Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

ВЕСТНИК ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Научный журнал
№ 2(68)
Учредитель
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров, Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин
Издается с марта 2007 г.
Выходит 4 раза в год
Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)
Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук, включён в Единый государственный перечень научных изданий — «Белый список» (уровень 3)
Подписной индекс в каталоге “Пресса России” 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов
Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев
Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко, С. В. Тихонов
Ответственные секретари: С. В. Матвеев, Е. В. Мурашкин
Редакционный совет: Ю. Н. Радаев, И. Э. Келлер, В. П. Радченко, А. И. Шашкин, Л. Ю. Коссович, А. А. Маркин, Л. А. Игумнов, А. А. Алексеев, А. А. Буренин
Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. Н. Богданов, А. Н. Власов, Д. В. Георгиевский, В. В. Глаголев, М. А. Гузев, Д. В. Иванов, Р. А. Каюмов, Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Д. С. Лисовенко, Е. В. Ломакин, Л. А. Максимова, Н. В. Минаева, М. Н. Михин, Ю. В. Немировский, В. Н. Орлов, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, К. Б. Устинов, А. Д. Чернышов, А. В. Чигарев, М. В. Шитикова

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, Президентский бульвар, 19А
Адрес издателя: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38
Тел.: (8352) 22-28-71, доб. 1182
E-mail: predel21@mail.ru
WWW: https://limit21.ru

© Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, 2026

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

VESTNIK
CHUVASHSKOGO GOSUDARSTVENNOGO PEDAGOGICHESKOGO UNIVERSITETA IM. I. YA. YAKOVLEVA
SERIYA: MEKHANIKA PREDEL'NOGO SOSTOYANIYA

Scientific journal
№ 2(68)

The Journal founder: I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University
Founders of the series: D. D. Ivlev, D. M. Klimov, L. A. Maksimova, A. V. Manzhirov, B. G. Mironov, G. K. Mikhailov, Yu. N. Radaev, E. I. Shemyakin

Published since March 2007
Published four times a year

Registered in Federal Service for Supervision of Communications Information Technology, and Mass Media "Roskomnadzor" (Accreditation Certificate PI No. FS77-58094 d/d 20 May, 2014).

Hard copy of the Journal is available by subscription from the catalogue "Press of Russia" (reg. No. 13109).

Editor-in-chief: B. G. Mironov

Executive Editor: Yu. N. Radayev

Associate Editor: N. M. Matchenko, S. V. Tikhonov

Executive Secretary: E. V. Murashkin, S. V. Matveev

Editorial Council: Yu. N. Radayev, I. E. Keller, V. P. Radchenko, A. I. Shashkin, L. Yu. Kossovich, A. A. Markin, L. A. Igumnov, A. A. Alekseev, A. A. Burenin

Editorial Board: V. G. Bazhenov, A. N. Bogdanov, A. N. Vlasov, D. V. Georgievsky, V. V. Glagolev, M. A. Guzev, D. V. Ivanov, R. A. Kayumov, D. M. Klimov, V. A. Kovalev, D. S. Lisovenko, E. V. Lomakin, L. A. Maksimova, N. V. Minaeva, M. N. Mikhin, Yu. V. Nemirovskii, V. N. Orlov, A. F. Revuzhenko, S. I. Senashov, A. N. Sporykhin, A. A. Treshchev, K. B. Ustinov, A. D. Chernyshev, A. V. Chigarev, M. V. Shitikova

Postal address:: ul. K. Marksa 38, 428000 Cheboksary, Russia

Phone:: +7 352 22 28 71, ex.ph. 1182

E-mail:: predel21@mail.ru

Journal website:: http://limit21.ru

© I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, 2026

EDN: USTFYO

Персоналии *УДК: 539.3*

ПРОФЕССОР СЕРГЕЙ МИХАЙЛОВИЧ АЙЗИКОВИЧ. К 75-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

Аннотация. Статья посвящена научной, педагогической и научно-организационной деятельности доктора физико-математических наук, профессора Сергея Михайловича Айзиковича – известного специалиста в области механики деформируемого твёрдого тела. Представлены основные этапы его профессиональной биографии, охарактеризованы разработанные им методы решения контактных задач теории упругости для неоднородных сред, а также прикладные направления исследований. Отдельное внимание уделено альпинизму, который на протяжении многих лет остается важной частью жизни ученого и во многом отражает присущие ему качества – целеустремленность, ответственность и умение работать в команде.

Ключевые слова: С. М. Айзикович, механика деформируемого твёрдого тела, контактная механика, неоднородные среды, функционально-градиентные материалы, теория упругости, научная школа, альпинизм.

для цитирования: Профессор Сергей Михайлович Айзикович. К 75-летию со дня рождения // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 7–31. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.004. EDN: USTFYO

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© 2026

Поступила: 12.07.2026; принята в печать: 15.09.2026; опубликована: 29.10.26.

EDN: USTFYO

Biographical Note

PROFESSOR SERGEY MIKHAILOVICH AIZIKOVICH. TO THE 75TH ANNIVERSARY

Abstract. The paper is devoted to the scientific and pedagogical career of Sergey Mikhailovich Aizikovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences and Professor, a prominent specialist in the mechanics of solids. It outlines the key stages of his biography and examines in detail his major research areas and the problems he solved in the contact mechanics. Particular attention is paid to the combination of his prolific scientific work and his passionate commitment to mountaineering, a pursuit that left a distinct mark on both his personality and his professional life.

Keywords: S. M. Aizikovich, mechanics of solids, contact mechanics, non-homogeneous media, functionally graded materials, theory of elasticity, scientific school, mountaineering.

to cite this article: Professor Sergey Mikhailovich Aizikovich. To The 75th Anniversary // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 7–31. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.004

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Received: 12.07.2026; accepted: 15.09.2026; published: 29.10.26.

Путь в науку. Сергей Михайлович Айзикович родился 2 августа 1951 г. в Петропавловске-Камчатском в семье военно-морского офицера Михаила Фёдоровича Айзиковича. Его отец прошёл Великую Отечественную войну, командовал группой торпедных катеров, был награжден двумя орденами Красного Знамени и медалями. В 1945 г., во время войны с Японией, Михаила Фёдоровича перевели на остров Русский под Владивостоком. Позднее он продолжил службу в Петропавловске-Камчатском, а в 1956 г. был переведён в пос. Колосовка под Калининградом. В 1958 г. Михаил Фёдорович был демобилизован в связи с сокращением Вооружённых сил. Он был родом из Таганрога, однако не захотел возвращаться в родной город, где в сентябре 1941 г. погибла вся его семья. Вместе с тем он стремился поселиться ближе к родным местам, поэтому после демобилизации переехал с женой и детьми в г. Ростов-на-Дону.

Интерес Сергея Михайловича к математике сформировался еще в школьные годы. Большую роль сыграли обучение в математическом классе средней школы № 33, высокий уровень преподавания математики учителем Татьяной Михайловной Игнатьевой и занятия в математическом кружке под руководством студента механико-математического факультета Ростовского государственного университета Леонида Петровича Лебедева. Именно Л. П. Лебедев оказал решающее влияние на выбор будущей профессии.

В 1973 г. С. М. Айзикович окончил механико-математический факультет Ростовского государственного университета (РГУ). Дипломная работа «О разрешимости динамической задачи связанной термовязкоупругости», выполненная под руководством профессора И. И. Воровича, была рекомендована к публикации; ее результаты вышли в журнале «Известия Северо-Кавказского научного центра высшей школы. Естественные науки» в 1975 г.

После распределения в Научно-исследовательский институт механики и прикладной математики при РГУ в 1974 г. молодой исследователь приступил к решению прикладной задачи, поставленной заведующим отделом механики грунтов и горных пород Б. Н. Кузиным: требовалось рассчитать изгиб плиты на насыпном грунте, закрепленном с поверхности методом силикатизации. Работа над этой задачей привела к консультациям с профессором В. М. Александровым. Для продолжения исследований было необходимо свести исходную постановку к интегральному уравнению, применимому к общим законам непрерывной неоднородности. Успешное решение этой задачи при методической поддержке Л. П. Лебедева положило начало многолетнему научному сотрудничеству С. М. Айзиковича с В. М. Александровым, продолжавшимся до конца жизни последнего.

Формирование научного направления. В 1980 г. С. М. Айзикович защитил кандидатскую диссертацию по специальности 01.02.04 «Механика деформируемого твёрдого тела» на тему «Асимптотические методы решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине полупространства и полуплоскости». Исследование выполнялось под руководством и

при консультационной поддержке профессора В. М. Александрова. Официальными оппонентами выступили доктор технических наук Г. Б. Колчин и кандидат физико-математических наук А. В. Белоконь, ведущей организацией — Институт механики Академии наук Армянской ССР.

Работа была связана с расчетом сооружений на химически закреплённых, насыпных и просадочных грунтах — задачей, особенно актуальной для регионов Северного Кавказа, Юга России и Средней Азии. В диссертации исследовались задачи теории упругости с использованием интегральных преобразований Фурье и Ханкеля. Первоначально применялся метод большого параметра, разработанный В. М. Александровым и Ю. А. Устиновым. В дальнейшем С. М. Айзикович предложил подход, применимый также при малых значениях параметра. Его развитие привело к созданию аналитического двустороннего асимптотического метода решения контактных задач. Для вычисления основных механических характеристик был реализован комплекс программ для ЭВМ БЭСМ-6.

В 2003 г. С. М. Айзикович защитил докторскую диссертацию «Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред» по той же специальности. Работа была выполнена на кафедре теории упругости механико-математического факультета РГУ. Научными консультантами выступили В. М. Александров и А. В. Белоконь; официальными оппонентами — член-корреспондент РАН И. Г. Горячева, А. А. Ляпин и профессор М. Г. Селезнев. Ведущей организацией был Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова.

Докторская диссертация была посвящена разработке и обоснованию эффективных математических методов решения статических контактных задач теории упругости для неоднородных сред. В ней получил развитие метод модулирующих функций, предназначенный для построения трансформант ядер интегральных уравнений; метод был адаптирован к системам координат, отличным от декартовых. Для задачи о круговом штампе впервые было получено аналитическое выражение для осадки поверхности неоднородного полупространства. Ряд результатов многолетних исследований С. М. Айзиковича, впоследствии обобщённых в докторской диссертации, был использован при разработке способа определения модуля упругости материала, защищённого патентом Российской Федерации № 2002237.

Основные научные результаты. Главное направление исследований С. М. Айзиковича — механика контактных взаимодействий и механика разрушения неоднородных деформируемых тел. В круг его научных интересов входят интегральные уравнения математической физики, обратные задачи теории упругости, функционально-градиентные материалы, термоупругость, пьезоупругость и пороупругость.

К наиболее значимым научным результатам С. М. Айзиковича и его учеников относятся:

- Разработка аналитических и численно-аналитических методов решения контактных задач для упругих сред, свойства которых непрерывно или кусочно-непрерывно изменяются с глубиной. Созданный двусторонний асимптотический метод позволяет строить эффективные решения широкого класса интегральных уравнений.
- Создание математических моделей контактного взаимодействия тел с покрытиями сложной структуры. Исследовано влияние упругих свойств композиционных и функционально-градиентных покрытий на распределение контактных напряжений; изучены эффекты трения, износа, тепловыделения и присутствия смазочного слоя.
- Решение прикладных задач трибологии и прочности. Разработанные методы используются при моделировании напряжённого состояния в зоне контакта «колесо–рельс», анализе микроэлектронных систем и тонкопленочных элементов, а также оценке механических свойств биосовместимых покрытий и имплантатов.
- Развитие методов определения механических характеристик неоднородных материалов по данным индентирования. Под руководством С. М. Айзиковича созданы алгоритмы обратного анализа, позволяющие по результатам наноиндентирования восстанавливать изменение модуля упругости покрытия по глубине.

Результаты многолетних исследований были обобщены в коллективных монографиях и отдельных главах научных изданий. В 2001 г. С. М. Айзикович подготовил главы о двустороннем асимптотическом методе и статических контактных задачах для неоднородного по глубине основания в коллективной монографии «Механика контактных взаимодействий». В дальнейшем совместно с коллегами были изданы монографии «Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред» (2006 г.) и «Аналитические решения смешанных осесимметричных задач для функционально-градиентных сред» (2011 г.). Эти труды систематизировали методы решения смешанных задач для функционально-градиентных и многослойных материалов сложной структуры.

Научная школа и проектная деятельность. Под научным руководством С. М. Айзиковича защищены шесть кандидатских диссертаций. С 2011 г. он возглавляет лабораторию функционально-градиентных и композиционных материалов Научно-образовательного центра «Материалы» Донского государственного технического университета. Лаборатория поддерживает научные связи с исследовательскими центрами России, Беларуси, Китая, Тайваня, США, Германии, Бельгии, Франции, Италии и других стран.

С. М. Айзикович выступал руководителем и ответственным исполнителем более 55 научных проектов, поддержанных международными и российскими фондами и программами, включая INTAS, РФФИ, РНФ, федеральные целевые программы и мегагранты Министерства образования и науки Российской Федерации. Среди наиболее значимых проектов:

- 2018–2022 гг. — мегагрант № 14.Z50.31.0046 «Биомеханика тканей полости рта и глазного яблока и оптимизированные биосовместимые материалы для имплантации»; заместитель руководителя проекта.
- 2011–2013 гг. — ФЦП № 11.519.11.3028 «Разработка математических моделей деформирования материалов в случае контактного взаимодействия, позволяющих создавать современные мягкие защитные покрытия сложной структуры повышенной износостойкости»; руководитель проекта.
- 2011–2013 гг. — ФЦП № 11.519.11.3015 «Разработка математических моделей деформирования материалов с покрытиями сложной структуры, учитывающих характерные особенности процесса деформирования вблизи поверхностей с высокими удельными силами трения»; руководитель проекта.
- 2009–2013 гг. — ФЦП № П1107 «Развитие методов решения новых неклассических задач механики контактных взаимодействий для функционально-градиентных материалов».
- 2011–2012 гг. — АВЦП № 2.1.2/5729 «Разработка методов исследования и контроля термомеханических свойств микро- и наноструктурных градиентных покрытий, соединений и материалов»; руководитель проекта.
- 2010–2011 гг. — ФЦП № 02.740.11.5193 «Исследование влияния механической, химической, структурной неоднородности и остаточных напряжений на развитие трещины в композиционном материале»; руководитель проекта.
- 1986–1988 гг. — проект с научно-производственным объединением «Союз» в области неразрушающего контроля; часть результатов была оформлена в виде авторского свидетельства.

С. М. Айзикович является экспертом Российской академии наук, РФФИ и РНФ, работал в экспертном совете Высшей аттестационной комиссии по математике и механике. Он также известен как постоянный рецензент ведущих международных журналов, среди которых International Journal of Solids and Structures, ZAMM, Acta Mechanica и International Journal of Engineering Science.

Научные заслуги Сергея Михайловича отмечены профессиональными наградами. В 2017 г. Национальный комитет Республики Казахстан по теоретической и прикладной механике наградил его памятной медалью имени академика Ж. С. Ержанова за вклад в развитие науки. В 2018 г. С. М. Айзикович был удостоен национальной премии «Профессор года». В декабре 2024 г. он стал лауреатом премии Российской академии наук и Национальной академии наук Беларуси в области технических наук за цикл работ «Функционально-градиентные микронные покрытия: получение и характеризация контактно-зондовыми методами».

Альпинизм как часть жизненного пути. Особое место в жизни С. М. Айзиковича занимает альпинизм, которым он начал заниматься в 1969 г.,

ещё будучи студентом. В 1970 г. прошёл подготовку и выполнил требования на значок «Альпинист СССР». В 1987–1991 гг. выступал на чемпионатах Вооруженных Сил СССР в составе команды СКА-15 и получил квалификацию инструктора по альпинизму второй категории.

В 1991 г. в качестве капитана команды Сергей Михайлович совершил восхождение на пик Энгельса по маршруту высшей, 6А категории сложности. Среди участников команды были Шановаз Шановазов и Константин Дорро, впоследствии ставшие известными альпинистами и мастерами спорта.

Альпинистский опыт С. М. Айзиковича включает более 15 восхождений на Эльбрус, восхождения на пик Ленина в 1989 г. и Хан-Тенгри в 1993 г., участие в восхождении на вулкан Сахама в Боливии в 2005 г., экспедицию в Непал в районе озера Тиличо и массива Аннапурна в 2013 г., а также восхождение на Ключевскую Сопку на Камчатке в 2018 г.

Известный российский альпинист, обладатель международной премии «Золотой ледоруб» Юрий Кошеленко называл С. М. Айзиковича своим первым лектором по теории альпинизма, подчеркивая его педагогическую роль. Опыт руководства командой, ответственность за участников и необходимость принимать решения в сложных условиях нашли отражение и в научно-организационной деятельности Сергея Михайловича.

Обобщая сказанное. Научная биография Сергея Михайловича Айзиковича представляет собой последовательное движение от решения конкретных прикладных задач к созданию общих математических методов механики контактных взаимодействий. Разработанные им подходы применимы к исследованию современных неоднородных, композиционных и функционально-градиентных материалов и востребованы в высокотехнологичных областях — от транспортной механики и микроэлектроники до биомеханики и материалов для имплантации.

Научные результаты, педагогическая работа, деятельность возглавляемой им лаборатории и активное участие в международном профессиональном сообществе подтверждают устойчивость и перспективность созданного им научного направления. Альпинистская биография Сергея Михайловича дополняет портрет ученого качествами, одинаково значимыми и в горах, и в науке: выдержкой, дисциплиной, готовностью принимать ответственность и способностью объединять людей для достижения сложной цели.

Друзья и коллеги поздравляют Сергея Михайловича Айзиковича с 75-летием и желают ему крепкого здоровья, новых научных и спортивных достижений, талантливых учеников и дальнейших успехов в многогранной деятельности на благо российской науки и образования.

СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ТРУДОВ ПРОФЕССОРА С. М. АЙЗИКОВИЧА

Книги

2006

1. Айзикович С. М., Александров В. М., Белоконь А. В. и др. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М.: Физматлит, 2006. 240 с.

2009

2. Трубчик И. С., Айзикович С. М., Кренев Л. И. Смешанные задачи теории упругости для градиентных материалов. Ростов-на-Дону: Изд-во ДГТУ, 2009. 266 с.

2011

3. Айзикович С. М., Александров В. М., Васильев А. С. и др. Аналитические решения смешанных осесимметричных задач для функционально-градиентных сред. М.: Физматлит, 2011. 192 с.

2017

4. Айзикович С. М., Зеленцов В. Б., Садырин Е. В., Митрин Б. И. Использование сферического индентора и многоточечного метода анализа результатов наноиндентирования для экспериментального определения локальных механических характеристик поверхности: Практикум для студентов-магистрантов. Ростов-на-Дону: Изд-во ДГТУ, 2017. 28 с.
5. Айзикович С. М., Зеленцов В. Б., Садырин Е. В., Митрин Б. И. Экспериментальное определение локальных механических характеристик поверхности с помощью позиционного наноиндентирования: Практикум для студентов-магистрантов. Ростов-на-Дону: Изд-во ДГТУ, 2017. 30 с.

2019

6. Садырин Е. В., Свэйн М. В., Айзикович С. М., Соловьев А. Н. Пробоподготовка фронтального среза зуба человека для исследования локальных механических свойств эмали и дентина: Практикум для студентов-магистрантов. Ростов-на-Дону: Изд-во ДГТУ, 2019. 16 с.

2020

7. Садырин Е. В., Свэйн М. В., Айзикович С. М., Соловьев А. Н. Определение механических свойств. Калибровка шкалы плотности образца в рентгеновской компьютерной микротомографии: Практикум для студентов-магистрантов. Ростов-на-Дону: Изд-во ДГТУ, 2020. 25 с.

2023

8. Айзикович С. М., Садырин Е. В., Николаев А. Л. и др. Биомеханика тканей полости рта и глазного яблока и оптимизированные биосовместимые материалы для имплантации. Ростов-на-Дону: Изд-во ДГТУ, 2023. 115 с.

2024

9. Кароткиян Р. В., Садырин Е. В., Николаев А. Л. и др. Основы атомно-силовой микроскопии в биомеханических исследованиях: Практикум для студентов-магистрантов. Ростов-на-Дону: Изд-во ДГТУ, 2024. 24 с.

10. Садырин Е. В., Митрин Б. И., Николаев А. Л. и др. Калибровка площади области контакта индентора в биомеханических исследованиях твердых тканей зуба: Практикум для студентов-магистрантов. Ростов-на-Дону: Изд-во ДГТУ, 2024. 26 с.

Статьи

1975

1. Айзикович С. М. О разрешимости динамической задачи связанной термовязкоупругости // Известия Северо-Кавказского научного центра высшей школы. Серия Естественные науки. 1975. № 4. С. 3–7.

1978

2. Айзикович С. М. Сдвиг штампом упругого неоднородного полупространства специального вида // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. 1978. № 5. С. 74–80.

1982

3. Айзикович С. М. Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред // Прикладная математика и механика. 1982. Т. 46, № 1. С. 148–158.
4. Айзикович С. М., Александров В. М. О свойствах функций податливости, соответствующих слоистому и непрерывно-неоднородному полупространству // Доклады Академии наук СССР. Механика твердого тела. 1982. Т. 266, № 1. С. 40–43.

1984

5. Айзикович С. М., Александров В. М. Осесимметричная задача о вдавливании круглого штампа в упругое, неоднородное по глубине полупространство // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. 1984. № 2. С. 73–82.

1985

6. Кузин Б. Н., Айзикович С. М. Взаимодействие круглого штампа с искусственным основанием из закрепленного химическим способом грунта // Известия СКНЦВШ. Технические науки. 1985. № 2. С. 87–89.

1986

7. Айзикович С. М., Александров В. М. Асимптотические решения контактных задач теории упругости для полупространства и полуплоскости неоднородных по глубине // Известия Академии наук Армянской ССР. 1986. Т. 39, № 3. С. 13–27.

1987

8. Александров В. М., Айзикович С. М. Распределение напряжений под ленточным фундаментом на неоднородном основании // Исследования по теории сооружений. М: Стройиздат. 1987. Т. 1987. С. 82–92.

1988

9. Айзикович С. М., Трубчик И. С. Асимптотические свойства приближенного решения одного класса парных интегральных уравнений // Прикладная математика и механика. 1988. Т. 52, № 5. С. 850–856.

1989

10. Айзикович С. М., Трубчик И. С. Об асимптотических свойствах приближенного решения одного класса парных интегральных уравнений // Доклады Академии наук СССР. Механика твердого тела. 1989. Т. 307, № 2. С. 316–320.

1990

11. Айзикович С. М. Асимптотическое решение одного класса парных уравнений // Прикладная математика и механика. 1990. Т. 54, № 5. С. 872–877.
12. Айзикович С. М. Асимптотическое решение одного класса парных уравнений при малых значениях параметра // Доклады Академии наук СССР. 1990. Т. 313, № 1. С. 48–52.

1991

13. Айзикович С. М. Асимптотическое решение одного класса парных уравнений при больших значениях параметра // Доклады Академии наук СССР. 1991. Т. 319, № 5. С. 1037–1041.
14. Айзикович С. М., Трубчик И. С., Шклярова Е. В. Внедрение штампа в неоднородную по глубине полосу // Известия РАН. Механика твердого тела. 1991. № 1. С. 61–71.

1992

15. Айзикович С. М., Трубчик И. С., Шклярова Е. В. Расчет круглой пластины, лежащей на неоднородном по глубине полупространстве // Известия РАН. Механика твердого тела. 1992. № 4. С. 163–171.

1993

16. Айзикович С. М., Трубчик И. С. Об определении формы осадки поверхности неоднородного по глубине полупространства при внедрении в него кругового штампа // Доклады Академии наук. 1993. Т. 332, № 6. С. 702–705.

1995

17. Айзикович С. М. Асимптотическое решение задачи о взаимодействии пластины с неоднородным по глубине основанием // Прикладная математика и механика. 1995. Т. 59, № 4. С. 688–697.
18. Айзикович С. М., Трубчик И. С. Об асимптотическом определении формы осадки поверхности неоднородного по глубине полупространства при внедрении в него кругового штампа // Известия РАН. Механика твердого тела. 1995. № 2. С. 58–63.

2000

19. Айзикович С. М., Кренев Л. И., Трубчик И. С. Асимптотическое решение задачи о внедрении сферического индентора в неоднородное по глубине полупространство // Известия РАН. Механика твердого тела. 2000. № 5. С. 107–117.

2002

20. Aizikovich S. M., Alexandrov V. M., Kalker J., et al. Analytical solution of the spherical indentation problem for a half-space with gradients with the depth elastic properties // International Journal of Solids and Structures. 2002. Vol. 39, no. 10. P. 2745–2772. DOI: 10.1016/S0020-7683(02)00124-5.

2003

21. Трубчик И. С., Айзикович С. М., Кренев Л. И. Математически обоснованное определение механических характеристик неоднородных покрытий методом индентирования // Трение и износ. 2003. Т. 24, № 2. С. 126–131.

2006

22. Трубчик И. С., Айзикович С. М. Метод сведения к парным интегральным уравнениям контактных задач для полубесконечных областей // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2006. № 1. С. 52–59.

2007

23. Aizikovich S. M., Krenev L. I., Trubchik I. S. Stresses at the interface between the functionally graded coating and the elastic half-space caused by spherical indentation // Key Engineering Materials. 2007. Vol. 345. P. 833–836.

2008

24. Айзикович С. М., Александров В. М., Трубчик И. С., Кренев Л. И. Внедрение сферического индентора в полупространство с функционально-градиентным упругим покрытием // Доклады академии наук. Механика. 2008. Т. 418, № 2. С. 188–192.
25. Айзикович С. М., Кренев Л. И., Трубчик И. С. Деформирование полупространства с градиентным упругим покрытием при действии произвольной осесимметрической нагрузки // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72, № 4. С. 644–651.

2009

26. Айзикович С. М., Александров В. М., Трубчик И. С., Кренев Л. И. Аналитическое решение задачи о дискообразной трещине в функционально-градиентном пространстве // Доклады Академии наук. Механика. 2009. Т. 424, № 2. С. 185–189.
27. Айзикович С. М., Игнатьева Т. В., Наседкин А. В. Конечно-элементное моделирование контактного взаимодействия для трибомеханической системы с градиентными упругими свойствами // Проблемы прочности и пластичности. 2009. № 71. С. 153–163.
28. Айзикович С. М., Кренев Л. И., Трубчик И. С. Контактные задачи для упругих оснований с функционально-градиентными покрытиями сложной структуры // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, № 4. С. 3–8.

2010

29. Aizikovich S. M., Vasiliev A. S., Seleznev N. M. Inverse analysis for evaluation of the shear modulus of inhomogeneous media by torsion experiments // International Journal of Engineering Science. 2010. Vol. 48. P. 936–942. DOI: `10.1016/j.ijengsci.2010.05.013`.
30. Айзикович С. М., Калайда А. В., Кренев Л. И., Соболь Б. В. Экспериментальное и численно-аналитическое исследование взаимодействия штампа с неоднородным основанием // Известия Вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2010. № 5. С. 59–62.

31. Айзикович С. М., Кренев Л. И., Соболь Б. В., Трубчик И. С. Равновесная дисковая трещина в неоднородной упругой среде // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74, № 2. С. 355–367.
32. Васильев А. С., Айзикович С. М. Математическое моделирование задачи о кручении жестким круглым штампом функционально-градиентного композитного материала // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2010. № 2. С. 33–41.
33. Погоцкая И. В., Айзикович С. М., Чижик С. А. Оценка упругих свойств покрытий нанометровой толщины методом статической силовой спектроскопии // Трение и износ. 2010. Т. 31, № 3. С. 254–259.

2011

34. Aizikovich S. M., Krenev L. I., Sevastianov I., et al. Evaluation of the elastic properties of a functionally-graded coating from the indentation measurements // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2011. Vol. 91, no. 6. P. 493–515. DOI: 10.1002/zamm.201000179.
35. Айзикович С. М., Васильев А. С., Волков С. С. Аналитические решения осесимметричных контактных задач для слоя // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4. С. 1948–1949.
36. Айзикович С. М., Васильев А. С., Кренев Л. И. и др. Контактные задачи для функционально-градиентных материалов сложной структуры // Механика композитных материалов. 2011. Т. 47, № 5. С. 765–776. DOI: 10.1007/s11029-011-9232-8.
37. Айзикович С. М., Кренев Л. И. Численно-аналитический метод решения осесимметричных несмешанных задач термоупругости для непрерывно-неоднородного по глубине полупространства // Вестник ДГТУ. 2011. Т. 11, № 6. С. 800–811.
38. Волков С. С., Айзикович С. М., Погоцкая И. В., Андреева З. В. Об одном эффективном методе решения осесимметричной контактной задачи для мягкого функционально-градиентного слоя, лежащего на жестком упругом основании // Материалы, технологии, инструменты. 2011. Т. 16, № 3. С. 10–16.

2012

39. Vasiliev A. S., Sevostianov I. B., Aizikovich S. M., Jeng Y.-R. Torsion of a punch attached to transversely-isotropic half-space with functionally graded coating // International Journal of Engineering Science. 2012. Vol. 61. P. 24–35. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2012.06.006.
40. Волков С. С., Айзикович С. М., Погоцкая И. В. Аналитическое решение осесимметричной контактной задачи о вдавливании штампа в мягкий слой // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2012. № 2. С. 19–26.

2013

41. Volkov S. S., Aizikovich S. M., Wang Y.-S., Fedotov I. Analytical solution of axisymmetric contact problem about indentation of a circular indenter into a soft functionally graded elastic layer // Acta Mechanica Sinica. 2013. Vol. 29, no. 2. P. 196–201. DOI: 10.1007/s10409-013-0022-5.
42. Айзикович С. М., Васильев А. С. Двухсторонний асимптотический метод решения интегрального уравнения контактной задачи о кручении неоднородного

по глубине упругого полупространства // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77, № 1. С. 129–137.

