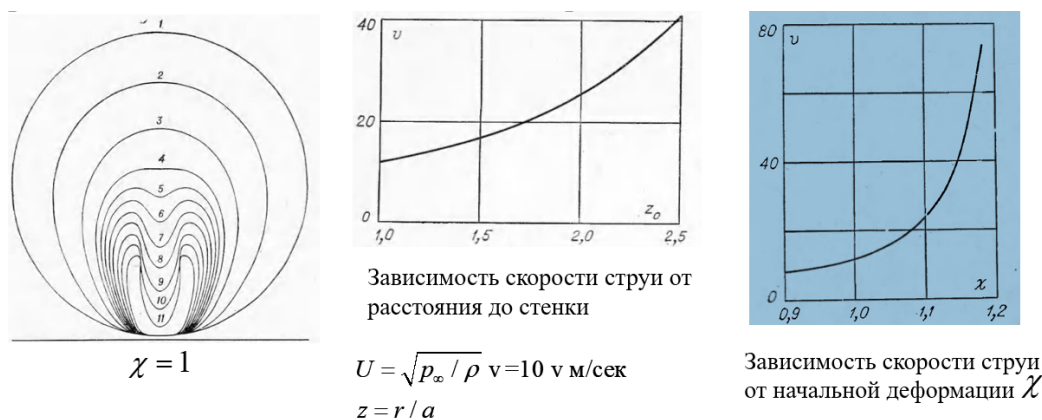


Рис. 5.

Для захлопывания пузырька возле плоскости (рис. 5а) Воинов проанализировал зависимость скорости кумулятивной струи от расстояния от стенки (рис. 5б) и от начальной формы пузырька эллипсоидальной формы с отношением осей $a/b = \chi$. Он показал, что на скорость и толщину кумулятивной струи сильно влияет начальная форма пузыря. Если его начальная форма – сплюснутый эллипсоид, то при изменении отношения осей от 1 до 1.18 скорость струи возрастает в 10 раз, от 180 м/с до 1800 м/с, далее скорость струи неограниченно возрастает (рис. 5в). Эти результаты были опубликованы в ряде статей [44], [49], [59], [51], [53], [56].

Таким образом, Воинов разработал метод граничных элементов на три года раньше С.А. Brebbia, в 1978 году опубликовавшего работу “The Boundary Element Method for Engineers”⁸. Метод был применен Воиновым для расчета кумулятивных струй, направленных к плоскости, при схлопывании пузыря у ее поверхности. Недавнее сравнение с точным решением Карабута плоской задачи показало высокую точность расчетов Воинова⁹.

⁷Karabut E.A. Semi-analytical study of the Voynovs problem// European Journal of Applied Mathematics (2019), V. 30, pp. 298–337.

⁸Brebbia C.A. The Boundary Element Method for Engineers. London: Pentech Press. 1978. 189 p.

⁹Karabut E.A. Semi-analytical study of the Voynovs problem// European Journal of Applied Mathematics (2019), V. 30, pp. 298–337.

4. Растекание капель на твердых поверхностях. Первым в мире О.В. Воинов построил аналитическое решение задачи о растекании капли вязкой жидкости на твердой поверхности (рис. 6) [48].

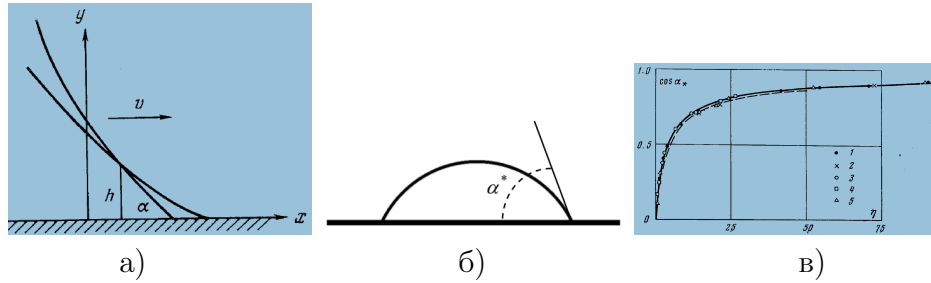


Рис. 6.

Эта задача изучалась экспериментально химиками. Воинов дал математическую постановку этой задачи

$$\begin{aligned} \nabla p &= \mu \Delta \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ v_x &= -v, \quad v_y = 0, \quad \mathbf{v} \mathbf{n} = 0, \\ p_\tau &= 0, \quad p_n = -p_0 + q\sigma \end{aligned}$$

и свел ее решение к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\sigma}{9\mu} \left(\frac{\pi}{3V} \right)^{1/3} \frac{\alpha_m^3 - \alpha^2}{\ln(h/h_m) - 1} (1 - \cos \alpha)^{2/3} (2 + \cos \alpha)^{4/3}$$

α – краевой угол на сферическом сегменте, α_m – характеризует статический гистерезис краевого угла, α^* – угол, наблюдаемый в эксперименте.

Для безразмерного времени $\eta = t \frac{\sigma}{\mu} \left(\frac{\pi}{4V} \right)^{1/3}$ Воинов получил зависимость, которая совпала со всеми основными результатами экспериментов (рис. 6 в.).

Развитие его собственной теории представлено им в ряде статей [3, 5-7, 9, 12, 15, 18, 21, 23, 25-30, 32-36, 38, 45, 46, 55, 57].

5. Кавитация в тонких слоях вязкой жидкости. О.В. Воинов предложил простую формулу распределения давления между плоскостью и вращающимся эллипсоидом [14], дав таким образом объяснение парадокса А.Н. Прокунина. Ранее Прокуниным было установлено¹⁰, казалось бы, парадоксальное явление:

¹⁰Прокунин А.Н. Об одном парадоксе при движении твердой частицы вдоль стенки жидкости // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. № 3. 2003. с. 107–122.

тяжелый шар в вязкой жидкости скатывался с наклонной плоскости, оставляя зазор между собой и плоскостью. Как показывает решение задачи обтекания сферы около плоскости медленным потоком жидкости с большой вязкостью^{11, 12}, гидродинамическая сила направлена параллельно плоскости. Что же противодействует силе тяжести? И почему шар не осаждается до контакта с плоскостью.

Указанный образующийся зазор определяется формулой (см. рис. 7 а.)

$$h = h_0 + \frac{x^2 + y^2}{2R_s}.$$

Для распределения давления в этом зазоре Воинов получил формулу

$$p = p_\infty + \frac{6}{5}\mu(v + R_s\omega)xh^{-2}.$$

Давление имеет наименьшее значение

$$p_{\min} = p_\infty - \frac{9}{40}\mu(v + R_s\omega)R_s^{1/2}h_0^{-3/2}$$

При достаточно малом значении h_0 давление может стать отрицательным, что приводит к возникновению кавитации – в зазоре между плоскостью и шаром образуется пузырек. Размер пузырька очень мал, и он различим только при специальном рассмотрении. После теоретического предсказания Воинова Прокунин действительно усмотрел пузырек в своем опыте.

Воинов О.В. в статье [18] привел расчеты формы пузырьков, которые образуются в зазоре между плоскостью и шаром. В зависимости от отношения $\Lambda = \frac{p_\infty}{p_m}$, $p_m = \mu \frac{u}{h_0} \sqrt{\frac{R_s}{h_0}}$ формы пузырьков при Λ : 0.93; 0.79; 0.54; 0.3; 0.2; 0.1 приведены на рис. 7 б). Из-за пузырька возникает подъемная сила $F = C(\Lambda)\mu|u|R_s\sqrt{\frac{R_s}{h_0}}$ с коэффициентом $C(\Lambda)$, приведенном на графике рис. 7 в). Эта сила препятствует осаждению шара на плоскость.

Т.о. при объяснении парадокса Прокунина было открыто удивительное явление – кавитация в тонком слое жидкости при очень малом числе Рейнольдса.

6. Кривая устойчивости осаждения и всплытия концентрированных систем твердых частиц и пузырьков в жидкости. Псевдооживленный слой (или кипящий слой, gas-solidfluidization) –парящее состояние частиц твердого сыпучего материала под воздействием восходящего потока газа или смеси газ-жидкость (визуально сыпучий материал в таких условиях напоминает кипящую жидкость). Псевдооживленные слои нашли большое применение в различных отраслях промышленности – фармацевтической, химической, пищевой, косметической, а также биотехнологиях и т. п.

¹¹Goldman A.J., Cox R.G., Brenner H. Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall// Cem. Eng. Sci. 1967. V.22. N4. P. 637-651.

¹²O'Neill M.E., Stewartson K. On the slow motion of a sphere parallel to a nearby plane wall// J. Fluid Mech. 1967. V.27. Pt 4. P. 705-724.

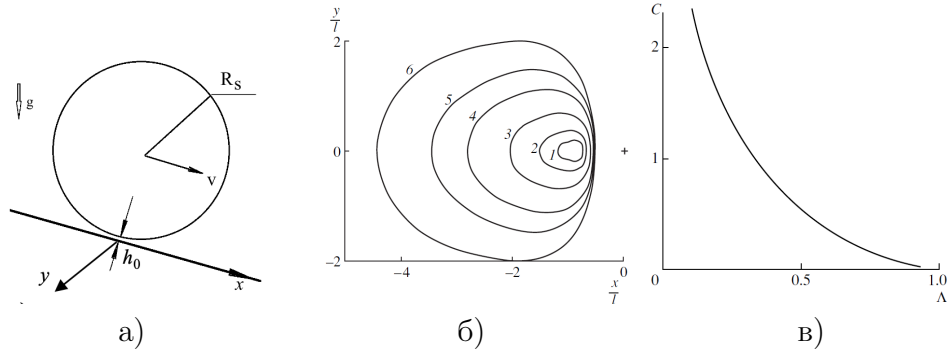


Рис. 7.

Основные стадии развития псевдооживленного слоя: неподвижное состояние, однородное (спокойное) кипение, неоднородное (пузырьковое) кипение, поршневой режим и пневмотранспорт (унос) (рис. 8.)

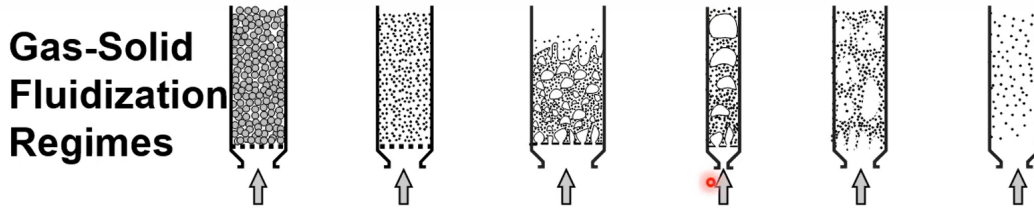


Рис. 8.

Режимы образования крупных пузырей (байпасирование), фонтанирование, шлакование, агломерация и чрезмерный вынос мелкодисперсных частиц, являются нежелательными. Они нарушают равномерность теплообмена, снижают эффективность работы аппаратов создания конечного продукта и могут привести к остановке рабочего процесса.

Воинов показал, что скорости твердых частиц в псевдооживленном слое складываются из средней скорости и хаотической флуктуации и для описания движения сильно концентрированной двухфазной среды предложил осредненные уравнения, подобные уравнениям турбулентности

$$\varepsilon \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \varepsilon \rho \mathbf{g} - \nabla p - c \mathbf{F} + \operatorname{div} (-\varepsilon \rho \overline{\delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v}}), \quad c \rho_s \frac{d\mathbf{u}}{dt} = c \rho_s \mathbf{g} + \operatorname{div} (-c \rho_s \overline{\delta \mathbf{u} \delta \mathbf{u}}) + c \mathbf{F},$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{v}) = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div} (c \mathbf{u}) = 0, \quad \varepsilon + c = 1,$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}, \quad c \rho_s \overline{\delta u_i \delta u_j} = S w_i w_j, \quad c \mathbf{F} = -c \rho \mathbf{g} - \mu \frac{G}{R^2} \left(c \mathbf{w} + f R \frac{\mathbf{w}(\mathbf{w} \nabla c)}{|\mathbf{w}|} \right),$$

$$G(c), \quad S(Fr, c), \quad f(Fr, c), \quad Fr = \frac{w}{\sqrt{Rg}}.$$

где $\rho, \mathbf{v}$ – плотность и скорость несущей среды, $\rho_s, u, \varepsilon, c$ – плотность, скорость, пористость и концентрация частиц, $\mathbf{F}$ – сила межфазного взаимодействия, μ – коэффициент динамической вязкости несущей среды, $\delta \mathbf{v}, \delta \mathbf{u}$ – флуктуации скоростей несущей среды и скоростей частиц.

При осреднении Воинов ввел три эмпирические безразмерные функции: коэффициент сопротивления $G(c)$, зависящий от концентрации, коэффициент напряжений $f(c, Fr)$, зависящий от концентрации и числа Фруда. Кроме того, к силе межфазного взаимодействия он добавил слагаемое, зависящее от градиента концентрации с коэффициентом, зависящим от концентрации и числа Фруда, получив замкнутую систему уравнений.

После линеаризации полученных уравнений для возмущения концентрации смеси $\delta c = -\delta \varepsilon$ получилось уравнение типа теплопроводности с коэффициентом теплопроводности k

$$\frac{\partial \delta \varepsilon}{\partial t} - c \theta w \frac{\partial \delta \varepsilon}{\partial z} = k \frac{\partial^2 \delta \varepsilon}{\partial z^2}, \quad \theta(Fr, c) = 1 - \frac{\varepsilon}{G} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon}$$

$$k = \varepsilon R w \left(f(Fr, c) - \frac{Fr^2}{1 - \rho/\rho_s} \left(c^2 \theta(Fr, c)^2 + S^*(Fr, c) \right) \right)$$

Как известно в процессах, описываемых уравнение теплопроводности, при положительном коэффициенте теплопроводности $k > 0$ возмущения сглаживаются со временем, а при $k < 0$ уравнение некорректно. Приравнивание $k = 0$ в выражении для k , выписанном выше, определяет кривую устойчивости как зависимость $Fr = Fr(c)$ числа Фруда от концентрации (рис. 9). Эта кривая, изображена на рис. 9 сплошной линией.