43. Кренев Л. И., Айзикович С. М., Митрин Б. И. Определение изменения формы поверхности непрерывно-неоднородного термоупругого полупространства при локальном нагреве // Вестник ДГТУ. 2013. № 3. С. 5–15.

2014

44. Alexandrov S. E., Wang Y.-C., Aizikovich S. M. Effect of temperature-dependent mechanical properties on plastic collapse of thin discs // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2014. Vol. 228, no. 14. P. 2483–2487. DOI: 10.1177/0954406213519757.
45. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M., Jeng Y.-R. Axisymmetric contact problems of the theory of elasticity for inhomogeneous layers // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2014. Vol. 94, no. 9. P. 705–712. DOI: 10.1002/zamm.201300067.
46. Айзикович С. М., Волков С. С., Мелконян А. В. Осесимметричный изгиб круглой многослойной пластины на упругом основании сложной структуры // Вестник ДГТУ. 2014. Т. 14, № 2. С. 5–14. DOI: 10.12737/4547.
47. Каленова Н. В., Новожилова О. В., Садырин Е. В., Айзикович С. М. Коэффициент интенсивности скорости деформации при обжатии пластического слоя на жесткой оправке // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2014. № 3. С. 24–30.
48. Кренев Л. И., Айзикович С. М., Митрин Б. И. Внедрение кругового штампа при заданной постоянной температуре на плоской подошве штампа в непрерывно неоднородное термоупругое полупространство // Вестник ДГТУ. 2014. Т. 14, 1(76). С. 34–44. DOI: 10.12737/3502.

2015

49. Aizikovich S. M., Galybin A. N., Krenev L. I. Semi-analytical solution for mode I penny-shaped crack in a soft inhomogeneous layer // International Journal of Solids and Structures. 2015. Vol. 53. P. 129–137. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2014.10.010.
50. Krenev L. I., Aizikovich S. M., Tokovyy Y. V., Wang Y.-C. Axisymmetric problem on indentation of a hot circular punch into an arbitrarily nonhomogeneous halfspace // International Journal of Solids and Structures. 2015. Vol. 59. P. 18–28. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2014.12.017.
51. Ma J., Ke L. L., Wang Y.-S., Aizikovich S. M. Thermal contact of magneto-electro-elastic materials subjected to a conducting flat punch // Journal of Strain Analysis for Engineering Design. 2015. Vol. 50, no. 7. P. 513–527. DOI: 10.1177/0309324715591939.
52. Zelentsov V. B., Mitrin B. I., Aizikovich S. M., Ke L. L. Instability of solution of the dynamic sliding frictional contact problem of coupled thermoelasticity // Materials Physics and Mechanics. 2015. Vol. 23, no. 1. P. 14–19.
53. Айзикович С. М., Васильев А. С., Волков С. С. Осесимметричная контактная задача о вдавливании конического штампа в полупространство с неоднородным по глубине покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79, № 5. С. 710–716.
54. Айзикович С. М., Волков С. С., Васильев А. С. Напряженное состояние упругого полупространства с мягким функционально-градиентным покрытием при

внедрении штампа с плоским основанием // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Т. 77, № 2. С. 124–131.

55. Зеленцов В. Б., Митрин Б. И., Айзикович С. М., Ке Л. Л. Неустойчивость скользящего термофрикционного контакта жесткого тела с упругим покрытием, содержащим пьезокерамическую прослойку // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: естественные науки. 2015. № 4. С. 56–62. DOI: 10.18522/0321-3005-2015-4-56-62.
56. Садырин Е. В., Митрин Б. И., Кренев Л. И., Айзикович С. М. Исследование механических и микрогеометрических характеристик покрытия TiN на подложке из стали 40Х, нанесенного методом ионно-плазменного напыления // Вестник ДГТУ. 2015. Т. 15, 4(83). С. 37–45.

2016

57. Aizikovich S. M., Mitrin B. I., Seleznev N. M., et al. Influence of a soft FGM interlayer on contact stresses under a beam on an elastic foundation // Structural Engineering and Mechanics. 2016. Vol. 58, no. 4. P. 613–625. DOI: 10.12989/sem.2016.58.4.613.
58. Aizikovich S. M., Volkov S. S., Litvinenko A. N., et al. Axisymmetric bending of a circular plate with stiff edge on a soft FGM layer // Structural Engineering and Mechanics. 2016. Vol. 59, no. 2. P. 227–241. DOI: 10.12989/sem.2016.59.2.227.
59. Krenev L. I., Tokovyy Y. V., Aizikovich S. M., et al. A numerical-analytical solution to the mixed boundary-value problem of the heat-conduction theory for arbitrarily inhomogeneous coatings // International Journal of Thermal Sciences. 2016. Vol. 107. P. 56–65. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2016.03.023.
60. Kudish I. I., Volkov S. S., Vasiliev A. S., Aizikovich S. M. Some Criteria for Coating Effectiveness in Heavily Loaded Line EHL Contacts. Part 1. Dry Contacts // Journal of Tribology-Transactions of the ASME. 2016. Vol. 138, no. 2. P. 1–10. DOI: 10.1115/1.4030956.
61. Kudish I. I., Volkov S. S., Vasiliev A. S., Aizikovich S. M. Some Criteria for Coating Effectiveness in Heavily Loaded Line EHL Contacts. Part 2. Lubricated Contacts // Journal of Tribology-Transactions of the ASME. 2016. Vol. 138, no. 2. P. 1–11. DOI: 10.1115/1.4030958.
62. Sadyrin E. V., Mitrin B. I., Aizikovich S. M., Zubar T. I. Effect of temperature on the mechanical properties of multi-component Al-Mg-Si alloys during nanoindentation test // Materials Physics and Mechanics. 2016. Vol. 28. P. 6–10.
63. Vasiliev A. S., Swain M. V., Aizikovich S. M., Sadyrin E. V. Torsion of a circular punch attached to an elastic half-space with a coating with periodically depth-varying elastic properties // Archive of Applied Mechanics. 2016. Vol. 86, no. 7. P. 1247–1254. DOI: 10.1007/s00419-015-1089-1.
64. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M. Indentation of an axissymmetric punch into an elastic transversely-isotropic half-space with functionally graded transversely-isotropic coating // Materials Physics and Mechanics. 2016. Vol. 28. P. 11–15.
65. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M. Normal point force and point electric charge in a piezoelectric transversely isotropic functionally graded half-space //

Acta Mechanica. 2016. Vol. 227, no. 1. P. 263–273. DOI: 10.1007/s00707-015-1414-3.

66. Айзикович С. М., Ерофеев В. И., Леонтьева А. В. Дисперсионные характеристики плоских продольных упругих волн, распространяющихся в пористой жидконасыщенной среде с полостями // Вестник ПНИПУ. Механика. 2016. № 4. С. 175–186.
67. Белов А. А., Айзикович С. М. Гранично-элементное решение трехмерных краевых задач теории пороупругости на основе шаговой схемы Радо // Проблемы прочности и пластичности. 2016. Т. 78, № 1. С. 70–80.
68. Волков С. С., Васильев А. С., Айзикович С. М. и др. Напряженно-деформированное состояние упругого мягкого функционально-градиентного покрытия при внедрении сферического индентора // Вестник ПНИПУ. Механика. 2016. № 4. С. 20–34. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.02.
69. Зеленцов В. Б., Митрин Б. И., Айзикович С. М. Динамическая и квазистатическая неустойчивость скользящего термофрикционного контакта // Трение и износ. 2016. Т. 37, № 3. С. 280–289.
70. Зеленцов В. Б., Митрин Б. И., Айзикович С. М. Неустойчивость скользящего термофрикционного контакта с покрытием на упругой подложке при наличии трения и разогрева от трения // Вестник ДГТУ. 2016. 4(87). С. 5–16. DOI: 10.12737/22148.

2017

71. Igumnov L. A., Litvinchuk S., Petrov A. N., Aizikovich S. M. Simulation of a compressional slow wave in partially saturated poroelastic 1-D column // Materials Physics and Mechanics. 2017. Vol. 31. P. 9–11.
72. Kudish I. I., Volkov S. S., Vasiliev A. S., Aizikovich S. M. Effectiveness of coatings with constant, linearly, and exponentially varying elastic parameters in heavily loaded line elastohydrodynamically lubricated contacts // Journal of Tribology. 2017. Vol. 139, no. 2. DOI: 10.1115/1.4033360.
73. Petrov A. N., Aizikovich S. M., Igumnov L. A. Modeling of wave propagation in the unsaturated soils using Boundary element method // Key Engineering Materials. 2017. Vol. 743. P. 158–161. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.743.158.
74. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M., Mitrin B. I. Plane contact problem on indentation of a flat punch into a transversely-isotropic half-plane with functionally graded transversely-isotropic coating // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). 2017. Vol. 68, no. 4. P. 1–18. DOI: 10.1007/s00033-016-0746-8.
75. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Belov A. A., et al. Indentation of a hard transversely isotropic functionally graded coating by a conical indenter // International Journal of Engineering Science. 2017. Vol. 112. P. 63–75. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2016.12.002.
76. Zelentsov V. B., Mitrin B. I., Lubyagin I. A., Aizikovich S. M. Mathematical modelling of thermoelastic behavior of a coating taking into account frictional heating and wear // Computational Mathematics and Information Technologies. 2017. No. 1. P. 36–53.
77. Айзикович С. М., Волков С. С., Митрин Б. И. Решение одного класса парных интегральных уравнений с правой частью в виде ряда Фурье и его приложение

к решению контактных задач для неоднородных сред // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81, № 6. С. 708–716.

78. Айзикович С. М., Ерофеев В. И., Леонтьева А. В. Нелинейные плоские локализованные волны в пористой жидконасыщенной среде с полостями // Инженерно-физический журнал. 2017. Т. 90, № 6. С. 1441–1450.
79. Зеленцов В. Б., Митрин Б. И., Сукиязов А. Г., Айзикович С. М. Индикация термоупругой неустойчивости скользящего контакта с помощью заглубленной пьезокерамической прослойки // Вестник ПНИПУ. Механика. 2017. № 1. С. 63–84.

2018

80. Aizikovich S. M., Erofeev V. I., Leonteva A. V. Plane longitudinal waves in a liquid saturated porous geometrically nonlinear medium // Material Physics and Mechanics. 2018. Vol. 35, no. 1. P. 10–15. DOI: 10.18720/MPM.3512018_2.
81. Kostina A. A., Plekhov O. A., Aizikovich S. M. Numerical simulation of a heat generation in a layered material during ultrasonic wave propagation // Frattura ed Integrita Strutturale. 2018. Vol. 12, no. 46.
82. Kudish I. I., Volkov S. S., Vasiliev A. S., Aizikovich S. M. Lubricated Point Heavily Loaded Contacts of Functionally Graded Materials. Part 1. Dry Contacts // Mathematics and Mechanics of Solids. 2018. Vol. 23, no. 7. P. 1061–1080. DOI: 10.1177/1081286517704689.
83. Kudish I. I., Volkov S. S., Vasiliev A. S., Aizikovich S. M. Lubricated Point Heavily Loaded Contacts of Functionally Graded Materials. Part 2. Lubricated Contacts // Mathematics and Mechanics of Solids. 2018. Vol. 23, no. 7. P. 1081–1103. DOI: 10.1177/1081286517704690.
84. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M. Approximated analytical solution of contact problem on indentation of elastic half-space with coating reinforced with inhomogeneous interlayer // Materials Physics and Mechanics. 2018. Vol. 35. P. 175–180. DOI: 10.18720/MPM.3512018_20.
85. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M., Litvinenko A. N. Indentation of an elastic half-space reinforced with a functionally graded interlayer by a conical punch // Materials Physics and Mechanics. 2018. Vol. 40. P. 254–260. DOI: 10.18720/MPM.4022018_14.
86. Zelentsov V. B., Mitrin B. I., Aizikovich S. M., et al. Monitoring of sliding contact with wear by means of piezoelectric interlayer parameters // Materials Physics and Mechanics. 2018. Vol. 40. P. 261–273. DOI: 10.18720/MPM.4022018_15.
87. Васильев А. С., Волков С. С., Айзикович С. М. Приближенное аналитическое решение задачи о вдавливании проводящего штампа в электроупругое полупространство с неоднородным покрытием // Доклады Академии Наук. Механика. 2018. Т. 478, № 1. С. 34–39.
88. Васильев А. С., Садырин Е. В., Митрин Б. И. и др. Моделирование эксперимента по наноиндентированию покрытий ZrN на кремниевой и медной подложках индентором Берковича // Станки и инструмент (СТИН). 2018. № 3. С. 34–36.

2019

89. Galybin A. N., Aizikovich S. M. 3D Cauchy Problem for an Elastic Layer: Interfacial Cracks Detection // WIT Transactions on Engineering Sciences. 2019.

Vol. 126. P. 281–291. DOI: 10.2495/BE420251. Boundary Elements and other Mesh Reduction Methods XLII.

90. Kostina A. A., Plekhov O. A., Aizikovich S. M. Numerical simulation of subsurface defect identification by pulsed thermography and improvement of this technique for noisy data // Frattura ed Integrita Strutturale. 2019. Vol. 13, no. 50. P. 667–683. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.50.57.
91. Volkov S. S., Vasiliev A. S., Aizikovich S. M., Mitrin B. I. Axisymmetric indentation of an electroelastic piezoelectric half-space with functionally graded piezoelectric coating by a circular punch // Acta Mechanica. 2019. Vol. 230, no. 4. P. 1289–1302. DOI: 10.1007/s00707-017-2026-x.
92. Zarandi S. B., Lai H.-W., Wang Y.-C., Aizikovich S. M. Residual stress analysis of an orthotropic composite cylinder under thermal loading and unloading // Symmetry. 2019. Vol. 11, no. 3. DOI: 10.3390/sym11030320.
93. Zarandi S. B., Lai H.-W., Wang Y.-C., Aizikovich S. M. Residual stress in an elastoplastic annular disc interacting with an elastic inclusion // Coupled Systems Mechanics. 2019. Vol. 8, no. 3. P. 273–287. DOI: 10.12989/csm.2019.8.3.273.

2020

94. Kudish I. I., Pashkovski E., Volkov S. S., et al. Heavily loaded line EHL contacts with thin adsorbed soft layers // Mathematics and Mechanics of Solid. 2020. Vol. 25. DOI: 10.1177/1081286519898878.
95. Kuznetsova T. A., Lapitskaya V. A., Khabarava A., et al. Effect of metallic or non-metallic element addition on surface topography and mechanical properties of CrN coatings // Nanomaterials. 2020. Vol. 10, no. 10122361. DOI: 10.3390/nano10122361.
96. Sadyrin E. V., Swain M. V., Mitrin B. I., et al. Characterization of enamel and dentine about a white spot lesion: Mechanical properties, mineral density, microstructure and molecular composition // Nanomaterials. 2020. Vol. 10, no. 9. DOI: 10.3390/nano10091889.
97. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Sadyrin E. V., Aizikovich S. M. Simplified Analytical Solution of the Contact Problem on Indentation of a Coated Half-Space by a Conical Punch // Mathematics. 2020. Vol. 8, no. 6. DOI: 10.3390/math8060983.
98. Васильев А. С., Волков С. С., Садырин Е. В. и др. Упрощенное аналитическое решение контактной задачи о вдавливании конического штампа в полупространство с покрытием // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2020. № 2. С. 29–37. DOI: 10.18522/1026-2237-2020-2-29-37.
99. Кузнецова Т. А., Лапицкая В. А., Чижик С. А. и др. Оценка однородности механических свойств покрытия AlCrN триботехнического назначения с применением зондовых методов // Поверхность рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2020. № 10. С. 46–54. DOI: 10.31857/S1028096020100118.
100. Лапицкая В. А., Кузнецова Т. А., Чижик С. А. и др. Износ тонких покрытий различной твердости зондовыми методами // Поверхность рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2020. № 6. С. 61–67. DOI: 10.31857/S1028096020060126.

2021

101. Gilewicz A., Kuznetsova T., Aizikovich S., et al. Comparative Investigations of AlCrN Coatings Formed by Cathodic Arc Evaporation under Different Nitrogen Pressure or Arc Current // Materials. 2021. Vol. 14. DOI: 10.3390/ma14020304.
102. Kudish I. I., Volkov S. S., Vasiliev A. S., Aizikovich S. S. Characterization of the behavior of different contacts with double coating // Mathematics and Mechanics of Complex Systems. 2021. Vol. 9, no. 2. P. 179–202. DOI: 10.2140/memocs.2021.9.179.
103. Kuprin A. S., Gilewicz A., Kuznetsova T. A., et al. Structure and Properties of ZrON Coatings Synthesized by Cathodic Arc Evaporation // Materials. 2021. Vol. 14. DOI: 10.3390/ma14061483.
104. Kuznetsova T., Lapitskaya V., Solovjov J., et al. Properties of CrSi2 Layers Obtained by Rapid Heat Treatment of Cr Film on Silicon // Nanomaterials. 2021. Vol. 11, no. 7. DOI: 10.3390/nano11071734.
105. Lapitskaya V. A., Kuznetsova T. A., Khudoley A. L., et al. Influence of polishing technique on crack resistance of quartz plates // International Journal of Fracture. 2021. P. 1–17. DOI: 10.1007/s10704-021-00564-5.
106. Liu T.-J., Yang F., Yu H., Aizikovich S. M. Axisymmetric adhesive contact problem for functionally graded materials coating based on the linear multi-layered model // Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2021. Vol. 46, no. 1. P. 41–58. DOI: 10.1080/15397734.2019.1666721.
107. Melnikova G., Kuznetsova T., Lapitskaya V., et al. Nanomechanical and nanotribological properties of nanostructured coatings of tantalum and its compounds on steel substrates // Nanomaterials. 2021. Vol. 11, no. 2407. P. 1–17. DOI: 10.3390/nano110924079.
108. Su J., Song H.-X., Ke L.-L., Aizikovich S. M. The size-dependent elastohydrodynamic lubrication contact of a coated half-plane with non-Newtonian °uid // Applied Mathematics and Mechanics. 2021. Vol. 42, no. 7. P. 915–930. DOI: 10.1007/s10483-021-2744-7.
109. Зеленцов В. Б., Загребнева А. Д., Лапина П. А., Айзикович С. М. Ванг Юн-Че Относительный объем пор при индентировании пористых материалов // Проблемы прочности и пластичности. 2021. Т. 83, № 4. С. 462–470. DOI: 10.32326/1814-9146-2021-83-4-462-470.

2022

110. Kudish I. I., Volkov S. S., Aizikovich S. M., Ke L. One simple case of lubricated line contact for double-layered elastic solids // Problems of Strength and Plasticity. 2022. Vol. 84, no. 1. P. 15–24. DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-1-15-24.
111. Lapitskaya V. A., Kuznetsova T. A., Khabarava A. V., et al. The use of AFM in assessing the crack resistance of silicon wafers of various orientations // Engineering Fracture Mechanics. 2022. Vol. 259. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2021.107926.
112. Sadyrin E., Lapitskaya V., Kuznetsova T., et al. Nanoindentation and atomic force microscopy derived mechanical and microgeometrical properties of tooth root cementum // Micro. 2022. Vol. 2, no. 4. P. 575–588. DOI: 10.3390/micro2040038.
113. Волков С. С., Васильев А. С., Айзикович С. М. Смещения поверхности пьезоэлектрического полупространства с функционально-градиентным покрытием

и круговым электродом на поверхности // Вычислительная механика сплошных сред. 2022. Т. 15, № 1. С. 45–55. DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.1.4.

114. Садырин Е. В., Ёгина Д. В., Васильев А. С., Айзикович С. М. Оценка влияния кариеса в стадии белого пятна на механические свойства эмали и дентина зуба человека // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, № 3. С. 346–359. DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-3-346-359.
115. Садырин Е. В., Ёгина Д. В., Волков С. С., Айзикович С. М. Оценка плотности и микрогеометрических характеристик пломб из стеклоиономерного цемента и композитного материала: биомеханическое ex vivo исследование // Российский журнал биомеханики. 2022. Т. 26. С. 67–73. DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2022.2.06.

2023

116. Kuznetsova T., Lapitskaya V., Khabarava A., et al. Features of wear of DLC-Si coating under microcontact conditions during the formation of secondary structures // Composite Structures. 2023. Vol. 316. DOI: 10.1016/j.compstruct.2023.117039.
117. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M. Hot indentation of a FGM-coated thermoelastic half-space by a conical punch: Approximated analytical solution of the contact problem // Composite Structures. 2023. Vol. 309. DOI: 10.1016/j.compstruct.2022.116612.

2024

118. Kuznetsova T., Lapitskaya V., Chizhik S., et al. Evaluation of morphology, physical and mechanical properties of hyaluronic acid matrices of various molecular weights by atomic force microscopy // Journal of Molecular Liquids. 2024. Vol. 412. DOI: 10.1016/j.molliq.2024.125833.
119. Lapitskaya V., Nikolaev A., Khabarava A., et al. The influence of nitrogen flow on the stoichiometric composition, structure, mechanical, and microtribological properties of TiN coatings // Materials. 2024. Vol. 17, no. 1. DOI: 10.3390/ma17010120.
120. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Nikolaev A. L., Aizikovich S. M. Indentation of a piezoelectric FGM-coated half-space by a conical conductive punch: approximated analytical solution // International Journal of Engineering Science. 2024. Vol. 205. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2024.10416.
121. Панфилов И. А., Айзикович С. М., Васильев А. С. Анализ упругих и упругопластических моделей при интерпретации результатов наноиндентирования // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, № 2. С. 245–253. DOI: 10.18500/1816-9791-2024-24-2-245-253.

2025

122. Lapitskaya V., Nikolaev A., Khabarava A., et al. Microstructure and properties of thin AlN coatings with different stoichiometric compositions // Materials Research Bulletin. 2025. Vol. 187. DOI: 10.1016/j.materresbull.2025.113380.
123. Lapitskaya V. A., Nikolaev A. L., Khabarava A. V., et al. Effect of temperature and deposition power on microstructure and properties of magnetron sputtered

thin AlN coatings // Journal of Advanced Dielectrics. 2025. Vol. 15, no. 4. DOI: 10.1142/S2010135X25400041.

124. Panfilov I., Vilkovyskiy I., Sadyrin E., et al. Stress-Strain State Investigation and Ultimate Load on Femoral Implants Based on S-Type Ti6Al4V Titanium Alloy // Journal of Functional Biomaterials. 2025. Vol. 16, no. 5. DOI: 10.3390/jfb16050187.
125. Еремеева И. А., Айзикович С. М. Об антиплоских волнах, локализованных в окрестности поверхности раздела двух упругих полупространств, в рамках динамики решетки // Прикладная математика и механика. 2025. Т. 89, № 6. С. 1004–1010. DOI: 10.7868/S3034575825060082.

2026

126. Айзикович С. М., Еремеев В. А. Об условиях эллиптичности в градиентной теории пороупругости при конечных деформациях // Проблемы прочности и пластичности. 2026. Т. 88, № 1. С. 78–85. DOI: 10.32326/1814-9146-2026-88-1-78-85.

Статьи в сборниках и трудах конференций

1979

1. Айзикович С. М. Кручение круглым штампом неоднородного полупространства // Расчет оболочек и пластин / под ред. Л. Г. Ковалева. Ростов-на-Дону: РИСИ, 1979. С. 156–169.

1983

2. Айзикович С. М. Контактные задачи теории упругости для полупространства и полуплоскости, неоднородных по глубине // Статические и динамические смешанные задачи теории упругости / под ред. И. И. Воровича. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского университета, 1983. С. 121–131.

1988

3. Айзикович С. М. Смешанная задача об установившейся напорной фильтрации из цилиндрической скважины // Механика сплошной среды / под ред. И. И. Воровича. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского университета, 1988. С. 13–20.

2000

4. Aizikovich S. M., Celis J.-P., Krenev L. I., Serova N. A. Non-Destructive Mechanical Characterisation of Mechanical Properties of Non-Homogeneous Nanostructured Coatings // Nanostructured Films and Coatings. Vol. 78. Kluwer Academic Publishers, 2000. P. 315–322. DOI: 10.1007/978-94-011-4052-2_27.

2001

5. Aizikovich S. M., Krenev L. I., Staedler T. Non-Destructive Mechanical Characterisation of Mechanical Properties of Non-Homogeneous Nanostructured Coatings // NATO Advanced Study Institute: Chemical Physics of Thin Film Deposition Processes for Micro and Nano-Technologies. Kaunas, 2001. P. 408.
6. Айзикович С. М. Двухсторонний асимптотический метод решения контактных задач // Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001. С. 20–29.

7. Айзикович С. М. Статические контактные задачи для неоднородного по глубине основания // Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001. С. 199–212.

2009

8. Aizikovich S. M., Alexandrov V. M., Trubchik I. S. Bilateral Asymptotic Solution of One Class of Dual Integral Equations of the Static Contact Problems for the Foundations Inhomogeneous in Depth // Modern Analysis and Applications: The Mark Krein Centenary Conference - Volume 2: Differential Operators and Mechanics. Vol. 191. Birkhäuser, 2009. P. 3–17. (Operator Theory: Advances and Applications). DOI: 10.1007/978-3-7643-9921-4_2.

2010

9. Galybin A. N., Aizikovich S. M. Integral equations for crack systems in a slightly heterogeneous medium // WIT Transactions on Modelling and Simulation. Vol. 50 (32nd International Conference on Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods (BEM/MRM 2010), New Forest, UK, Sept. 7–9, 2010). 2010. P. 65–74. DOI: 10.2495/BE100061.

2011

10. Aizikovich S. M., Vasiliev A. S., Sevastianov I., et al. Analytical solution for the bending of a plate on a functionally graded layer of complex structure // Advanced Structured Materials: Shell-like Structures: Non-classical Theories and Applications. Vol. 15 / ed. by H. Altenbach, V. A. Eremeyev. Springer, 2011. P. 15–28. DOI: 10.1007/978-3-642-21855-2_2.
11. Galybin A. N., Aizikovich S. M. Modification of Gauss-Chebyshev quadrature for modelling of crack growth in the field of residual stresses // WIT Transactions on Modelling and Simulation. Vol. 52 (33rd International Conference on Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods (BEM/MRM 2011), New Forest, United Kingdom, June 28–30, 2011). 2011. P. 15–24. DOI: 10.2495/BE110021.

2013

12. Aizikovich S. M., Vasiliev A. S., Volkov S. S., et al. The analytical solution of axisymmetric contact problem about torsion for the coatings of complicated structure // Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications. Nova Science Publishers, 2013. P. 213–220.
13. Айзикович С. М., Васильев А. С., Волков С. С. Новый подход к решению осесимметричных контактных задач для неоднородного слоя // Развитие идей Л. А. Галина в механике / под ред. И. Г. Горячевой. М. ; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. С. 137–147.

2014

14. Aizikovich S. M., Vasiliev A. S., Volkov S. S., et al. An analytical solution to the problem of interaction of a circular plate with an inhomogeneous soft layer // Shell Structures: Theory and Applications. Vol. 3. CRC Press/Balkema, 2014. P. 45–48.

2015

15. Sadyrin E. V., Krenev L. I., Mitrin B. I., et al. Investigation of the Indenter Temperature and Speed Effect during Instrumented Indentation on the Mechanical Properties of Carbon Steels. Chapter 45 // Physics, Mechanics, New Materials and

Their Applications: Proceedings of the International Conference of 2015, on the 100th Anniversary of the Southern Federal University. Nova Science Publishers, 2015. P. 331–336.

2017

16. Aizikovich S. M., Erofeyev V. I., Leonteva A. V. Spatial localisation of nonlinear waves in a liquid saturated porous medium with cavities // Poromechanics VI: Proceedings of the 6th Biot Conference on Poromechanics. Reston: ASCE, 2017. P. 1604–1611. DOI: 10.1061/9780784480779.198.
17. Aizikovich S. M., Vasiliev A. S., Volkov S. S., Mitrin B. I. Mathematical modeling of micro indentation of a transversely isotropic half-space with functionally graded coating by a conical indenter // Engineering Mechanics 2017: 23rd International Conference, Svratka, Czech Republic, May 15–18, 2017. 2017. P. 74–77.
18. Krenev L. I., Sadyrin E. V., Aizikovich S. M., Zubar T. I. Indentation of a functionally graded coating on an elastic substrate by a sphero-conical indenter. Chapter 33 // Advanced Materials: Techniques, Physics, Mechanics and Applications. Vol. 193. Springer, 2017. P. 397–405. DOI: 10.1007/978-3-319-56062-5_33.
19. Sadyrin E. V., Mitrin B. I., Krenev L. I., et al. Evaluation of mechanical properties of the two-layer coating using nanoindentation and mathematical modeling. Chapter 39 // Advanced Materials. Proceedings of the International Conference on ≪Physics and mechanics of New Materials and Their Applications≫ (PHENMA 2017). Vol. 207. Springer, 2017. P. 495–502. DOI: 10.1007/978-3-319-78919-4_39.
20. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M. Torsion of an elastic transversely isotropic half-space with a coating reinforced by a functionally graded interlayer // Shell Structures: Theory and Applications. Proceedings of the 11th Internetional Conference (SSTA 2017), October 11-13, 2017, Gdansc, Poland. Vol. 4. 2017. P. 185–188.

2018

21. Aizikovich S. M., Volkov S. S., Vasiliev A. S. Plane contact of two elastic solids with functionally graded coatings joined by an imperfect interface // Engineering Mechanics: 24rd International Conference Engineering Mechanics 2018: Book of Full Texts, Svratka, Czech Republic, May 14-17, 2018. Vol. 24. 2018. P. 13–16. DOI: 10.21495/91-8-13.
22. Volkov S. S., Vasiliev A. S., Aizikovich S. M., Sadyrin E. V. Contact problem on indentation of an elastic half-plane with an inhomogeneous coating by a flat punch in the presence of tangential stresses on a surface // AIP Conference Proceedings: The Eighth Polyakhov's Reading: Proceedings of the International Scientific Conference on Mechanics, Saint Petersburg, Russia, 29 January-2 February 2018. Vol. 1959. 2018. DOI: 10.1063/1.5034712.

2019

23. Abrosimov N. A., Igumnov L. A., Aizikovich S. M., Elesin A. V. Computer Modeling of Nonlinear Deformation and Loss of Stability of Composite Shell Structures Under a Combined Effect of Quasi-static and Pulsed Loads // Advanced Structured Materials: Recent Developments in the Theory of Shells. Vol. 110. Springer, 2019. P. 5–32. DOI: 10.1007/978-3-030-17747-8_2.

24. Aizikovich S. M., Petrov A. N., Tsvetkov S. A. Analysis of dynamic responses in a composite poroelastic body using the time-stepping boundary element scheme built on the Lobatto method nodes(Conference Paper) // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Vol. 510. 2019. DOI: 10.1088/1757-899X/510/1/012028.
25. Kudish I. I., Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M. Subsurface stressed state of functionally graded elastic solids involved in dry axially symmetric contacts // Advanced Structured Materials: Dynamical Processes in Generalized Continua and Structures. Vol. 103 / ed. by H. Altenbach, A. Belyaev, V. A. Eremeyev, et al. Springer, 2019. P. 359–377. DOI: 10.1007/978-3-030-11665-1_20.
26. Kuznetsova T. A., Lapitskaya V. A., Shabliuk A. V., et al. The change in the elastic modulus values for the thickness of a multilayer coating based on TiN and CrN layers // Journal of Physics: Conference Series. Vol. 1281. 2019. DOI: 10.1088/1742-6596/1281/1/012045.
27. Sadyrin E. V., Kislyakov E. A., Karotkiyan R. V., et al. Influence of citric acid concentration and etching time on enamel surface roughness of prepared human tooth: in vitro study. Chapter 8 // Advanced Structured Materials: Plasticity, Damage and fracture in advanced materials. Vol. 121. Springer, 2019. P. 135–150. DOI: 10.1007/978-3-030-34851-9_8.
28. Sadyrin E. V., Vasiliev A. S., Volkov S. S., et al. Simplified analytical solution of the contact problem on indentation of a coated half-space by a spherical punch (Conference Paper) // WIT Transactions on Engineering Sciences. Boundary Elements and other Mesh Reduction Methods XLII. Vol. 122. WIT Press, 2019. P. 209–221. DOI: 10.2495/BE410191.
29. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M. A semi-analytical method of solution of contact problems on indentation of coated elastic and electroelastic piezoelectric solids // Advances in Engineering Materials, Structures and Systems: Innovations, Mechanics and Applications. CRC Press, 2019. P. 339–342. DOI: 10.1201/9780429426506-59.
30. Volkov S. S., Vasiliev A. S., Sadyrin E. V., Aizikovich S. M. Indenter selection for the nanoindentation tests of the two-layer coatings. Chapter 32 // Proceedings of the 2018 International Conference on Physics, Mechanics of New Materials and Their Applications (PHENMA 2018). Nova Science Publishers, 2019. P. 269–278.
31. Zelentsov V. B., Mitrin B. I., Lubyagin I. A., Aizikovich S. M. Thermoelastic instability in coupled thermoelastic sliding wear problem // Advanced Material: Springer Proceedings in Physics. Vol. 224. Springer, 2019. P. 379–397. DOI: 10.1007/978-3-030-19894-7_29.

2020

32. Nikolaev A. L., Mitrin B. I., Sadyrin E. V., et al. Mechanical Properties of Micropositt S1813 Thin Layers // Advanced Structured Materials: Modeling, Synthesis and Fracture of Advanced Materials for Industrial and Medical Applications. Vol. 136. Springer, 2020. P. 137–146. DOI: 10.1007/978-3-030-48161-2_9.
33. Volkov S. S., Vasiliev A. S., Aizikovich S. M., Sadyrin E. V. Compliance functions for a thermoelastic FGM coated half-plane with incomplete adhesion between the coating and substrate // Journal of Physics: Conference Series. Vol. 1474. 2020. DOI: 10.1088/1742-6596/1474/1/012034.

2021

34. Nikolaev A. L., Kamencev A. S., Lyanguzov N. V., Aizikovich S. M. Pulsed laser deposition of Au nanoparticles on ZnO nanostructures // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Vol. 1029. 2021. DOI: 10.1088/1757-899X/1029/1/012064.
35. Volkov S. S., Vasiliev A. S., Aizikovich S. M., Litvinenko A. N. Electroelastic deformation of a piezoelectric FGM coated half-plane caused by an electrostatic potential difference applied to the strip electrode on the surface // Advanced Structured Materials: Multiscale Solid Mechanics. Vol. 141. Springer, 2021. P. 475–486. DOI: 10.1007/978-3-030-54928-2_35.

2022

36. Aizikovich S. M., Nikolaev A. L., Sadyrin E. V., et al. Indentation of thin coatings: theoretical and experimental investigation // WIT Transactions on Engineering Sciences. 45th International Conference on Boundary Elements and other Mesh Reduction Methods (BEM/MRM 2022). Vol. 134. 2022. P. 157–167. DOI: 10.2495/BE450141.
37. Galybin A. N., Aizikovich S. M. Integral equations for modelling of fracture initiation and development in layered poroelastic media // WIT Transactions on Engineering Sciences. 45th International Conference on Boundary Elements and other Mesh Reduction Methods (BEM/MRM 2022). Vol. 134. 2022. P. 93–103. DOI: 10.2495/BE450081.

2023

38. Aizikovich S. M., Lapina P. A., Volkov S. S. Analysis of equivalence conditions of model of an inhomogeneous elastic half-space and model of an inhomogeneous elastic layer on the elastic foundation. Chapter 3 // Advanced Structured Materials: Solid Mechanics, Theory of Elasticity and Creep. Vol. 185. Springer, 2023. P. 33–42. DOI: 10.1007/978-3-031-18564-9_3.
39. Aizikovich S. M., Lapina P. A., Volkov S. S. Advance Approximate Analytical Solutions of the Contact Problem for an Inhomogeneous Layer // Advanced Structured Materials: Sixty Shades of Generalized Continua. Vol. 170. Cham: Springer, 2023. P. 13–20. DOI: 10.1007/978-3-031-26186-2_2.
40. Krenev L. I., Sadyrin E. V., Nikolaev A. L., Aizikovich S. M. Analysis of the Nanoindentation Results Using the Graded Coatings Information System // Advanced Structured Materials: Advances in Linear and Nonlinear Continuum and Structural Mechanics. Vol. 198. Cham: Springer, 2023. P. 273–283. DOI: 10.1007/978-3-031-43210-1_15.
41. Sadyrin E. V., Nikolaev A. L., Bardakova R. A., et al. Nanoindentation derived mechanical properties of TiN thin film deposited using magnetron sputtering method. Chapter 17 // Advanced Structured Materials: Deformation and Destruction of Materials and Structures Under Quasi-static and Impulse Loading. Vol. 186. Springer, 2023. P. 245–254. DOI: 10.1007/978-3-031-22093-7_17.
42. Sadyrin E. V., Nikolaev A. L., Chapek S. V., et al. Manufacturing Quality Evaluation of Photopolymer Resin 3D-Printed Scaffolds Using Microtomography // Advanced Structured Materials: Sixty Shades of Generalized Continua. Vol. 170. Cham: Springer, 2023. P. 619–630. DOI: 978-3-031-26186-2_38.

43. Vasiliev A. S., Aizikovich S. M., Bardakova R. A. Static thermomechanical loading of thermal barrier coatings: compliance functions. Chapter 29 // Advanced Structured Materials: Advances in Linear and Nonlinear Continuum and Structural Mechanics. Vol. 198. Springer, 2023. P. 531–544. DOI: 10.1007/978-3-031-43210-1-29.
44. Wang Y.-C., Liao T.-C., Tan K.-W., Aizikovich S. M. Bandgap Properties of a Class of Chiral and Achiral Metamaterials // Advanced Structured Materials: Sixty Shades of Generalized Continua: Dedicated to the 60th Birthday of Prof. Victor A. Eremeyev. Vol. 170. Springer, 2023. P. 717–726.

2024

45. Panfilov I. A., Aizikovich S. M., Vasiliev A. S. Elastoplastic models for interpreting indentation results // Proceedings 30th International Conference Engineering Mechanics 2024, Milovy, Czech Republic, May 14-16, 2024. Vol. 30. 2024. P. 222–225. DOI: 10.21495/em2024-222. URL: https://www.engmech.cz/im/proceedings/show_p/2024/222.

2025

46. Lapitskaya V. A., Kuznetsova T. A., Warcholinski B., et al. Microstructure and micro- and nano-properties of Al-Cr-B-N coatings. Chapter 26 // Advanced Structured Materials: Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications. Vol. 223. Springer, 2025. P. 391–420. DOI: 10.1007/978-3-031-90022-8_26.
47. Panfilov I. A., Aizikovich S. M., Litvinenko A. N. Analysis of indentation results taking into account the plasticity of the material. Chapter 23 // Advanced Structured Materials: Dynamics of Discrete and Continuum Structures and Media. Vol. 221. Springer, 2025. P. 505–514. DOI: 10.1007/978-3-031-75626-9_23.
48. Sadyrin E. V., Kharchevnikov I. O., Drogan E. G., et al. Dynamic AFM testing of the roughness parameters for dental materials characterization. Chapter 29 // Advanced Structured Materials: Dynamics of Discrete and Continuum Structures and Media. Vol. 221. Springer, 2025. P. 581–597. DOI: 10.1007/978-3-031-75626-9_29.
49. Volkov S. S., Aizikovich S. M., Nikolaev A. L., et al. Displacements of a FGM-coated half-space surface caused by spherical indentation // Advanced Structured Materials: Dynamics of Discrete and Continuum Structures and Media. Vol. 221. Springer, 2025. Chap. 32. P. 637–648. DOI: 10.1007/978-3-031-75626-9_32.

2026

50. Eremeeva I. A., Aizikovich S. M. On Anti-Plane Waves Localized Near Sharp Interface Between Two Elastic Half-Spaces: Lattice Dynamics Approach // Advanced Structured Materials: Mechanics and Acoustics of Metamaterials. Vol. 245. Springer, 2026. Chap. 1. P. 1–7. DOI: 10.1007/978-3-032-11462-4_1.

Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.013 *EDN: CCKYIG*

Научная статья *УДК: 539.319*

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

СИСТЕМА ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ НЕРАВЕНСТВ В МЕХАНИКЕ ЛИНЕЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ ГУКА

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Аннотация. Статья посвящена исследованию вопросов устойчивости положений равновесия линейных анизотропных тел Гука. Энергия деформации таких тел является квадратичной формой от симметричного тензора деформаций. Энергетическая форма линейного анизотропного тела, в силу свойств симметрии определяющего тензора четвертого ранга, характеризуется 21-м изоэнтропийным механическим модулем. Для удобства оперирования с указанной квадратичной формой вводятся формальные переменные. Получены соотношения, связывающие компоненты определяющего тензора анизотропного тела Гука с элементами матрицы квадратичной формы. Условия устойчивого равновесия выражаются через условия положительной определенности квадратичной формы. Наиболее просто такие условия могут быть получены с помощью критерия Сильвестра, что подразумевает вычисление угловых миноров матрицы квадратичной формы. Трудности вычисления миноров пятого и шестого порядков преодолеваются с помощью системы символьных вычислений Wolfram Mathematica. Получены 6 односторонних ограничений (в форме неравенств), накладываемых на упругие модули, гарантирующих устойчивость равновесия линейного анизотропного тела Гука. До настоящего времени приведенные в статье результаты не могли быть найдены. Именно оперирование с данными с помощью систем символьных вычислений позволило, в конце концов, достигнуть прогресса в этом вопросе.

Ключевые слова: энергия деформации, внутренняя энергия, тело Гука, анизотропия, упругость, устойчивость равновесия, теория упругости Гука–Навье, критерий Сильвестра

Мурашкин Евгений Валерьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики новых материалов и технологий; `e-mail:` murashkin@ipmnet.ru; https://orcid.org/0000-0002-3267-4742; AuthorID: 129570

Радаев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории механики новых материалов и технологий; `e-mail:` radayev@ipmnet.ru;; https://orcid.org/0000-0002-0866-2151; AuthorID: 103116

для цитирования: *Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.* Система определяющих неравенств в механике линейных анизотропных тел Гука // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 32–49. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.013. EDN: CCKYIG

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. 2026

Поступила: 12.06.2026; принята в печать: 24.08.2026; опубликована: 29.10.26.

Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.013 *EDN: CCKYIG*
Research Article

E. V. Murashkin, Y. N. Radayev

HOOKE'S SYSTEM OF CONSTITUTIVE INEQUALITIES IN THE MECHANICS OF LINEAR ANISOTROPIC BODIES

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. This paper investigates the stability of the equilibrium positions of linear anisotropic Hookean solids. The strain energy of such solids is a quadratic form of the symmetric strain tensor. Due to the symmetry properties of the fourth-rank indicative tensor, the energy form of a linear anisotropic solid is characterized by the 21st isentropic mechanical modulus. Formal variables are introduced to facilitate manipulation of this quadratic form. Relations are derived linking the components of the indicative tensor of an anisotropic Hookean solid with the elements of the quadratic matrix. Conditions for stable equilibrium are expressed in terms of positive definiteness conditions for the quadratic form. These conditions can be most easily obtained using Sylvester's criterion, which involves calculating the angular minors of the quadratic matrix. Difficulties in calculating fifth- and sixth-order minors are overcome using the Wolfram Mathematica symbolic computing system. Six one-sided constraints (in the form of inequalities) imposed on the elastic moduli guaranteeing the equilibrium stability of a linear anisotropic Hookean solid were obtained. Until now, the results presented in the article had been unattainable. It was precisely the manipulation of data using symbolic computing systems that ultimately made progress in this area possible.

Keywords: deformation energy, internal energy, Hooke's body, anisotropy, elasticity, equilibrium stability, Hooke-Navier theory of elasticity, Sylvester criterion

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; `e-mail:` evmurashkin@gmail.ru; https://orcid.org/0000-0002-3267-4742; AuthorID: 129570

Yuri N. Radayev, Dr. Sci. Phys. & Math., Prof., Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; `e-mail:` radayev@ipmnet.ru; https://orcid.org/0000-0002-0866-2151; AuthorID: 103116

to cite this article: *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* Hooke's system of constitutive inequalities in the mechanics of linear anisotropic bodies // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 32–49. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.013

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Received: 12.06.2026; *accepted: 24.08.2026;* *published: 29.10.26.*

1. Введение. Построение энергетических форм, как правило, предшествует математическому моделированию механического поведения деформируемых сред [**Kessel1964**, 1—13]. Указанные энергетические формы используются также при формулировке вариационных принципов и выводе дифференциальных уравнений равновесия и движения. Кроме этого, исследование положительной определенности самой энергетической формы позволяет установить условия устойчивости положений равновесия деформируемого тела. Такие условия могут быть получены различными способами, известными из алгебры и теории матриц. Например, ранее аналогичные условия были получены для изотропного и гемитропного микрополярных упругих континуумов [14—16].

В настоящем исследовании формулируются критерии устойчивости положений равновесия для линейных анизотропных тел Гука.[1] Условия устойчивого равновесия выражаются условиям положительной определенности квадратичной энергетической формы, т.е. условиям положительной определенности ее матрицы. В связи с этим положительная определенность матрицы квадратичной энергетической формы гарантирует эллиптичность статических уравнений и гиперболичность дифференциальных уравнений движения анизотропного упругого тела. Существует много подходов к выяснению рассматриваемых вопросов [14—16], например, с помощью вычисления собственных значений [17—19]. Наиболее просто указанные условия могут быть получены с помощью критерия Сильвестра, что подразумевает вычисление «угловых» миноров матрицы квадратичной формы. Трудности вычисления пятого и шестого миноров успешно преодолеваются с помощью системы символьных вычислений Wolfram Mathematica 14.1. Получены 6 односторонних ограничений (в форме неравенств), накладываемых на упругие модули, гарантирующих устойчивость равновесия линейного анизотропного тела Гука. До настоящего времени приведенные в статье результаты не могли быть найдены ввиду огромного количества сравнительно элементарных алгебраических действий. Именно оперирование данными с помощью систем символьных вычислений позволило в конце концов достигнуть прогресса в этой вопросе. Полученный в работе результат является существенным вкладом в классическую линейную теорию упругости Гука–Навье.

Следует подчеркнуть, что настоящие исследование основано на понятиях, терминологии, обозначениях, методах и результатах, представленных в предыдущих работах авторов [11, 14—16, 20—23].

2. Энергетическая квадратичная форма анизотропного упругого тела Гука. Введем энергию деформации $\mathscr{U}$, которая в термодинамическом плане является внутренней энергией для изоэнтропийных (адиабатических)

[1]В настоящее время, как показывает анализ библиографии, подавляющее большинство работ посвящено изотропному упругому телу Гука.

процессов.[2] В расчете на единичный инвариантный элемент объема при постоянной энтропии ($S = \mathrm{const}$) она может быть задана как функция тензора деформаций:

$$U\Big|_{\text{adiabatic}} = \mathscr{U}(\epsilon_{ij})\,. \tag{1}$$

Тензор полных деформаций ϵ_{ij} принимается в качестве термодинамического базиса и вычисляется через перемещения u_i согласно фундаментальным соотношениям Коши:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{(ij)}, \qquad 2\epsilon_{(ij)} = \partial_i u_j + \partial_j u_i. \tag{2}$$

где частная производная ∂_i по пространственной координате x^i вычисляется согласно

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Хорошо известно, что энергия деформации анизотропного упругого тела может быть представлена в виде:

$$\mathscr{U} = E_{(ij)(kl)}\,\epsilon_{(ij)}\epsilon_{(kl)} \qquad (i,j,k,l = \overline{1,3}), \tag{3}$$

где $E_{(ij)(kl)}$ $(i,j,k,l = \overline{1,3})$ — тензор определяющих упругих постоянных/модулей. В самом общем случае на упругие модули не накладывается никаких ограничений. Здесь и далее будем придерживаться привила Эйнштейна, выполняя суммрирование по повторяющемся индексам. Очевидно, эти константы могут интерпретироваться как определяющие упругие модули (абсолютные скаляры) при задании модели анизотропного упругого тела Гука. Кроме того, тензор определяющих упругих постоянных удовлетворяет условиям симметрии:

$$E_{(ij)(kl)} = E_{(kl)(ij)}, \qquad E_{(ij)(kl)} = E_{(ji)(kl)}, \qquad E_{(ij)(kl)} = E_{(ij)(lk)}. \tag{4}$$

Условия (4) определяют перестановочность пар индексов и индексов внутри пар. Важно заметить, что тензор четвертого ранга в трехмерном пространстве в общем случае имеет $3\cdot3\cdot3\cdot3 = 81$ компонент. Однако, условия симметрии (4) позволяют уменьшить их количество до 21. Поэтому итоговая энергетическая форма анизотропного упругого тела Гука может быть представлена в достаточно компактном виде:

$$\begin{aligned}\mathscr{U} = {} & E_{(11)(11)}\,\epsilon_{11}^2 + E_{(22)(22)}\,\epsilon_{22}^2 + E_{(33)(33)}\,\epsilon_{33}^2 + 2E_{(11)(22)}\,\epsilon_{11}\epsilon_{22} + \\ & + 2E_{(11)(33)}\,\epsilon_{11}\epsilon_{33} + 2E_{(22)(33)}\,\epsilon_{22}\epsilon_{33} + 4E_{(23)(23)}\,\epsilon_{23}^2 + 4E_{(13)(13)}\,\epsilon_{13}^2 + \\ & + 4E_{(12)(12)}\,\epsilon_{12}^2 + 4E_{(11)(23)}\,\epsilon_{11}\epsilon_{23} + 4E_{(11)(13)}\,\epsilon_{11}\epsilon_{13} + 4E_{(11)(12)}\,\epsilon_{11}\epsilon_{12} + \\ & + 4E_{(22)(23)}\,\epsilon_{22}\epsilon_{23} + 4E_{(22)(13)}\,\epsilon_{22}\epsilon_{13} + 4E_{(22)(12)}\,\epsilon_{22}\epsilon_{12} + 4E_{(33)(23)}\,\epsilon_{33}\epsilon_{23} + \\ & + 4E_{(33)(13)}\,\epsilon_{33}\epsilon_{13} + 4E_{(33)(12)}\,\epsilon_{33}\epsilon_{12} + 4E_{(23)(13)}\,\epsilon_{23}\epsilon_{13} + 4E_{(23)(12)}\,\epsilon_{23}\epsilon_{12} + \\ & + 4E_{(13)(12)}\,\epsilon_{13}\epsilon_{12}.\end{aligned} \tag{5}$$

[2]Адиабатические процессы — процессы без теплообмена с окружающей средой, т.е. сравнительно быстрые процессы (например, волновые).

пары тензорных индексов $(ij)\,(kl)$	11	22	33	23	32	31	13	12	21
матричные индексы $(K)\,(N)$	1	2	3	4	4	5	5	6	6

Таблица 1. Соответствие пар тензорных и одинарных матричных индексов согласно Наю [24].

С целью упрощения оперирования с квадратичной формой (5) выполним замены независимых термодинамических переменных состояния $\epsilon_{(ij)}$ в энергии деформации $\mathscr{U}$ согласно следующим правилам [24]:

$$\begin{aligned} &\epsilon_{(11)} \longleftrightarrow Y_1, \quad \epsilon_{(22)} \longleftrightarrow Y_2, \quad \epsilon_{(33)} \longleftrightarrow Y_3, \\ &\epsilon_{(23)} \longleftrightarrow Y_4, \quad \epsilon_{(13)} \longleftrightarrow Y_5, \quad \epsilon_{(12)} \longleftrightarrow Y_6. \end{aligned} \tag{6}$$

После перехода от термодинамического базиса $\epsilon_{(ij)}$ к базису $Y_1, \ldots, Y_6$ получим:

$$\mathscr{U} = \mathscr{U}(Y_1, \ldots, Y_6)\,. \tag{7}$$

Сформируем транспонированный вектор-строку в шестимерном пространстве формальных переменных:

$$[\mathrm{Y}] = [Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6]^\top, \tag{8}$$

тогда функциональная зависимость (7) может быть представлена в виде:

$$\mathscr{U} = \mathscr{U}([\mathrm{Y}])\,, \tag{9}$$

или в матричных обозначениях:

$$\mathscr{U} = \mathscr{U}([\mathrm{A}], [\mathrm{Y}]) = [\mathrm{Y}]^\top [\mathrm{A}]\,[\mathrm{Y}], \tag{10}$$

где $[\mathrm{A}]$ — формальная квадратная матрица алгебраической размерности 6×6

$$[\mathrm{A}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{52} & A_{62} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} & A_{53} & A_{63} \\ A_{14} & A_{24} & A_{43} & A_{44} & A_{54} & A_{64} \\ A_{15} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{65} \\ A_{16} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Представление (10) может быть записано виде следующей формальной суммы:

$$\begin{aligned} \mathscr{U} =& A_{11}Y_1^2 + A_{22}Y_2^2 + A_{33}Y_3^2 + A_{44}Y_4^2 + A_{55}Y_5^2 + A_{66}Y_6^2 + 2A_{12}Y_1Y_2 + 2A_{13}Y_1Y_3 + \\ &+ 2A_{14}Y_1Y_4 + 2A_{15}Y_1Y_5 + 2A_{16}Y_1Y_6 + 2A_{23}Y_2Y_3 + 2A_{24}Y_2Y_4 + 2A_{52}Y_2Y_5 + \\ &+ 2A_{62}Y_2Y_6 + 2A_{43}Y_3Y_4 + 2A_{53}Y_3Y_5 + 2A_{63}Y_3Y_6 + 2A_{54}Y_4Y_5 + 2A_{64}Y_4Y_6 + \\ &+ 2A_{65}Y_5Y_6. \end{aligned} \tag{12}$$

Заменим пары индексов у тензора упругих модулей $E_{(ij)(kl)}$ на одинарные матричные индексы (см. Табл. 1) и расположим упругие модули в форме квадратной матрицы [E]:

$$[\mathrm{E}] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{52} & E_{62} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} & E_{43} & E_{53} & E_{63} \\ E_{14} & E_{24} & E_{43} & E_{44} & E_{54} & E_{64} \\ E_{15} & E_{52} & E_{53} & E_{54} & E_{55} & E_{65} \\ E_{16} & E_{62} & E_{63} & E_{64} & E_{65} & E_{66} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Следует заметить, что изменение нумерации приведет к изменению матрицы [E], но не нарушает физического содержания всех последующих рассмотрений. В матричном представлении (13) опущены круглые скобки, т.е., например,

$$E_{12} = E_{(1)(2)} = E_{(11)(22)} = E_{1122}. \tag{14}$$

На основании того, что

$$E_{1122} = E_{2211} = E_{(22)(11)} = E_{(2)(1)} = E_{21}, \tag{15}$$

и аналогично для всех других модулей имеем:

$$[\mathrm{E}] = [\mathrm{E}]^{\top} \tag{16}$$

Элементы матрицы [A] вычисляются (мы опускаем детали) через элементы матрицы [E] согласно:

$$[\mathrm{A}] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 2E_{14} & 2E_{15} & 2E_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} & 2E_{24} & 2E_{52} & 2E_{62} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} & 2E_{43} & 2E_{53} & 2E_{63} \\ 2E_{14} & 2E_{24} & 2E_{43} & 4E_{44} & 4E_{54} & 4E_{64} \\ 2E_{15} & 2E_{52} & 2E_{53} & 4E_{54} & 4E_{55} & 4E_{65} \\ 2E_{16} & 2E_{62} & 2E_{63} & 4E_{64} & 4E_{65} & 4E_{66} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

откуда видно, что матрицы [A] и [E] не совпадают:

$$[\mathrm{A}] \neq [\mathrm{E}].$$

Однако, нетрудно установить, что симметричные матрицы [A] и [E] конгруэнтны [25, С. 354], причем

$$[\mathrm{A}] = [\mathrm{D}_{\mathrm{diag}}][\mathrm{E}][\mathrm{D}_{\mathrm{diag}}], \tag{18}$$

где

$$[\mathrm{D}_{\mathrm{diag}}] = \mathrm{diag}[\mathrm{D}_{\mathrm{diag}}] = \mathrm{diag}(1, 1, 1, 2, 2, 2). \tag{19}$$

Следует отметить, что определение конгруэтных матриц в общем случае выглядит следующим образом

$$[\mathrm{A}] = [\mathrm{K}]^{\top}[\mathrm{E}][\mathrm{K}],$$

где [K] — невырожденная квадратная матрица, той же размерности, что и матрица [A]. В рассматриваемом случае

$$[\mathrm{K}] = [\mathrm{D}_{\mathrm{diag}}], \qquad [\mathrm{D}_{\mathrm{diag}}]^{\top} = [\mathrm{D}_{\mathrm{diag}}].$$

Конгруэтные матрицы обладают следующими важными свойствами:

(1) Сохранение симметрии. Если [E] симметрична ($[\mathrm{E}]^{\top} = [\mathrm{E}]$), то [A] также симметрична:

$$[\mathrm{A}]^{\top} = \big[[\mathrm{D}_{\mathrm{diag}}]^{\top}[\mathrm{E}][\mathrm{D}_{\mathrm{diag}}]\big]^{\top} = [\mathrm{D}_{\mathrm{diag}}]^{\top}[\mathrm{E}]^{\top}[\mathrm{D}_{\mathrm{diag}}] = [\mathrm{D}_{\mathrm{diag}}][\mathrm{E}][\mathrm{D}_{\mathrm{diag}}] = [\mathrm{A}]. \tag{20}$$

(2) Закон инерции Сильвестра. У конгруэнтных матриц совпадает сигнатура — число положительных, отрицательных и нулевых собственных значений, т.е.

$$\mathrm{Signature}[\mathrm{A}] = \mathrm{Signature}[\mathrm{E}]. \tag{21}$$

(3) Сохранение ранга. Ранг не меняется при конгруэнтном преобразовании, т.к. $[D]$ не вырождена:

$$\mathrm{rank}[\mathrm{A}] = \mathrm{rank}[\mathrm{E}]. \tag{22}$$

(4) Изменение определителя. Определитель преобразуется по формуле

$$\det[\mathrm{A}] = (\det[\mathrm{D}_{\mathrm{diag}}])^2 \cdot \det[\mathrm{E}] = 64\det[\mathrm{E}]. \tag{23}$$

(5) Сохранение положительной (отрицательной) определённости, являющиеся прямым следствием закона инерции Сильвестра. Если [E] положительно определена ($[\mathrm{E}] \succ 0$), то и [A] положительно определена:

$$[\mathrm{E}] \succ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad [\mathrm{A}] \succ 0. \tag{24}$$

(6) Сохранение квадратичной формы с точностью до замены переменных. Для любого вектора-столбца [Y] справедливо

$$[\mathrm{Y}]^{\top}[\mathrm{A}][\mathrm{Y}] = \big[[\mathrm{D}_{\mathrm{diag}}]^{-1}[\mathrm{Y}]\big]^{\top}[\mathrm{E}]\big[[\mathrm{D}_{\mathrm{diag}}]^{-1}[\mathrm{Y}]\big], \tag{25}$$

т.е. значения квадратичной формы при конгруэнтном преобразовании пересчитываются через замену координат.

Однако при при конгруэнтном преобразовании не сохраняется: собственные значения, след матрицы и характеристический многочлен.