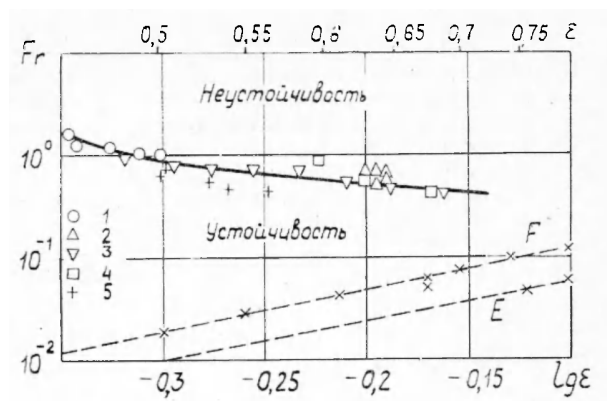


Рис. 9.

Полученная кривая устойчивости подтверждена большим числом экспериментов¹³.

Линии E и F описывают процесс устойчивого осаждения.

7. Решение задачи расчета осесимметричного течения вязкой жидкости. Течения вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса описываются пространственными уравнениями Стокса $\nabla p = \mu \Delta \mathbf{v}$, $\text{div} \mathbf{v} = 0$. Для осесимметричного течения с компонентами v_r, v_z в цилиндрических координатах r, z они имеют вид

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial r \partial z} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \quad \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Воинов выразил общее решение этих уравнений через две гармонические функции φ и ψ

$$v_r = 2z \frac{\partial \varphi}{\partial r} - r \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_z = r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + 2z \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad p = 2\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Для плоской задачи аналогичное представление дается известными формулами Гурса¹⁴.

О.В. Воинов в своей работе [13] свел задачу решения уравнений течения вязкой жидкости в приближении Стокса к задаче потенциальных течений, для которых он разработал метод граничных элементов (см. п. 3).

8. Изобретательская деятельность. Патенты. О.В. Воинов был соавтором ряда патентов: Сеточный узел вибросита, Способ бурения с кольматацией, Щелевая сетка, Вибросито.

Авторы благодарны сотруднику Архива МГУ Елене Валерьевне Лепениной за помощь в сборе материала.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

¹³Geldart D. Comment to "Application of mechanical stress theory to fluidization. Rietema K." — In: Proc. of the Int. Symp. on Fluidization, 1967. Eindhoven Amsterdam: Netherl. Univ. Press, 1967.

De Jong J. A. H., Nomden J. F. Homogeneous gas-solid fluidization. — Powder Technology, 1974, vol. 9, pt 2/3

Massimilla L., Donsi G., Zucchini C. The structure of bubble-free gas fluidized beds of fine fluid cracking catalyst particles. Chem. Eng. Sci., 1972, v. 27, p. 2005.

Полянский В.А. Экспериментальное исследование влияния свойств взвешивающей среды на поведение частиц псевдооживленных слоев. Отчет НИИ механики МГУ № 2063.

¹⁴Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воинов О. В. Влияние вязкости на динамику возмущений пузыря в жидкости // Прикладная механика и техническая физика. – 2009. – Т. 50, № 6. – С. 3–5.
2. Воинов О. В. Инерциальное движение тела в идеальной жидкости из состояния покоя // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49, № 4. – С. 214–219.
3. Воинов О. В. Структура течения жидкости при смачивании поверхности твердого тела // Доклады РАН. – 2008. – Т. 418, № 3. – С. 331–335.
4. Воинов О. В. Условия разрушения сферического газового пузыря в жидкости при нелинейных пульсациях // Доклады РАН. – 2008. – Т. 422, № 6. – С. 750–754.
5. Воинов О. В. Движение жидких пленок в газе // Прикладная математика и механика. – 2008. – Т. 72, № 1. – С. 70–80.
6. Воинов О. В. Квазиустановившиеся течения в жидкой пленке в газе: сравнение двух методов описания волн // Прикладная механика и техническая физика. – 2007. – Т. 48, № 3. – С. 103–111.
7. Воинов О. В. Движения жидких пленок в газе под действием капиллярных сил // Доклады РАН. – 2007. – Т. 414, № 3. – С. 325–329.
8. Воинов О. В. Симметрии медленных движений и равновесий сплошных сред // Прикладная математика и механика. – 2007. – Т. 71, № 5. – С. 788–793.
9. Воинов О. В. Течения с квазиравновесными свободными границами в динамике смачивания твердых тел // Прикладная математика и механика. – 2006. – Т. 70, № 2. – С. 264–275.
10. *Voinov O. V.* Solution of the Reynolds equations for viscous-fluid flow in the clearance between a rotating ellipsoid and a surface // Fluid Dynamics. – 2005. – Vol. 40, no. 4. – P. 665.
11. Воинов О. В., Пухначев В. В. Модель термокапиллярного движения эмульсии // Доклады РАН. – 2005. – Т. 402, № 2. – С. 193–196.
12. Воинов О. В. Асимптотические закономерности гидродинамики смачивания // Доклады РАН. – 2005. – Т. 403, № 1. – С. 40–44.
13. Воинов О. И. Общие формы представления решений уравнений Стокса и метод расчета течений вязкой жидкости // Доклады РАН. – 2005. – Т. 405, № 5. – С. 625–629.
14. Воинов О. В. Решение уравнения Рейнольдса для течения вязкой жидкости в зазоре между вращающимся эллипсоидом и поверхностью // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2005. – № 4. – С. 186–188.

15. Воинов О. В. Обобщение задачи о течении вязкой жидкости в угле на течение с искривленными границами // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т. 69, № 5. – С. 837–846.
16. Воинов О. В. Асимптотические свойства осесимметричного Стоксова течения вязкой жидкости с пересекающимися границами // Доклады РАН. – 2004. – Т. 394, № 4. – С. 473–475.
17. Dynamics, stability and solidification of emulsion under the action of thermocapillary forces and microacceleration / V. V. Pukhnachov [et al.] // Interfacial Fluid Dynamics and Transport Processes. – Berlin, 2003. – P. 325–354. – (Lecture Notes in Physics).
18. Воинов О. В. Течение кавитирующих пленок вязкой жидкости // Доклады РАН. – 2002. – Т. 387, № 6. – С. 767–771.
19. *Voinov O. V.* Motion stability of a periodic system of bubbles in a liquid // Journal of Fluid Mechanics. – 2001. – Vol. 438. – P. 247–275.
20. *Voinov O. V.* Wetting line dynamics in the process of drop spreading // Journal of Colloid and Interface Science. – 2000. – Vol. 226, no. 1. – P. 22–28.
21. *Voinov O. V.* Wetting film dynamics // Journal of Colloid and Interface Science. – 2000. – Vol. 226, no. 1. – P. 29–34.
22. *Voinov O. V.* Wetting: inverse dynamic problem and equations for microscopic parameters // Journal of Colloid and Interface Science. – 2000. – Vol. 226, no. 1. – P. 5–15.
23. Воинов О. В. Динамический краевой угол при смачивании поверхности жидкостью Ван-дер-Ваальса // Прикладная механика и техническая физика. – 2000. – Т. 41, № 4. – С. 101–105.
24. Воинов О. В. О динамике малого тела в неоднородном потоке // Доклады РАН. – 2000. – Т. 372, № 6. – С. 762–765.
25. Воинов О. В. Динамические краевые углы смачивания при растекании капли на поверхности твердого тела // Прикладная механика и техническая физика. – 1999. – Т. 40, № 1. – С. 101–107.
26. *Voinov O. V.* Meniscus and precursor film in steady-state wetting // Journal of Colloid and Interface Science. – 1998. – Vol. 201, no. 2. – P. 127–131.
27. *Voinov O. V.* Meniscus contact angle in unsteady viscous flow // Journal of Colloid and Interface Science. – 1998. – Vol. 201, no. 1. – P. 93–102.
28. *Voinov O. V.* Fine structure of meniscus of a wetting liquid // Journal of Colloid and Interface Science. – 1998. – Vol. 200, no. 2. – P. 197–202.
29. *Voinov O. V.* Slow wetting of a solid by a liquid film from a moving meniscus // Journal of Colloid and Interface Science. – 1997. – Vol. 188, no. 1. – P. 1–8.
30. *Voinov O. V.* Unsteady angle of contact during creeping motion of a wetting fluid // Physics. Doklady. – 1997. – Vol. 42, no. 12. – P. 700–704.
31. *Pukhnachov V. V., Voinov O. V.* Thermocapillary motion in an emulsion // Proceedings of the 1996 3rd Microgravity Fluid Physics Conference / ed. by Anon. – Cleveland, OH, USA, 1996. – P. 337–342. – (NASA Conference Publication).
32. *Voinov O. V.* Two-phase boundary dynamics near a moving contact line over a solid // International Journal of Multiphase Flow. – 1996. – Vol. 22, no. 6. – P. 1155–1166.
33. Воинов О. В. Уравнение энергии в гидродинамике смачивания // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 1996. – № 6. – С. 111–117.

34. *Voinov O. V.* Motion of line of contact of three phases on a solid: thermodynamics and asymptotic theory // *International Journal of Multiphase Flow*. – 1995. – Vol. 21, no. 5. – P. 801–816.
35. Воинов О. В. Растекание капли вязкой жидкости по поверхности под действием капиллярных сил // *Прикладная математика и механика*. – 1995. – Т. 59, № 5. – С. 767–775.
36. Воинов О. В. Динамическая теория смачивания твердого тела вязкой жидкостью под действием сил Ван-дер-Ваальса // *Прикладная механика и техническая физика*. – 1994. – Т. 35, № 6. – С. 69–85.
37. Воинов О. В. Динамика капиллярных волн на пузыре при нелинейных пульсациях в жидкости малой вязкости // *Прикладная механика и техническая физика*. – 1994. – Т. 35, № 3. – С. 87–97.
38. Воинов О. В. Неустановившиеся течения смачивающих пленок вязкой жидкости по твердой поверхности // *Доклады РАН*. – 1994. – Т. 338, № 2. – С. 191–193.
39. Воинов О. В., Перепелкин В. В. Об устойчивости поверхности газового пузыря, пульсирующего в жидкости // *Прикладная механика и техническая физика*. – 1989. – Т. 30, № 3. – С. 76–83.
40. Воинов О. В., Петров А. Г., Шрагер Г. Р. О модели течения внутри жидкой капли, обтекаемой газом // *Известия АН СССР. Механика жидкости и газа*. – 1989. – № 6. – С. 167–170.
41. Воинов О. В., Петров А. Г. О течениях с замкнутыми линиями тока и движении капель при больших числах Рейнольдса // *Известия АН СССР. Механика жидкости и газа*. – 1987. – № 5. – С. 61–70.
42. Воинов О. В., Петров А. Г. Устойчивость относительного движения фаз в течениях двухфазных сред // *Прикладная механика и техническая физика*. – 1982. – Т. 23, № 1. – С. 83–90.
43. Воинов О. В., Пухначев В. В. Термокапиллярное движение в газожидкостной смеси // *Прикладная механика и техническая физика*. – 1980. – Т. 21, № 5. – С. 38–45.
44. Воинов О. В. Расчет параметров скоростной струи, образующейся при захлопывании пузыря // *Прикладная механика и техническая физика*. – 1979. – Т. 20, № 3. – С. 94–99.
45. Воинов О. В. Асимптотика свободной поверхности вязкой жидкости при ползущем движении и зависимость краевого угла смачивания от скорости // *Доклады АН СССР*. – 1978. – Т. 243, № 6. – С. 1422–1422.
46. Воинов О. В. Об углах наклона границы в движущихся жидких слоях // *Прикладная механика и техническая физика*. – 1977. – Т. 18, № 2. – С. 92–99.
47. Воинов О. В., Петров А. Г. О тензоре напряжений в жидкости с дисперсными частицами // *Прикладная математика и механика*. – 1977. – Т. 41, № 2. – С. 368–369.
48. Воинов О. В. Гидродинамика смачивания // *Известия АН СССР. Механика жидкости и газа*. – 1976. – № 5. – С. 76–84.
49. Воинов О. В., Воинов В. В. О схеме захлопывания кавитационного пузырька около стенки и образования кумулятивной струи // *Доклады АН СССР*. – 1976. – Т. 227, № 1. – С. 63–66.

50. Воинов О. В., Петров А. Г. Движение пузырей в жидкости // Итоги науки и техники. Серия: Механика жидкости и газа. Т. 10. – Москва : ВИНТИ, 1976. – С. 86–147.
51. Воинов В. В., Воинов О. В. О движении и заполнении полостей в безграничной жидкости и около плоскости // Прикладная механика и техническая физика. – 1975. – Т. 16, № 1. – С. 89–95.
52. Воинов О. В., Петров А. Г. Об уравнениях движения жидкости с пузырьками // Прикладная математика и механика. – 1975. – Т. 39, № 5. – С. 845–856.
53. Воинов О. В., Воинов В. В. Численный метод расчета нестационарных движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными поверхностями // Доклады АН СССР. – 1975. – Т. 221, № 3. – С. 559–562.
54. Воинов О. В., Гуревич М. И. О силах, действующих на тонкое осесимметричное тело, ориентированное параллельно дну // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1974. – № 2. – С. 169–172.
55. Воинов О. В. К теории утоньшения свободных пленок вязкой жидкости // Прикладная механика и техническая физика. – 1974. – Т. 15, № 3. – С. 67–78.
56. Воинов В. В., Воинов О. В., Петров А. Г. Метод расчета потенциального обтекания тела вращения потоком несжимаемой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1974. – Т. 14, № 3. – С. 797–802.
57. Воинов О. В. Уравнения движения свободных жидких пленок и модель их плоскопараллельного утончения // Доклады АН СССР. – 1974. – Т. 216, № 2. – С. 285–288.
58. Воинов О. В. О силе, действующей на сферу в неоднородном потоке идеальной несжимаемой жидкости // Прикладная механика и техническая физика. – 1973. – Т. 14. – С. 182–184.
59. Воинов В. В., Воинов О. В., Петров А. Г. Гидродинамическое взаимодействие тел в идеальной несжимаемой жидкости и их движение в неоднородных потоках // Прикладная математика и механика. – 1973. – Т. 37, № 4. – С. 680–689.
60. Воинов О. В., Петров А. Г. Функция Лагранжа газового пузырька в неоднородном потоке // Доклады АН СССР. – 1973. – Т. 210. – С. 1036–1039.
61. Воинов О. В., Петров А. Г. О перемещении деформирующихся тел в идеальной жидкости из состояния покоя // Доклады АН СССР. – 1973. – Т. 212, № 5. – С. 1086–1088.
62. Воинов О. В., Головин А. М., Петров А. Г. Перенос энергии от испаряющейся капли в паровой среде // Прикладная механика и техническая физика. – 1972. – Т. 13. – С. 74–78.
63. *Voinov O. V., Petrov A. G.* Motion of a variable-volume sphere in an ideal fluid near a plane surface // Fluid Dynamics. – 1971. – Vol. 6, no. 5. – P. 808.
64. Воинов О. В. Волновые движения в слое вязкой жидкости в присутствии поверхностно-активных веществ // Прикладная механика и техническая физика. – 1971. – Т. 12, № 3. – С. 81–89.
65. Воинов О. В. Силы вязкого трения при движении двух пузырей в жидкости малой вязкости // Теоретические основы химической технологии. – 1971. – Т. 5, № 1. – С. 168.
66. Воинов О. В., Петров А. Г. Движение сферы переменного объема в идеальной жидкости около плоской поверхности // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1971. – № 5. – С. 94–103.