В частном случае, когда [D] ортогональна ($[\mathrm{D}]^{\top} = [\mathrm{D}]^{-1}$), конгруэнтность совпадает с подобием, и тогда все перечисленные свойства подобия (включая сохранение собственных значений) выполняются.

С учетом (17) квадратичная форма энергии деформации анизотропного упругого тела Гука (10) записывается как сумма 21-го слагаемого:

$$\begin{aligned}\mathscr{U} = {} & E_{11}Y_1^2 + E_{22}Y_2^2 + E_{33}Y_3^2 + 2E_{12}Y_1Y_2 + 2E_{13}Y_1Y_3 + 2E_{23}Y_2Y_3 \\ & + 4E_{14}Y_1Y_4 + 4E_{15}Y_1Y_5 + 4E_{16}Y_1Y_6 + 4E_{24}Y_2Y_4 + 4E_{43}Y_3Y_4 + 4E_{44}Y_4^2 \\ & + 4E_{52}Y_2Y_5 + 4E_{53}Y_3Y_5 + 4E_{55}Y_5^2 + 4E_{62}Y_2Y_6 + 4E_{63}Y_3Y_6 + 4E_{66}Y_6^2 \\ & + 8E_{54}Y_4Y_5 + 8E_{64}Y_4Y_6 + 8E_{65}Y_5Y_6. \end{aligned} \tag{26}$$

В дальнейшем в аналогичных рассмотрениях принимается матрицу [A], вычисляемую согласно (17).

3. Определяющие неравенства, обеспечивающие устойчивость положений равновесия анизотропного упругого тела Гука Систему определяющих неравенств, обеспечивающую устойчивость равновесия анизотропного упругого тела Гука, получим,следуя критерию Сильвестра. Существует много других подходов к выяснению рассматриваемых вопросов, например, с помощью вычисления собственных значений [17—19]. Кроме того, поиск собственных значений можно проводить различными численно–аналитическими методами: алгоритм Леверье–Фаддеева, метод Ланцоша, QR-алгоритм, степенной метод, метод обратных итераций и т.д. Согласно критерию Сильвестра знакоопределенность квадратичной формы можно определить проверкой знаков ее главных (левых верхних угловых) миноров. Главным (левым верхним «угловым») минором порядка k называется определитель квадратной матрицы алгебраической размерности $k \times k$, образованной пересечением k первых строк и k первых столбцов исходной матрицы [25]. В случае положительной определенности квадратичной формы главные миноры ее матрицы должны быть положительны.

В рассматриваемом случае, квадратная матрица [A] будет иметь 6 главных миноров.

Главный минор порядка 1:

$$e_1 = E_{11}; \tag{27}$$

Главный минор порядка 2:

$$e_2 = \det \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{12} & E_{22} \end{bmatrix}; \tag{28}$$

Главный минор порядка 3:

$$e_3 = \det \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix}; \tag{29}$$

Главный минор порядка 4:

$$e_4 = \det \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 2E_{14} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} & 2E_{24} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} & 2E_{43} \\ 2E_{14} & 2E_{24} & 2E_{43} & 4E_{44} \end{bmatrix}; \tag{30}$$

Главный минор порядка 5:

$$e_5 = \det \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 2E_{14} & 2E_{15} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} & 2E_{24} & 2E_{52} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} & 2E_{43} & 2E_{53} \\ 2E_{14} & 2E_{24} & 2E_{43} & 4E_{44} & 4E_{54} \\ 2E_{15} & 2E_{52} & 2E_{53} & 4E_{54} & 4E_{55} \end{bmatrix}; \tag{31}$$

Главный минор порядка 6:

$$e_6 = \det[\mathrm{A}]. \tag{32}$$

Положительная определенность квадратичной формы (9) согласно критерию Сильвестра обеспечивается совместным выполнением шести неравенств:

$$e_s > 0 \quad (s = \overline{1,6}). \tag{33}$$

Вычислив определители e_1, ..., e_6 и подставив их в систему неравенств (33), получим:

$$E_{11} > 0,$$
$$E_{11}E_{22} - E_{12}^2 > 0,$$
$$E_{11}E_{22}E_{33} - E_{11}E_{23}^2 - E_{12}^2E_{33} + 2E_{12}E_{13}E_{23} - E_{13}^2E_{22} > 0,$$
$$E_{11}E_{22}E_{33}E_{44} - E_{11}E_{22}E_{43}^2 - E_{11}E_{23}^2E_{44} + 2E_{11}E_{23}E_{24}E_{43} - E_{11}E_{24}^2E_{33} -$$
$$- E_{12}^2E_{33}E_{44} + E_{12}^2E_{43}^2 + 2E_{12}E_{13}E_{23}E_{44} - 2E_{12}E_{13}E_{24}E_{43} - 2E_{12}E_{14}E_{23}E_{43} +$$
$$+ 2E_{12}E_{14}E_{24}E_{33} - E_{13}^2E_{22}E_{44} + E_{13}^2E_{24}^2 + 2E_{13}E_{14}E_{22}E_{43} - 2E_{13}E_{14}E_{23}E_{24} -$$
$$- E_{14}^2E_{22}E_{33} + E_{14}^2E_{23}^2 > 0,$$
$$E_{11}E_{22}E_{33}E_{44}E_{55} - E_{11}E_{22}E_{33}E_{54}^2 - E_{11}E_{22}E_{43}^2E_{55} + 2E_{11}E_{22}E_{43}E_{53}E_{54} -$$
$$- E_{11}E_{22}E_{44}E_{53}^2 - E_{11}E_{23}^2E_{44}E_{55} + E_{11}E_{23}^2E_{54}^2 + 2E_{11}E_{23}E_{24}E_{43}E_{55} -$$
$$- 2E_{11}E_{23}E_{24}E_{53}E_{54} - 2E_{11}E_{23}E_{43}E_{52}E_{54} + 2E_{11}E_{23}E_{44}E_{52}E_{53} - E_{11}E_{24}^2E_{33}E_{55} +$$
$$+ E_{11}E_{24}^2E_{53}^2 + 2E_{11}E_{24}E_{33}E_{52}E_{54} - 2E_{11}E_{24}E_{43}E_{52}E_{53} - E_{11}E_{33}E_{44}E_{52}^2 +$$
$$+ E_{11}E_{43}^2E_{52}^2 - E_{12}^2E_{33}E_{44}E_{55} + E_{12}^2E_{33}E_{54}^2 + E_{12}^2E_{43}^2E_{55} - 2E_{12}^2E_{43}E_{53}E_{54} +$$
$$+ E_{12}^2E_{44}E_{53}^2 + 2E_{12}E_{13}E_{23}E_{44}E_{55} - 2E_{12}E_{13}E_{23}E_{54}^2 - 2E_{12}E_{13}E_{24}E_{43}E_{55} +$$
$$+ 2E_{12}E_{13}E_{24}E_{53}E_{54} + 2E_{12}E_{13}E_{43}E_{52}E_{54} - 2E_{12}E_{13}E_{44}E_{52}E_{53} + E_{15}^2E_{23}^2E_{44} -$$
$$- 2E_{12}E_{14}E_{23}E_{43}E_{55} + 2E_{12}E_{14}E_{23}E_{53}E_{54} + 2E_{12}E_{14}E_{24}E_{33}E_{55} - 2E_{12}E_{14}E_{24}E_{53}^2 -$$
$$- 2E_{12}E_{14}E_{33}E_{52}E_{54} + 2E_{12}E_{14}E_{43}E_{52}E_{53} + 2E_{12}E_{15}E_{23}E_{43}E_{54} + E_{15}^2E_{24}^2E_{33} -$$
$$- 2E_{12}E_{15}E_{23}E_{44}E_{53} - 2E_{12}E_{15}E_{24}E_{33}E_{54} + 2E_{12}E_{15}E_{24}E_{43}E_{53} +$$
$$+ 2E_{12}E_{15}E_{33}E_{44}E_{52} - 2E_{12}E_{15}E_{43}^2E_{52} - E_{13}^2E_{22}E_{44}E_{55} + E_{13}^2E_{22}E_{54}^2 +$$
$$+ E_{13}^2E_{24}^2E_{55} - 2E_{13}^2E_{24}E_{52}E_{54} + E_{13}^2E_{44}E_{52}^2 + 2E_{13}E_{14}E_{22}E_{43}E_{55} -$$

$$
\begin{aligned}
&- 2E_{13}E_{14}E_{22}E_{53}E_{54} - 2E_{13}E_{14}E_{23}E_{24}E_{55} + 2E_{13}E_{14}E_{23}E_{52}E_{54} - 2E_{15}^2E_{23}E_{24}E_{43}+\\
&+ 2E_{13}E_{14}E_{24}E_{52}E_{53} - 2E_{13}E_{14}E_{43}E_{52}^2 - 2E_{13}E_{15}E_{22}E_{43}E_{54} + 2E_{13}E_{15}E_{22}E_{44}E_{53}+\\
&+ 2E_{13}E_{15}E_{23}E_{24}E_{54} - 2E_{13}E_{15}E_{23}E_{44}E_{52} - 2E_{13}E_{15}E_{24}^2E_{53} + 2E_{13}E_{15}E_{24}E_{43}E_{52}-\\
&- E_{14}^2E_{22}E_{33}E_{55} + E_{14}^2E_{22}E_{53}^2 + E_{14}^2E_{23}^2E_{55} - 2E_{14}^2E_{23}E_{52}E_{53} + E_{14}^2E_{33}E_{52}^2+\\
&+ 2E_{14}E_{15}E_{22}E_{33}E_{54} - 2E_{14}E_{15}E_{22}E_{43}E_{53} - 2E_{14}E_{15}E_{23}^2E_{54} + 2E_{14}E_{15}E_{23}E_{24}E_{53}+\\
&+ 2E_{14}E_{15}E_{23}E_{43}E_{52} - 2E_{14}E_{15}E_{24}E_{33}E_{52} - E_{15}^2E_{22}E_{33}E_{44} + E_{15}^2E_{22}E_{43}^2 > 0,\\
&- E_{54}^2E_{63}^2E_{12}^2 + E_{44}E_{55}E_{63}^2E_{12}^2 - E_{53}^2E_{64}^2E_{12}^2 + E_{33}E_{55}E_{64}^2E_{12}^2-\\
&- E_{43}^2E_{65}^2E_{12}^2 + E_{33}E_{44}E_{65}^2E_{12}^2 + 2E_{53}E_{54}E_{63}E_{64}E_{12}^2-\\
&- 2E_{43}E_{55}E_{63}E_{64}E_{12}^2 - 2E_{44}E_{53}E_{63}E_{65}E_{12}^2 + 2E_{43}E_{54}E_{63}E_{65}E_{12}^2+\\
&+ 2E_{43}E_{53}E_{64}E_{65}E_{12}^2 - 2E_{33}E_{54}E_{64}E_{65}E_{12}^2 + E_{44}E_{53}^2E_{66}E_{12}^2+\\
&+ E_{33}E_{54}^2E_{66}E_{12}^2 - 2E_{43}E_{53}E_{54}E_{66}E_{12}^2 + E_{43}^2E_{55}E_{66}E_{12}^2-\\
&- E_{33}E_{44}E_{55}E_{66}E_{12}^2 - 2E_{15}E_{44}E_{52}E_{63}^2E_{12} + 2E_{15}E_{24}E_{54}E_{63}^2E_{12}+\\
&+ 2E_{14}E_{52}E_{54}E_{63}^2E_{12} - 2E_{14}E_{24}E_{55}E_{63}^2E_{12} - 2E_{15}E_{33}E_{52}E_{64}^2E_{12}+\\
&+ 2E_{15}E_{23}E_{53}E_{64}^2E_{12} + 2E_{13}E_{52}E_{53}E_{64}^2E_{12} - 2E_{13}E_{23}E_{55}E_{64}^2E_{12}-\\
&- 2E_{14}E_{24}E_{33}E_{65}^2E_{12} + 2E_{14}E_{23}E_{43}E_{65}^2E_{12} + 2E_{13}E_{24}E_{43}E_{65}^2E_{12}-\\
&- 2E_{13}E_{23}E_{44}E_{65}^2E_{12} - 2E_{16}E_{44}E_{53}^2E_{62}E_{12} - 2E_{16}E_{33}E_{54}^2E_{62}E_{12}+\\
&+ 4E_{16}E_{43}E_{53}E_{54}E_{62}E_{12} - 2E_{16}E_{43}^2E_{55}E_{62}E_{12} + 2E_{16}E_{33}E_{44}E_{55}E_{62}E_{12}+\\
&+ 2E_{16}E_{23}E_{54}^2E_{63}E_{12} + 2E_{16}E_{44}E_{52}E_{53}E_{63}E_{12} - 2E_{16}E_{43}E_{52}E_{54}E_{63}E_{12}-\\
&- 2E_{16}E_{24}E_{53}E_{54}E_{63}E_{12} + 2E_{16}E_{24}E_{43}E_{55}E_{63}E_{12} - 2E_{16}E_{23}E_{44}E_{55}E_{63}E_{12}+\\
&+ 2E_{13}E_{54}^2E_{62}E_{63}E_{12} + 2E_{15}E_{44}E_{53}E_{62}E_{63}E_{12} - 2E_{15}E_{43}E_{54}E_{62}E_{63}E_{12}-\\
&- 2E_{14}E_{53}E_{54}E_{62}E_{63}E_{12} + 2E_{14}E_{43}E_{55}E_{62}E_{63}E_{12} - 2E_{13}E_{44}E_{55}E_{62}E_{63}E_{12}+\\
&+ 2E_{16}E_{24}E_{53}^2E_{64}E_{12} - 2E_{16}E_{43}E_{52}E_{53}E_{64}E_{12} + 2E_{16}E_{33}E_{52}E_{54}E_{64}E_{12}-\\
&- 2E_{16}E_{23}E_{53}E_{54}E_{64}E_{12} - 2E_{16}E_{24}E_{33}E_{55}E_{64}E_{12} + 2E_{16}E_{23}E_{43}E_{55}E_{64}E_{12}+\\
&+ 2E_{14}E_{53}^2E_{62}E_{64}E_{12} - 2E_{15}E_{43}E_{53}E_{62}E_{64}E_{12} + 2E_{15}E_{33}E_{54}E_{62}E_{64}E_{12}-\\
&- 2E_{13}E_{53}E_{54}E_{62}E_{64}E_{12} - 2E_{14}E_{33}E_{55}E_{62}E_{64}E_{12} + 2E_{13}E_{43}E_{55}E_{62}E_{64}E_{12}+\\
&+ 4E_{15}E_{43}E_{52}E_{63}E_{64}E_{12} - 2E_{15}E_{24}E_{53}E_{63}E_{64}E_{12} - 2E_{14}E_{52}E_{53}E_{63}E_{64}E_{12}-\\
&- 2E_{15}E_{23}E_{54}E_{63}E_{64}E_{12} - 2E_{13}E_{52}E_{54}E_{63}E_{64}E_{12} + 2E_{14}E_{23}E_{55}E_{63}E_{64}E_{12}+\\
&+ 2E_{13}E_{24}E_{55}E_{63}E_{64}E_{12} + 2E_{16}E_{43}^2E_{52}E_{65}E_{12} - 2E_{16}E_{33}E_{44}E_{52}E_{65}E_{12}-\\
&- 2E_{16}E_{24}E_{43}E_{53}E_{65}E_{12} + 2E_{16}E_{23}E_{44}E_{53}E_{65}E_{12} + 2E_{16}E_{24}E_{33}E_{54}E_{65}E_{12}-\\
&- 2E_{16}E_{23}E_{43}E_{54}E_{65}E_{12} + 2E_{15}E_{43}^2E_{62}E_{65}E_{12} - 2E_{15}E_{33}E_{44}E_{62}E_{65}E_{12}-\\
&- 2E_{14}E_{43}E_{53}E_{62}E_{65}E_{12} + 2E_{13}E_{44}E_{53}E_{62}E_{65}E_{12} + 2E_{14}E_{33}E_{54}E_{62}E_{65}E_{12}-\\
&- 2E_{13}E_{43}E_{54}E_{62}E_{65}E_{12} - 2E_{15}E_{24}E_{43}E_{63}E_{65}E_{12} + 2E_{15}E_{23}E_{44}E_{63}E_{65}E_{12}-\\
&- 2E_{14}E_{43}E_{52}E_{63}E_{65}E_{12} + 2E_{13}E_{44}E_{52}E_{63}E_{65}E_{12} + 4E_{14}E_{24}E_{53}E_{63}E_{65}E_{12}-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 2E_{14}E_{23}E_{54}E_{63}E_{65}E_{12} - 2E_{13}E_{24}E_{54}E_{63}E_{65}E_{12} + 2E_{15}E_{24}E_{33}E_{64}E_{65}E_{12} - \\
&- 2E_{15}E_{23}E_{43}E_{64}E_{65}E_{12} + 2E_{14}E_{33}E_{52}E_{64}E_{65}E_{12} - 2E_{13}E_{43}E_{52}E_{64}E_{65}E_{12} - \\
&- 2E_{14}E_{23}E_{53}E_{64}E_{65}E_{12} - 2E_{13}E_{24}E_{53}E_{64}E_{65}E_{12} + 4E_{13}E_{23}E_{54}E_{64}E_{65}E_{12} - \\
&- 2E_{14}E_{24}E_{53}^2E_{66}E_{12} - 2E_{13}E_{23}E_{54}^2E_{66}E_{12} - 2E_{15}E_{43}^2E_{52}E_{66}E_{12} + \\
&+ 2E_{15}E_{33}E_{44}E_{52}E_{66}E_{12} + 2E_{15}E_{24}E_{43}E_{53}E_{66}E_{12} - 2E_{15}E_{23}E_{44}E_{53}E_{66}E_{12} + \\
&+ 2E_{14}E_{43}E_{52}E_{53}E_{66}E_{12} - 2E_{13}E_{44}E_{52}E_{53}E_{66}E_{12} - 2E_{15}E_{24}E_{33}E_{54}E_{66}E_{12} + \\
&+ 2E_{15}E_{23}E_{43}E_{54}E_{66}E_{12} - 2E_{14}E_{33}E_{52}E_{54}E_{66}E_{12} + 2E_{13}E_{43}E_{52}E_{54}E_{66}E_{12} + \\
&+ 2E_{14}E_{23}E_{53}E_{54}E_{66}E_{12} + 2E_{13}E_{24}E_{53}E_{54}E_{66}E_{12} + 2E_{14}E_{24}E_{33}E_{55}E_{66}E_{12} - \\
&- 2E_{14}E_{23}E_{43}E_{55}E_{66}E_{12} - 2E_{13}E_{24}E_{43}E_{55}E_{66}E_{12} + 2E_{13}E_{23}E_{44}E_{55}E_{66}E_{12} - \\
&- E_{16}^2E_{43}^2E_{52}^2 + E_{16}^2E_{33}E_{44}E_{52}^2 - E_{16}^2E_{24}^2E_{53}^2 + E_{16}^2E_{22}E_{44}E_{53}^2 - \\
&- E_{16}^2E_{23}^2E_{54}^2 + E_{16}^2E_{22}E_{33}E_{54}^2 - E_{15}^2E_{43}^2E_{62}^2 - E_{14}^2E_{53}^2E_{62}^2 + \\
&+ E_{11}E_{44}E_{53}^2E_{62}^2 - E_{13}^2E_{54}^2E_{62}^2 + E_{11}E_{33}E_{54}^2E_{62}^2 + E_{15}^2E_{33}E_{44}E_{62}^2 + \\
&+ 2E_{14}E_{15}E_{43}E_{53}E_{62}^2 - 2E_{13}E_{15}E_{44}E_{53}E_{62}^2 - 2E_{14}E_{15}E_{33}E_{54}E_{62}^2 + \\
&+ 2E_{13}E_{15}E_{43}E_{54}E_{62}^2 + 2E_{13}E_{14}E_{53}E_{54}E_{62}^2 - 2E_{11}E_{43}E_{53}E_{54}E_{62}^2 + \\
&+ E_{11}E_{43}^2E_{55}E_{62}^2 + E_{14}^2E_{33}E_{55}E_{62}^2 - 2E_{13}E_{14}E_{43}E_{55}E_{62}^2 + \\
&+ E_{13}^2E_{44}E_{55}E_{62}^2 - E_{11}E_{33}E_{44}E_{55}E_{62}^2 - E_{15}^2E_{24}^2E_{63}^2 - E_{14}^2E_{52}^2E_{63}^2 + \\
&+ E_{11}E_{44}E_{52}^2E_{63}^2 + E_{11}E_{22}E_{54}^2E_{63}^2 + E_{15}^2E_{22}E_{44}E_{63}^2 + \\
&+ 2E_{14}E_{15}E_{24}E_{52}E_{63}^2 - 2E_{14}E_{15}E_{22}E_{54}E_{63}^2 - 2E_{11}E_{24}E_{52}E_{54}E_{63}^2 + \\
&+ E_{11}E_{24}^2E_{55}E_{63}^2 + E_{14}^2E_{22}E_{55}E_{63}^2 - E_{11}E_{22}E_{44}E_{55}E_{63}^2 - E_{15}^2E_{23}^2E_{64}^2 - \\
&- E_{13}^2E_{52}^2E_{64}^2 + E_{11}E_{33}E_{52}^2E_{64}^2 + E_{11}E_{22}E_{53}^2E_{64}^2 + E_{15}^2E_{22}E_{33}E_{64}^2 + \\
&+ 2E_{13}E_{15}E_{23}E_{52}E_{64}^2 - 2E_{13}E_{15}E_{22}E_{53}E_{64}^2 - 2E_{11}E_{23}E_{52}E_{53}E_{64}^2 + \\
&+ E_{11}E_{23}^2E_{55}E_{64}^2 + E_{13}^2E_{22}E_{55}E_{64}^2 - E_{11}E_{22}E_{33}E_{55}E_{64}^2 - E_{14}^2E_{23}^2E_{65}^2 - \\
&- E_{13}^2E_{24}^2E_{65}^2 + E_{11}E_{22}E_{43}^2E_{65}^2 + 2E_{13}E_{14}E_{23}E_{24}E_{65}^2 + E_{11}E_{24}^2E_{33}E_{65}^2 + \\
&+ E_{14}^2E_{22}E_{33}E_{65}^2 - 2E_{13}E_{14}E_{22}E_{43}E_{65}^2 - 2E_{11}E_{23}E_{24}E_{43}E_{65}^2 + \\
&+ E_{11}E_{23}^2E_{44}E_{65}^2 + E_{13}^2E_{22}E_{44}E_{65}^2 - E_{11}E_{22}E_{33}E_{44}E_{65}^2 + \\
&+ 2E_{16}^2E_{24}E_{43}E_{52}E_{53} - 2E_{16}^2E_{23}E_{44}E_{52}E_{53} - 2E_{16}^2E_{24}E_{33}E_{52}E_{54} + \\
&+ 2E_{16}^2E_{23}E_{43}E_{52}E_{54} + 2E_{16}^2E_{23}E_{24}E_{53}E_{54} - 2E_{16}^2E_{22}E_{43}E_{53}E_{54} + \\
&+ E_{16}^2E_{22}E_{43}^2E_{55} + E_{16}^2E_{24}^2E_{33}E_{55} - 2E_{16}^2E_{23}E_{24}E_{43}E_{55} + \\
&+ E_{16}^2E_{23}^2E_{44}E_{55} - E_{16}^2E_{22}E_{33}E_{44}E_{55} + 2E_{14}E_{16}E_{24}E_{53}^2E_{62} + \\
&+ 2E_{13}E_{16}E_{23}E_{54}^2E_{62} + 2E_{15}E_{16}E_{43}^2E_{52}E_{62} - 2E_{15}E_{16}E_{33}E_{44}E_{52}E_{62} - \\
&- 2E_{15}E_{16}E_{24}E_{43}E_{53}E_{62} + 2E_{15}E_{16}E_{23}E_{44}E_{53}E_{62} - 2E_{14}E_{16}E_{43}E_{52}E_{53}E_{62} + \\
&+ 2E_{13}E_{16}E_{44}E_{52}E_{53}E_{62} + 2E_{15}E_{16}E_{24}E_{33}E_{54}E_{62} - 2E_{15}E_{16}E_{23}E_{43}E_{54}E_{62} + \\
&+ 2E_{14}E_{16}E_{33}E_{52}E_{54}E_{62} - 2E_{13}E_{16}E_{43}E_{52}E_{54}E_{62} - 2E_{14}E_{16}E_{23}E_{53}E_{54}E_{62} -
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 2E_{13}E_{16}E_{24}E_{53}E_{54}E_{62} - 2E_{14}E_{16}E_{24}E_{33}E_{55}E_{62} + 2E_{14}E_{16}E_{23}E_{43}E_{55}E_{62}+\\
&+ 2E_{13}E_{16}E_{24}E_{43}E_{55}E_{62} - 2E_{13}E_{16}E_{23}E_{44}E_{55}E_{62} + 2E_{14}E_{16}E_{43}E_{52}^2E_{63}-\\
&- 2E_{13}E_{16}E_{44}E_{52}^2E_{63} - 2E_{13}E_{16}E_{22}E_{54}^2E_{63} - 2E_{15}E_{16}E_{24}E_{43}E_{52}E_{63}+\\
&+ 2E_{15}E_{16}E_{23}E_{44}E_{52}E_{63} + 2E_{15}E_{16}E_{24}^2E_{53}E_{63} - 2E_{15}E_{16}E_{22}E_{44}E_{53}E_{63}-\\
&- 2E_{14}E_{16}E_{24}E_{52}E_{53}E_{63} - 2E_{15}E_{16}E_{23}E_{24}E_{54}E_{63} + 2E_{15}E_{16}E_{22}E_{43}E_{54}E_{63}-\\
&- 2E_{14}E_{16}E_{23}E_{52}E_{54}E_{63} + 4E_{13}E_{16}E_{24}E_{52}E_{54}E_{63} + 2E_{14}E_{16}E_{22}E_{53}E_{54}E_{63}-\\
&- 2E_{13}E_{16}E_{24}^2E_{55}E_{63} + 2E_{14}E_{16}E_{23}E_{24}E_{55}E_{63} - 2E_{14}E_{16}E_{22}E_{43}E_{55}E_{63}+\\
&+ 2E_{13}E_{16}E_{22}E_{44}E_{55}E_{63} - 2E_{11}E_{23}E_{54}^2E_{62}E_{63} + 2E_{15}^2E_{24}E_{43}E_{62}E_{63}-\\
&- 2E_{15}^2E_{23}E_{44}E_{62}E_{63} - 2E_{14}E_{15}E_{43}E_{52}E_{62}E_{63} + 2E_{13}E_{15}E_{44}E_{52}E_{62}E_{63}-\\
&- 2E_{14}E_{15}E_{24}E_{53}E_{62}E_{63} + 2E_{14}^2E_{52}E_{53}E_{62}E_{63} - 2E_{11}E_{44}E_{52}E_{53}E_{62}E_{63}+\\
&+ 4E_{14}E_{15}E_{23}E_{54}E_{62}E_{63} - 2E_{13}E_{15}E_{24}E_{54}E_{62}E_{63} - 2E_{13}E_{14}E_{52}E_{54}E_{62}E_{63}+\\
&+ 2E_{11}E_{43}E_{52}E_{54}E_{62}E_{63} + 2E_{11}E_{24}E_{53}E_{54}E_{62}E_{63} - 2E_{14}^2E_{23}E_{55}E_{62}E_{63}+\\
&+ 2E_{13}E_{14}E_{24}E_{55}E_{62}E_{63} - 2E_{11}E_{24}E_{43}E_{55}E_{62}E_{63} + 2E_{11}E_{23}E_{44}E_{55}E_{62}E_{63}-\\
&- 2E_{14}E_{16}E_{33}E_{52}^2E_{64} + 2E_{13}E_{16}E_{43}E_{52}^2E_{64} - 2E_{14}E_{16}E_{22}E_{53}^2E_{64}+\\
&+ 2E_{15}E_{16}E_{24}E_{33}E_{52}E_{64} - 2E_{15}E_{16}E_{23}E_{43}E_{52}E_{64} - 2E_{15}E_{16}E_{23}E_{24}E_{53}E_{64}+\\
&+ 2E_{15}E_{16}E_{22}E_{43}E_{53}E_{64} + 4E_{14}E_{16}E_{23}E_{52}E_{53}E_{64} - 2E_{13}E_{16}E_{24}E_{52}E_{53}E_{64}+\\
&+ 2E_{15}E_{16}E_{23}^2E_{54}E_{64} - 2E_{15}E_{16}E_{22}E_{33}E_{54}E_{64} - 2E_{13}E_{16}E_{23}E_{52}E_{54}E_{64}+\\
&+ 2E_{13}E_{16}E_{22}E_{53}E_{54}E_{64} - 2E_{14}E_{16}E_{23}^2E_{55}E_{64} + 2E_{13}E_{16}E_{23}E_{24}E_{55}E_{64}+\\
&+ 2E_{14}E_{16}E_{22}E_{33}E_{55}E_{64} - 2E_{13}E_{16}E_{22}E_{43}E_{55}E_{64} - 2E_{11}E_{24}E_{53}^2E_{62}E_{64}-\\
&- 2E_{15}^2E_{24}E_{33}E_{62}E_{64} + 2E_{15}^2E_{23}E_{43}E_{62}E_{64} + 2E_{14}E_{15}E_{33}E_{52}E_{62}E_{64}-\\
&- 2E_{13}E_{15}E_{43}E_{52}E_{62}E_{64} - 2E_{14}E_{15}E_{23}E_{53}E_{62}E_{64} + 4E_{13}E_{15}E_{24}E_{53}E_{62}E_{64}-\\
&- 2E_{13}E_{14}E_{52}E_{53}E_{62}E_{64} + 2E_{11}E_{43}E_{52}E_{53}E_{62}E_{64} - 2E_{13}E_{15}E_{23}E_{54}E_{62}E_{64}+\\
&+ 2E_{13}^2E_{52}E_{54}E_{62}E_{64} - 2E_{11}E_{33}E_{52}E_{54}E_{62}E_{64} + 2E_{11}E_{23}E_{53}E_{54}E_{62}E_{64}+\\
&+ 2E_{13}E_{14}E_{23}E_{55}E_{62}E_{64} - 2E_{13}^2E_{24}E_{55}E_{62}E_{64} + 2E_{11}E_{24}E_{33}E_{55}E_{62}E_{64}-\\
&- 2E_{11}E_{23}E_{43}E_{55}E_{62}E_{64} + 2E_{13}E_{14}E_{52}^2E_{63}E_{64} - 2E_{11}E_{43}E_{52}^2E_{63}E_{64}+\\
&+ 2E_{15}^2E_{23}E_{24}E_{63}E_{64} - 2E_{15}^2E_{22}E_{43}E_{63}E_{64} - 2E_{14}E_{15}E_{23}E_{52}E_{63}E_{64}-\\
&- 2E_{13}E_{15}E_{24}E_{52}E_{63}E_{64} + 2E_{14}E_{15}E_{22}E_{53}E_{63}E_{64} + 2E_{11}E_{24}E_{52}E_{53}E_{63}E_{64}+\\
&+ 2E_{13}E_{15}E_{22}E_{54}E_{63}E_{64} + 2E_{11}E_{23}E_{52}E_{54}E_{63}E_{64} - 2E_{11}E_{22}E_{53}E_{54}E_{63}E_{64}-\\
&- 2E_{13}E_{14}E_{22}E_{55}E_{63}E_{64} - 2E_{11}E_{23}E_{24}E_{55}E_{63}E_{64} + 2E_{11}E_{22}E_{43}E_{55}E_{63}E_{64}-\\
&- 2E_{15}E_{16}E_{22}E_{43}^2E_{65} - 2E_{15}E_{16}E_{24}^2E_{33}E_{65} + 4E_{15}E_{16}E_{23}E_{24}E_{43}E_{65}-\\
&- 2E_{15}E_{16}E_{23}^2E_{44}E_{65} + 2E_{15}E_{16}E_{22}E_{33}E_{44}E_{65} + 2E_{14}E_{16}E_{24}E_{33}E_{52}E_{65}-\\
&- 2E_{14}E_{16}E_{23}E_{43}E_{52}E_{65} - 2E_{13}E_{16}E_{24}E_{43}E_{52}E_{65} + 2E_{13}E_{16}E_{23}E_{44}E_{52}E_{65}+\\
&+ 2E_{13}E_{16}E_{24}^2E_{53}E_{65} - 2E_{14}E_{16}E_{23}E_{24}E_{53}E_{65} + 2E_{14}E_{16}E_{22}E_{43}E_{53}E_{65}-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 2E_{13}E_{16}E_{22}E_{44}E_{53}E_{65} + 2E_{14}E_{16}E_{23}^2E_{54}E_{65} - 2E_{13}E_{16}E_{23}E_{24}E_{54}E_{65}-\\
&- 2E_{14}E_{16}E_{22}E_{33}E_{54}E_{65} + 2E_{13}E_{16}E_{22}E_{43}E_{54}E_{65} + 2E_{14}E_{15}E_{24}E_{33}E_{62}E_{65}-\\
&- 2E_{14}E_{15}E_{23}E_{43}E_{62}E_{65} - 2E_{13}E_{15}E_{24}E_{43}E_{62}E_{65} + 2E_{13}E_{15}E_{23}E_{44}E_{62}E_{65}-\\
&- 2E_{11}E_{43}^2E_{52}E_{62}E_{65} - 2E_{14}^2E_{33}E_{52}E_{62}E_{65} + 4E_{13}E_{14}E_{43}E_{52}E_{62}E_{65}-\\
&- 2E_{13}^2E_{44}E_{52}E_{62}E_{65} + 2E_{11}E_{33}E_{44}E_{52}E_{62}E_{65} + 2E_{14}^2E_{23}E_{53}E_{62}E_{65}-\\
&- 2E_{13}E_{14}E_{24}E_{53}E_{62}E_{65} + 2E_{11}E_{24}E_{43}E_{53}E_{62}E_{65} - 2E_{11}E_{23}E_{44}E_{53}E_{62}E_{65}-\\
&- 2E_{13}E_{14}E_{23}E_{54}E_{62}E_{65} + 2E_{13}^2E_{24}E_{54}E_{62}E_{65} - 2E_{11}E_{24}E_{33}E_{54}E_{62}E_{65}+\\
&+ 2E_{11}E_{23}E_{43}E_{54}E_{62}E_{65} + 2E_{13}E_{15}E_{24}^2E_{63}E_{65} - 2E_{14}E_{15}E_{23}E_{24}E_{63}E_{65}+\\
&+ 2E_{14}E_{15}E_{22}E_{43}E_{63}E_{65} - 2E_{13}E_{15}E_{22}E_{44}E_{63}E_{65} + 2E_{14}^2E_{23}E_{52}E_{63}E_{65}-\\
&- 2E_{13}E_{14}E_{24}E_{52}E_{63}E_{65} + 2E_{11}E_{24}E_{43}E_{52}E_{63}E_{65} - 2E_{11}E_{23}E_{44}E_{52}E_{63}E_{65}-\\
&- 2E_{11}E_{24}^2E_{53}E_{63}E_{65} - 2E_{14}^2E_{22}E_{53}E_{63}E_{65} + 2E_{11}E_{22}E_{44}E_{53}E_{63}E_{65}+\\
&+ 2E_{13}E_{14}E_{22}E_{54}E_{63}E_{65} + 2E_{11}E_{23}E_{24}E_{54}E_{63}E_{65} - 2E_{11}E_{22}E_{43}E_{54}E_{63}E_{65}+\\
&+ 2E_{14}E_{15}E_{23}^2E_{64}E_{65} - 2E_{13}E_{15}E_{23}E_{24}E_{64}E_{65} - 2E_{14}E_{15}E_{22}E_{33}E_{64}E_{65}+\\
&+ 2E_{13}E_{15}E_{22}E_{43}E_{64}E_{65} - 2E_{13}E_{14}E_{23}E_{52}E_{64}E_{65} + 2E_{13}^2E_{24}E_{52}E_{64}E_{65}-\\
&- 2E_{11}E_{24}E_{33}E_{52}E_{64}E_{65} + 2E_{11}E_{23}E_{43}E_{52}E_{64}E_{65} + 2E_{13}E_{14}E_{22}E_{53}E_{64}E_{65}+\\
&+ 2E_{11}E_{23}E_{24}E_{53}E_{64}E_{65} - 2E_{11}E_{22}E_{43}E_{53}E_{64}E_{65} - 2E_{11}E_{23}^2E_{54}E_{64}E_{65}-\\
&- 2E_{13}^2E_{22}E_{54}E_{64}E_{65} + 2E_{11}E_{22}E_{33}E_{54}E_{64}E_{65} + E_{15}^2E_{22}E_{43}^2E_{66}+\\
&+ E_{11}E_{43}^2E_{52}^2E_{66} + E_{14}^2E_{33}E_{52}^2E_{66} - 2E_{13}E_{14}E_{43}E_{52}^2E_{66}+\\
&+ E_{13}^2E_{44}E_{52}^2E_{66} - E_{11}E_{33}E_{44}E_{52}^2E_{66} + E_{11}E_{24}^2E_{53}^2E_{66} + E_{14}^2E_{22}E_{53}^2E_{66}-\\
&- E_{11}E_{22}E_{44}E_{53}^2E_{66} + E_{11}E_{23}^2E_{54}^2E_{66} + E_{13}^2E_{22}E_{54}^2E_{66}-\\
&- E_{11}E_{22}E_{33}E_{54}^2E_{66} + E_{15}^2E_{24}^2E_{33}E_{66} - 2E_{15}^2E_{23}E_{24}E_{43}E_{66}+\\
&+ E_{15}^2E_{23}^2E_{44}E_{66} - E_{15}^2E_{22}E_{33}E_{44}E_{66} - 2E_{14}E_{15}E_{24}E_{33}E_{52}E_{66}+\\
&+ 2E_{14}E_{15}E_{23}E_{43}E_{52}E_{66} + 2E_{13}E_{15}E_{24}E_{43}E_{52}E_{66} - 2E_{13}E_{15}E_{23}E_{44}E_{52}E_{66}-\\
&- 2E_{13}E_{15}E_{24}^2E_{53}E_{66} + 2E_{14}E_{15}E_{23}E_{24}E_{53}E_{66} - 2E_{14}E_{15}E_{22}E_{43}E_{53}E_{66}+\\
&+ 2E_{13}E_{15}E_{22}E_{44}E_{53}E_{66} - 2E_{14}^2E_{23}E_{52}E_{53}E_{66} + 2E_{13}E_{14}E_{24}E_{52}E_{53}E_{66}-\\
&- 2E_{11}E_{24}E_{43}E_{52}E_{53}E_{66} + 2E_{11}E_{23}E_{44}E_{52}E_{53}E_{66} - 2E_{14}E_{15}E_{23}^2E_{54}E_{66}+\\
&+ 2E_{13}E_{15}E_{23}E_{24}E_{54}E_{66} + 2E_{14}E_{15}E_{22}E_{33}E_{54}E_{66} - 2E_{13}E_{15}E_{22}E_{43}E_{54}E_{66}+\\
&+ 2E_{13}E_{14}E_{23}E_{52}E_{54}E_{66} - 2E_{13}^2E_{24}E_{52}E_{54}E_{66} + 2E_{11}E_{24}E_{33}E_{52}E_{54}E_{66}-\\
&- 2E_{11}E_{23}E_{43}E_{52}E_{54}E_{66} - 2E_{13}E_{14}E_{22}E_{53}E_{54}E_{66} - 2E_{11}E_{23}E_{24}E_{53}E_{54}E_{66}+\\
&+ 2E_{11}E_{22}E_{43}E_{53}E_{54}E_{66} + E_{14}^2E_{23}^2E_{55}E_{66} + E_{13}^2E_{24}^2E_{55}E_{66}-\\
&- E_{11}E_{22}E_{43}^2E_{55}E_{66} - 2E_{13}E_{14}E_{23}E_{24}E_{55}E_{66} - E_{11}E_{24}^2E_{33}E_{55}E_{66}-\\
&- E_{14}^2E_{22}E_{33}E_{55}E_{66} + 2E_{13}E_{14}E_{22}E_{43}E_{55}E_{66} + 2E_{11}E_{23}E_{24}E_{43}E_{55}E_{66}-\\
&- E_{11}E_{23}^2E_{44}E_{55}E_{66} - E_{13}^2E_{22}E_{44}E_{55}E_{66} + E_{11}E_{22}E_{33}E_{44}E_{55}E_{66} > 0.
\end{aligned}
$$

Таблица 2. Количество слагаемых при вычислении главных миноров симметричной матрицы.

Порядок минора	Общее количество слагаемых	Количество слагаемых с учетом подобных
1	1	1
2	2	2
3	6	5
4	24	17
5	120	73
6	720	388

Для анизотропного микрополярного упругого тела [10, 14—16, 26] главный минор порядка 18 может быть представлен как сумма 18!=6 402 373 705 728 000 слагаемых (т.е. примерно 6,4 квадриллиона слагаемых). После приведения подобных останется 1 844 908 072 865 290 или примерно 1,8 квадриллиона слагаемых.

Заключение В настоящем исследовании получены условия равновесия анизотропного упругого тела Гука. Подводя итог исследования, сформулируем следующие основные выводы:

(1) Рассмотрена модель анизотропного линейного упругого тела Гука, характеризующаяся 21 определяющим механическим модулем.
(2) С целью упрощения оперирования с квадратичной формой энергии деформации введены формальные переменные $Y_1,...,Y_6$.
(3) Даны развернутые точные формы энергии деформации в парах [A], [Y] и [E], [Y].
(4) Установлена конгруэнтность определяющих матриц [A] и [E].
(5) С помощью системы символьных вычислений Wolfram Mathematica 14.1 вычислены главные миноры матрицы квадратичной формы. Сложность вычисления миноров матрицы [A] размерности 6×6, определяемая количеством слагаемом в итоговом выражении, приведена в Табл. 2. Миноры 5 и 6 после приведения подобных членов представлены как суммы 73 и 388 слагаемых, соответственно. Дальнейшее преобразование невозможно.
(6) С помощью критерия Сильвестра установлены условия положительной определенности квадратичной энергетической формы.
(7) Найдены ограничения на определяющие механические модули, обеспечивающие положительную определенность квадратичной формы энергии деформации и устойчивость равновесия анизотропного упругого тела Гука.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).
Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
Источник финансирования. Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 124013000674-0).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).
Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.
Funding. This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number 124013000674-0).

ЛИТЕРАТУРА

1. Cosserat E. M. P., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et fils, 1909. VI+226.
2. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383.
3. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // Физика твердого тела. 1960. Т. 2, № 7. С. 1399–1409.
4. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Континуальная теория асимметрической упругости. Учет «внутреннего» вращения // Физика твердого тела. 1960. Т. 5, № 9. С. 2591–2598.
5. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Континуальная теория асимметричной упругости. Равновесие изотропного тела // Физика твердого тела. 1960. Т. 6, № 9. С. 2689–2699.
6. Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.
7. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964. Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
8. Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua / ed. by E. Kröner. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
9. Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345. (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics).
10. Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22, вып. 3. С. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.

11. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. 3(53). С. 86–100. DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
12. Altenbach H., Maugin G. A., Erofeev V. (Mechanics of generalized continua. Berlin: Springer, 2011. DOI: 10.1007/978-3-642-19219-7.
13. Maugin G. A. Non-classical continuum mechanics. Singapore: Springer Verlag, 2017. DOI: 10.1007/978-981-10-2434-4.
14. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Диагонализация энергетической формы гемитропного тела и система определяющих неравенств. Метод отделения квадратов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2026. Т. 30, № 2. С. 288–307.
15. Мурашкин Е., Радаев Ю. Факторизация характеристического полинома энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. 1(67). С. 113–125. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.008.
16. Мурашкин Е., Радаев Ю. Факторизация характеристического полинома энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. 1(67). С. 159–179. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.021.
17. Wilkinson J. The algebraic eigenvalue problem. T. 662. Oxford: Clarendon Press, 1965.
18. Johnson C., Horn R. Matrix analysis. Cambridge: Cambridge university press, 1985.
19. Бахвалов Н. Численные методы (анализ, алгебра, дифференциальные уравнения). Москва: Наука, 1975.
20. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории линейных гемитропных микрополярных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4. С. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
21. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. 4(54). С. 108–115. DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009.
22. Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. 1(55). С. 110–121. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
23. Krylova E. Y., Murashkin E. V., Radaev Y. N. The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic, and ultraisotropic micropolar elastic solids // Mechanics of Solids. United States, 2024. Vol. 59, no. 3. P. 1311–1320. DOI: 10.1134/s0025654424603719.
24. Nye J. F. Physical Properties of Crystals, their representation by tensors and matrices. Oxford: Clarendon Press, 1957. 322+xv.

25. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: наука, 1970. 720 с.
26. Радаев Ю., Мурашкин Е. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.

REFERENCES

1. Cosserat E. M. P., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et fils, 1909. VI+226.
2. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383.
3. Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Basic Equations of the Theory of Elasticity of Media with Rotational Interaction of Particles // Fizika Tverdogo Tela. 1960. T. 2, № 7. C. 1399–1409.
4. Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Continuum Theory of Asymmetric Elasticity. Account of "Internal" Rotation // Fizika Tverdogo Tela. 1960. T. 5, № 9. C. 2591–2598.
5. Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Continuum Theory of Asymmetric Elasticity. Equilibrium of an Isotropic Body // Fizika Tverdogo Tela. 1960. T. 6, № 9. C. 2689–2699.
6. Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.
7. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964. Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
8. Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua / ed. by E. Kröner. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
9. Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345. (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics).
10. Radayev Y. N. Multiplier Rule in Covariant Formulations of Micropolar Theories of Continuum Mechanics // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2018. T. 22, вып. 3. C. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
11. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Two Basic Natural Forms of the Potential of Asymmetric Force-Stress and Couple-Stress Tensors in the Mechanics of Hemitropic Solids // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. 3(53). C. 86–100. DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
12. Altenbach H., Maugin G. A., Erofeev V. (Mechanics of generalized continua. Berlin: Springer, 2011. DOI: 10.1007/978-3-642-19219-7.
13. Maugin G. A. Non-classical continuum mechanics. Singapore: Springer Verlag, 2017. DOI: 10.1007/978-981-10-2434-4.
14. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Diagonalization of the Energy Form of a Hemitropic Solid and a System of Constitutive Inequalities. Method of Completing Squares //

Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2026. T. 30, № 2. C. 288–307.

15. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Factorization of the Characteristic Polynomial of the Energy Form of a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2026. 1(67). C. 113–125. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.008.
16. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Factorization of the Characteristic Polynomial of the Energy Form of a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2026. 1(67). C. 159–179. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.021.
17. Wilkinson J. The algebraic eigenvalue problem. T. 662. Oxford: Clarendon Press, 1965.
18. Johnson C., Horn R. Matrix analysis. Cambridge: Cambridge university press, 1985.
19. Bakhvalov N. S. Numerical Methods (Analysis, Algebra, Differential Equations). Moscow: Nauka, 1975.
20. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Theory of Linear Hemitropic Micropolar Media // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2020. № 4. C. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
21. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Reduction of Natural Forms of Hemitropic Energy Potentials to Conventional Forms // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. 4(54). C. 108–115. DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009.
22. Murashkin E. V. On the Relation Between Micropolar Constitutive Parameters of Thermodynamic State Potentials // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. 1(55). C. 110–121. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
23. Krylova E. Y., Murashkin E. V., Radaev Y. N. The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic, and ultraisotropic micropolar elastic solids // Mechanics of Solids. United States, 2024. Vol. 59, no. 3. P. 1311–1320. DOI: 10.1134/s0025654424603719.
24. Nye J. F. Physical Properties of Crystals, their representation by tensors and matrices. Oxford: Clarendon Press, 1957. 322+xv.
25. Korn G., Korn T. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. Moscow: Nauka, 1970. 720 c.
26. Radayev Y. N., Murashkin E. V. Pseudotensor Formulation of the Mechanics of Hemitropic Micropolar Media // Problems of Strength and Plasticity. 2020. T. 82, № 4. C. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.

Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.005 *EDN: PLIBHT*

Научная статья *УДК: 530.182*

В. В. Канду[1], *А. И. Круссер*[2,3], *А. С. Шепелев*[2], *М. В. Шитикова*[2]

АНАЛИЗ ВЫНУЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН НА ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА-ФОЙГТА С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

[1] *АО Атомэнергопроект, Москва, Россия*

[2] *Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия*

[3] *Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия*

Аннотация. В настоящем исследовании рассматривается задача о нелинейных вынужденных колебаниях пластины на вязкоупругом основании Пастернака на основе реологической модели Кельвина-Фойгта с производной дробного порядка. Анализ проводится для случаев внутренних резонансов два-к-одному и один-к-одному при их наложении на внешний резонанс. Для построения аналитического решения разрешающих нелинейных дифференциальных уравнений движения пластины используется обобщенный метод многих временных масштабов, согласно которому происходит разложение обобщенных перемещений в ряд по малому параметру с помощью новых временных масштабов. Далее при использовании программной реализации метода Рунге-Кутта четвертого порядка получено численное решение уравнений для амплитуд и фаз колебаний с учетом начальных условий. В ходе численного анализа удалось выяснить, что параметры дробности окружающей среды и вязкоупругого основания оказывают ключевое влияние на демпфирующие процессы в системе. Дополнительно установлено, что учет параметров, характеризующих вязкоупругое основание, является обоснованным ввиду их значительного влияния на изменение амплитуд колебаний системы, что доказывает необходимость учета деформаций сдвига по модели Пастернака для корректного прогнозирования динамического отклика сложных механических систем.

Ключевые слова: модель Кельвина-Фойгта с дробной производной, вынужденные нелинейные колебания пластины, вязкоупругое основание Пастернака, обобщенный метод многих временных масштабов

Канду Владимир Валерьевич, кандидат технических наук, начальник отдела по 3D моделированию; `e-mail:` kandu8vladimir@gmail.com; `https://orcid.org/0000-0002-9083-5460`; AuthorID: 896076

Круссер Анастасия Игоревна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительных конструкций, оснований и фундаментов им. проф. Борисова Ю.М.; `e-mail:` an.krusser@yandex.ru; `https://orcid.org/0000-0001-6203-2495`; AuthorID: 987211

Шепелев Антон Сергеевич, аспирант кафедры высшей математики;
`e-mail:` anton.shepelev123@gmail.com; `https://orcid.org/0009-0007-8725-1636`; AuthorID: 1293433

Шитикова Марина Вячеславовна, доктор физико-математических наук, профессор, заведующая кафедрой высшей математики; e-mail: marinavshitikova@gmail.com; https://orcid.org/0000-0003-2186-1881; AuthorID: 4259

для цитирования: *Канду В. В., Круссер А. И, Шепелев А. С., Шитикова М. В.* Анализ вынужденных нелинейных колебаний пластин на вязкоупругом основании Пастернака на основе модели Кельвина-Фойгта с дробными производными // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 50–82. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.005. EDN: PLIBHT

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© Канду В. В., Круссер А. И, Шепелев А. С., Шитикова М. В. 2026

Поступила: 10.06.26; принята в печать: 15.09.26; опубликована: 29.10.26.

Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.005 *EDN: PLIBHT*
Research Article

V. V. Kandu[1], *A. I. Krusser*[2,3], *A. S. Shepelev*[2], *M. V. Shitikova*[2]

ANALYSIS OF NONLINEAR VIBRATIONS OF PLATES ON A VISCOELASTIC PASTERNAK FOUNDATION USING THE FRACTIONAL DERIVATIVE KELVIN-VOIGT RHEOLOGICAL MODEL

[1] *AO Atomenergoproekt, Russia*

[2] *National Research Moscow State University of Civil Engineering, Russia*

[3] *Voronezh State Technical University, Russia*

Abstract. In the present paper, the problem of nonlinear forced vibrations of a plate supported by a Pasternak viscoelastic foundation using the fractional derivative Kelvin-Voigt rheological model is investigated for the cases of two-to-one and one-to-one internal resonance accompanied by the external resonance. To construct an analytical solution to the resolving nonlinear differential equations of the plate's motion, a generalized method of multiple time scales is used, which involves expanding the generalized displacements into a series in terms of a small parameter via new time scales. Adopting a software implementation of the fourth-order Runge-Kutta method, a numerical solution is then obtained for the equations in terms of amplitudes and phases of nonlinear vibrations. The numerical analysis revealed that the fractional parameters of the environment and viscoelastic foundation have a key influence on the damping processes in the system. Additionally, it has been established that account for the parameters characterizing the viscoelastic foundation is justified due to their significant influence on the change in amplitudes of system's oscillations, which proves the need to take shear deformations into account according to the Pasternak model for the correct prediction of the dynamic response of complex mechanical systems.

Keywords: Kelvin-Voigt model with fractional derivative, forced nonlinear vibrations of a plate, viscoelastic Pasternak foundation, generalized method of multiple time scales

Vladimir V. Kandu, Candidate of Technical Sciences, Head of the Department of 3D Modelling; e-mail: kandu8vladimir@gmail.com; https://orcid.org/0000-0002-9083-5460; AuthorID: 896076

Anastasia I. Krusser, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Building Structures, Foundations and Foundations named after Prof. Borisov Yu.M.; e-mail: an.krusser@yandex.ru; https://orcid.org/0000-0001-6203-2495; AuthorID: 987211

Anton S. Shepelev, PhD student at the Department of Higher Mathematics; e-mail: anton.shepelev123@gmail.com; https://orcid.org/0009-0007-8725-1636; AuthorID: 1293433

Marina V. Shitikova, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Higher Mathematics; e-mail: marinavshitikova@gmail.com; https://orcid.org/0000-0003-2186-1881; AuthorID: 4259

to cite this article: *Kandu V. V., Krusser A. I., Shepelev A. S., Shitikova M. V.* Analysis of nonlinear vibrations of plates on a viscoelastic Pasternak foundation using the fractional derivative Kelvin-Voigt rheological model // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 50–82. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.005

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Received: 10.06.26; *accepted: 15.09.26;* *published: 29.10.26.*

Введение. Так как пластины являются универсальным конструктивным элементом, их применение в строительной, машиностроительной и авиакосмической областях весьма обширно: от возведения фундаментных плит до моделирования аэрокосмических конструкций. В связи с этим особую актуальность получили исследования динамического поведения пластин на вязкоупругом основании, реологические свойства которого описываются моделями с операторами дробного порядка [1—6], несомненным преимуществом использования которых является хорошее согласование результатов численного и аналитического моделирования с реальными экспериментальными данными, о чем свидетельствуют работы [7—10].

Операторы дробного порядка также нашли широкое применение благодаря их способности адекватно описывать память материала и наследственные свойства реальных грунтов [11—14]. В отличие от классических моделей вязкоупругости с целыми производными, требующих большого числа параметров для качественной аппроксимации экспериментальных данных, модели с производными дробного порядка позволяют достичь высокой точности за счет использования минимального количества констант.

Для описания вязкоупругого основания в современных исследованиях активно применяется двухпараметрическая модель Пастернака с дробными производными. Принципиальное преимущество данной модели по сравнению с классической моделью Фусса-Винклера заключается в учете сдвиговых характеристик, что существенно расширяет возможности анализа механического поведения конструкций. Данный подход успешно применяется к решению динамических задач различных строительных конструкций [15, 16]. Так, в работах [1, 17] было проведено моделирование плит на вязкоупругом основании Пастернака, которое продемонстрировало существенное влияние порядка дробности на прогиб, изгибающий момент и период затухания колебаний, особенно если в расчете учитывается протяженный период времени. Также были получены уравнения для случая упругой и вязкоупругой плиты с использованием модели Кельвина-Фойгта с дробной производной. Авторы отмечали, что данный подход может быть применен и для других конструктивных элементов, расположенных на основании Пастернака. Динамический анализ для упругой пластины, опирающейся на вязкоупругое основание Пастернака, проводился и в работе [2]. Отличительной чертой этого исследования стало наличие движущейся нагрузки, при этом оператор податливости основания был задан моделью стандартного линейного твердого тела.

В большинстве подобных исследований реологические свойства основания описываются в рамках модели Кельвина-Фойгта, определяющей поведение грунтов как для вязкоупругих твердых тел [18, 19]. Имеются также и альтернативные подходы, где сила демпфирования описывается моделью стандартного линейного твердого тела с дробной производной Римана-Лиувилля, например, как в [20], где авторы исследовали нелинейные колебания шарнирно-опертой

пластины на вязкоупругом основании Фусса-Винклера с приложением подвижной осциллирующей нагрузки. Изучаются также и различные типы граничных условий, например, в [1] рассматривалось взаимодействие шарнирно опертой пластины с основанием по модели Пастернака, свойства которого задавались при помощи модели Скотта–Блэра с дробной производной. Однако наиболее редкими являются исследования других типов опирания. В [21] рассматривались частоты нелинейных колебаний для трех различных типов граничных условий, а в [22] изучались комбинации простых граничных условий (защемленный край, шарнирное опирание и свободный край).

Важной особенностью является тот факт, что в процессе вынужденных нелинейных колебаний пластин возможно возникновение таких эффектов как внутренний и внешний резонансы, которые в случае наложения друг на друга могут привести к экстремальному состоянию конструкции. При этом внутренний резонанс, в отличие от внешнего, невозможно устранить путем регулирования частоты внешнего воздействия возбуждающей силы, что делает его изучение особенно важным для обеспечения надежности строительных конструкций.

Таким образом, в данной работе рассматривается задача о нелинейных вынужденных колебаниях пластины на вязкоупругом основании Пастернака на основе реологической модели Кельвина-Фойгта с дробной производной для случаев внутренних резонансов один-к-одному и два-к-одному, а также при их наложении на внешний резонанс. Отличительной особенностью от описанных выше исследований является описание динамического поведения пластины с помощью системы трех нелинейных уравнений относительно ее двух перемещений в плоскости и вертикального прогиба, для решения которых применяется обобщенный метод многих временных масштабов [23].

1. Постановка задачи. Свободные незатухающие и затухающие колебания прямоугольной пластины, описываемые тремя нелинейными дифференциальными уравнениями движения относительно перемещений в трех взаимно перпендикулярных направлениях, были исследованы в работе [24], где впервые было введено модальное демпфирование с дробной производной Римана–Лиувилля. Решение полученной системы уравнений было выполнено с использованием обобщенного метода многих временных масштабов, при этом рассматривался случай внутреннего резонанса 2:1. В последующей работе [25] на основе аналогичного подхода были проанализированы случаи внутреннего резонанса 1:1, а также различные типы внутренних комбинационных резонансов. Обобщение этого подхода на случай вынужденных колебаний от действия сосредоточенной гармонической силы было сделано в работе [26].

В статье [10] рассматривались нелинейные колебания пластины фон Кармана, взаимодействующей с вязкоупругой средой и опирающейся на вязкоупругое основание Пастернака. При этом динамика системы описывалась одним уравнением относительно поперечного прогиба.