67. Воинов О. В., Головин А. М. Уравнения Лагранжа для системы пузырей изменяющихся радиусов в жидкости малой вязкости // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1970. – № 3. – С. 117–123.
68. *Voinov O. V., Golovin A. M.* Lagrange equations for a system of bubbles of varying radii in a liquid of small viscosity // Fluid Dynamics. – 1970. – Vol. 5. – P. 458.
69. Воинов О. В., Головин А. М., Петров А. Г. Движение эллипсоидального пузыря в жидкости малой вязкости // Прикладная механика и техническая физика. – 1970. – Т. 11, № 3. – С. 76–81.
70. Воинов О. В. Релаксация жидкого слоя под действием капиллярных сил // Прикладная механика и техническая физика. – 1970. – Т. 11, № 1. – С. 73–77.
71. Воинов О. В. О движении двух сфер в идеальной жидкости // Прикладная математика и механика. – 1969. – Т. 33, № 4. – С. 659–667.
72. Воинов О. В. Движение двух сфер переменных радиусов в идеальной жидкости // Тезисы докладов. Научная конференция Института механики. – 1970. – С. 10–12.
73. Воинов О. В. Движение идеальной жидкости около двух сфер и с радиальными скоростями на поверхности // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 1969. – № 5. – С. 83–88.

Иванов Д. В.

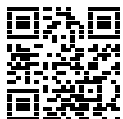
ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГУБЧАТОЙ КОСТИ НА ОСНОВЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО ОДНООСНОМУ СЖАТИЮ

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени
Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия

Аннотация. Работа посвящена определению механических свойств губчатой кости по данным экспериментов на одноосное сжатие и разработке подходов, обеспечивающих сопоставимость и воспроизводимость получаемых характеристик. Актуальность исследования связана с необходимостью корректной оценки эффективного модуля упругости и других механических параметров губчатой кости для задач биомеханики, математического моделирования и интерпретации данных лучевой диагностики. В докладе рассматриваются серии экспериментов, выполненных на образцах губчатой кости крупного рогатого скота из позвонков и области коленного сустава, а также на образцах губчатой кости детских позвонков. Испытания проводились в условиях одноосного сжатия с использованием универсальных испытательных машин; для части серий дополнительно оценивались минеральная плотность кости, пористость и коэффициент Пуассона. Одним из центральных вопросов исследования являлась разработка требований к геометрии образцов для испытаний на сжатие. Показано, что величина эффективного модуля упругости существенно зависит от соотношения высоты и поперечного размера образца, тогда как при достижении определённого диапазона относительной высоты оценка модуля стабилизируется. Отдельно исследовано влияние способа нагружения, включая испытания без заглушек, а также с пластиковыми и алюминиевыми заглушками. Установлено, что при соблюдении геометрических требований различия, обусловленные способом передачи нагрузки, не являются определяющими. Для различных направлений вырезки образцов получены значения эффективного модуля упругости, минеральной плотности и коэффициента Пуассона, что позволило оценить анизотропию механического отклика губчатой кости. Построены зависимости между модулем упругости и минеральной плотностью, а также между модулем упругости и пористостью; показано, что эти зависимости могут быть использованы для расчётной оценки механических характеристик по структурным параметрам. Также рассмотрен вопрос межлабораторной надёжности экспериментов по одноосному сжатию, и продемонстрирована согласованность результатов, полученных в разных лабораториях. Для губчатой кости детских позвонков получены зависимости между нормализованным эффективным модулем упругости и рентгеновской плотностью, представляющие интерес для клинических и расчётных приложений. Полученные результаты могут быть использованы при построении биомеханических моделей костных структур и при разработке методик оценки свойств костной ткани по данным визуализации.

Ключевые слова: губчатая кость, одноосное сжатие, модуль упругости, минеральная плотность кости, пористость, коэффициент Пуассона, анизотропия, позвонки, биомеханика.

Иванов Дмитрий Валерьевич, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики; e-mail: ivanovdv.84@ya.ru; <https://orcid.org/0000-0003-1640-6091>; AuthorID: 201794



для цитирования: Иванов Д. В. Об определении механических свойств губчатой кости на основе экспериментов по одноосному сжатию // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 208–212. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.012. EDN: VQZTJP

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

D. V. Ivanov

ON DETERMINING THE MECHANICAL PROPERTIES OF TRABECULAR BONE FROM UNIAXIAL COMPRESSION TESTS

Saratov State University, Saratov, Russia

Abstract. The influence of the relative height of the specimen on the effective elastic modulus of bovine knee joint cancellous bone, calculated using rod theory, was investigated. The modulus was evaluated under direct load application to the specimen, as well as with plastic and aluminum end caps glued to its ends. Regression relationships linking bone mineral density and its effective elastic modulus were established. It was found that when the relative height of the specimen is at least 5 units, it ceases to influence the elastic modulus. It was shown that under uniaxial compression of long specimens, the loading method does not affect the effective elastic modulus. It was obtained that the relationship between the effective elastic modulus and mineral density is independent of the specimen loading method, provided its relative height is at least 5 units. An analysis of the inter-laboratory reliability of uniaxial compression experiments on cancellous bone was performed. Experiments involving uniaxial compression of bovine vertebral cancellous bone were conducted in two biomechanics laboratories, and relationships between the elastic modulus and volumetric bone mineral density were established. The effective elastic moduli and their dependence on volumetric mineral density, obtained from the experiments in the different laboratories, were compared. The elastic moduli of cancellous bone tissue obtained in the different laboratories were statistically indistinguishable. The corresponding dependencies of the effective elastic modulus on volumetric mineral density for the experiments conducted in the two laboratories were also identical. The results of the study can be used in developing a standard for uniaxial compression testing of cancellous bone. Further research in this direction may focus on evaluating bone elastic moduli in cases of anisotropy, as well as on determining the mechanical characteristics of bone for new (e.g., micropolar) models of bone tissue.

Keywords: trabecular bone, uniaxial compression, elastic modulus, bone mineral density, porosity, Poisson's ratio, anisotropy, vertebrae, biomechanics.

Dmitry V. Ivanov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics; e-mail: ivanovdv.84@ya.ru; <https://orcid.org/0000-0003-1640-6091>; AuthorID: 201794



to cite this article: Ivanov D.V. On determining the mechanical properties of trabecular bone from uniaxial compression tests // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 208–212. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.012

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Д. В. Иванов: постановка задачи, анализ литературы, интерпретация результатов, подготовка текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена при поддержке Благотворительного фонда Владимира Потанина (проекты № ГК24-000076, ПР24-000188) и государственного задания, проект FSRR-2023-0009.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. D. V. Ivanov formulated the research problem, analyzed the literature, interpreted the results, and prepared the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The work was supported by the Vladimir Potanin Foundation (projects No. GK24-000076, PR24-000188) and by the state assignment, project FSRR-2023-0009.

ЛИТЕРАТУРА

1. Экспериментальное исследование механических характеристик губчатой кости позвонков пациентов возрастной группы 2–5 лет / Д. А. Сидоренко [и др.] // Российский журнал биомеханики. – 2025. – Т. 29, № 2. – С. 49–59.
2. К вопросу об изучении структурных и механических характеристик губчатой костной ткани крупного рогатого скота / И. Ф. Паршина [и др.] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2025. – Т. 25, № 2. – С. 231–245.
3. On the question of the effect of the loading method on the cancellous bone effective elasticity modulus / I. F. Parshina [et al.] // Mechanics of Solids. – 2024. – Vol. 59, no. 7. – P. 3870–3879.
4. Experimental study of cancellous vertebral bone mechanical characteristics in patients aged 2–5 years / D. Sidorenko [et al.] // Russian Journal of Biomechanics. – 2025. – Vol. 29, no. 2. – P. 39–48.
5. Standardizing compression testing for measuring the stiffness of human bone / S. Zhao [et al.] // Bone Joint Research. – 2018. – Vol. 7, no. 8. – P. 524–538. – DOI: 10.1302/2046-3758.78.BJR-2018-0025.R1.

Received: 10.03.26;

accepted: 19.05.26;

published: 01.07.26.

6. Theoretical analysis of the experimental artifact in trabecular bone compressive modulus / T. M. Keaveny [et al.] // Journal of Biomechanics. – 1993. – Vol. 26, no. 4/5. – P. 599–607. – DOI: 10.1016/0021-9290(93)90021-6.
7. Trabecular bone modulus and strength can depend on specimen geometry / T. M. Keaveny [et al.] // Journal of Biomechanics. – 1993. – Vol. 26, no. 8. – P. 991–1000. – DOI: 10.1016/0021-9290(93)90059-N.
8. *Morgan E. F., Bayraktar H. H., Keaveny T. M.* Trabecular bone modulus-density relationships depend on anatomic site // Journal of Biomechanics. – 2003. – Vol. 36, no. 7. – P. 897–904. – DOI: 10.1016/S0021-9290(03)00071-X.

REFERENCES

1. Eksperimental'noe issledovanie mekhanicheskikh kharakteristik gubchatoi kosti pozvonkov patsientov vozrastnoi gruppy 2-5 let [Experimental study of the mechanical characteristics of vertebral cancellous bone in patients aged 2-5 years] / D. A. Sidorenko [et al.] // Rossiiskii zhurnal biomekhaniki [Russian Journal of Biomechanics]. – 2025. – Vol. 29, no. 2. – P. 49–59. – (In Russian).
2. K voprosu ob izuchenii strukturnykh i mekhanicheskikh kharakteristik gubchatoi kostnoi tkani krupnogo rogatogo skota [On the study of structural and mechanical characteristics of bovine cancellous bone tissue] / I. F. Parshina [et al.] // Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika [Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics]. – 2025. – Vol. 25, no. 2. – P. 231–245. – (In Russian).
3. On the question of the effect of the loading method on the cancellous bone effective elasticity modulus / I. F. Parshina [et al.] // Mechanics of Solids. – 2024. – Vol. 59, no. 7. – P. 3870–3879.
4. Experimental study of cancellous vertebral bone mechanical characteristics in patients aged 2-5 years / D. Sidorenko [et al.] // Russian Journal of Biomechanics. – 2025. – Vol. 29, no. 2. – P. 39–48.
5. Standardizing compression testing for measuring the stiffness of human bone / S. Zhao [et al.] // Bone Joint Research. – 2018. – Vol. 7, no. 8. – P. 524–538. – DOI: 10.1302/2046-3758.78.BJR-2018-0025.R1.
6. Theoretical analysis of the experimental artifact in trabecular bone compressive modulus / T. M. Keaveny [et al.] // Journal of Biomechanics. – 1993. – Vol. 26, no. 4/5. – P. 599–607. – DOI: 10.1016/0021-9290(93)90021-6.
7. Trabecular bone modulus and strength can depend on specimen geometry / T. M. Keaveny [et al.] // Journal of Biomechanics. – 1993. – Vol. 26, no. 8. – P. 991–1000. – DOI: 10.1016/0021-9290(93)90059-N.
8. *Morgan E. F., Bayraktar H. H., Keaveny T. M.* Trabecular bone modulus-density relationships depend on anatomic site // Journal of Biomechanics. – 2003. – Vol. 36, no. 7. – P. 897–904. – DOI: 10.1016/S0021-9290(03)00071-X.

Хайрнасов К. З.

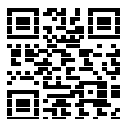
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ОДНОРОДНЫХ И КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ И ИХ ПОВЕДЕНИЕ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Московский государственный строительный университет, Москва, Россия

Аннотация. Изложены, разработанные автором, алгоритмы и программа исследования оболочечных конструкций из однородных и многослойных композиционных материалов при действии статических и динамических нагрузок, в геометрически и физически нелинейной постановках, позволяющей определять напряженно-деформированное состояние, собственные частоты, устойчивость, поведение при динамических воздействиях, а также решать задачи пластической деформации при штамповке. На основе разработанной программы, приведены примеры расчета конкретных конструкций: поведение тороидальных оболочек при динамических воздействиях, вопросы расчета и прогнозирования поведения конструкций и деталей при динамических воздействиях, в условиях глубокой вытяжки. Проведено исследование лопастей винтовентилятора авиадвигателей на основе метода естественно закрученных стержней при различном расположении основы композиционного материала, позволившее выработать рекомендации по оптимальному расположению композиционного материала с точки зрения прочностных и динамических характеристик. Разработана методология решения прикладных задач многостепенных динамических стенов полунатурного моделирования, впервые выполненных из композиционных материалов, заключающаяся в разработанном алгоритме комплексного расчета и исследования влияния структуры композита несущих слоев и заполнителя на жесткостные и частотные характеристики стенов. Разработан принципиально новый подход к исследованию динамических конструкций, имеющих компоненты, не адекватно реализуемые в методе конечных элементов: редукторы, подшипники, зубчатые венцы, двигатели, путем замены их стержневыми системами идентичными по жесткости. Разработаны алгоритмы и программы расчета жесткости редукторов, подшипников. Разработан и реализован метод численного решения и оптимизации компоновочных схем многостепенных динамических стенов полунатурного моделирования из однородных и композиционных материалов, состоящий в минимизации частотных характеристик в зависимости от жесткостных характеристик подшипниковых опор, редукторов и т. д., позволивший получать модели стенов с высокими динамическими характеристиками. Проведено экспериментальное исследование натурных трехслойных композиционных цилиндрических оболочек при локальном нагружении, позволившее определить перемещения трехслойной оболочки и обжатие заполнителя по толщине.

Ключевые слова: композиционные материалы, программы, статическое и динамическое нагружение, нелинейность, лопасти винтовентилятора, многостепенные динамические стеноды, эксперименты.