В данной работе обобщим уравнения, приведенные в статье [26], за счет добавления вязкоупругого основания Пастернака. Для этого рассмотрим прямоугольную в плане и шарнирно опертую по контуру пластину со сторонами a и b, изображенную на рис. 1. Пластина расположена на вязкоупругом основании Пастернака и подвергается воздействию гармонической нагрузки $q = q(x, y, t)$, зависящей от координат x, y и времени t. Вязкоупругое основание Пастернака описывается при помощи модели Кельвина-Фойгта, в которой слагаемые, определяющие демпфирование, пропорциональны производной дробного порядка по времени от перемещений. Тогда нелинейные уравнения движения пластины относительно перемещений в трех взаимно перпендикулярных направлениях в размерном виде запишутся следующим образом:

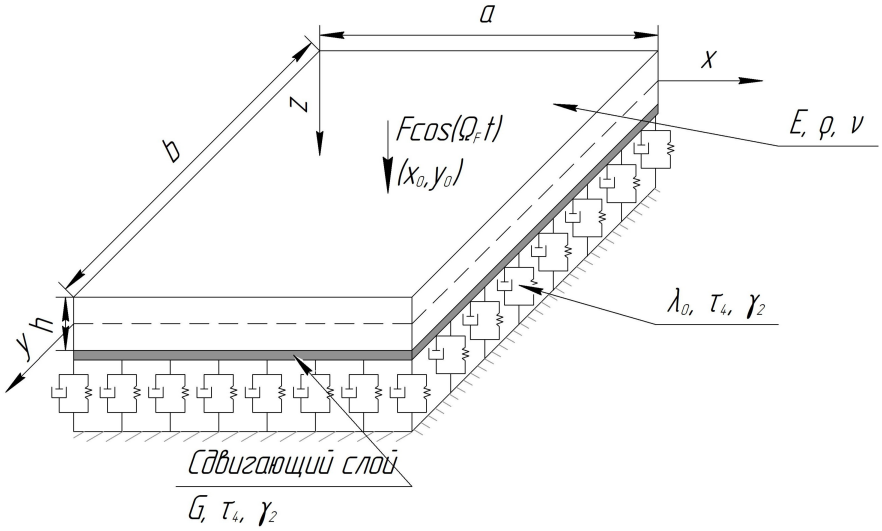


Рис. 1. Модель пластины на вязкоупругом основании Пастернака

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \\ = \rho\frac{(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1-\nu^2}{Eh}F_1, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \\ = \rho\frac{(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{1-\nu^2}{Eh}F_2, \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial^2 x\,\partial^2 y}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)-\\
&\qquad-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\nu\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]-\\
&\qquad-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial w}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]=\\
&\qquad=-\rho\frac{(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{1-\nu^2}{Eh}(q-F_3-F_4),
\end{aligned}\tag{3}$$

где $u\,(x,y,t)$, $v\,(x,y,t)$ и $w(x,y,t)$ – перемещения точек срединной поверхности пластины по направлению осей x, y, z соответственно; h – толщина пластины, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность материала пластины, E – модуль упругости, t – время, $q = F\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\cos\Omega_F t$ – внешняя нагрузка, F и Ω_F — амплитуда и частота внешней гармонической силы, $\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$ — дельта-функция Дирака, определяющая положение приложенной сосредоточенной силы.

В уравнениях (1)-(3) силы вязкоупругого сопротивления среды

$$F_1 = æ_1 D^{\gamma_1} u, \quad F_2 = æ_2 D^{\gamma_1} v, \quad F_3 = æ_3 D^{\gamma_1} w \tag{4}$$

описываются моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной Римана-Лиувилля $D^\gamma x(t)$ порядка $\gamma_1 = \gamma$ $(0 < \gamma_1 \le 1)$

$$D^\gamma x(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{x(t-t')}{\Gamma(1-\gamma)t'^\gamma}dt', \tag{5}$$

где $\Gamma(1-\gamma)$ — гамма-функция, $æ_i = E_0\tau_i^{\gamma_1}$ $\quad(i = 1, 2, 3)$ — коэффициенты демпфирования вязкоупругой среды, τ_i — времена ретардации вязкоупругой среды, а E_0 — релаксированное значение модуля упругости.

Для рассматриваемой модели Пастернака реакция вязкоупругого основания, реологические свойства которого задаются моделью Кельвина-Фойгта с производной дробного порядка $\gamma = \gamma_2$ $(0 < \gamma_2 \le 1)$, записывается в виде

$$F_4 = \lambda_0\left(1+\tau_4^{\gamma_2}D^{\gamma_2}\right)w - G\left(1+\tau_4^{\gamma_2}D^{\gamma_2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \tag{6}$$

где λ_0 — релаксированное значение коэффициента податливости основания, G — его модуль сдвига, а τ_4 — время ретардации вязкоупругого основания. При $\tau_4 \to 0$ модель (6) сводится к модели упругого основания Пастернака.

Начальные и граничные условия для шарнирно-опертой по контуру пластины имеют следующий вид:
при $t = 0$:

$$\begin{aligned}
&u(x,y,t)\big|_{t=0} = v(x,y,t)\big|_{t=0} = w(x,y,t)\big|_{t=0} = 0,\\
&\dot u\big|_{t=0} = \dot v\big|_{t=0} = \dot w\big|_{t=0} = 0;
\end{aligned}\tag{7}$$

при $x = 0$ и a:

$$\begin{aligned} &w\big|_{x=0} = w\big|_{x=a} = 0, \quad v\big|_{x=0} = v\big|_{x=a} = 0, \\ &u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=a} = 0, \quad w_{xx}\big|_{x=0} = w_{xx}\big|_{x=a} = 0; \end{aligned} \tag{8}$$

при $y = 0$ и b:

$$\begin{aligned} &w\big|_{y=0} = w\big|_{y=b} = 0, \quad u\big|_{y=0} = u\big|_{y=b} = 0, \\ &v_y\big|_{y=0} = v_y\big|_{y=b} = 0, \quad w_{yy}\big|_{y=0} = w_{yy}\big|_{y=b} = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где точка над величинами означает производную по времени, а нижние индексы - производные по соответствующим координатам.

Для того чтобы привести уравнения движения, а также начальные и граничные условия к безразмерному виду, введем следующие безразмерные величины:

$$\begin{gathered} u^* = \frac{u}{a}, \quad v^* = \frac{v}{a}, \quad w^* = \frac{w}{a}, \quad x^* = \frac{x}{a}, \quad y^* = \frac{y}{b}, \quad t^* = \frac{t}{a}\sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}, \\ F^* = \frac{(1-\nu^2)}{Eh}F, \quad G^* = \frac{(1-\nu^2)}{E}G\frac{a^2}{h}, \quad \lambda_0^* = \frac{(1-\nu^2)}{E}\lambda_0\frac{a^2}{h}. \end{gathered} \tag{10}$$

В дальнейшем для простоты изложения, звездочки у соответствующих безразмерных величин будут опущены.

Перепишем уравнения движения пластины (1)-(3), а также начальные и граничные условия (7)-(9) в безразмерном виде

$$\begin{aligned} &u_{xx} + \frac{1-\nu}{2}\beta_1^2 u_{yy} + \frac{1+\nu}{2}\beta_1 v_{xy} + w_x\left(w_{xx} + \frac{1-\nu}{2}\beta_1^2 w_{yy}\right) + \frac{1+\nu}{2}\beta_1^2 w_y w_{xy} = \\ &\quad = \ddot{u} + æ_1 D^{\gamma_1} u, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &\beta_1^2 v_{yy} + \frac{1-\nu}{2}v_{xx} + \frac{1+\nu}{2}\beta_1 u_{xy} + \beta_1 w_y\left(\beta_1^2 w_{yy} + \frac{1-\nu}{2}w_{xx}\right) + \frac{1+\nu}{2}\beta_1 w_x w_{xy} = \\ &\quad = \ddot{v} + æ_2 D^{\gamma_1} v, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\beta_2^2}{12}\Big(w_{xxxx} + 2\beta_1^2 w_{xxyy} + \beta_1^4 w_{yyyy}\Big) - \\ &\quad - w_{xx}\left(u_x + \nu\beta_1 v_y\right) - w_x\left(u_{xx} + \nu\beta_1 v_{xy}\right) - \\ &\quad - \frac{1-\nu}{2}\beta_1\Big[w_{xy}\left(\beta_1 u_y + v_x\right) + w_y\left(\beta_1 u_{xy} + v_{xx}\right)\Big] - \\ &\quad - \beta_1^2\Big[w_{yy}\left(\nu u_x + \beta_1 v_y\right) + w_y\left(\nu u_{xy} + \beta_1 v_{yy}\right)\Big] - \\ &\quad - \frac{1-\nu}{2}\beta_1\Big[w_{xy}\left(\beta_1 u_y + v_x\right) + w_x\left(\beta_1 u_{yy} + v_{xy}\right)\Big] = \\ &\quad = -\ddot{w} + F\,\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\cos(\Omega_F t) - \\ &\qquad - æ_3 D^{\gamma_1} w - \lambda_0\left(1 + \tau_4^{\gamma_2} D^{\gamma_2}\right) w + G\left(1 + \tau_4^{\gamma_2} D_{0+}^{\gamma_2}\right)\left(w_{xx} + \beta_1^2 w_{yy}\right); \end{aligned} \tag{13}$$

при $t = 0$:

$$u(x,y,t)\big|_{t=0} = v(x,y,t)\big|_{t=0} = w(x,y,t)\big|_{t=0} = 0,$$
$$\dot{u}\big|_{t=0} = \dot{v}\big|_{t=0} = \dot{w}\big|_{t=0} = 0; \tag{14}$$

при $x = 0$ и $x = 1$:

$$w\big|_{x=0} = w\big|_{x=1} = 0, \quad v\big|_{x=0} = v\big|_{x=1} = 0,$$
$$u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=1} = 0, \quad w_{xx}\big|_{x=0} = w_{xx}\big|_{x=1} = 0; \tag{15}$$

при $y = 0$ и $y = 1$:

$$w\big|_{y=0} = w\big|_{y=1} = 0, \quad u\big|_{y=0} = u\big|_{y=1} = 0,$$
$$v_y\big|_{y=0} = v_y\big|_{y=1} = 0, \quad w_{yy}\big|_{y=0} = w_{yy}\big|_{y=1} = 0, \tag{16}$$

где $\beta_1 = \frac{a}{b}$, $\beta_2 = \frac{h}{a}$ - коэффициенты, зависящие от размеров пластины a и b и её толщины h.

Решение трех нелинейных дифференциальных уравнений (11)–(13) будем искать в виде разложений по собственным формам колебаний шарнирно-опертой пластины:

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} x_{1mn}(t)\eta_{1mn}(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} x_{1mn}(t)\cos\pi mx\,\sin\pi ny, \tag{17}$$

$$v(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} x_{2mn}(t)\eta_{2mn}(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} x_{2mn}(t)\sin\pi mx\,\cos\pi ny, \tag{18}$$

$$w(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} x_{3mn}(t)\eta_{3mn}(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} x_{3mn}(t)\sin\pi mx\,\sin\pi ny, \tag{19}$$

где $x_{1mn}(t)$, $x_{2mn}(t)$, $x_{3mn}(t)$ — обобщенные перемещения, соответствующие перемещениям в плоскости пластины и ее прогибу; m, n — число рассматриваемых полуволн (мод колебаний); $\eta_{1mn}(x,y)$, $\eta_{2mn}(x,y)$, $\eta_{3mn}(x,y)$ — собственные функции, удовлетворяющие граничным условиям (15) и (16).

Для определения собственных частот колебаний пластины необходимо решить задачу на собственные значения. Для этого рассмотрим линейные незатухающие собственные формы колебаний в плоскости и из плоскости пластины, следуя алгоритму из работ [24, 25, 27]:

$$-\ddot{x}_{1mn}\eta_{1mn} + x_{1mn}\left(\eta_{1mn,xx} + \frac{1-\nu}{2}\beta_1^2\eta_{1mn,yy}\right) + \frac{1+\nu}{2}\beta_1\eta_{2mn,xy}x_{2mn} = 0, \tag{20}$$

$$-\ddot{x}_{2mn}\eta_{2mn} + x_{2mn}\left(\beta_1^2\eta_{2mn,yy} + \frac{1-\nu}{2}\eta_{2mn,xx}\right) + \frac{1+\nu}{2}\beta_1\eta_{1mn,xy}x_{1mn} = 0, \tag{21}$$

$$\begin{gathered}\ddot{x}_{3mn}\eta_{3mn} + \frac{\beta_2^2}{12}\left(\eta_{3mn,xxxx} + 2\beta_1^2\eta_{3mn,xxyy} + \beta_1^4\eta_{3mn,yyyy}\right)x_{3mn} + \\ + \lambda_0 x_{3mn}\eta_{3mn} - G\left(\eta_{3mn,xx} + \beta_1^2\eta_{3mn,yy}\right)x_{3mn} = 0.\end{gathered} \tag{22}$$

Для системы уравнений (20) и (21) характеристическое уравнение имеет вид

$$\omega_{mn}^4 - (S_{11}^{mn} + S_{22}^{mn})\omega_{mn}^2 + S_{11}^{mn}S_{22}^{mn} - S_{12}^{mn}S_{21}^{mn} = 0, \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned} S_{11}^{mn} &= \pi^2\left(m^2 + \frac{1-\nu}{2}\beta_1^2 n^2\right), \\ S_{12}^{mn} &= S_{21}^{mn} = \frac{1+\nu}{2}\beta_1\pi^2 mn, \\ S_{22}^{mn} &= \pi^2\left(\frac{1-\nu}{2}m^2 + \beta_1^2 n^2\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Корнями характеристического уравнения (23) являются квадраты безразмерных собственных частот изгибных колебаний в плоскости пластины

$$\omega_{1mn}^2 = \pi^2\left(m^2 + \beta_1^2 n^2\right), \qquad \omega_{2mn}^2 = \frac{1-\nu}{2}\,\omega_{1mn}^2. \tag{25}$$

Из уравнения (22) получены собственные частоты изгибных колебаний из плоскости пластинки с учетом упругого основания Пастернака

$$\omega_{3mn}^2 = \frac{\pi^4\beta_2^2}{12}\left(m^2 + \beta_1^2 n^2\right)^2 + \lambda_0 + G\pi^2\left(m^2 + \beta_1^2 n^2\right) = \Omega_{3mn}^2 + \lambda_0 + G\pi^2\left(m^2 + \beta_1^2 n^2\right), \tag{26}$$

где

$$\Omega_{3mn}^2 = \frac{\pi^4\beta_2^2}{12}\left(m^2 + \beta_1^2 n^2\right)^2 \tag{27}$$

- квадрат частоты собственных вертикальных колебаний упругой пластинки без учета основания.

Заметим, что второе и третье слагаемые в соотношении (26) представляют собой добавочные члены от учета взаимодействия пластины с упругим основанием по модели Фусса-Винклера и Пастернака соответственно. Полагая $G = 0$, т.е. устремляя третье слагаемое к нулю, приходим к частоте вертикальных колебаний упругой пластины на упругом основании Фусса-Винклера

$$\omega_{3mn}^2 = \frac{\pi^4\beta_2^2}{12}\left(m^2 + \beta_1^2 n^2\right)^2 + \lambda_0. \tag{28}$$

Подставляя (17)-(19) в уравнения (11)-(13), умножая (11)-(13) соответственно на η_{1kl}, η_{2kl} и η_{3kl}, интегрируя по x и y и используя условия ортогональности для линейных мод в пределах областей $0 \le x, y \le 1$, приходим к бесконечному числу систем, каждая из которых состоит из трех связанных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно $x_{imn}(t)$ $(i = 1, 2, 3)$

$$\ddot{x}_{amn} + æ_\alpha D^{\gamma_1} x_{\alpha mn} + S_{\alpha\beta}^{mn} x_{\beta mn} = -F_{\alpha mn} \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \tag{29}$$

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_{3mn} + æ_3 D^{\gamma_1} x_{3mn} + \omega_{3mn}^2 x_{3mn} + \lambda_0 \tau_4^{\gamma_2} D^{\gamma_2} x_{3mn} + \\ &\quad + G\tau_4^{\gamma_2}\pi^2(m^2 + \beta_1^2 n^2) D^{\gamma_2} x_{3mn} = \\ &= -F_{3mn} + 4F\sin(\pi m x_0)\sin(\pi n y_0)\cos(\Omega_F t). \end{aligned} \tag{30}$$

При выводе уравнений (29) и (30) учитывалось фильтрующее свойство дельта-функции

$$\iint \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)f(x,y)\,dx\,dy = f(x_0,y_0), \tag{31}$$

$$\begin{aligned} &F\cos(\Omega_F t)\iint \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\sin(\pi m x)\sin(\pi n y)\,dx\,dy = \\ &= F\sin(\pi m x_0)\sin(\pi n y_0)\cos(\Omega_F t). \end{aligned} \tag{32}$$

Нелинейные части F_{imn} $(i=1,2,3)$ уравнений (29) и (30) имеют вид:

$$F_{1mn} = 4\sum_{m_1}\sum_{n_1}\sum_{m_2}\sum_{n_2} x_{3m_1n_1}x_{3m_2n_2}A_{1mn}^{m_1n_1m_2n_2}, \tag{33}$$

$$F_{2mn} = 4\sum_{m_1}\sum_{n_1}\sum_{m_2}\sum_{n_2} x_{3m_1n_1}x_{3m_2n_2}A_{2mn}^{m_1n_1m_2n_2}, \tag{34}$$

$$\begin{aligned} F_{3mn} = -4\sum_{m_1}\sum_{n_1}\sum_{m_2}\sum_{n_2}\Big[&x_{3m_1n_1}x_{1m_2n_2}C_{mn}^{m_1n_1m_2n_2}+ \\ &+ x_{3m_1n_1}x_{2m_2n_2}D_{mn}^{m_1n_1m_2n_2}\Big], \end{aligned} \tag{35}$$

где коэффициенты $A_{1mn}^{m_1n_1m_2n_2}$, $A_{2mn}^{m_1n_1m_2n_2}$, $C_{mn}^{m_1n_1m_2n_2}$ и $D_{mn}^{m_1n_1m_2n_2}$ зависят от комбинаций функций синуса и косинуса, входящих в собственные функции, определены в работе [25].

В силу того, что тензор второго ранга $S_{\alpha\beta}^{mn}$ является симметричным, он имеет два действительных собственных значения ω_{1mn} и ω_{2mn}, определенных в (25), которые соответствуют двум взаимно ортогональным собственным векторам

$$\begin{aligned} &\bar{L}_{mn}^{I}\left\{L_{1mn}^{I} = \frac{\pi m}{\omega_{1mn}},\quad L_{2mn}^{I} = \frac{\pi\beta_1 n}{\omega_{1mn}}\right\}, \\ &\bar{L}_{mn}^{II}\left\{L_{1mn}^{II} = \frac{\pi\beta_1 n}{\omega_{1mn}},\quad L_{2mn}^{II} = -\frac{\pi m}{\omega_{1mn}}\right\}, \end{aligned} \tag{36}$$

т.е.

$$L_{\alpha mn}^{I}L_{\alpha mn}^{I} = L_{\alpha mn}^{II}L_{\alpha mn}^{II} = 1, \qquad L_{\alpha mn}^{I}L_{\alpha mn}^{II} = 0, \tag{37}$$

где суммирование выполнено по повторяющемуся индексу α, индексы m и n свободные.

Следуя работам [25, 28], матрицу $S_{\alpha\beta}^{mn}$ и обобщенные перемещения $x_{\alpha mn}$, входящие в уравнения (29) и (30), запишем в виде разложения по собственным векторам (36)

$$S_{\alpha\beta}^{mn} = \omega_{1mn}^2 L_{\alpha mn}^{I}L_{\beta mn}^{I} + \omega_{2mn}^2 L_{\alpha mn}^{II}L_{\beta mn}^{II}, \tag{38}$$

$$x_{\alpha mn} = X_{1mn}L_{\alpha mn}^{I} + X_{2mn}L_{\alpha mn}^{II}. \tag{39}$$

Подставляя (38) и (39) в уравнения (29) и (30) и затем умножая (29) на $L_{\alpha mn}^{I}$ и $L_{\alpha mn}^{II}$ с учетом (37), получаем

$$\ddot{X}_{1mn} + æ_1 D^{\gamma_1}X_{1mn} + \omega_{1mn}^2 X_{1mn} = -F_{\alpha mn}L_{\alpha mn}^{I}, \tag{40}$$

$$\ddot{X}_{2mn} + æ_2 D^{\gamma_1} X_{2mn} + \omega_{2mn}^2 X_{2mn} = -F_{\alpha mn} L_{\alpha mn}^{II}, \tag{41}$$

$$\begin{aligned} &\ddot{X}_{3mn} + æ_3 D^{\gamma_1} X_{3mn} + \omega_{3mn}^2 X_{3mn} + \lambda_0 \tau_4^{\gamma_2} D^{\gamma_2} X_{3mn} + \\ &\quad + G\tau_4^{\gamma_2} \pi^2 (m^2 + \beta_1^2 n^2) D^{\gamma_2} X_{3mn} = \\ &= -F_{3mn} + 4F \sin(\pi m x_0) \sin(\pi n y_0) \cos(\Omega_F t), \end{aligned} \tag{42}$$

где $X_{3mn} = x_{3mn}$.

Отметим, что левые части уравнений (40)-(42) линейны и независимы друг от друга, при этом (40)-(42) связаны только с помощью нелинейных членов, стоящих в их правых частях.

При нелинейных колебаниях между взаимодействующими модами возможна перекачка энергии, поэтому следует исследовать явление внутреннего резонанса. С целью выявления возможности наступления внутреннего резонанса при нелинейных колебаниях пластинки, лежащей на вязкоупругом основании, и его последующего анализа будем полагать, что в процессе колебаний возбуждаются и доминируют только три собственных моды, соответствующие обобщенным перемещениям $X_{1s_1s_2}$, $X_{2l_1l_2}$ и $X_{3k_1k_2}$, с собственными частотами $\omega_{1s_1s_2}$, $\omega_{2l_1l_2}$ и $\omega_{3k_1k_2}$. В этом случае правые части уравнений (40)-(42) значительно упрощаются.

Опуская далее нижние индексы $s_1, s_2, l_1, l_2, k_1, k_2$ для простоты изложения, получим

$$\ddot{X}_1 + æ_1 D^{\gamma_1} X_1 + \omega_1^2 X_1 + \xi_1 X_3^2 = 0, \tag{43}$$

$$\ddot{X}_2 + æ_2 D^{\gamma_1} X_2 + \omega_2^2 X_2 + \xi_2 X_3^2 = 0, \tag{44}$$

$$\begin{aligned} &\ddot{X}_3 + æ_3 D^{\gamma_1} X_3 + \omega_3^2 X_3 + X_3(\xi_{31} X_1 + \xi_{32} X_2) + \\ &\quad + \lambda_0 \tau_4^{\gamma_2} D^{\gamma_2} X_3 + G\tau_4^{\gamma_2} \pi^2 (m^2 + \beta_1^2 n^2) D^{\gamma_2} X_3 = \\ &= 4F \sin(\pi m x_0) \sin(\pi n y_0) \cos(\Omega_F t), \end{aligned} \tag{45}$$

где коэффициенты $\xi_1, \xi_2, \xi_{31}, \xi_{32}$ определяются через коэффициенты нелинейных членов (33)-(35) и собственные векторы (36). Эти коэффициенты не зависят от параметров основания Пастернака λ_0 и G, поскольку основание входит только в линейные члены уравнений движения. Таким образом, коэффициенты $\xi_1, \xi_2, \xi_{31}, \xi_{32}$ полностью совпадают с соответствующими коэффициентами, полученными в работе [25] для случая пластины без основания.

2. Метод решения. Приближенное решение системы нелинейных уравнений (43)-(45) для малых, но конечных амплитуд, слабо изменяющихся с течение времени, можно получить аналитически с помощью обобщенного метода многих временных масштабов [23]. С этой целью разложим обобщенные перемещения пластины X_i $(i = 1, 2, 3)$ в ряд по малому безразмерному параметру ε относительно новых временных масштабов $T_n = \varepsilon^n t$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

$$X_i = \varepsilon X_{i1}(T_0, T_1, T_2, \ldots) + \varepsilon^2 X_{i2}(T_0, T_1, T_2, \ldots) + \varepsilon^3 X_{i3}(T_0, T_1, T_2, \ldots) + \cdots, \tag{46}$$

где $T_0 = t$ – быстрое время, характеризующее движения с собственными частотами линейных колебаний, $T_i = \varepsilon^i t$ – медленные времена, характеризующие модуляцию амплитуд и фаз нелинейных колебаний.

Тогда производные целого порядка по времени определяются следующим образом [29]:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \ldots, \tag{47}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 \left(D_1^2 + 2D_0 D_2\right) + \ldots, \tag{48}$$

а разложение производных дробного порядка имеет вид [8]

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}\right)^\gamma &= \left(D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \ldots\right)^\gamma = D_0^\gamma + \varepsilon\gamma D_0^{\gamma-1} D_1 + \\ &+ \frac{1}{2}\varepsilon^2\gamma\left[(\gamma-1)\, D_0^{\gamma-2} D_1^2 + 2D_0^{\gamma-1} D_2\right] + \ldots,\end{aligned} \tag{49}$$

где $D_n = \partial/\partial T_n (n = 0, 1, 2)$.

Профессор А.Х. Найфэ в своих знаменитых монографиях "Методы возмущений"[29] и "Нелинейные колебания"[30] подчеркивал, что при изучении вынужденных колебаний следует различать различные случаи в зависимости от того, является ли возбуждение (внешняя сила) «мягким» или «жестким», резонансным или нерезонансным. В его работах также показано, что при изучении внешнего резонанса «чтобы получить равномерно пригодное приближенное решение такой задачи, необходимо задать порядок малости возбуждения так, чтобы оно возникало при появлении демпфирования и нелинейности».

Так как мы исследуем наложение внешнего резонанса на внутренний резонанс с помощью метода разложения дробной производной по малому параметру, то необходимо учесть, что коэффициенты при силах демпфирования окружающей среды $æ_i = E_0 \tau_i^{\gamma_1} = \varepsilon^k \mu_i \quad (i = 1, 2, 3)$ и вязкоупругого основания $\lambda_0\, \tau_4^{\gamma_2} = \varepsilon^k \mu_4, \quad G\tau_4^{\gamma_2}\pi^2(m^2 + \beta_1^2 n^2) = \varepsilon^k \mu_5$, а также амплитуда внешней силы $\tilde{f} = \varepsilon_i^{k+1} f$ представлены в виде малых величин, для которых μ_i, f — конечные параметры, $k = 1$ или 2, при этом $\tilde{f} = F \sin(\pi m x_0) \sin(\pi n y_0)$.

Заметим, что принятый порядок малости для внешних сил и сил демпфирования среды и основания согласуется с представлениями о внешнем резонансе [30]; а именно, ожидается, что в системе со слабым демпфированием возбуждение с малой амплитудой вызывает отклик с относительно большой амплитудой.

Подставляя соотношения (46)-(49) в уравнения (43)–(45) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε к нулю, получим
при ε:

$$D_0^2 X_{11} + \omega_1^2 X_{11} = 0, \tag{50}$$

$$D_0^2 X_{21} + \omega_2^2 X_{21} = 0, \tag{51}$$

$$D_0^2 X_{31} + \omega_3^2 X_{31} = 0; \tag{52}$$

при ε^2:

$$D_0^2 X_{12} + \omega_1^2 X_{12} = -2D_0 D_1 X_{11} - \xi_1 X_{31}^2 - \mu_1(2-\kappa) D_0^{\gamma_1} X_{11}, \tag{53}$$

$$D_0^2 X_{22} + \omega_2^2 X_{22} = -2D_0 D_1 X_{21} - \xi_2 X_{31}^2 - \mu_2(2-\kappa) D_0^{\gamma_1} X_{21}, \tag{54}$$

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{32} + \omega_3^2 X_{32} - 4f\cos(\Omega_F T_0) = -2D_0 D_1 X_{31} - \xi_{13} X_{11} X_{31} - \xi_{23} X_{21} X_{31} - \\ - \mu_3(2-\kappa) D_0^{\gamma_1} X_{31} - \mu_4(2-k) D_0^{\gamma_2} X_{31} - \mu_5(2-k) D_0^{\gamma_2} X_{31}; \end{aligned} \tag{55}$$

при ε^3:

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{13} + \omega_1^2 X_{13} = -2D_0 D_1 X_{12} - (D_1^2 + 2D_0 D_2) X_{11} - 2\xi_1 X_{31} X_{32} - \\ -\mu_1(2-\kappa)(D_0^{\gamma_1} X_{12} + \gamma_1 D_0^{\gamma_1 - 1} D_1 X_{11}) - \mu_1(\kappa - 1) D_0^{\gamma_1} X_{11}, \end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{23} + \omega_2^2 X_{23} = -2D_0 D_1 X_{22} - (D_1^2 + 2D_0 D_2) X_{21} - 2\xi_2 X_{31} X_{32} - \\ -\mu_2(2-\kappa)(D_0^{\gamma_1} X_{22} + \gamma_1 D_0^{\gamma_1 - 1} D_1 X_{21}) - \mu_2(\kappa - 1) D_0^{\gamma_1} X_{21}, \end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{33} + \omega_3^2 X_{33} - 4f\cos(\Omega_F T_0) = -2D_0 D_1 X_{32} - (D_1^2 + 2D_0 D_2) X_{31} - \\ - \xi_{31}(X_{11} X_{32} + X_{12} X_{31}) - \xi_{32}(X_{21} X_{32} + X_{22} X_{31}) - \\ - \mu_3(2-k)(D_0^{\gamma_1} X_{32} + \gamma_1 D_0^{\gamma_1 - 1} D_1 X_{31}) - \\ - \mu_3(k-1) D_0^{\gamma_1} X_{31} - \\ - \mu_4(2-k)(D_0^{\gamma_2} X_{32} + \gamma_2 D_0^{\gamma_2 - 1} D_1 X_{31}) - \\ - \mu_4(k-1) D_0^{\gamma_2} X_{31} - \\ - \mu_5(2-k)(D_0^{\gamma_2} X_{32} + \gamma_2 D_0^{\gamma_2 - 1} D_1 X_{31}) - \\ - \mu_5(k-1) D_0^{\gamma_2} X_{31}. \end{aligned} \tag{58}$$

Решение уравнений (50)–(52) имеет вид

$$X_{j1} = A_j(T_1, T_2)\exp(i\omega_j T_0) + \overline{A}_j(T_1, T_2)\exp(-i\omega_j T_0), \tag{59}$$

где $A_j(T_1, T_2)$ $(j = 1, 2, 3)$ — неизвестные комплексные функции, а $\overline{A}_j(T_1, T_2)$ — комплексно-сопряженные к $A_j(T_1, T_2)$.