Хайрнасов Камиль Зайнутдинович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры железобетонных и каменных конструкций; e-mail: kamilh@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0003-0111-2947>; AuthorID: 600738



для цитирования: Хайрнасов К. З. Математическое моделирование конструкций из однородных и композиционных материалов и их поведение при различных внешних воздействиях // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 213–218. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.013. EDN: WADNMY

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

K. Z. Khayrnasov

MATHEMATICAL MODELING OF STRUCTURES FROM HOMOGENEOUS AND COMPOSITE MATERIALS AND THEIR BEHAVIOR UNDER VARIOUS EXTERNAL INFLUENCES

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russia

Abstract. This paper utilizes algorithms and a program developed by the author for studying shell structures made of homogeneous and multilayer composite materials under static and dynamic loads, in geometrically and physically nonlinear formulations. This program allows for determining the stress-strain state, natural frequencies, stability, and behavior under dynamic loads, as well as solving problems of plastic deformation during stamping. Based on the developed program, examples of calculating specific structures are provided: the behavior of toroidal shells under dynamic loads, issues of calculating and predicting the behavior of structures and components under dynamic loads, and under deep drawing conditions. A study of aircraft engine propeller blades using the naturally twisted rod method with various arrangements of the composite material base was conducted, which made it possible to develop recommendations for the optimal arrangement of the composite material in terms of strength and dynamic characteristics. Multi-stage dynamic stands made of composite materials are considered for the first time. A methodology has been developed for solving applied problems of multi-degree dynamic rigs for semi-naturalistic modeling made of composite materials. This methodology consists of a developed algorithm for the integrated calculation and study of the influence of the composite structure of the load-bearing layers and the filler on the stiffness and frequency characteristics of the rigs. A fundamentally new approach has been developed for the study of dynamic structures with components that are inadequately implemented in the finite element method (gearboxes, bearings, ring gears, and motors), by replacing them with rod systems of identical stiffness. Algorithms and programs for calculating the stiffness of gearboxes and bearings have been developed. A method for the numerical solution and optimization of layout schemes of multi-degree dynamic rigs for semi-naturalistic modeling made of homogeneous and composite materials has been developed and implemented. This method consists of minimizing the frequency characteristics depending on the stiffness characteristics of the bearing supports, gearboxes, etc., which made it possible to obtain rig models with high dynamic characteristics. A method for obtaining models of three-layer structures made of homogeneous and composite materials has been developed. An experimental study of full-scale three-layer composite cylindrical shells under local loading was conducted, which made it possible to determine the displacement of the three-layer shell and the compression of the filler by thickness.

Keywords: composite materials, programs, static and dynamic loading, nonlinearity, fan blades, multi-stage dynamic stands, experiments.

Kamil Z. Khayrnasov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor; e-mail: kamilh@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0003-0111-2947>; AuthorID: 600738



to cite this article: Khayrnasov K. Z. Mathematical modeling of structures from homogeneous and composite materials and their behavior under various external influences // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I. Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 213–218. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.013

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Автор единолично выполнил исследование и подготовил рукопись, внёс определяющий вклад в содержание статьи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Автор заявляет об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The author conducted the research and prepared the manuscript alone, making a significant contribution to the content of the article.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Образцов И. Ф., Вольмир А. С., Хайрнас К. З. Тороидальные оболочки: запаздывающие катастрофы при динамическом нагружении // Доклады АН СССР. – 1982. – Т. 266, № 6. – С. 1343–1346.
2. Вольмир А. С., Хайрнас К. З. Устойчивость тороидальных композитных оболочек // Механика композиционных материалов. – 1982. – № 3.
3. Хайрнас К. З. Исследование частотных характеристик лопастей двигателей из композиционного материала // Вестник Чувашского государственного педагогического университета. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – 3(25). – С. 61–67.
4. Хайрнас К. З. Исследование напряженно-деформированного состояния лопастей двигателей из композиционного материала // Вестник Чувашского государственного педагогического университета. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – 4(26). – С. 61–67.
5. *Khayrnasov K. Z. Mathematical Modeling of Dynamic Stability of Shell Structures under Large Elastoplastic Deformations // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. 991. – P. 012042.*

Received: 10.03.26;

accepted: 19.05.26;

published: 01.07.26.

6. *Khayrnasov K. Z.* Mathematical Modeling of Shell Configurations Made of Homogeneous and Composite Materials Experiencing Intensive Short Actions and Large Displacements // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. 991. – P. 012043.
7. *Khayrnasov K. Z.* Methodology for Calculating the Stress-Strain State of a Robotic System Made of Composite Materials // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – Vol. 675. – P. 012028.
8. *Khayrnasov K. Z.* Modeling and Determination of Frequency Characteristics of Robotic Structures Made of Composite Materials // Textile Industry Technology. – 2019. – 5(383). – P. 65–69.
9. *Khayrnasov K. Z.* Modeling and Calculation of Three-Layer Composite Floor Slabs // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1425. – P. 012168.
10. *Khayrnasov K. Z.* Robotic Systems: Optimization of Stiffness Characteristics // Amazonia Investiga. – 2020. – Vol. 9, no. 25. – P. 310–316.
11. *Khayrnasov K. Z.* Composite Materials in Aircraft Engine Blades // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2022. – No. 1.
12. *Khayrnasov K. Z.* Methodology for Modeling Mechanical Behavior and Determining the Complex Stress-Strain State of a Semi-Natural Modeling Stand Made of a Composite Material under Dynamic Loading // Journal of Theoretical and Applied Information Technology. – 2023. – Vol. 101, no. 24. – P. 8080–8092.
13. *Khayrnasov K. Z.* Modeling, Calculation and Analysis of a Robotic Structure Made of Composite Material under Dynamic Influence // Journal of Theoretical and Applied Information Technology. – 2023. – Vol. 101, no. 24. – P. 8127–8145.
14. *Khayrnasov K. Z.* Bearing Capacity of Building Structures Reinforced with Composite Materials // E3S Web of Conferences. Vol. 533. – 2024. – P. 02015.
15. *Khayrnasov K. Z.* Methods for Analyzing Robotic Systems Made of Composite Materials // International Journal of Engineering Trends and Technology. – 2024. – Vol. 72, no. 3. – P. 208–217.
16. *Khayrnasov K. Z.* Modeling and Analysis of Robotic System Made of Composite Material // Mechanics of Solids. – 2025. – Vol. 60, no. 3. – P. 2112–2118.

REFERENCES

1. *Obratsov I. F., Volmir A. S., Khayrnasov K. Z.* Toroidal Shells: Delay Catastrophes under Dynamic Loading // Doklady Akademii Nauk SSSR. – 1982. – Vol. 266, no. 6. – P. 1343–1346.
2. *Volmir A. S., Khayrnasov K. Z.* Stability of Toroidal Composite Shells // Mechanics of Composite Materials. – 1982. – No. 3.
3. *Khayrnasov K. Z.* Investigation of Frequency Characteristics of Engine Blades Made of Composite Material // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of the Limiting State. – 2015. – 3(25). – P. 61–67.
4. *Khayrnasov K. Z.* Investigation of the Stress-Strain State of Engine Blades Made of Composite Material // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of the Limiting State. – 2015. – 4(26). – P. 61–67.
5. *Khayrnasov K. Z.* Mathematical Modeling of Dynamic Stability of Shell Structures under Large Elastoplastic Deformations // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. 991. – P. 012042.

6. *Khayrnasov K. Z.* Mathematical Modeling of Shell Configurations Made of Homogeneous and Composite Materials Experiencing Intensive Short Actions and Large Displacements // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. 991. – P. 012043.
7. *Khayrnasov K. Z.* Methodology for Calculating the Stress-Strain State of a Robotic System Made of Composite Materials // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – Vol. 675. – P. 012028.
8. *Khayrnasov K. Z.* Modeling and Determination of Frequency Characteristics of Robotic Structures Made of Composite Materials // Textile Industry Technology. – 2019. – 5(383). – P. 65–69.
9. *Khayrnasov K. Z.* Modeling and Calculation of Three-Layer Composite Floor Slabs // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1425. – P. 012168.
10. *Khayrnasov K. Z.* Robotic Systems: Optimization of Stiffness Characteristics // Amazonia Investiga. – 2020. – Vol. 9, no. 25. – P. 310–316.
11. *Khayrnasov K. Z.* Composite Materials in Aircraft Engine Blades // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2022. – No. 1.
12. *Khayrnasov K. Z.* Methodology for Modeling Mechanical Behavior and Determining the Complex Stress-Strain State of a Semi-Natural Modeling Stand Made of a Composite Material under Dynamic Loading // Journal of Theoretical and Applied Information Technology. – 2023. – Vol. 101, no. 24. – P. 8080–8092.
13. *Khayrnasov K. Z.* Modeling, Calculation and Analysis of a Robotic Structure Made of Composite Material under Dynamic Influence // Journal of Theoretical and Applied Information Technology. – 2023. – Vol. 101, no. 24. – P. 8127–8145.
14. *Khayrnasov K. Z.* Bearing Capacity of Building Structures Reinforced with Composite Materials // E3S Web of Conferences. Vol. 533. – 2024. – P. 02015.
15. *Khayrnasov K. Z.* Methods for Analyzing Robotic Systems Made of Composite Materials // International Journal of Engineering Trends and Technology. – 2024. – Vol. 72, no. 3. – P. 208–217.
16. *Khayrnasov K. Z.* Modeling and Analysis of Robotic System Made of Composite Material // Mechanics of Solids. – 2025. – Vol. 60, no. 3. – P. 2112–2118.

Доль А. В.

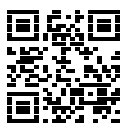
ИССЛЕДОВАНИЕ БРАХИОЦЕФАЛЬНЫХ АРТЕРИЙ

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени
Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия

Аннотация. Работа посвящена комплексному исследованию системы артериальных сосудов шеи и головы (брахиоцефальных артерий), включающей сонные артерии, базилярную артерию и сосуды виллизиева круга. предложена методология оценки рисков отрыва атеросклеротических бляшек и образования аневризм сосудов виллизиева круга на основе биомеханического моделирования при сочетанной патологии комплекса артерий шеи и головы, включающей поражение сонных артерий атеросклерозом, аплазию участков виллизиева и круга и синдром позвоночно-подключичного обкрадывания. Помимо комплексной оценки состояния пациента на основе имеющихся данных о патологиях артериальной системы в случаях с повышенным риском отрыва атеросклеротической бляшки методология включает этап уточняющего расчета в двумерной постановке, позволяющего уточнить степень риска и скорректировать результаты. Предложена методика полуавтоматического создания геометрических моделей на основе данных медицинского диагностического оборудования. Предложена концепция и проведена сборка мобильного испытательного стенда для испытаний на одноосное растяжение и сжатие. Стенд использован для проведения исследований механических характеристик артериальных стенок (здоровых и патологически измененных), а также атеросклеротических бляшек и их покрышек. Выполнена верификация граничных условий с использованием разработанного автором испытательного стенда для моделирования течения жидкостей по системе разветвляющихся сосудов. На основе численного моделирования проведена оценка риска образования аневризм в сосудах виллизиева круга, а также отрыва атеросклеротических бляшек. Представлены результаты разработки теоретических основ и методов практической реализации для системы поддержки принятия решений при сочетанной патологии участка сосудистого русла «сонные артерии-базилярная артерия-виллизиев круг». На основе предложенной методологии и разработанного прототипа проведена оценка рисков отрыва бляшек и образования аневризм для конкретного пациента с сочетанной патологией артерий шеи и головы, сделаны выводы о необходимости наблюдения и консервативного лечения без хирургического вмешательства, которые были подтверждены клинически.

Ключевые слова: артерия, Виллизиев круг, эксперимент, аневризма, бляшка, атеросклероз.

Доль Александр Викторович, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики; e-mail: dolav86@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0001-5842-1615>; AuthorID: 601135



для цитирования: Доль А. В. Исследование брахиоцефальных артерий // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 219–223. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.014. EDN: XICJPU

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

A. V. Dol

STUDY OF THE BRACHIOCEPHALIC ARTERIES

Saratov State University, Saratov, Russia

Abstract. The work is devoted to a comprehensive study of the arterial system of the neck and head (brachiocephalic arteries), including the carotid arteries, the basilar artery, and the vessels of the Circle of Willis. A methodology is proposed for assessing the risks of atherosclerotic plaque rupture and the formation of aneurysms in the vessels of the Circle of Willis based on biomechanical modeling in cases of combined pathology of the neck and head arterial system. This includes carotid artery atherosclerosis, aplasia of segments of the Circle of Willis, and subclavian steal syndrome. In addition to a comprehensive assessment of the patient's condition based on available data on arterial pathologies, in cases with an increased risk of plaque rupture, the methodology includes a stage of уточняющего (refined) calculation in a two-dimensional formulation, allowing for a more accurate risk assessment and adjustment of the results. A method for semi-automatic creation of geometric models based on data from medical diagnostic equipment is proposed. A concept is also presented and a mobile testing stand is developed for uniaxial tensile and compressive testing. The stand was used to study the mechanical characteristics of arterial walls (both healthy and pathologically altered), as well as atherosclerotic plaques and their fibrous caps. Boundary conditions were verified using the testing stand developed by the author to simulate fluid flow through a system of branching vessels. Based on numerical modeling, the risks of aneurysm formation in the vessels of the Circle of Willis and rupture of atherosclerotic plaques were assessed. The results of the development of theoretical foundations and practical implementation methods for a decision support system in cases of combined pathology of the vascular segment "carotid arteries – basilar artery – Circle of Willis" are presented. Based on the proposed methodology and the developed prototype, risk assessment of plaque rupture and aneurysm formation was performed for a specific patient with combined pathology of the neck and head arteries. Conclusions were drawn regarding the need for monitoring and conservative treatment without surgical intervention, which were subsequently confirmed clinically.

Keywords: artery, Circle of Willis, experiment, aneurysm, plaque, atherosclerosis.

Alexander V. Dol, PhD in Physics and Mathematics; e-mail: dolav86@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0001-5842-1615>; AuthorID: 601135



to cite this article: Dol A. V. Study of the brachiocephalic arteries // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 219–223. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.014

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. А. В. Доль — постановка задачи, анализ литературы, интерпретация результатов, подготовка текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена при поддержке Благотворительного фонда Владимира Потанина (проекты № ПР24-002612, ПР23-002167, АкаД21-000211, АкаД21-001423).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. Alexander V. Dol – formulated the research problem, analyzed the literature, interpreted the results, and prepared the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The work was supported by the Vladimir Potanin Charitable Foundation (projects No. PR24-002612, PR23-002167, AkaD21-000211, AkaD21-001423).

ЛИТЕРАТУРА

1. Доль А. В. Биомеханика артерий шеи и головы: развитие аневризм и отрыв атеросклеротических бляшек при сочетанных патологиях // Российский журнал биомеханики. – 2024. – Т. 28, № 3. – С. 25–38. – DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2024.3.02. – EDN: BWBEXL.
2. Dol A. V., Ivanov D. V., Fomkina O. A. Optimizing the process of developing human blood vessel models // Saratov Medical Journal. – 2020. – Vol. 1, no. 2. – e0201.
3. Доль А. В. Механические свойства атеросклеротических бляшек, покрышек и стенок артериальных сосудов: испытания на мобильном стенде // Российский журнал биомеханики. – 2023. – Т. 27, № 3. – С. 81–88. – DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2023.3.06. – EDN: ETVZOO.
4. Граничные условия на выходах при численном моделировании гемодинамики сонной артерии / А. В. Доль [и др.] // Российский журнал биомеханики. – 2021. – Т. 25, № 1. – С. 20–31. – DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2021.1.02. – EDN: IAICWU.
5. Ivanov D. V., Dol A. V. Influence of the internal carotid arteries stenosis on the hemodynamics of the Circle of Willis communicating arteries: a numerical study // Mechanics of Solids. – 2025. – Vol. 60, no. 2. – P. 1329–1339. – DOI: 10.1134/S0025654425601028. – EDN: JAGWIB.

Received: 10.03.26;

accepted: 19.05.26;

published: 01.07.26.

REFERENCES

1. *Dol A. V.* Biomechanics Cerebral and Carotid Arteries: Aneurysm Development and Atherosclerotic Plaque Detachment in the Presence of Combined Pathologies // Russian Journal of Biomechanics. – 2024. – Vol. 28, no. 3. – P. 19–30. – DOI: 10.15593/RJBiomech/2024.3.02. – EDN: BWBEXL.
2. *Dol A. V., Ivanov D. V., Fomkina O. A.* Optimizing the Process of Developing Human Blood Vessel Models // Saratov Medical Journal. – 2020. – Vol. 1, no. 2. – e0201.
3. *Dol A. V.* Mechanical Properties of Atherosclerotic Plaques, Caps and Walls of Arterial Vessels: A Mobile Test Bench Experiments // Russian Journal of Biomechanics. – 2023. – Vol. 27, no. 3. – P. 65–70. – DOI: 10.15593/RJBiomech/2023.3.06. – EDN: ETVZ00.
4. Boundary Conditions at the Outlets for Numerical Modeling of Carotid Artery Hemodynamics / *A. V. Dol [et al.]* // Russian Journal of Biomechanics. – 2021. – Vol. 25, no. 1. – P. 16–26. – DOI: 10.15593/RJBiomech/2021.1.02. – EDN: IAICWU.
5. *Ivanov D. V., Dol A. V.* Influence of the Internal Carotid Arteries Stenosis on the Hemodynamics of the Circle of Willis Communicating Arteries: A Numerical Study // Mechanics of Solids. – 2025. – Vol. 60, no. 2. – P. 1329–1339. – DOI: 10.1134/S0025654425601028. – EDN: JAGWIB.

Георгиевский Д. В.

ЧЕТВЁРТЫЙ И ПЯТЫЙ ПОСТУЛАТЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ: ЗАКОНЫ ИЛИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ?

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Аннотация. Вопросы аксиоматизации механики сплошной среды, в классической феноменологической трактовке которой присутствует континуум и, вообще говоря, отсутствуют понятия атомов и молекул, затрагивались во многих классических и общепризнанных в мире курсах. Данные вопросы восходят к проблеме строгой и внутренне корректной аксиоматизации физики, сформулированной Д. Гильбертом ещё на II Международном конгрессе математиков в Париже в 1900 году и известной как шестая проблема Гильберта. По словам А.Ю. Ишлинского, «механика Галилея – Ньютона до сих пор в должной мере не аксиоматизирована в отличие от геометрии, аксиоматизация которой была завершена великим математиком Д. Гильбертом... Тем не менее можно и нужно (настало тому время) построить классическую механику, как и геометрию, исходя из некоторого числа независимых постулатов и аксиом, установленных в результате обобщения практики.» В докладе единая интегральная запись постулатов механики сплошной среды в виде законов изменения (сохранения) тех или иных величин представляется в форме так называемой таблицы постулатов. Предполагается, что в сплошной среде реализуются взаимодействия как чисто механической, так и различной немеханической природы, описываемые скалярными, векторными и тензорными второго ранга энергетически сопряжёнными парами величин, одна из которых характеризует процесс, а другая отклик среды на этот процесс. На базе первых трёх строк таблицы постулатов обсуждается возможное построение четвёртой и пятой строк, соответствующих законам об изменении внутренней энергии и величины, которая в случае термодинамической пары «температура–энтропия» совпадает с энтропией. Показывается, что задание источников, потоков через границу и производств в четвёртой и пятой строках таблицы постулатов фактически делает эти строки определениями. Обобщаются известные в неизотермической механике принципы построения определяющих соотношений, связывающих зависимые и независимые параметры состояния в каждом из типов взаимодействий. Доклад сделан по материалам статей: 1. Georgievskii D.V. Two Thermodynamic Laws in Phenomenological Mechanics of Continuum: Postulates or Definitions ? // In: Giorgio I., Placidi L., Barchiesi E., Abali B.E., Altenbach H. (eds) Theoretical Analysis, Computations, and Experiments of Multiscale Materials. Ser. Advanced Structured Materials. Springer. 2022. P. 145-154. 2. Георгиевский Д.В. Таблица постулатов механики сплошной среды и принципы формирования ее строк // ПМТФ. 2024. Т. 65. № 6. С. 195-202.

Ключевые слова: постулат, аксиоматика, законы сохранения, интегральная форма, локальное уравнение, источник, поток, производство, внутренняя энергия, энергетическая сопряжённость, энтропия.

Георгиевский Дмитрий Владимирович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости, директор Института механики; e-mail: georgiev@mech.math.msu.su; <https://orcid.org/0000-0002-9385-1474>; AuthorID: 7196



для цитирования: Георгиевский Д. В. Четвёртый и пятый постулаты механики сплошной среды: законы или определения? // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 224–228. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.015. EDN: ZUGOLK

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

D. V. Georgievskii

THE FOURTH AND FIFTH POSTULATES OF CONTINUUM MECHANICS: LAWS OR DEFINITIONS?

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Abstract. The issues of axiomatization of continuum mechanics, in the classical phenomenological interpretation of which there is a continuum and, generally speaking, there are no concepts of atoms and molecules, have been touched upon in many classical and internationally recognized courses. These questions go back to the problem of strict and internally correct axiomatization of physics, formulated by D. Hilbert at the II International Congress of Mathematicians in Paris in 1900 and known as Hilbert's sixth problem. According to A.Yu. Ishlinsky, «Galileo–Newton mechanics has not yet been properly axiomatized, unlike geometry, the axiomatization of which was completed by the great mathematician D. Hilbert... Nevertheless, it is possible and necessary (the time has come) to build classical mechanics, as well as geometry, based on a number of independent postulates and axioms established as a result of generalization of practice.» In the report a single integral formulation of the postulates of continuum mechanics in the form of laws of change (conservation) is presented in the form of a so-called table of postulates. It is assumed that interactions of both purely mechanical and various non-mechanical nature are realized in a continuous medium, described by scalar, vector and tensor second-rank energetically conjugate pairs of quantities, one of which characterizes the process, and the other the response of the medium to this process. Based on the first three rows of the table of postulates, the possible construction of the fourth and fifth rows corresponding to the laws on the change of internal energy and magnitude, which in the case of the thermodynamic pair "temperature–entropy" coincides with entropy, is discussed. It is shown that specifying sources, flows across the border, and productions (outputs) in the fourth and fifth rows of the table of postulates actually makes these rows definitions. The principles known in nonisothermal mechanics for constructing constitutive relations linking dependent and independent state parameters in each type of interaction are generalized.

Keywords: postulate, axiomatics, conservation laws, integral form, local equation, source, flow, production (output), internal energy, energy conjugacy, entropy..

Dimitri V. Georgievskii, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; e-mail: georgiev@mech.math.msu.su; <https://orcid.org/0000-0002-9385-1474>; AuthorID: 7196



to cite this article: Georgievskii D.V. The fourth and fifth postulates of continuum mechanics: laws or definitions? // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 224–228. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.015

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Автор единолично выполнил исследование и подготовил рукопись, внёс определяющий вклад в содержание статьи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The author conducted the research and prepared the manuscript alone, making a significant contribution to the content of the article.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жермен П. Курс механики сплошных сред. Общая теория. – Москва : Высшая школа, 1983. – 399 с.
2. Gurtin M. E., Fried E., Anand L. The Mechanics and Thermodynamics of Continua. – Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2010.
3. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. – Москва : ЛЕНАНД, 2014. – 320 с.
4. Лурье А. И. Теория упругости. – Москва : Наука, 1970. – 940 с.
5. Malvern L. E. Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. – New Jersey : Prentice-Hall, 1969.
6. Maugin G. A. Continuum Mechanics Through the Twentieth Century: A Concise Historical Perspectives // Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 196. – Dordrecht : Springer, 2013.
7. Noll W. Foundations of Mechanics and Thermodynamics. – Berlin–Heidelberg–New York : Springer, 1974.
8. Reddy J. N. Introduction to Continuum Mechanics. – Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2013.
9. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. – Санкт-Петербург : Лань, 2004. – 640 с.
10. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – Москва : Наука, 1975. – 592 с.

Received: 10.03.26;

accepted: 19.05.26;

published: 01.07.26.

11. Ишлинский А. Ю. Механика: Идеи, задачи, приложения. – Москва : Наука, 1985. – 624 с.
12. Победря Б. Е., Георгиевский Д. В. Основы механики сплошной среды. – Москва : Физматлит, 2006. – 272 с.
13. Димитриенко Ю. И. Нелинейная механика сплошной среды. – Москва : Физматлит, 2009. – 624 с.
14. Нигматулин Р. И. Механика сплошной среды. – Москва : ГЭОТАР-Медиа, 2014. – 528 с.

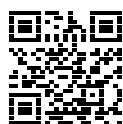
REFERENCES

1. *Germain P.* Course of Continuum Mechanics. General Theory. – Moscow : Vysshaya shkola, 1983. – 399 p.
2. *Gurtin M. E., Fried E., Anand L.* The Mechanics and Thermodynamics of Continua. – Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2010.
3. *Ilyushin A. A.* Continuum Mechanics. – Moscow : LENAND, 2014. – 320 p.
4. *Lur'e A. I.* Theory of Elasticity. – Moscow : Nauka, 1970. – 940 p.
5. *Malvern L. E.* Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. – New Jersey : Prentice-Hall, 1969.
6. *Maugin G. A.* Continuum Mechanics Through the Twentieth Century: A Concise Historical Perspectives // Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 196. – Dordrecht : Springer, 2013.
7. *Noll W.* Foundations of Mechanics and Thermodynamics. – Berlin–Heidelberg–New York : Springer, 1974.
8. *Reddy J. N.* Introduction to Continuum Mechanics. – Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2013.
9. *Sedov L. I.* Continuum Mechanics. Vol. 1. – Saint Petersburg : Lan', 2004. – 640 p.
10. *Truesdell C.* A First Course in Rational Continuum Mechanics. – Moscow : Nauka, 1975. – 592 p.
11. *Ishlinsky A. Y.* Mechanics: Ideas, Problems, Applications. – Moscow : Nauka, 1985. – 624 p.
12. *Pobedrya B. E., Georgievskii D. V.* Foundations of Continuum Mechanics. – Moscow : Fizmatlit, 2006. – 272 p.
13. *Dimitrienko Y. I.* Nonlinear Continuum Mechanics. – Moscow : Fizmatlit, 2009. – 624 p.
14. *Nigmatulin R. I.* Continuum Mechanics. – Moscow : GEOTAR-Media, 2014. – 528 p.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, ТЕРМОУПРУГОСТИ И ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПОКРЫТИЙ ВЫСОКОЙ ТОЧНОСТИ

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия
Аннотация. Излагается приближенный двусторонне асимптотический метод решения парных интегральных уравнений, к которым сводятся статические контактные задачи теории упругости, термоупругости и электроупругости для неоднородных (функционально-градиентных) по толщине покрытий, лежащих как на деформируемом, так и недеформируемом основании [1-10]. Трансформанты ядер парных интегральных уравнений контактных задач в общем случае строятся численно. На основании установленных аналитических свойств трансформант ядер строятся их высокоточные аппроксимации аналитическими выражениями специального вида. Для этих аппроксимаций ядер парных интегральных уравнений построены в явном виде замкнутые аналитические решения. Метод позволяет получить приближенные аналитические решения задач с высокой точностью для произвольных законов неоднородности. Анализируется использование для инженерных приложений упрощенных выражений характеристик контакта (сила, жесткость, характерный размер области контакта), найденных в явном аналитическом виде с использованием простейшей однопараметрической аппроксимации трансформанты ядра. Проиллюстрировано хорошее совпадение теоретических и экспериментальных данных, полученных в результате наноиндентирования тонких покрытий.

Ключевые слова: контактные задачи, двусторонне асимптотический метод, термоупругость, электроупругость, парные интегральные уравнения приближенные аналитические решения. Айзикович Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией функционально-градиентных и композиционных материалов; e-mail: saizikovich@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0002-2756-5752>; AuthorID: 3105



для цитирования: Айзикович С. М. Приближенные аналитические решения неклассических смешанных задач теории упругости, термоупругости и электроупругости для неоднородных покрытий высокой точности // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 229–232. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.016. EDN: SOPBKH

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

S. M. Aizikovich

APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF NONCLASSICAL MIXED
PROBLEMS OF ELASTICITY, THERMOELASTICITY, AND
ELECTROELASTICITY FOR INHOMOGENEOUS COATINGS WITH HIGH
ACCURACY

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia

Abstract. This paper presents an approximate, bilaterally asymptotic method for solving dual integral equations to which static contact problems of elasticity, thermoelasticity, and electroelasticity theory are reduced for coatings that are inhomogeneous (functionally graded) in thickness, lying on deformable or non-deformable foundations [1-10]. Transformers of the kernels of dual integral equations for contact problems are generally constructed numerically. Based on the established analytical properties of the kernel transforms, high-precision approximations are constructed using analytical expressions of a special type. For these approximations of the kernels of dual integral equations, closed-form analytical solutions are constructed explicitly. This method enables one to obtain approximate analytical solutions to problems with high accuracy for arbitrary inhomogeneity laws. The use of simplified expressions for contact characteristics (force, stiffness, and characteristic size of the contact region) found in explicit analytical form using a simple one-parameter approximation of the kernel transform is analyzed for engineering applications. Good agreement between theoretical and experimental data obtained through nanoindentation of thin coatings is illustrated.