Чтобы решить систему уравнений (53)–(58), необходимо определить действие дробной производной D_0^γ (5) на функции X_{j1}, для этого следует вычислить $D_0^\gamma e^{i\omega_j t}$. В работе [31] показано, что

$$D_0^\gamma e^{i\omega_j t} = (i\omega_j)^\gamma e^{i\omega_j t} + \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{u^\gamma}{u + i\omega_j} e^{-ut}\, du, \tag{60}$$

а далее в [32] было доказано, что второе слагаемое в соотношении (60) не влияет на решение, построенное методом многих временных масштабов в пределах первого и второго приближений. Таким образом, вместо точного определения (60) можно использовать соотношение

$$D_0^\gamma e^{i\omega_j t} = (i\omega_j)^\gamma e^{i\omega_j t}. \tag{61}$$

Далее будем определять порядок слабого демпфирования на каждом шаге.

2.1. Вязкость порядка ε. Положим в уравнениях (53)-(55) $k = 1$, т.е. рассмотрим вязкость порядка ε. Подставляя соотношения (59) в правую часть уравнений (53)-(55) с учетом соотношения (61), получим

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{12} + \omega_1^2 X_{12} = &-2i\omega_1 D_1 A_1(T_1)\exp(i\omega_1 T_0) - \xi_1[A_3^2\exp(2i\omega_3 T_0) + A_3\overline{A}_3] - \\ &- \mu_1 A_1 (i\omega_1)^{\gamma_1}\exp(i\omega_1 T_0) + cc, \end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{22} + \omega_2^2 X_{22} = &-2i\omega_2 D_1 A_2(T_1)\exp(i\omega_2 T_0) - \xi_2[A_3^2\exp(2i\omega_3 T_0) + A_3\overline{A}_3] - \\ &- \mu_2 A_2 (i\omega_2)^{\gamma_1}\exp(i\omega_2 T_0) + cc, \end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{32} + \omega_3^2 X_{32} = &-2i\omega_3 D_1 A_3(T_1)\exp(i\omega_3 T_0) - \mu_3 A_3 (i\omega_3)^{\gamma_1}\exp(i\omega_3 T_0) - \\ &- \mu_4 A_3 (i\omega_3)^{\gamma_2}\exp(i\omega_3 T_0) - \mu_5 A_3 (i\omega_3)^{\gamma_2}\exp(i\omega_3 T_0) - \\ &- \xi_{13}\{A_1 A_3\exp[i(\omega_1+\omega_3)T_0] + A_1\overline{A}_3\exp[i(\omega_1-\omega_3)T_0]\} - \\ &- \xi_{23}\{A_2 A_3\exp[i(\omega_2+\omega_3)T_0] + A_2\overline{A}_3\exp[i(\omega_2-\omega_3)T_0]\} \\ &+ 2f\exp(i\Omega_F T_0) + cc, \end{aligned} \tag{64}$$

где cc комплексно-сопряженная часть к предыдущим слагаемым.

Из полученных уравнений следует, что в данном случае возможно возникновение внутреннего резонанса 2:1 [24, 26, 28], который характеризуется тем, что одна из собственных частот колебаний в плоскости пластины в два раза больше собственной частоты вертикальных колебаний:

$$\omega_1 = 2\omega_3 \quad (\omega_1 \neq \omega_2, \omega_2 \neq 2\omega_3), \tag{65}$$

$$\omega_2 = 2\omega_3 \quad (\omega_1 \neq \omega_2, \omega_1 \neq 2\omega_3). \tag{66}$$

2.2. Вязкость порядка ε^2. Рассмотрим теперь порядок вязкости ε^2, положив в уравнениях (53)–(55) $k = 2$:

$$D_0^2 X_{12} + \omega_1^2 X_{12} = -2D_0 D_1 X_{11} - \xi_1 X_{31}^2, \tag{67}$$

$$D_0^2 X_{22} + \omega_2^2 X_{22} = -2D_0 D_1 X_{21} - \xi_2 X_{31}^2, \tag{68}$$

$$D_0^2 X_{32} + \omega_3^2 X_{32} = -2D_0 D_1 X_{31} - X_{31}(\xi_{13} X_{11} + \xi_{23} X_{21}) + 4f\cos(\Omega_F T_0). \tag{69}$$

Подставляя (59) в правые части уравнений (67)-(69), получим

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{12} + \omega_1^2 X_{12} = &-2i\omega_1 D_1 A_1(T_1)\exp(i\omega_1 T_0) - \\ &- \xi_1[A_3^2\exp(2i\omega_3 T_0) + A_3\overline{A}_3] + cc, \end{aligned} \tag{70}$$

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{22} + \omega_2^2 X_{22} = &-2i\omega_2 D_1 A_2(T_1)\exp(i\omega_2 T_0) - \\ &- \xi_2[A_3^2\exp(2i\omega_3 T_0) + A_3\overline{A}_3] + cc, \end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{32} + \omega_3^2 X_{32} = &-2i\omega_3 D_1 A_3(T_1)\exp(i\omega_3 T_0) - \\ &- \xi_{13}\{A_1 A_3\exp[i(\omega_1+\omega_3)T_0] + A_1\overline{A}_3\exp[i(\omega_1-\omega_3)T_0]\} - \\ &- \xi_{23}\{A_2 A_3\exp[i(\omega_2+\omega_3)T_0] + A_2\overline{A}_3\exp[i(\omega_2-\omega_3)T_0]\} + \\ &+ 2f\exp(i\Omega_F T_0) + cc. \end{aligned} \tag{72}$$

Предположим, что собственные частоты ω_j $(j = 1, 2, 3)$ имеют такие значения, что ни одна из комбинаций, приводящих к внутреннему резонансу (65) или (66), не может возникнуть. Тогда функции $\exp(\pm i\omega_j T_0)$, входящие в правую часть (70)-(72), порождают вековые члены.

Для устранения вековых членов в (70)-(72) необходимо обратить в нуль коэффициенты при $\exp(\pm i\omega_j T_0)$, то есть

$$D_1 A_j(T_1, T_2) = 0, \tag{73}$$

откуда следует, что A_j $(j = 1, 2, 3)$ не зависят от T_1.

Учитывая (73), решение уравнений (70)–(72) при $j = 1, 2, 3$ имеет вид

$$X_{12} = F_1(T_2)\exp(i\omega_1 T_0) + k_1 A_3^2 \exp(2i\omega_3 T_0) + k_2 A_3 \overline{A}_3 + cc, \tag{74}$$

$$X_{22} = F_2(T_2)\exp(i\omega_2 T_0) + k_3 A_3^2 \exp(2i\omega_3 T_0) + k_4 A_3 \overline{A}_3 + cc, \tag{75}$$

$$\begin{aligned} X_{32} = F_3(T_2)\exp(i\omega_3 T_0) &+ k_5 A_1 A_3 \exp[i(\omega_1 + \omega_3)T_0] + \\ &+ k_6 A_2 A_3 \exp[i(\omega_2 + \omega_3)T_0] + \\ &+ k_7 A_3 \overline{A}_1 \exp[i(\omega_3 - \omega_1)T_0] + \\ &+ k_8 A_3 \overline{A}_2 \exp[i(\omega_3 - \omega_2)T_0] + cc, \end{aligned} \tag{76}$$

где $F_j(T_2)$ $(j = 1, 2, 3)$ — новые функции, подлежащие определению, а коэффициенты k_i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} &k_1 = \frac{\xi_1}{4\omega_3^2 - \omega_1^2}, && k_2 = -\frac{\xi_1}{\omega_1^2}, && k_3 = \frac{\xi_2}{4\omega_3^2 - \omega_2^2}, \\ &k_4 = -\frac{\xi_2}{\omega_2^2}, && k_5 = \frac{\xi_{13}}{\omega_1(\omega_1 + 2\omega_3)}, && k_6 = \frac{\xi_{23}}{\omega_2(\omega_2 + 2\omega_3)}, \\ &k_7 = \frac{\xi_{13}}{\omega_1(\omega_1 - 2\omega_3)}, && k_8 = \frac{\xi_{23}}{\omega_2(\omega_2 - 2\omega_3)}. \end{aligned} \tag{77}$$

Подставляя соотношения (59) и (74)-(76) с учетом (73) в уравнения (56)–(58) при $k = 2$, имеем

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{13} + \omega_1^2 X_{13} = &-\big[2i\omega_1 D_2 A_1 + \mu_1 (i\omega_1)^{\gamma_1} A_1 + 2\xi_1 (k_5 + k_7) A_1 A_3 \overline{A}_3\big] \\ &\cdot \exp(i\omega_1 T_0) - 2\xi_1 \big\{ F_3 A_3 \exp(2i\omega_3 T_0) + F_3 \overline{A}_3 + \\ &+ k_5 A_1 A_3^2 \exp[i(\omega_1 + 2\omega_3)T_0] + \\ &+ k_6 A_2 A_3^2 \exp[i(\omega_2 + 2\omega_3)T_0] + \\ &+ (k_6 + k_8) A_2 A_3 \overline{A}_3 \exp(i\omega_2 T_0) + \\ &+ k_7 A_1 A_3^2 \exp[i(2\omega_3 - \omega_1)T_0] + \\ &+ k_8 A_3^2 \overline{A}_2 \exp[i(2\omega_3 - \omega_2)T_0] \big\} + cc, \end{aligned} \tag{78}$$

$$
\begin{aligned}
D_0^2 X_{23} + \omega_2^2 X_{23} = &-\big[2i\omega_2 D_2 A_2 + \mu_2 (i\omega_2)^{\gamma_1} A_2 + 2\xi_2 (k_6 + k_8) A_2 A_3 \overline{A}_3\big] \\
&\cdot \exp(i\omega_2 T_0) - 2\xi_2 \big\{ F_3 A_3 \exp(2i\omega_3 T_0) + F_3 \overline{A}_3 + \\
&+ k_5 A_1 A_3^2 \exp[i(\omega_1 + 2\omega_3) T_0] + \\
&+ k_6 A_2 A_3^2 \exp[i(\omega_2 + 2\omega_3) T_0] + \\
&+ (k_5 + k_7) A_1 A_3 \overline{A}_3 \exp(i\omega_1 T_0) + \\
&+ k_7 A_1 A_3^2 \exp[i(2\omega_3 - \omega_1) T_0] + \\
&+ k_8 A_3^2 \overline{A}_2 \exp[i(2\omega_3 - \omega_2) T_0] \big\} + cc,
\end{aligned} \tag{79}
$$

$$
\begin{aligned}
D_0^2 X_{33} + \omega_3^2 X_{33} = &-\big[2i\omega_3 D_2 A_3 + \mu_3 (i\omega_3)^{\gamma_1} A_3 + \\
&+ \mu_4 (i\omega_3)^{\gamma_2} A_3 + \mu_5 (i\omega_3)^{\gamma_2} A_3 + \\
&+ (\xi_{13}(k_1 + 2k_2) + \xi_{23}(k_3 + 2k_4)) A_3^2 \overline{A}_3 + \\
&+ \xi_{13}(k_5 + k_7) A_1 \overline{A}_1 A_3 + \xi_{23}(k_6 + k_8) A_2 \overline{A}_2 A_3 \big] \\
&\cdot \exp(i\omega_3 T_0) - (\xi_{13} k_1 + \xi_{23} k_3) A_3^3 \exp(3i\omega_3 T_0) - \\
&- \xi_{13} \big\{ (F_3 A_1 + F_1 A_3) \exp[i(\omega_3 + \omega_1) T_0] + \\
&\quad + (A_3 F_1 + A_1 F_3) \exp[i(\omega_3 - \omega_1) T_0] \big\} - \\
&- \xi_{23} \big\{ (F_3 A_2 + F_2 A_3) \exp[i(\omega_3 + \omega_2) T_0] + \\
&\quad + (A_3 F_2 + A_2 F_3) \exp[i(\omega_3 - \omega_2) T_0] \big\} - \\
&- \xi_{13} \big\{ k_5 A_1^2 A_3 \exp[i(2\omega_1 + \omega_3) T_0] + \\
&\quad + k_7 A_1^2 A_3 \exp[i(2\omega_1 - \omega_3) T_0] \big\} - \\
&- \xi_{23} \big\{ k_6 A_2^2 A_3 \exp[i(2\omega_2 + \omega_3) T_0] + \\
&\quad + k_8 A_2^2 A_3 \exp[i(2\omega_2 - \omega_3) T_0] \big\} - \\
&- (\xi_{13} k_6 + \xi_{23} k_5) A_1 A_2 A_3 \exp[i(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) T_0] - \\
&- (\xi_{13} k_6 + \xi_{23} k_7) A_1 A_2 A_3 \exp[i(\omega_2 + \omega_3 - \omega_1) T_0] - \\
&- (\xi_{13} k_8 + \xi_{23} k_5) A_1 A_2 A_3 \exp[i(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3) T_0] - \\
&- (\xi_{13} k_8 + \xi_{23} k_7) A_1 A_2 A_3 \exp[i(\omega_3 - \omega_1 - \omega_2) T_0] - \\
&- (\xi_{13} k_1 + \xi_{23} k_3) A_3^3 \exp(3i\omega_3 T_0) + 2f \exp(i\Omega_F T_0) + cc.
\end{aligned} \tag{80}
$$

Из анализа уравнений (78)–(80) следует, что на данном этапе может возникнуть внутренний резонанс 1:1, когда одна собственная частота равна другой собственной частоте

$$\omega_1 = \omega_2 \quad (\omega_3 \neq \omega_1, \omega_3 \neq \omega_2), \tag{81}$$

$$\omega_1 = \omega_3 \quad (\omega_2 \neq \omega_1, \omega_2 \neq \omega_3), \tag{82}$$

$$\omega_2 = \omega_3 \quad (\omega_1 \neq \omega_2, \omega_1 \neq \omega_3). \tag{83}$$

3. Резонанс два-к-одному. Рассмотрим случай сочетания внутреннего резонанса (65) с внешним резонансом, при этом предположим, что частота вертикальных колебаний равна частоте внешней возмущающей силы

$$\omega_3 = \Omega_F. \tag{84}$$

Устраняя вековые члены в уравнениях (62)-(64), получим уравнения для определения пока неизвестных функций $A_i(T_1)$:

$$2i\omega_1 D_1 A_1(T_1) + \xi_1 A_3^2 + \mu_1 A_1 (i\omega_1)^{\gamma_1} = 0, \tag{85}$$

$$2i\omega_2 D_1 A_2(T_1) + \mu_2 A_2 (i\omega_2)^{\gamma_1} = 0, \tag{86}$$

$$2i\omega_3 D_1 A_3(T_1) + \mu_3 A_3 (i\omega_3)^{\gamma_1} + \mu_4 A_3 (i\omega_3)^{\gamma_2} + \mu_5 A_3 (i\omega_3)^{\gamma_2} + \xi_{13} A_1 \overline{A}_3 - 2f = 0. \tag{87}$$

Далее записывая функции $A_i(T_1)$ в полярном виде $A_i = a_i e^{i\varphi_i}$, где a_i и φ_i — функции амплитуд и фаз нелинейных колебаний, умножая уравнения (85)–(87) на комплексно-сопряженные функции, а также складывая и вычитая пары взаимно сопряженных уравнений, получаем следующие выражения для амплитуд и фаз колебаний системы «пластина + вязкоупругое основание + вязкоупругая окружающая среда»:

$$\left(a_1^2\right)^{\cdot} + s_1 a_1^2 + \omega_1^{-1} \xi_1 a_1 a_3^2 \sin\delta = 0, \tag{88}$$

$$\left(a_2^2\right)^{\cdot} + s_2 a_2^2 = 0, \tag{89}$$

$$\left(a_3^2\right)^{\cdot} + s_3 a_3^2 - \omega_3^{-1} \xi_{13} a_1 a_3^2 \sin\delta + 2f\omega_3^{-1} a_3 \sin\varphi_3 = 0, \tag{90}$$

$$\dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{1}{2}\xi_1 \omega_1^{-1} a_1^{-1} a_3^2 \cos\delta = 0, \tag{91}$$

$$\dot{\varphi}_2 - \frac{1}{2}\lambda_2 = 0, \tag{92}$$

$$\dot{\varphi}_3 - \frac{1}{2}\lambda_3 - \frac{1}{2}\xi_{13}\omega_3^{-1} a_1 \cos\delta + f\omega_3^{-1} a_3^{-1} \cos\varphi_3 = 0, \tag{93}$$

где $\delta = 2\varphi_3 - \varphi_1$ — разность фаз в случае внутреннего резонанса два-к-одному, точки означают дифференцирование по времени T_1, а параметры $s_1, s_2, s_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&s_1 = \mu_1 \omega_1^{\gamma_1 - 1} \sin(\psi_1), \quad s_2 = \mu_2 \omega_2^{\gamma_1 - 1} \sin(\psi_1),\\
&s_3 = \mu_3 \omega_3^{\gamma_1 - 1} \sin(\psi_1) + (\mu_4 + \mu_5)\omega_3^{\gamma_2 - 1} \sin(\psi_2),\\
&\lambda_1 = \mu_1 \omega_1^{\gamma_1 - 1} \cos(\psi_1), \quad \lambda_2 = \mu_2 \omega_2^{\gamma_1 - 1} \cos(\psi_1),\\
&\lambda_3 = \mu_3 \omega_3^{\gamma_1 - 1} \cos(\psi_1) + (\mu_4 + \mu_5)\omega_3^{\gamma_2 - 1} \cos(\psi_2),\\
&\psi_1 = 0.5\pi\gamma_1, \quad \psi_2 = 0.5\pi\gamma_2.
\end{aligned} \tag{94}$$

Из полученной системы уравнений (88)-(93) видно, что возникновение внутреннего резонанса 2:1 (65) приводит к перекачке энергии между взаимодействующими модами с частотами ω_1 и ω_3, которая сопровождается амплитудно-фазовой модуляцией. Что касается третьей моды колебаний с частотой ω_2, которая не задействована во внутреннем резонансе (65), то, как следует из уравнений (89) и (92), ее амплитуда $a_2 = a_{20} = \text{const}$ не зависит от времени T_1, а

фаза меняется линейно во времени $\varphi = \frac{1}{2}\lambda_2 T_1 + \varphi_{20}$, где a_{20} и φ_{20} соответственно начальные амплитуда и фаза колебаний.

Система уравнений (88)-(93) и выражения (94) являются обобщением ряда классических моделей, которые могут быть получены как частные предельные случаи. Рассмотрим пять основных предельных переходов.

1. Если положить коэффициенты, характеризующие свойства вязкоупругого основания, равными нулю, т.е. $\mu_4 = \mu_5 = 0$, и не учитывать вклад основания на частоту ω_3, т.е. вычислять ее по формуле (27), то получим уравнения вынужденных колебаний пластинки в вязкоупругой среде, демпфирующие свойства которой описываются моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной, в условиях внутреннего резонанса 2:1. Эта задача была рассмотрена в работе [26]. А если при этом $f = 0$, тогда приходим к случаю свободных колебаний, который был впервые исследован в работе [24].

2. В случае, когда параметры дробности $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, дробные производные переходят в обычные производные первого порядка. Следовательно, $\psi_1 = \psi_2 = 0.5\pi$, $\sin(\psi_1) = \sin(\psi_2) = 1$, а $\cos(\psi_1) = \cos(\psi_2) = 0$. Тогда выражения (94) принимают следующий вид:

$$\begin{gathered} s_1 = \mu_1, \quad s_2 = \mu_2, \quad s_3 = \mu_3 + \mu_4 + \mu_5, \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \end{gathered} \tag{95}$$

Из соотношений (95) видно, что коэффициенты демпфирования s_1, s_2, s_3 становятся постоянными и не зависящими от частот колебаний, а коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ обращаются в ноль, что соответствует классической модели Кельвина-Фойгта, но противоречит гипотезе модального демпфирования.

3. Модель вязкоупругого основания Пастернака переходит в классическую упругую модель основания Пастернака, если положить время ретардации материала основания равным $\tau_4 = 0$, что приводит к $\mu_4 = \mu_5 = 0$. Тогда уравнения (88)-(93) будут описывать нелинейные колебания пластины в вязкоупругой среде на упругом основании Пастернака. При этом частота ω_3 вычисляется по формуле (26), которая как раз и учитывает вклад упругого основания Пастернака, а коэффициенты (94) принимают вид

$$s_i = \mu_i \omega_i^{\gamma_1 - 1} \sin(\psi_1), \quad \lambda_i = \mu_i \omega_i^{\gamma_1 - 1} \cos(\psi_1), \quad (i = 1, 2, 3).$$

4. Модель вязкоупругого основания Пастернака переходит в вязкоупругую модель основания Фусса-Винклера, когда модуль сдвига $G = 0$, что приводит к $\mu_5 = 0$. В этом случае собственная частота изгибных колебаний из плоскости пластины вычисляется по формуле (28). Отметим, что если дополнительно положить $\tau_4 = 0$, то получим упругое основание Фусса-Винклера.

5. В случае, когда порядок дробной производной стремится к нулю, параметры дробности $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, выражения (94) принимают следующий вид:

$$\begin{gathered} s_1 = s_2 = s_3 = 0, \\ \lambda_1 = \mu_1 \omega_1^{-1} \quad \lambda_2 = \mu_2 \omega_2^{-1}, \quad \lambda_3 = (\mu_3 + \mu_4 + \mu_5)\omega_3^{-1}, \end{gathered} \tag{96}$$

где коэффициенты $\mu_i = \varepsilon^{-1}E_0$ $(i = 1, 2, 3)$, $\mu_4 = \varepsilon^{-1}\lambda_0$ и $\mu_5 = \varepsilon^{-1}G\pi^2(m^2 + \beta_2^2 n^2)$ зависят только от упругих параметров системы.

Это означает, что колебания становятся незатухающими, поскольку диссипация энергии, связанная с вязкостью среды и основания, полностью исчезает. Это соответствует классической задаче о нелинейных колебаниях упругой пластины на упругом основании Пастернака, если $G \neq 0$, или на упругом основании Фусса-Винклера при $G = 0$.

4. Резонанс один-к-одному. Рассмотрим случай сочетания внутреннего резонанса (81), когда какие-либо две частоты колебаний в плоскости пластинки в направлениях x и y близки друг другу (что особенно часто наблюдается для квадратных пластинок), с внешним резонансом (84).

Устраняя вековые члены в уравнениях (74)-(76), получим

$$2i\omega_1 D_2 A_1 + \mu_1(i\omega_1)^{\gamma_1} A_1 + 2\xi_1(k_5 + k_7)A_1 A_3 \bar{A}_3 + 2\xi_1(k_6 + k_8)A_2 A_3 \bar{A}_3 = 0, \quad (97)$$

$$2i\omega_2 D_2 A_2 + \mu_2(i\omega_2)^{\gamma_1} A_2 + 2\xi_2(k_6 + k_8)A_2 A_3 \bar{A}_3 + 2\xi_2(k_5 + k_7)A_1 A_3 \bar{A}_3 = 0, \quad (98)$$

$$\begin{aligned} 2i\omega_3 D_2 A_3 &+ \mu_3(i\omega_3)^{\gamma_1} A_3 + (\mu_4 + \mu_5)(i\omega_3)^{\gamma_2} A_3 + \\ &+ \left[\xi_{13}(k_1 + 2k_2) + \xi_{23}(k_3 + 2k_4)\right] A_3^2 \bar{A}_3 + \\ &+ \xi_{23}(k_6 + k_8)A_2 \bar{A}_2 A_3 + \xi_{13}(k_5 + k_7)A_1 \bar{A}_1 A_3 + \\ &+ (\xi_{13}k_6 + \xi_{23}k_7)\bar{A}_1 A_2 A_3 + \\ &+ (\xi_{13}k_8 + \xi_{23}k_5)A_1 \bar{A}_2 A_3 - 2f = 0. \end{aligned} \quad (99)$$

Умножая уравнения (95)–(98) на комплексно-сопряженные функции, а также складывая и вычитая пары взаимно сопряженных уравнений, как это было сделано в случае резонанса 2:1, получаем следующие выражения для амплитуд и фаз колебаний системы «пластина + вязкоупругое основание + вязкоупругая внешняя среда»:

$$(a_1^2)^{\cdot} + s_1 a_1^2 + 2\omega_1^{-1}\xi_1(k_6 + k_8)a_1 a_2 a_3^2 \sin\delta = 0, \quad (100)$$

$$(a_2^2)^{\cdot} + s_2 a_2^2 - 2\omega_2^{-1}\xi_2(k_5 + k_7)a_1 a_2 a_3^2 \sin\delta = 0, \quad (101)$$

$$(a_3^2)^{\cdot} + s_3 a_3^2 + 2f a_3 \omega_3^{-1} \sin\varphi_3 = 0, \quad (102)$$

$$\dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2}\lambda_1 - \omega_1^{-1}\xi_1(k_5 + k_7)a_3^2 - \omega_1^{-1}\xi_1(k_6 + k_8)a_1^{-1}a_2 a_3^2 \cos\delta = 0, \quad (103)$$

$$\dot{\varphi}_2 - \frac{1}{2}\lambda_2 - \omega_2^{-1}\xi_2(k_6 + k_8)a_3^2 - \omega_2^{-1}\xi_2(k_5 + k_7)a_1 a_2^{-1}a_3^2 \cos\delta = 0, \quad (104)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_3 - \frac{1}{2}\lambda_3 &- \frac{1}{2}\omega_3^{-1}[\xi_{13}(k_1 + 2k_2) + \xi_{23}(k_3 + 2k_4)]a_3^2 - \\ &- \frac{1}{2}\xi_{23}\omega_3^{-1}(k_6 + k_8)a_2^2 - \frac{1}{2}\xi_{13}\omega_3^{-1}(k_5 + k_7)a_1^2 - \\ &+ f(\omega_3 a_3)^{-1}\cos\varphi_3 = 0, \end{aligned} \quad (105)$$

где $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ — разность фаз в случае внутреннего резонанса один-к-одному, точки означают дифференцирование по времени T_2, а коэффициенты $s_1, s_2, s_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ определяются формулами (94).

Из уравнения (102) следует, что амплитуда вертикальных колебаний с течением времени зависит только от амплитуды внешней гармонической силы f и от фазы вертикальных колебаний $\varphi_3 = \varphi_3(T_2)$:

$$a_3 = a_{30}e^{-s_3T_2/2} - \frac{f}{2\omega_3}\int_0^{T_2} \sin\varphi_3 dT_2. \tag{106}$$

Но поскольку фаза вертикальных колебаний, в свою очередь, зависит еще от квадратов амплитуд горизонтальных колебаний в соответствии с уравнением (105), то система шести уравнений (100)–(105) остается связанной.

Таким образом, структура уравнений (100)–(105), описывающих амплитудно-фазовую модуляцию при нелинейных вынужденных колебаниях в случае внутреннего резонанса 1:1 (81), существенно отличается от случая внутреннего резонанса 2:1 (65) , поскольку все три моды a_1, a_2, a_3 оказываются связанными, несмотря на то, что во внутренний резонанс вступают только моды горизонтальных колебаний. Это приводит к следующим различиям в интерпретации предельных переходов.

1. Если положить коэффициенты, характеризующие свойства вязкоупругого основания, равными нулю, т.е. $\mu_4 = \mu_5 = 0$, и не учитывать вклад основания на частоту ω_3, т.е. вычислять ее по формуле (27), то получим уравнения вынужденных колебаний пластинки в вязкоупругой среде, демпфирующие свойства которой описываются моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной, в условиях внутреннего резонанса 1:1. Эта задача была рассмотрена в работах [27, 33]. А если при этом $f = 0$, тогда приходим к случаю свободных колебаний, который был впервые исследован в работе [25].

2. При $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ (переход к классической модели Кельвина-Фойгта) система уравнений (100)–(105) сводится к системе шести связанных нелинейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами демпфирования, не зависящими от частот колебаний, которые опеределяются соотношениями (95).

3. Как уже отмечалось для случая внутреннего резонанса 2:1, модель вязкоупругого основания Пастернака переходит в классическую упругую модель основания Пастернака, если положить время ретардации материала основания равным $\tau_4 = 0$, что приводит к $\mu_4 = \mu_5 = 0$. Тогда уравнения (100)-(105) будут описывать нелинейные колебания пластины в вязкоупругой среде на упругом основании Пастернака, При этом частота ω_3 вычисляется по формуле (26), которая как раз и учитывает вклад упругого основания Пастернака.

4. При $G = 0$ (переход к вязкоупругому основанию Фусса-Винклера) изменение собственной частоты ω_3 влияет на все коэффициенты нелинейного взаимодействия k_i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ через соотношения (77), что, в свою очередь, влияет на энергообмен между всеми тремя модами нелинейных колебаний.

5. При $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, т.е. в случае, когда коэффициенты определяются соотношениями (96): $s_i = 0$, $\lambda_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$, колебания становятся незатухающими, поскольку диссипация энергии, связанная с вязкостью среды и основания, полностью исчезает. Это соответствует классической задаче о нелинейных колебаниях упругой пластины на упругом основании Пастернака, если $G \neq 0$, или Фусса-Винклера при $G = 0$. При этом наличие внутреннего резонанса 1:1 (81) приводит к перекачке энергии между всеми тремя модами.

5. Численные результаты. Полученную систему уравнений относительно амплитуд и фаз нелинейных колебаний (88)–(93) для резонанса 2:1 можно решить численно при помощи алгоритма Рунге-Кутта четвертого порядка. С целью реализации данного метода был составлен программный код в системе для математических вычислений «GNU Octave», позволяющий получать графические результаты для безразмерных амплитуд a_1, a_3 (рис. 2– 4).