Keywords: contact problems, bilateral asymptotic method, thermoelasticity, electroelasticity, paired integral equations, approximate analytical solutions.

Sergei M. Aizikovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Laboratory of Functional Gradient and Composite Materials; e-mail: saizikovich@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0002-2756-5752>; AuthorID: 3105



to cite this article: Aizikovich S. M. Approximate analytical solutions of nonclassical mixed problems of elasticity, thermoelasticity, and electroelasticity for inhomogeneous coatings with high accuracy // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I. Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 229–232. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.016

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Автор единолично выполнил исследование и подготовил рукопись, внёс определяющий вклад в содержание статьи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The author conducted the research and prepared the manuscript alone, making a significant contribution to the content of the article.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Indentation of a Piezoelectric FGM-Coated Half-Space by a Conical Conductive Punch: Approximated Analytical Solution / A. S. Vasiliev [et al.] // International Journal of Engineering Science. – 2024. – Vol. 205. – P. 104161. – DOI: 10.1016/j.ijengsci.2024.104161.
2. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M. Hot Indentation of a FGM-Coated Thermoelastic Half-Space by a Conical Punch: Approximated Analytical Solution of the Contact Problem // Composite Structures. – 2023. – Vol. 309. – P. 116612. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2022.116612.
3. Simplified Analytical Solution of the Contact Problem on Indentation of a Coated Half-Space by a Conical Punch / A. S. Vasiliev [et al.] // Mathematics. – 2020. – Vol. 8, no. 6. – P. 983. – DOI: 10.3390/math8060983.
4. Упрощенное аналитическое решение контактной задачи о вдавливании конического штампа в полупространство с покрытием / А. С. Васильев [и др.] // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2020. – 2(206). – С. 29–37. – DOI: 10.18522/1026-2237-2020-2-29-37.
5. Axisymmetric Indentation of an Electroelastic Piezoelectric Half-Space with Functionally Graded Piezoelectric Coating by a Circular Punch / S. S. Volkov [et al.] // Acta Mechanica. – 2019. – Vol. 230, no. 4. – P. 1289–1302. – DOI: 10.1007/s00707-017-2026-x.
6. Васильев А. С., Волков С. С., Айзикович С. М. Приближенное аналитическое решение задачи о вдавливании проводящего штампа в электроупругое полупространство с неоднородным покрытием // Доклады Академии Наук. Механика. – 2018. – Т. 478, № 1. – С. 34–39.
7. Indentation of a Hard Transversely Isotropic Functionally Graded Coating by a Conical Indenter / A. S. Vasiliev [et al.] // International Journal of Engineering Science. – 2017. – Vol. 112. – P. 63–75. – DOI: 10.1016/j.ijengsci.2016.12.002.

Received: 10.03.26;

accepted: 19.05.26;

published: 01.07.26.

8. Torsion of a Punch Attached to Transversely-Isotropic Half-Space with Functionally Graded Coating / A. S. Vasiliev [et al.] // International Journal of Engineering Science. – 2012. – Vol. 61. – P. 24–35. – DOI: 10.1016/j.ijengsci.2012.06.006.
9. Aizikovich S. M., Vasiliev A. S., Seleznev N. M. Inverse Analysis for Evaluation of the Shear Modulus of Inhomogeneous Media by Torsion Experiments // International Journal of Engineering Science. – 2010. – Vol. 48. – P. 936–942. – DOI: 10.1016/j.ijengsci.2010.05.013.
10. Айзикович С. М. Асимптотическое решение одного класса парных уравнений // Прикладная математика и механика. – 1990. – Т. 54, № 5. – С. 872–877.

REFERENCES

1. Indentation of a Piezoelectric FGM-Coated Half-Space by a Conical Conductive Punch: Approximated Analytical Solution / A. S. Vasiliev [et al.] // International Journal of Engineering Science. – 2024. – Vol. 205. – P. 104161. – DOI: 10.1016/j.ijengsci.2024.104161.
2. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M. Hot Indentation of a FGM-Coated Thermoelastic Half-Space by a Conical Punch: Approximated Analytical Solution of the Contact Problem // Composite Structures. – 2023. – Vol. 309. – P. 116612. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2022.116612.
3. Simplified Analytical Solution of the Contact Problem on Indentation of a Coated Half-Space by a Conical Punch / A. S. Vasiliev [et al.] // Mathematics. – 2020. – Vol. 8, no. 6. – P. 983. – DOI: 10.3390/math8060983.
4. A Simplified Analytical Solution of the Contact Problem of Indenting a Conical Stamp into a Coated Half-Space / A. S. Vasiliev [et al.] // News of Universities. North Caucasus Region. Natural Sciences. – 2020. – 2(206). – P. 29–37. – DOI: 10.18522/1026-2237-2020-2-29-37.
5. Axisymmetric Indentation of an Electroelastic Piezoelectric Half-Space with Functionally Graded Piezoelectric Coating by a Circular Punch / S. S. Volkov [et al.] // Acta Mechanica. – 2019. – Vol. 230, no. 4. – P. 1289–1302. – DOI: 10.1007/s00707-017-2026-x.
6. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M. Approximate Analytical Solution of the Problem of Indenting a Conductive Stamp into an Electroelastic Half-Space with a Non-Uniform Coating // Reports of the Academy of Sciences. Mechanics. – 2018. – Vol. 478, no. 1. – P. 34–39.
7. Indentation of a Hard Transversely Isotropic Functionally Graded Coating by a Conical Indenter / A. S. Vasiliev [et al.] // International Journal of Engineering Science. – 2017. – Vol. 112. – P. 63–75. – DOI: 10.1016/j.ijengsci.2016.12.002.
8. Torsion of a Punch Attached to Transversely-Isotropic Half-Space with Functionally Graded Coating / A. S. Vasiliev [et al.] // International Journal of Engineering Science. – 2012. – Vol. 61. – P. 24–35. – DOI: 10.1016/j.ijengsci.2012.06.006.
9. Aizikovich S. M., Vasiliev A. S., Seleznev N. M. Inverse Analysis for Evaluation of the Shear Modulus of Inhomogeneous Media by Torsion Experiments // International Journal of Engineering Science. – 2010. – Vol. 48. – P. 936–942. – DOI: 10.1016/j.ijengsci.2010.05.013.
10. Aizikovich S. M. An Asymptotic Solution of a Class of Coupled Equations // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1990. – Vol. 54, no. 5. – P. 719–724. – DOI: 10.1016/0021-8928(90)90125-T.

Кириллова И. В., Коссович Л. Ю.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧКАХ

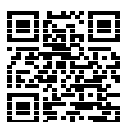
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени
Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия

Аннотация. Работа посвящена развитию асимптотической теории нестационарного напряжённо-деформированного состояния тонких упругих оболочек на примере волновых процессов в оболочках вращения произвольного профиля при ударных торцевых воздействиях. Представлены основные положения асимптотической теории. Теория основывается на базовых понятиях показателей изменяемости напряжённо-деформированного состояния по пространственным координатам и показателя динамичности по времени, позволяющих описать характерные свойства нестационарных волн в тонких телах, дополняя положения классических двумерных теорий. Используются схемы декомпозиции напряжённо-деформированного состояния на составляющие. Виды нестационарного напряжённо-деформированного состояния определяются типом граничных ударных воздействий. В случае ударных воздействий на торец выделены три: LT (продольное, тангенциального типа, при котором на торце отлично от нуля только продольное усилие), LM (продольное, изгибающего типа, при котором отличен от нуля на торце только изгибающий момент) и NW (нормальный тип воздействия, при котором отлична от нуля только перерезывающая сила). В случае нагрузок типа LT и LM появляются разрывы на фронтах волн расширения, а в случае нагрузки типа NW разрыв переносится фронтом волны сдвига. В работе представлены схемы декомпозиции нестационарного напряжённо-деформированного состояния тонких упругих оболочек вращения произвольного профиля при вышеперечисленных воздействиях. Асимптотический подход позволил построить единую оптимальную систему приближённых теорий, описывающих в совокупности нестационарное напряженно-деформированное состояние оболочек вращения. Сформулированы асимптотические оценки областей применимости составляющих нестационарного напряженно-деформированного состояния. Доказано совпадение решений для этих составляющих в областях согласования. Разработаны асимптотические методы решения краевых задач для эллиптического и гиперболического погранслоёв с учётом асимптотического представления геометрии передних волновых фронтов. Универсальность подхода продемонстрирована при исследовании классов задач для тонкостенных оболочек с разными геометрическими и механическими свойствами.

Ключевые слова: напряжённо-деформированное состояние, асимптотическая теория, эллиптический погранслой, гиперболический погранслой, параболический погранслой, ударное воздействие, фронт волны.

Кириллова Ирина Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент, директор образовательно-научного института наноструктур и биосистем; e-mail: iv@info.sgu.ru; <https://orcid.org/0000-0001-8053-3680>; AuthorID: 179980

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической теории упругости и биомеханики; e-mail: kossovichly@sgu.ru; <https://orcid.org/0000-0002-4775-7348>; AuthorID: 2935



для цитирования: Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Асимптотическая теория нестационарных процессов в тонких упругих оболочках // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 233–238. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.017. EDN: RNGQNA

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

I. V. Kirillova, L. Yu. Kossovich

ASYMPTOTIC THEORY OF NON-STATIONARY PROCESSES IN THIN ELASTIC SHELLS

Saratov State University, Saratov, Russia

Abstract. The work is devoted to the development of an asymptotic theory for the non-stationary stress strain state of thin elastic shells. Wave processes in shells of revolution of arbitrary form under impact end loading are considered. The main principles of the asymptotic theory are presented. The theory is based on the fundamental concepts of the variability indices of the stress strain state with respect to spatial coordinates and the dynamicity index with respect to time. This makes it possible to describe the characteristic properties of non-stationary waves in thin bodies, complementing the principles of classical two-dimensional theories. Decomposition schemes of the stress-strain state into components are employed. The characteristic types of non-stationary stress strain state are determined by the type of boundary impact loading. In the case of impact on the end face, three types are distinguished. LT loading is a longitudinal impact of a tangential type, where only the longitudinal stress resultant force is non-zero at the end. LM loading is a longitudinal impact of a bending type, where only the bending moment is non-zero at the end. NW loading is a normal impact, where only the shear force is non-zero at the end. In the case of LT and LM type loads, discontinuities appear on the longitudinal wave fronts. In the case of NW loading, the discontinuity is carried by the shear wave front. The work presents decomposition schemes for the non-stationary stress strain state of thin elastic shells of revolution of arbitrary form under the aforementioned loadings. The asymptotic approach have made it possible to construct a unified optimal system of approximate theories that collectively describe the nonstationary stress strain state of shells of revolution. Asymptotic estimates are formulated for the ranges of applicability of the components of the nonstationary stress strain state. The coincidence of the solutions for these components in the overlap regions is proved. Asymptotic methods are developed for solving boundary value problems for elliptic and hyperbolic boundary layers, taking into account the asymptotic representation of the geometry of the wave fronts. The universality of the approach is demonstrated in the study of classes of problems for thin walled elastic shells with different geometric and mechanical properties.

Keywords: Stress strain state, asymptotic theory, elliptic boundary layer, hyperbolic boundary layer, parabolic boundary layer, impact loading, wave front.

Irina V. Kirillova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences (PhD), Associate Professor, Director of the Educational and Research Institute of Nanostructures and Biosystems; e-mail: iv@info.sgu.ru; <https://orcid.org/0000-0001-8053-3680>; AuthorID: 179980

Leonid Yu. Kossovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences (Dr. habil.), Professor, Head of the Department of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics; e-mail: kossovichly@sgu.ru; <https://orcid.org/0000-0002-4775-7348>; AuthorID: 2935



to cite this article: Kirillova I. V., Kossovich L. Yu. Asymptotic theory of non-stationary processes in thin elastic shells // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I. Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 233–238. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.017

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. И. В. Кирилловой принадлежит формулирование цели и задач исследования, проведение исследований, анализ и интерпретация полученных результатов, написание текста рукописи; Л. Ю. Коссовичу принадлежит разработка методологии исследования, а также участие в анализе, верификации и интерпретации полученных результатов, редактирование текста рукописи, согласование финальной версии рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. I. V. Kirillova was responsible for formulating the aim and objectives of the study, conducting the research, analyzing and interpreting the obtained results, and writing the manuscript text. L. Yu. Kossovich was responsible for developing the research methodology, as well as participating in the analysis, verification, and interpretation of the obtained results, editing the manuscript text, and approving the final version of the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nigul U.* Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates // Int. J. Solid and Structures. – 1969. – Vol. 5, no. 6. – P. 607–627.
2. Гольденвейзер А. Л. Теория тонких упругих оболочек. – М. : Наука, 1976. – 512 с.

Received: 10.03.26;

accepted: 19.05.26;

published: 01.07.26.

3. Коссович Л. Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. – Саратов : Изд-во Саратовского университета, 1986. – 176 с.
4. *Kaplunov J. D., Nolde E. V., Kossovich L. Y.* Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. – San Diego : Academic Press, 1998. – 226 p.
5. Кириллова И. В. Асимптотическая теория гиперболического погранслоя в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях тангенциального типа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Т. 24, № 2. – С. 222–230. – DOI: 10.18500/1816-9791-2024-24-2-222-230.
6. Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Асимптотическая теория волновых процессов в оболочках вращения при ударных поверхностных и торцевых нормальных воздействиях // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2022. – № 2. – С. 35–49. – DOI: 10.31857/S057232992202012X.
7. *Kirillova I. V.* Asymptotic model of non-stationary processes in shells of revolution under the action of end impact loads of bending type // Mechanics of Solids. – 2024. – Vol. 59, no. 7. – P. 3756–3768. – DOI: 10.1134/S0025654424606591.
8. Кириллова И. В. Гиперболический погранслой в окрестности фронта волны сдвига в оболочках вращения // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Т. 24, № 3. – С. 394–401. – DOI: 10.18500/1816-9791-2024-24-3-394-401.
9. Кириллова И. В. Эллиптический погранслой в оболочках вращения при ударных поверхностных воздействиях нормального типа // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2024. – № 5. – С. 48–59. – DOI: 10.31857/S1026351924050045.
10. Новожилов В. В., Слепян Л. И. О принципе Сен-Венана в динамике стержней // ПММ. – 1965. – Т. 29, № 2. – С. 261–281.
11. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. – Ленинград : Судостроение, 1972. – 374 с.

REFERENCES

1. *Nigul U.* Regions of Effective Application of the Methods of Three-Dimensional and Two-Dimensional Analysis of Transient Stress Waves in Shells and Plates // International Journal of Solids and Structures. – 1969. – Vol. 5, no. 6. – P. 607–627.
2. *Goldenveizer A. L.* Theory of Elastic Thin Shells. – Oxford : Pergamon Press, 1961. – 658 p. – Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1976. 512 p.
3. *Kossovich L. Y.* Nestatsionarnye zadachi teorii uprugikh tonkikh obolochek [Non-stationary Problems of the Theory of Elastic Thin Shells]. – Saratov : Saratov State University Publ., 1986. – 176 p. – EDN: VIOSWL. – (in Russian).
4. *Kaplunov J. D., Nolde E. V., Kossovich L. Y.* Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. – San Diego et al. : Academic Press, 1998. – 226 p. – DOI: 10.1016/C2009-0-20923-8. – EDN: WNSAFB.
5. *Kirillova I. V.* Asymptotic Theory of the Hyperbolic Boundary Layer in Shells of Revolution at Shock Edge Loading of the Tangential Type // Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics. – 2024. – Vol. 24, no. 2. –

- P. 222–230. – DOI: 10.18500/1816-9791-2024-24-2-222-230. – EDN: SFYWBV. – (in Russian).
6. *Kirillova I. V., Kossovich L. Y.* Asymptotic Theory of Wave Processes in Shells of Revolution under Surface Impact and Normal End Actions // *Mechanics of Solids*. – 2022. – Vol. 57, no. 2. – P. 232–243. – DOI: 10.3103/S0025654422020078.
 7. *Kirillova I. V.* Asymptotic Model of Non-Stationary Processes in Shells of Revolution under the Action of End Impact Loads of Bending Type // *Mechanics of Solids*. – 2024. – Vol. 59, no. 7. – P. 3756–3768. – DOI: 10.1134/S0025654424606591.
 8. *Kirillova I. V.* Hyperbolic Boundary Layer in the Vicinity of the Shear Wave Front in Shells of Revolution // *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. – 2024. – Vol. 24, no. 3. – P. 394–401. – DOI: 10.18500/1816-9791-2024-24-3-394-401. – EDN: JMEGQP. – (in Russian).
 9. *Kirillova I. V.* Elliptic Boundary Layer in Shells of Revolution under Surface Shock Loading of Normal Type // *Mechanics of Solids*. – 2024. – Vol. 59, no. 5. – P. 2686–2693. – DOI: 10.1134/S0025654424604397.
 10. *Novozhilov V. V., Slepian L. I.* On Saint-Venant's Principle in the Dynamics of Beams // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 1965. – Vol. 29, no. 2. – P. 293–315. – DOI: 10.1016/0021-8928(65)90032-8.
 11. *Slepian L. I.* Nestatsionarnye uprugie volny [Unsteady Elastic Waves]. – Leningrad : Sudostroenie, 1972. – 374 p. – (in Russian).

УЧЕТ КВАДРАТИЧНОГО И КУБИЧНОГО ИНВАРИАНТОВ ТЕНЗОРА ДЕФОРМАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Российский университет транспорта РУТ-МИИТ, Москва, Россия

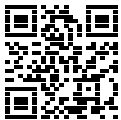
Аннотация. Динамическое уравнение в перемещениях теории упругости не учитывает явно деформации сдвига. Их косвенный учет мог бы производиться через выражение для коэффициента объемного расширения, но его упрощают до оператора дивергенции. Поэтому для конструкций и сооружений, работающих в основном на сдвиг, решение динамического уравнения в перемещениях не дает правильного результата. Л. И. Седов дал полное выражение для коэффициента объемного расширения θ для задач теории упругости, содержащее линейный инвариант — оператор дивергенции, а также квадратичный I_2 и кубический I_3 инварианты тензора деформации, которое учитывает деформации сдвига. Он отметил, что учет только слагаемого с оператором дивергенции при расчете объемного коэффициента расширения следует рассматривать приближенным вычислением. Л. И. Седов опирался на уравнение неразрывности

$$\partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z + I_2 + I_3 = 0,$$

выведенное Эйлером в 1752 г. Автор доклада повторил вывод В.И. Смирнова динамического уравнения в перемещениях с сохранением всех трех инвариантов. Оно получило вид неоднородного волнового уравнения. В неоднородную источниковую часть вошли квадратичный и кубический инварианты. Чем больше их величины, тем большую амплитуду раскочки будут давать решения этого уравнения. Уничтожение квадратичного и кубического инвариантов при выводе динамического уравнения занижает интенсивность возможных автоколебаний, способных привести к разрушению. В особенности учет квадратичного и кубического инвариантов важен в сейсмологии в связи с обеспечением безопасности строений и в других чрезвычайных ситуациях.

Ключевые слова: деформации сдвига, уравнение неразрывности, волновое уравнение, генерация колебаний.

Овсянников Владислав Михайлович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры водных путей, портов и портового оборудования; e-mail: OvsyannikovVM@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0002-6868-6446>; AuthorID: 7894



для цитирования: Овсянников В. М. Учет квадратичного и кубического инвариантов тензора деформации в динамическом уравнении в перемещениях теории упругости // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 239–242. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.018. EDN: LFAUIS

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

V. M. Ovsyannikov

TAKING INTO ACCOUNT THE QUADRATIC AND CUBIC INVARIANTS OF THE STRAIN TENSOR IN THE DYNAMIC EQUATION IN DISPLACEMENTS OF THE THEORY OF ELASTICITY

Russian University of Transport RUT (MIIT), Moscow, Russia

Abstract. The aim of the study is to take into account shear deformations in the continuity equation. The continuity equation for hydrodynamics and elasticity theory was derived by Euler in 1752, taking into account the tensile and shear deformations of the control figure. Euler reported his results to the Royal Prussian Academy of Sciences. To simplify the formulas for the initial period of the formation of continuum mechanics, Euler eliminated the terms containing shear deformations. They were included in the second and third invariants of the strain rate tensor of Hydrodynamics and the strain tensor of Elasticity Theory. In the continuity equation, only the first invariant remains, which contains the divergence operator of the velocity vector or displacement vector. Only tensile and compressive strains were taken into account.

Now there is a need for accurate calculations of problems in Hydrodynamics and Elasticity Theory. L. I. Sedov in his textbook "Continuum Mechanics" pointed out the need to take into account the second and third invariants of the strain tensor in the exact expression for the coefficient of volumetric expansion of elasticity theory. The textbook "Course of Higher Mathematics" by V.I. Smirnov contains the derivation of the equation of dynamics in displacements for the Theory of Elasticity. It has the form of an inhomogeneous wave equation. V.I. Smirnov did not take into account the second and third invariants of the strain tensor. Taking into account the second and third invariants of the strain tensor made it possible to obtain a non-uniform wave equation of dynamics in displacements, in which the non-uniform part increased and increased the generation of vibrations of the building. Carrying out calculations without taking into account the second and third invariants is dangerous. A large correction when taking into account the second and third invariants occurs for buildings that undergo large shear deformations. These are domes and shells that have thin walls.

Modern lightweight building materials make it possible to construct gigantic buildings with thin walls. Their calculation must take into account the shear deformations, which are reflected in the second and third invariants of the deformation tensor. As a result of the study, the physical meaning of the terms of the continuity equation, which contain the second and third invariants, was understood. The second and third invariants are the sources of wave generation in the wave equation.

Keywords: shear deformations, continuity equation, wave equation, oscillation generation.

Vladislav M. Ovsyannikov, Doctor of Technical Sciences, Professor; professor at the Russian University of Transport RUT (МИИТ); e-mail: OvsyannikovVM@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0002-6868-6446>; AuthorID: 7894



to cite this article: Ovsyannikov V. M. Taking into account the quadratic and cubic invariants of the strain tensor in the dynamic equation in displacements of the theory of elasticity // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 239–242. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.018

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. В. М. Овсянников написание текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, обзор литературы по теме статьи, проведение расчетов, редактирование текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Автор заявляет об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. V. M. Ovsyannikov writing the text of the manuscript, agreeing on the final version of the manuscript, reviewing the literature on the topic of the article, editing the text of the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Euler L. Principia motus fluidorum. Pars prior* // *Novi Commentarii Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae*. – 1761. – Vol. 6. – P. 271–311. – Opera omnia, Ser. II, Vol. 13, pp. 1–369.
2. *Euler L. Commentationes Mechanicae ad Theoriam Corporum Pertinentes. Volumen Prius* / ed. by C. A. Truesdell. – Lausannae, 1954.
3. *Euler L. Principia motus fluidorum*. – Moscow : Sputnik+, 2018. – 94 p. – *Perevod s latyni nachal'nykh razdelov doklada 1752 g. v Berlinskoi AN Ivanovoi, E. V., Ovsyannikova, V. M.*
4. Овсянников В. М. Сопоставление дополнительных слагаемых второго порядка малости для конечно-разностных уравнений Эйлера и малых добавок в регуляризованных уравнениях гидродинамики // *ЖВМиМФ*. – 2017. – Т. 57, № 5. – С. 876–880.
5. Овсянников В. М. Уравнение неразрывности Эйлера с членами высокого порядка малости по времени течения // *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.* – 2020. – Т. 182. – С. 95–100. – DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-95-100.

Received: 10.03.26;

accepted: 19.05.26;

published: 01.07.26.

6. Овсянников В. М. Использование геометрических свойств трех инвариантов в волновых задачах гидродинамики и электродинамики // Известия РАН. Серия физическая. – 2024. – Т. 88, № 1. – С. 138–147.
7. Овсянников В. М. Использование геометрических свойств трех инвариантов в волновом уравнении для напряженности электрического поля // Известия РАН. Серия физическая. – 2025. – Т. 89, № 2. – С. 164–171.
8. Овсянников В. М. Учет высших инвариантов тензора деформаций в задачах теории упругости // Вестник гражданских инженеров. – 2025. – 3(110). – С. 68–73.

REFERENCES

1. *Euler L.* Principia motus fluidorum. Pars prior // Novi Commentarii Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae. – 1761. – Vol. 6. – P. 271–311. – Opera omnia, Ser. II, Vol. 13, pp. 1–369.
2. *Euler L.* Commentationes Mechanicae ad Theoriam Corporum Pertinentes. Volumen Prius / ed. by C. A. Truesdell. – Lausannae, 1954.
3. *Euler L.* Principia Motus Fluidorum. – Moscow : Sputnik+, 2018. – 94 p. – Russian translation of the initial sections of the 1752 report to the Berlin Academy of Sciences by Ivanova, E. V. and Ovsyannikov, V. M.
4. *Ovsyannikov V. M.* Comparison of Additional Second-Order Terms in Finite-Difference Euler Equations and Regularized Fluid Dynamics Equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2017. – Vol. 57, no. 5. – P. 876–880. – DOI: 10.1134/S0965542517050098.
5. *Ovsyannikov V. M.* Euler Continuity Equation with High-Order Term in Time // Journal of Mathematical Sciences. – 2023. – Vol. 277, no. 5. – P. 798–803. – DOI: 10.1007/s10958-023-06888-y.
6. *Ovsyannikov V. M.* Using the Geometric Properties of Three Invariants in Wave Problems of Hydrodynamics and Electrodynamics // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. – 2024. – Vol. 88, no. 1. – P. 119–126.
7. *Ovsyannikov V. M.* Using the Geometric Properties of Three Invariants in the Wave Equation for the Intensity of an Electric Field // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. – 2025. – Vol. 89, no. 2. – P. 305–311.
8. *Ovsyannikov V. M.* Taking into Account Higher Invariants of the Strain Tensor in Elasticity Problems // Civil Engineers' Bulletin. – 2025. – 3(110). – P. 68–73. – (in Russian).

Модестов К. А.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ И НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ В ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕДАХ, СВОЙСТВА КОТОРЫХ МОДЕЛИРУЮТСЯ ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

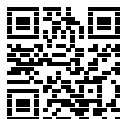
Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия
Национальный исследовательский Московский государственный строительный
университет, Москва, Россия

Аннотация. В работе выполнено моделирование и проведён анализ распространения волн в средах, наследственно-упругие свойства которых описываются с помощью моделей Максвелла, Кельвина-Фойгта и стандартного линейного твёрдого тела с производными дробного порядка. Задачами исследования являются: математическое моделирование эволюции коэффициента Пуассона; анализ распространения установившихся гармонических волн в трёхмерных средах; анализ распространения установившихся гармонических волн в одномерных средах; анализ распространения нестационарных волн напряжений в одномерных средах; моделирование распространения нестационарных волн напряжений с использованием лучевых разложений. Разработана методика выражения временных зависимостей коэффициента Пуассона для процессов релаксации и ползучести через функции Гельфанда-Шилова и Миттаг-Леффлёра. С использованием данной методики получены коэффициенты Пуассона для 16 моделей, в которых 4 модуля поочередно задаются моделями Скотт-Блэра, Максвелла, Кельвина-Фойгта и стандартного линейного твёрдого тела при отсутствии релаксации объёмного модуля [1]. Получены точные аналитические выражения для частотных зависимостей скорости, коэффициента затухания и логарифмического декремента затухания установившихся гармонических волн в трёхмерных [2,3] и одномерных [4] вязкоупругих средах, описываемых обобщёнными дробными моделями Максвелла, Кельвина-Фойгта и стандартного линейного твёрдого тела, моделирующих различные модули при отсутствии релаксации объёмного модуля, построены графики данных зависимостей, найдены асимптотические значения вышеперечисленных волновых характеристик в пределе бесконечно малых и бесконечно больших частот. Исследовано распространение волн напряжений в наследственно упругих стержнях для случая, когда оператор модуля Юнга описывается моделью стандартного линейного твёрдого тела с дробными производными без учета объёмной релаксации [5]. Волны напряжений возбуждаются путем приложения к краю полубесконечного стержня постоянной нагрузки с помощью функции Хевисайда или импульсной нагрузки с помощью дельта-функции Дирака. Решение ищется с помощью преобразования Лапласа с последующим численным анализом. Для частных случаев получены аналитические решения, а в общем случае задача была решена численно. Для различных моментов времени и значений параметров дробности построены графики зависимости напряжений от координаты. Разработано обобщение лучевого разложения волнового поля в окрестности волнового фронта в стержнях

в асимптотический знакопеременный ряд по степеням сопутствующего времени с коэффициентами, зависящими от пространственной координаты, на случай слабо-сингулярных ядер ползучести. С использованием данного метода получены обобщённые лучевые разложения для моделей Максвелла, стандартного линейного твёрдого тела и для общего случая чисто волновых моделей с дробной производной порядка $1/2$ для приложенных к левому концу стержня постоянной и импульсной нагрузок. Показан механизм получения обобщённого лучевого ряда для случая произвольной нагрузки. Проведена численная валидация полученных результатов.

Ключевые слова: операторы дробного порядка, наследственная механика, дисперсия и затухание волн, нестационарные волны напряжений, прифронтная асимптотика.

Модестов Константин Анатольевич, старший преподаватель кафедры общей и прикладной физики; e-mail: modestovk@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0003-4596-2652>; AuthorID: 635355



для цитирования: Модестов К. А. Гармонические и нестационарные волны в вязкоупругих средах, свойства которых моделируются операторами дробного порядка // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 243–247. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.020. EDN: JIZA AK

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

K. A. Modestov

HARMONIC AND TRANSIENT WAVES IN VISCOELASTIC MEDIA, THE PROPERTIES OF WHICH ARE DESCRIBED BY FRACTIONAL ORDER OPERATORS

I. Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia

I.N. National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract. In this work, modeling and analysis of wave propagation are carried out in media whose hereditary-elastic properties are described using the Maxwell, Kelvin–Voigt, and standard linear solid models with fractional-order derivatives. The objectives of the study are: mathematical modeling of the evolution of Poisson’s ratio; analysis of the steady-state harmonic wave propagation in three-dimensional media; analysis of the steady-state harmonic wave propagation in one-dimensional media; analysis of the transient stress wave propagation in one-dimensional media; modeling the propagation of transient stress waves using ray expansions. A methodology has been developed to express the time-dependence of the Poisson’s ratio for relaxation and creep processes using the Gelfand-Shilov and Mittag-Leffler functions. Using this methodology, the Poisson ratio has been obtained for 16 models, in which 4 moduli are successively described by Scott-Blair, Maxwell, Kelvin–Voigt, and standard linear solid models, assuming no relaxation of the bulk modulus [1]. Exact analytical expressions have been derived for the frequency-dependent behavior of velocity, attenuation coefficient, and logarithmic decrement of attenuation of steady-state harmonic waves in three-dimensional [2, 3] and one-dimensional [4] viscoelastic media described by the generalized fractional Maxwell, Kelvin-Voigt and standard linear solid models that represent various moduli under the assumption of no bulk modulus relaxation. Graphs of these dependencies have been plotted, and asymptotic values of the aforementioned wave characteristics have been found in the limits of infinitely small and infinitely large frequencies. The propagation of stress waves in hereditarily elastic rods has been studied for the case where the Young’s modulus operator is described by the standard linear solid model with fractional derivatives, neglecting bulk relaxation [5]. Stress waves are excited by applying a constant load to the end of a semi-infinite rod via the Heaviside function or an impulsive load using the Dirac delta function. The solution is sought via the Laplace transform, followed by numerical analysis. Analytical solutions have been found for particular cases, while the general case has been solved numerically. Graphs of stress versus coordinate have been plotted for various time instants and fractional parameter values. A generalization of the ray expansion of the wave field in the vicinity of the wavefront in rods has been developed into an asymptotic alternating series in powers of the associated time, with coefficients depending on the spatial coordinate, extended to the case of weakly singular creep kernels. Using this method, generalized ray expansions have been obtained for the Maxwell model, the standard linear solid model, and for the general case of purely wave models with a fractional derivative of order $1/2$, under constant and impulsive loads applied to the left end of the rod.

The mechanism for obtaining a generalized ray series for an arbitrary load has been demonstrated. Numerical validation of the results obtained has been carried out.

Keywords: fractional-order operators, hereditary mechanics, dispersion and attenuation of waves, nonstationary stress waves, near-front asymptotics.

Konstantin A. Modestov, Senior Lecturer at the Department of General and Applied Physics; e-mail: modestovk@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0003-4596-2652>; AuthorID: 635355



to cite this article: Modestov K. A. Harmonic and transient waves in viscoelastic media, the properties of which are described by fractional order operators // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I. Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 243–247. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. К. А. Модестов – написание текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, обзор литературы по теме статьи, проведение численных экспериментов, редактирование текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Данные исследования поддержаны Российским научным фондом, проект № 25-11-00140.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. K. A. Modestov – writing the manuscript text, approval of the final version of the manuscript, review of the literature on the topic of the article, conducting numerical experiments, editing the manuscript text.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This research was supported by the Russian Science Foundation, project No. 25-11-00140.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shitikova M. V., Modestov K. A.* Mathematical modelling of viscoelastic media without bulk relaxation via fractional calculus approach // *Mathematics*. – 2025. – Vol. 13, no. 3. – P. 350. – DOI: 10.3390/math13030350.
2. Модестов К. А., Шитикова М. В. Распространение гармонических волн в вязкоупругих средах, описываемых моделями с дробными производными // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. – 2025. – Т. 25, № 2. – С. 214–230. – DOI: 10.18500/1816-9791-2025-25-2-214-230. – EDN: PVASPW.
3. *Shitikova M. V., Modestov K. A.* Analysis of harmonic wave propagation in fractional derivative viscoelastic media based on time-dependent modulus of the P-wave // *Mechanics of Solids*. – 2024. – Vol. 59, no. 8. – P. 3949–3967. – DOI: 10.1134/S0025654424607079.

Received: 10.02.26;

accepted: 25.05.26;

published: 01.07.26.

4. *Shitikova M. V., Modestov K. A.* Analysis of harmonic wave propagation in viscoelastic rods via fractional derivative models // *Mechanics of Solids*. – 2026. – Vol. 61, no. 1. – PaperID 62. – DOI: 10.1134/S0025654426600261.
5. Шитикова М. В., Модестов К. А. Анализ распространения волн напряжений в наследственно упругих стержнях на основе модели стандартного линейного тела с дробными производными // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*. – 2026. – Т. 30, № 2.

REFERENCES

1. *Shitikova M. V., Modestov K. A.* Mathematical Modelling of Viscoelastic Media without Bulk Relaxation via Fractional Calculus Approach // *Mathematics*. – 2025. – Vol. 13, no. 3. – P. 350. – DOI: 10.3390/math13030350.
2. *Modestov K. A., Shitikova M. V.* Harmonic Wave Propagation in Viscoelastic Media Modelled via Fractional Derivative Models // *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. – 2025. – Vol. 25, no. 2. – P. 214–230. – DOI: 10.18500/1816-9791-2025-25-2-214-230. – (in Russian).
3. *Shitikova M. V., Modestov K. A.* Analysis of Harmonic Wave Propagation in Fractional Derivative Viscoelastic Media Based on Time-Dependent Modulus of the P-Wave // *Mechanics of Solids*. – 2024. – Vol. 59, no. 8. – P. 3949–3967. – DOI: 10.1134/S0025654424607079.
4. *Shitikova M. V., Modestov K. A.* Analysis of Harmonic Wave Propagation in Viscoelastic Rods via Fractional Derivative Models // *Mechanics of Solids*. – 2026. – Vol. 61, no. 1. – PaperID 62. – DOI: 10.1134/S0025654426600261.
5. *Shitikova M. V., Modestov K. A.* Analysis of Stress Wave Propagation in Hereditarily Elastic Rods via the Fractional Derivative Standard Linear Solid Model // *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya: Fiziko-Matematicheskie Nauki*. – 2026. – Vol. 30, no. 2. – (in Russian).

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Алексеев Андрей Алексеевич (alexeev@bk.ru) – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета, г. Тверь, Россия.

Богданов Андрей Николаевич (bogdanov@imes.msu.ru) – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории газодинамики взрыва и реагирующих систем Научно-исследовательского института механики МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Буренин Анатолий Александрович (aab@imim.ru) – член-корреспондент РАН, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Власов Александр Николаевич (bah1955@yandex.ru) – доктор технических наук, директор Института прикладной механики РАН (ИПРИМ РАН) , г. Москва.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Гузев Михаил Александрович (guzev@iasp.dvo.ru) – академик РАН, Институт прикладной математики ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Иванов Дмитрий Валерьевич (ivanovdv.84@ya.ru) – профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@ Rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Келлер Илья Эрнстович (kie@icmm.ru) – доктор физико-математических наук, доцент, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Коссович Леонид Юрьевич (president@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Лисовенко Дмитрий Сергеевич (dslisov@yandex.ru) – член-корреспондент РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матвеев Сергей Владимирович (sergio2100@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Матченко Николай Михайлович (eks_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Минаева Надежда Витальевна (nminaeva@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Миронов Борис Гурьевич (mbg.chspu@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

Михин Михаил Николаевич (mmikhin@inbox.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, филиал Российского государственного университета в г. Домодедово, г. Домодедово, Россия.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Немировский Юрий Владимирович (nemiryury@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Орлов Виктор Николаевич (orlowvn@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

Спориных Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Устинов Константин Борисович (ustinov@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, доцент, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Шитикова Марина Вячеславовна (ShitikovaMV@mgsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <https://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные статьи (10–12 страниц) и краткие сообщения (до 6 страниц) по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Статья должна соответствовать научной специальности 1.1.8 Механика деформируемого твёрдого тела (физико-математические науки). Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование и проверку на наличие некорректных заимствований в системе "Антиплагиат".

Направляя статью в журнал, все авторы выражают согласие на её публикацию в открытом доступе на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0). Авторские права сохраняются за авторами; исключительные права издателю не передаются. Авторы несут ответственность за достоверность представленных данных и обязаны своевременно сообщать о наличии конфликта интересов.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должна быть отправлена вместе со всеми документами, указанными в правилах для авторов на сайте журнала, в двух вариантах: в электронном на адрес журнала predel21@mail.ru и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы; список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (от 200 до 250 слов, 9–15 предложений), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов (от 3 до 15); основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; название работы на английском языке с указанием всех авторов; список ключевых слов на английском языке; аннотацию на английском языке; библиографические списки на русском и английском языках; сведения о всех авторах на русском и английском языках: должность с указанием подразделения, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, e-mail, ORCID (<https://orcid.org>) и AuthorID (<https://elibrary.ru>). Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы LaTeX 2e с использованием стиля `predel.sty`. Стил `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Список литературы оформляется одним файлом `author.bib` в системе разметки BibTeX, содержащим записи как на русском, так и на английском языках (ключ английской записи – русский ключ с суффиксом `eng`, с тем же DOI и EDN). Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ. В списке указываются только процитированные в статье работы (рекомендуется не более 20 источников); нумерация источников соответствует очередности ссылок на них в тексте; ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Самоцитирование не должно превышать 30 % объёма списка. Для статей обязательно указание DOI (при наличии), для русскоязычных источников обязателен EDN (<https://elibrary.ru>).

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

Содержание

Коваленко Ю. Ф. К 60-летию Константина Борисовича Устинова	7
Саиян С. Г., Шитикова М. В. Определение эффективных ортотропных механических характеристик трехмерных сотовых ауксетических метаматериалов с волгнутой структурой на основе балочной теории	26
Кукуджанов К. К. Улучшение механических характеристик аддитивной нержавеющей стали 03X16H15M3 при высокоэнергетической электроимпульсной обработке	55
Стрелков К. С. Математическая модель распределения контактных давлений в уплотнительном узле премиальных резьбовых соединений	75
Спорыхин А. Н. О динамическом деформировании горных выработок в рыхлых горных породах	82
Петров Н. И. Полиномиальное решение линеаризованных уравнений теории малых упругопластических деформаций в полярных координатах	89
Петров М. В., Алексеева О. А., Михайлов Б. В. Теоретическое и экспериментальное исследование потери устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек средней длины при прямом изгибе	99
Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Факторизация характеристического полинома энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела	113
Хайрнасов К. З. Анализ напряженно-деформированного состояния зубного имплантата с коронкой при эксплуатационных нагрузках	126
Непершин Р. И. Сдавливание идеально пластической полосы пуансоном с гладкой криволинейной границей	137
Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Диагонализация энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела. Метод многомерных вращений	159
Максимова Л. А. Памяти Ростислава Ивановича Непершина (1938–2026)	180
Богданов А. Н., Петров А. Г. О научном наследии Олега Васильевича Воинова ...	184
Информация о постоянно действующих семинарах в Институте проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН	
Иванов Д. В. Об определении механических свойств губчатой кости на основе экспериментов по одноосному сжатию	208
Хайрнасов К. З. Математическое моделирование конструкций из однородных и композиционных материалов и их поведение при различных внешних воздействиях	213
Доль А. В. Исследование брахиоцефальных артерий	219

Георгиевский Д. В. Четвёртый и пятый постулаты механики сплошной среды: законы или определения?	224
Айзикович С. М. Приближенные аналитические решения неклассических смешанных задач теории упругости, термоупругости и электроупругости для неоднородных покрытий высокой точности	229
Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Асимптотическая теория нестационарных процессов в тонких упругих оболочках	233
Овсянников В. М. Учет квадратичного и кубического инвариантов тензора деформации в динамическом уравнении в перемещениях теории упругости	239
Модестов К. А. Гармонические и нестационарные волны в вязкоупругих средах, свойства которых моделируются операторами дробного порядка	243
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	248
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	251

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА

СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2026. № 1 (67)

Отв. за выпуск: С. В. Тихонов

Технические редакторы: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Компьютерная верстка: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Макет: С. В. Тихонов

Подписано в печать 01.07.2026. Выход в свет 08.07.2026.
Формат 70х100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by L^AT_EX 2_ε. Усл. печ. л. 31,7.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ № 635

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском центре Чувашского государственного
педагогического университета им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38