Для численных исследований использовались следующие геометрические и физические параметры пластины: $\omega_1 = 2\omega_3 = 14.285\pi$, $\nu = 0.27$, $\xi_1 = 50$, $\xi_{13} = 50$, $\beta_1 = 4.75$, $\beta_2 = 0.039$, а также начальные условия $a_{10} = 1$, $a_{20} = 0$, $a_{30} = 1$.

Зависимости безразмерных амплитуд колебаний от времени T_1 приведены для свободных колебаний при $f = 0$ на рис. 2 для различных значений параметров дробности γ_1, γ_2, характеризующих вязкоупругую среду и вязкоупругое основание в диапазоне $0 \leq \gamma_{1,2} \leq 1$, включая незатухающие колебания при $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$ на рис. 2, (a). Рисунки 2 иллюстрируют затухающий характер энергообмена между взаимодействующими подсистемами при различных значениях параметров дробности, при этом наличие вязкоупругого основания приводит к более интенсивному затуханию колебаний по сравнению с влиянием вязкоупругой окружающей среды рис. 2, (b). Увеличение параметров дробности приводит к более быстрому затуханию безразмерных амплитуд колебаний с течением времени, что характерно и для колебаний пластинки в вязкоупругой среде на упругом основании при $\gamma_2 = 0$ рис. 2, (c), и в случае колебаний упругой пластинки на вязкоупругом основании при $\gamma_1 = 0$ рис. 2, (d).

На рис. 3 представлены для сравнения результаты расчетов для случаев свободных колебаний при $f = 0$ рис. 3, (a), (b) и вынужденных колебаний рис. 3, (c), (d) при $f = 2$ для фиксированных значений параметров вязкоупругого основания μ_4 и μ_5. Из рисунков 3 прослеживается влияние учета деформаций сдвига по вязкоупругой модели Пастернака ($\mu_5 \neq 0$) для корректного прогнозирования динамического отклика. В случае свободных колебаний рис. 3, (a), (b) затухание амплитуд происходит более интенсивно, тогда как при вынужденных колебаниях рис. 3, (c), (d) внешняя гармоническая сила оказываает стабилизирующее действие на колебательный процесс, препятствуя его быстрому затуханию. При этом предельный переход при $\mu_4 = \mu_5 = 0$ сводит задачу к случаю колебаний пластины на упругом основании в вязкоупругой среде без учёта основания, тогда как условие $\mu_5 = 0$, соответствует модели основания Фусса–Винклера, что продемонстрировано на рисунке 3, (b), (d).

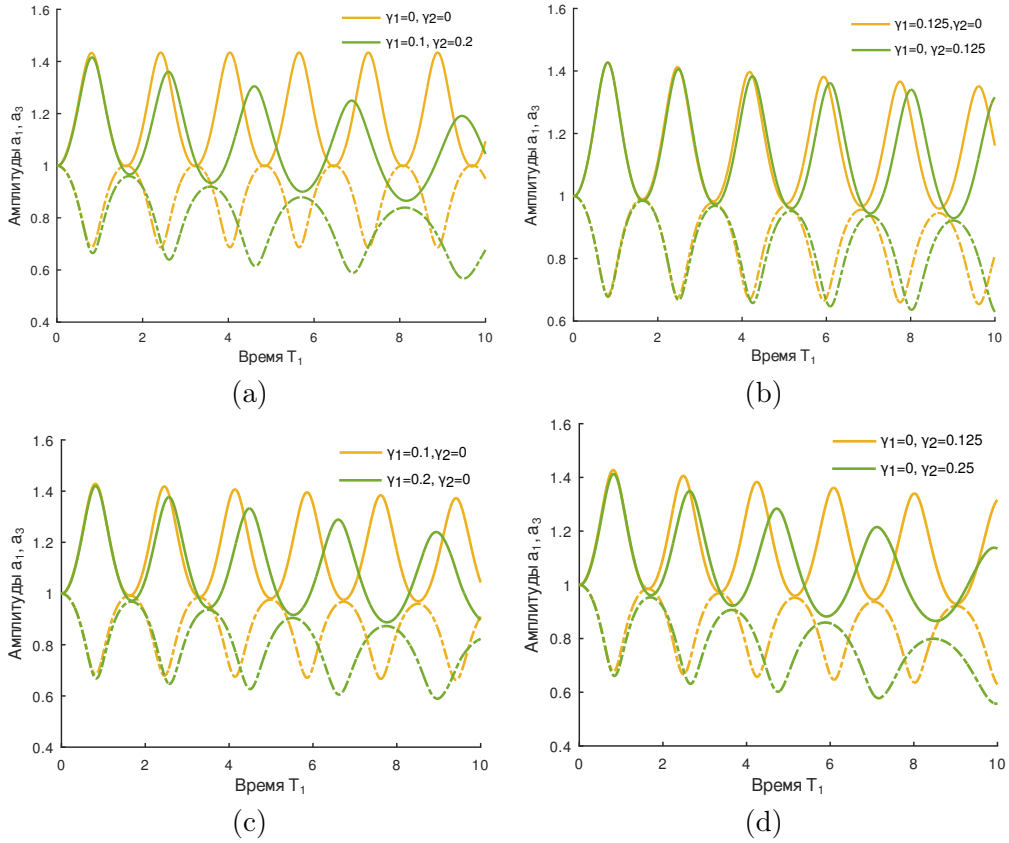


Рис. 2. Зависимость безразмерных амплитуд свободных колебаний a_1, a_3 от безразмерного времени T_1 при различных значениях параметров дробности γ_1 и γ_2, где a_1 — пунктирная линия, a_3 — сплошная линия

В случае вынужденных колебаний, представленных на рис. 4 при различных амплитудах внешнего воздействия f, так же как и в случае свободных колебаний, параметры дробности γ_1 и γ_2 оказывают ключевое влияние на демпфирующие процессы системы «пластина + основание + среда». Возрастание амплитуды внешней возмущающей силы рис. 4, (a) при $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$ приводит к увелиению периода энергообмена между взаимодействующими модами колебаний. На рис. 4, (b) при $\gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = 0.2$ интенсивность поцесса затухания колебаний при увеличении значения f возрастает, что свидетельствует о вкладе вязкоупругих свойств основания в энергообмен между взимодействующими подсистемами.

Результаты проведенного в программном комплексе Octave численного анализа системы уравнений (100)–(105) при помощи алгоритма Рунге-Кутта четвертого порядка приведены на рис. 5, где показаны зависимости амплитуд колебаний от безразмерного времени T_2 для прямоугольной пластины, опирающейся на основание Пастернака в случае резонанса 1:1 при $\gamma_1 = 0.2, \gamma_2 = 0.3$. В

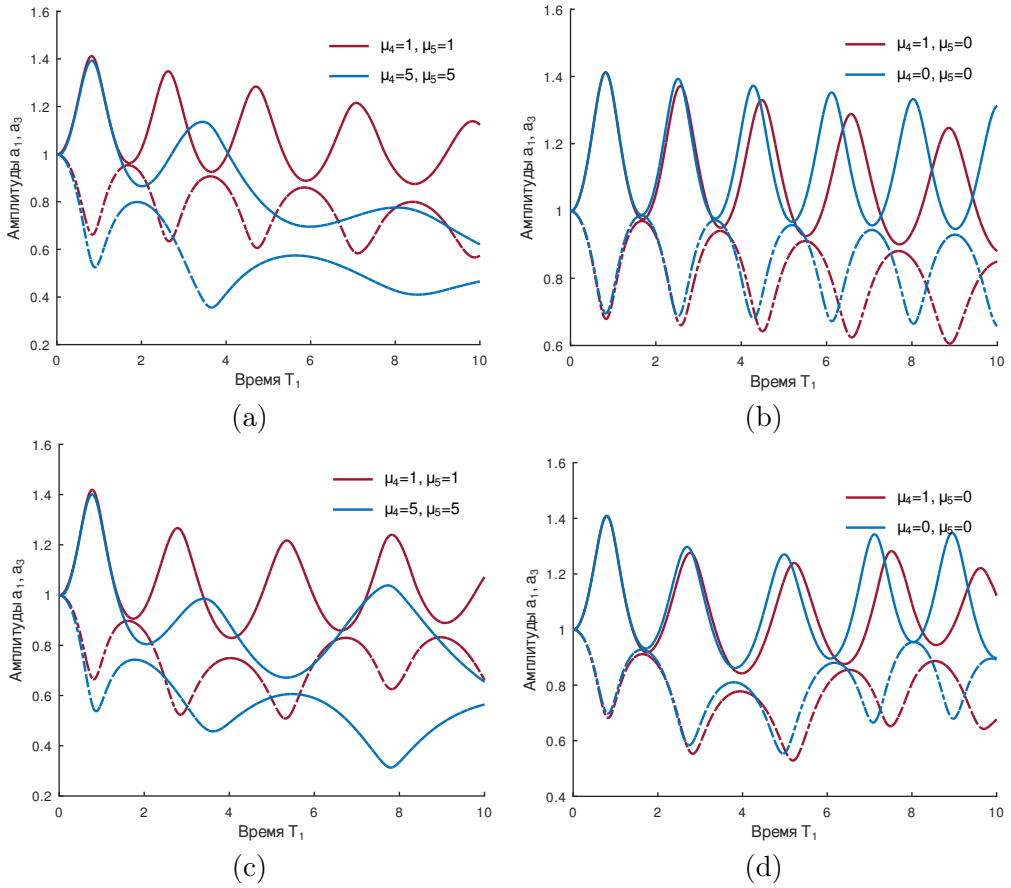
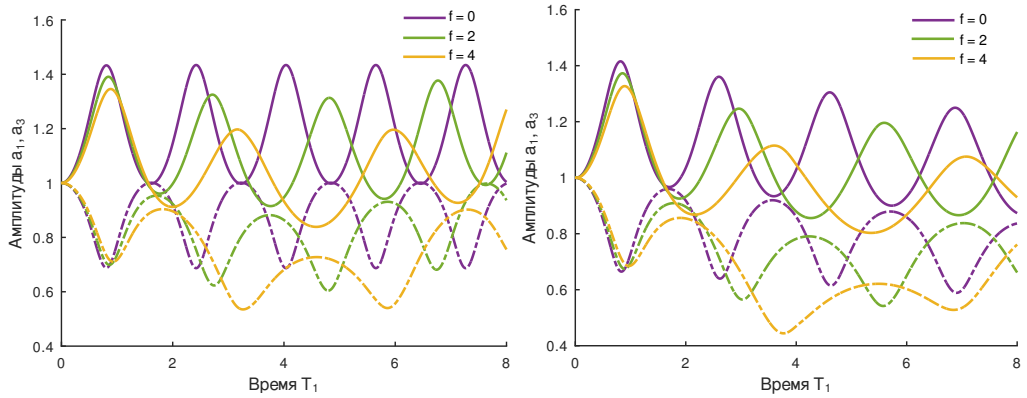


Рис. 3. Зависимость безразмерных амплитуд свободных (a), (b) и вынужденных (c), (d) колебаний a_1, a_3 от безразмерного времени T_1 при различных значениях μ_4, μ_5 и $\gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = 0.2$, где a_1 — пунктирная линия, a_3 — сплошная линия

расчетах были приняты следующие параметры системы и начальные условия: $\omega_1 = \omega_2 = 3.08\pi$, $\omega_3 = 0.23\pi^2$, $\nu = 0.27$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0.08$, $m_1 = n_2 = m_3 = 1$, $n_1 = n_3 = 3, m_2 = 5$, $a_{10} = 0.5$, $a_{20} = 0.5$, $a_{30} = 0.5$. Изменение параметров μ_4, μ_5 позволяет управлять периодом колебательного процесса, что характерно как для свободных рис. 5, (a), так и для вынужденных колебаний рис. 5, (b). Перекачка энергии происходит между двумя подсистемами, при этом поведение третьей подсистемы изменяется под воздействием внешней гармонической силы рис. 5, (b).

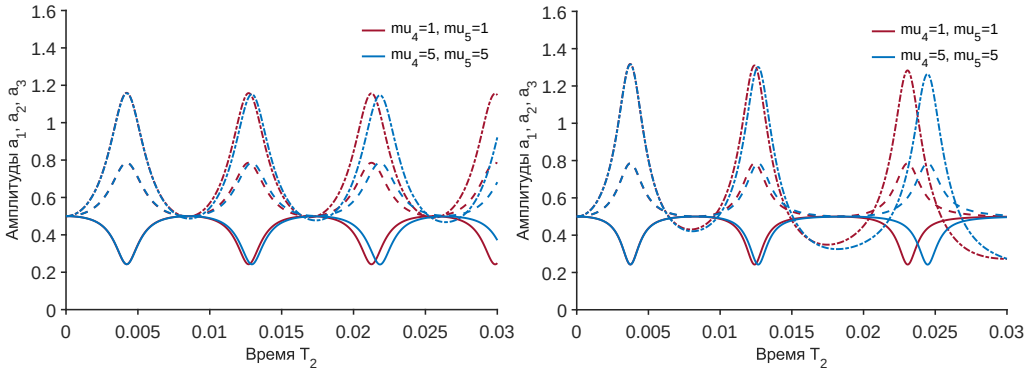
Полученные численные результаты свидетельствуют о том, что наличие внешней гармонической силы с частотой, близкой к частоте вертикальных колебаний ω_3, не оказывает сильного воздействия на характер поведения безразмерных амплитуд взаимодействующих мод колебаний в плоскости пластинки с частотами ω_1 и ω_2, благодаря тому, что третья мода участвует не напрямую в



(a) (b)

Рис. 4. Зависимость безразмерных амплитуд колебаний a_1, a_3 от безразмерного времени T_1 при различных значениях амплитуды внешней силы f: (a) — при $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$; (b) — при $\gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = 0.2$, где a_1 — пунктирная линия, a_3 — сплошная линия

рассмотренном типе внутреннего резонанса (81), а опосредованно, через взаимозависимость уравнений (100)–(105). Однако внешнее воздействие меняет характер поведения динамического прогиба, приводя к увеличению амплитуды вертикальных колебаний рис. 5, (b).



(a) (b)

Рис. 5. Зависимость безразмерных амплитуд колебаний от безразмерного времени T_2 при различных значениях μ_4, μ_5: (a) – свободные колебания; (b) – вынужденные колебания, где a_1 — пунктирная линия, a_2 — сплошная линия, a_3 — штрихпунктирная линия

Заключение. Решена задача о нелинейных колебаниях пластины на вязкоупругом основании Пастернака на основе реологической модели Кельвина-Фойгта с дробной производной для случаев свободных и вынужденных колебаний. Получено аналитическое решение разрешающих уравнений движения пластины в случае внутреннего резонанса 2:1 и 1:1 в сочетании с внешним резонансом при использовании обобщенного метода многих временных масштабов. Затем приведено численное решение уравнений амплитуд и фаз нелинейных колебаний методом Рунге-Кутта четвертого порядка с последующей графической визуализацией результатов.

Показано, что полученная система уравнений, описывающая нелинейные колебания пластинки, которая лежит на вязкоупругом основании Пастернака и колеблется в вязкоупругой среде, совпадает с точностью до коэффициентов, с уравнениями движения пластинки в трех взаимно перпендикулярных направлениях [26, 27, 33]. Варьирование коэффициентами позволяет рассмотреть различные типы оснований, а также незатухающие и затухающие свободные и вынужденные колебания пластинки как с учетом основания, так и без него.

Проведен анализ влияния параметров дробности и параметров вязкоупругого основания Пастернака на амплитудно-частотные характеристики и переходные режимы колебаний пластины в условиях внутреннего резонанса под действием внешней гармонической силы. Установлено, что уменьшение параметров дробности приводит к снижению демпфирующих свойств основания, тогда как при стремлении этих параметров к единице задача сводится к классической модели Кельвина-Фойгта целого порядка, что подтверждает корректность предложенного подхода.

Разработанный аналитико-численный алгоритм позволяет прогнозировать динамическое поведение пластин на вязкоупругих основаниях без громоздких численных алгоритмов на каждом временном шаге. Представленная модель позволяет рассматривать более частные случаи: вязкоупругое основание Фусса-Винклера, упругое основание Пастернака и Фусса-Винклера, а также вынужденные колебания упругой пластинки в вязкоупругой среде. Полученные закономерности могут быть использованы при проектировании фундаментных плит в сейсмоактивных зонах, виброизолирующих оснований, а также элементов дорожных полотен, подверженных динамическим нагрузкам.

В дальнейшей работе планируется исследование различных типов комбинационных внутренних резонансов, а также их наложение на внешний резонанс.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. В. В. Канду — аналитические выкладки; А. И. Круссер — анализ результатов, редактирование текста рукописи; А. С. Шепелев — численные исследования, написание текста рукописи; М. В. Шитикова — постановка задачи, общее руководство проектом, редактирование текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Данная работа была поддержана грантом 2026 года на проведение фундаментальных научных исследований (НИР/НИОКР) научными коллективами НИУ МГСУ, проект № 06-482/130.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. V.V. Kandu — analytical treatment; A.I. Krusser — evaluation of results, editing the manuscript; A.S. Shepelev — numerical investigations, writing the draft manuscript; M.V. Shitikova — problem formulation, general supervision of the project, editing the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was supported by Moscow State Civil Engineering University in the framework of the fundamental research programm for 2026 year, Project No. 06-482/130.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cai W. Fractional modeling of Pasternak-type viscoelastic foundation // Mechanics of Time-Dependent Materials. 2016. Vol. 21. P. 119–131. DOI: 10.1007/s11043-016-9321-0.
2. Shitikova M. V., Krusser A. I. Dynamic analysis of an elastic plate resting on a nonlinear fractional-order viscoelastic Pasternak foundation and subjected to moving load // Lecture Notes in Civil Engineering. 2022. Vol. 168. P. 13–24. DOI: 10.1007/978-3-030-91145-4_2.
3. Zhu H. H., Liu L., Ye X. Response of a loaded rectangular plate on fractional derivative viscoelastic foundation // Journal of Basic Science and Engineering. 2011. Vol. 19, no. 2. P. 271–278. DOI: 10.3969/j.issn.1005-0930.2011.02.011.
4. Zhang C. C., Zhu H. H., Shi B., Fatahi B. A long term evaluation of circular mat foundations on clay deposits using fractional derivatives // Computers and Geotechnics. 2018. Vol. 94. P. 72–82. DOI: 10.1016/j.compgeo.2017.08.018.
5. Praharaj R. K., Datta N. On the transient response of plates on fractionally damped viscoelastic foundation // Computational and Applied Mathematics. 2020. Vol. 39, no. 4. DOI: 10.1007/s40314-020-01285-6.
6. Шитикова М. В., Канду В. В. Анализ нелинейных колебаний упругой пластинки на вязкоупругом основании при наличии внутреннего резонанса один-к-одному // Известия вузов. Строительство. 2020. № 3. С. 5–22. DOI: 10.32683/0536-1052-2020-735-3-5-22.
7. Di Paola M. Visco-elastic behavior through fractional calculus: an easier method for best fitting experimental results // Mechanics of Materials. 2011. Vol. 43, no. 12. P. 799–806. DOI: 10.1016/j.mechmat.2011.08.016.
8. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. Application of fractional calculus for analysis of nonlinear damped vibrations of suspension bridges // Journal of Engineering Mechanics. 1998. Vol. 124. P. 1029–1036. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1998)124:9(1029).
9. Lai J., Mao S., Qiu J., et al. Investigation progresses and applications of fractional derivative model in geotechnical engineering // Mathematical Problems in Engineering. 2016. Vol. 2016. P. 9183296. DOI: 10.1155/2016/9183296.
10. Shitikova M. V., Kandu V. V., Krusser A. I. On nonlinear vibrations of an elastic plate on a fractional viscoelastic foundation in a viscoelastic medium in the presence of the one-to-one internal resonance // Journal of Sound and Vibration. 2023. Vol. 549. P. 117564. DOI: 10.1016/j.jsv.2023.117564.

11. He M. M., Li N., Chen Y. S., Zhu C. H. Dynamic deformation behavior of rock based on fractional order calculus // Yantu Gongcheng Xuebao/Chinese Journal of Geotechnical Engineering. 2015. Vol. 37. P. 178–184. DOI: 10.11779/CJGE2015S1034.
12. Zhang Q., Zhang Q., Ji M. Dynamic Mechanical Properties of Soil Based on Fractional-Order Differential Theory // Soil Mechanics and Foundation Engineering. 2019. Vol. 55, no. 6. P. 366–373. DOI: 10.1007/s11204-019-09550-5.
13. Song P., Wei P., Zhou X. Vibration of rectangular plate on fractional order viscoelastic foundation subjected to standing and moving loads // Mechanics of Time-Dependent Materials. 2023. Vol. 28. P. 541–561. DOI: 10.1007/s11043-023-09590-3.
14. Tian D.-L., Zhou X.-P. The kinematic-constraint-inspired non-ordinary state-based peridynamics with fractional viscoelastic-viscoplastic constitutive model to simulating time-dependent deformation and failure of rocks // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2024. Vol. 406. P. 116873. DOI: 10.1016/j.cma.2024.116873.
15. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids // Applied Mechanics Reviews. 1997. Vol. 50, no. 1. P. 15–67. DOI: 10.1115/1.3101682.
16. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: novel trends and recent results // Applied Mechanics Reviews. 2010. Vol. 63, no. 1. P. 1–52. DOI: 10.1115/1.4000563.
17. Kou L., Xu J., Wang B. Response for a Loaded Rectangular Plate on Viscoelastic Foundation with Fractional Derivative Model // Proceedings of the GeoShanghai 2018 International Conference: Fundamentals of Soil Behaviors. 2018. P. 166–176. DOI: 10.1007/978-981-13-0125-4_19.
18. Zatar W., Xiao F., Chen G. S., Hulsey J. L. Nonlinear vibration of a bridge with fractional-order viscoelastic constitutive relation // Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control. 2020. Vol. 40, no. 3. P. 1392–1400. DOI: 10.1177/1461348420979478.
19. Wang L., Sun D., Li P., Xie Y. Dynamic responses of plate on elastic foundation with fractional derivative model under moving load // Computers and Geotechnics. 2017. Vol. 83. P. 30–39. DOI: 10.1016/j.compgeo.2016.10.020.
20. Круссер А. И., Шитикова М. В. Численный анализ нелинейных колебаний пластины на вязкоупругом основании под действием подвижной осциллирующей нагрузки на основе моделей с дробными производными // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26, № 4. С. 694–714. DOI: 10.14498/vsgtu1957.
21. Amabili M. Nonlinear vibrations of rectangular plates with different boundary conditions: Theory and experiments // Computers and Structures. 2004. Vol. 82, no. 31/32. P. 257–267. DOI: 10.1016/j.compstruc.2004.03.077.
22. Leissa A. Vibration of Plates. Washington, D.C.: Scientific, Technical Information Division, Office of Technology Utilization, NASA, 1969. 353 p.
23. Shitikova M. V. The fractional derivative expansion method in nonlinear dynamic analysis of structures // Nonlinear Dynamics. 2020. Vol. 99. P. 109–122. DOI: 10.1007/s11071-019-05055-w.

24. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. Free damped nonlinear vibrations of a viscoelastic plate under the two-to-one internal resonance // Materials Science Forum. 2003. Vol. 440/441. P. 29–36. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.440-441.29.
25. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V., Ngenzi J. C. A New Approach for Studying Nonlinear Dynamic Response of a Thin Plate with Internal Resonance in a Fractional Viscoelastic Medium // Shock and Vibration. 2015. Vol. 2015. P. 1–29. DOI: 10.1155/2015/795056.
26. Shitikova M. V., Rossikhin Y. A., Kandu V. Interaction of internal and external resonances during force driven vibrations of a nonlinear thin plate embedded into a fractional derivative medium // Procedia Engineering. Vol. 199. 2017. P. 832–837. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.09.006.
27. Шитикова М. В., Канду В. В. Численный анализ вынужденных колебаний нелинейных пластинок в вязкоупругой среде при наличии внутреннего резонанса один к одному // Известия вузов. Строительство. 2018. № 12. С. 9–22. DOI: 10.32683/0536-1052-2018-720-12-9-22.
28. Шитикова М. В., Осипова Е. И. Анализ вынужденных колебаний нелинейной вязкоупругой пластинки с учетом сдвига и инерции вращения // Известия вузов. Строительство. 2024. № 1. С. 15–29. DOI: 10.32683/0536-1052-2024-781-1-15-29.
29. Найфэ А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
30. Nayfeh A. H., Mook D. T. Nonlinear Oscillations. New York: Wiley, 1995. 704 p.
31. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. New approach for the analysis of damped vibrations of fractional oscillators // Shock and Vibration. 2009. Vol. 16, no. 4. P. 365–387. DOI: 10.3233/SAV-2009-0475.
32. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. On fallacies in the decision between the Caputo and Riemann-Liouville fractional derivatives for the analysis of the dynamic response of a nonlinear viscoelastic oscillator // Mechanics Research Communications. 2012. Vol. 45. P. 22–27. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2012.07.001.
33. Shitikova M. V., Kandu V. V. Force driven nonlinear vibrations of a thin plate with 1:1 internal resonance in a fractional viscoelastic medium // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019. Vol. 489. P. 012043. DOI: 10.1088/1757-899X/489/1/012043.

REFERENCES

1. Cai W. Fractional modeling of Pasternak-type viscoelastic foundation // Mechanics of Time-Dependent Materials. 2016. Vol. 21. P. 119–131. DOI: 10.1007/s11043-016-9321-0.
2. Shitikova M. V., Krusser A. I. Dynamic analysis of an elastic plate resting on a nonlinear fractional-order viscoelastic Pasternak foundation and subjected to moving load // Lecture Notes in Civil Engineering. 2022. Vol. 168. P. 13–24. DOI: 10.1007/978-3-030-91145-4_2.
3. Zhu H. H., Liu L., Ye X. Response of a loaded rectangular plate on fractional derivative viscoelastic foundation // Journal of Basic Science and Engineering. 2011. Vol. 19, no. 2. P. 271–278. DOI: 10.3969/j.issn.1005-0930.2011.02.011.

4. Zhang C. C., Zhu H. H., Shi B., Fatahi B. A long term evaluation of circular mat foundations on clay deposits using fractional derivatives // Computers and Geotechnics. 2018. Vol. 94. P. 72–82. DOI: 10.1016/j.compgeo.2017.08.018.
5. Praharaj R. K., Datta N. On the transient response of plates on fractionally damped viscoelastic foundation // Computational and Applied Mathematics. 2020. Vol. 39, no. 4. DOI: 10.1007/s40314-020-01285-6.
6. Shitikova M. V., Kandu V. V. Analysis of nonlinear vibrations of an elastic plate on a viscoelastic foundation in the presence of one-to-one internal resonance // News of Higher Educational Institutions. Construction. 2020. No. 3. P. 5–22. DOI: 10.32683/0536-1052-2020-735-3-5-22. (in Russian).
7. Di Paola M. Visco-elastic behavior through fractional calculus: an easier method for best fitting experimental results // Mechanics of Materials. 2011. Vol. 43, no. 12. P. 799–806. DOI: 10.1016/j.mechmat.2011.08.016.
8. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. Application of fractional calculus for analysis of nonlinear damped vibrations of suspension bridges // Journal of Engineering Mechanics. 1998. Vol. 124. P. 1029–1036. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1998)124:9(1029).
9. Lai J., Mao S., Qiu J., et al. Investigation progresses and applications of fractional derivative model in geotechnical engineering // Mathematical Problems in Engineering. 2016. Vol. 2016. P. 9183296. DOI: 10.1155/2016/9183296.
10. Shitikova M. V., Kandu V. V., Krusser A. I. On nonlinear vibrations of an elastic plate on a fractional viscoelastic foundation in a viscoelastic medium in the presence of the one-to-one internal resonance // Journal of Sound and Vibration. 2023. Vol. 549. P. 117564. DOI: 10.1016/j.jsv.2023.117564.
11. He M. M., Li N., Chen Y. S., Zhu C. H. Dynamic deformation behavior of rock based on fractional order calculus // Yantu Gongcheng Xuebao/Chinese Journal of Geotechnical Engineering. 2015. Vol. 37. P. 178–184. DOI: 10.11779/CJGE2015S1034.
12. Zhang Q., Zhang Q., Ji M. Dynamic Mechanical Properties of Soil Based on Fractional-Order Differential Theory // Soil Mechanics and Foundation Engineering. 2019. Vol. 55, no. 6. P. 366–373. DOI: 10.1007/s11204-019-09550-5.
13. Song P., Wei P., Zhou X. Vibration of rectangular plate on fractional order viscoelastic foundation subjected to standing and moving loads // Mechanics of Time-Dependent Materials. 2023. Vol. 28. P. 541–561. DOI: 10.1007/s11043-023-09590-3.
14. Tian D.-L., Zhou X.-P. The kinematic-constraint-inspired non-ordinary state-based peridynamics with fractional viscoelastic-viscoplastic constitutive model to simulating time-dependent deformation and failure of rocks // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2024. Vol. 406. P. 116873. DOI: 10.1016/j.cma.2024.116873.
15. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids // Applied Mechanics Reviews. 1997. Vol. 50, no. 1. P. 15–67. DOI: 10.1115/1.3101682.
16. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: novel trends and recent results // Applied Mechanics Reviews. 2010. Vol. 63, no. 1. P. 1–52. DOI: 10.1115/1.4000563.

17. Kou L., Xu J., Wang B. Response for a Loaded Rectangular Plate on Viscoelastic Foundation with Fractional Derivative Model // Proceedings of the GeoShanghai 2018 International Conference: Fundamentals of Soil Behaviors. 2018. P. 166–176. DOI: 10.1007/978-981-13-0125-4_19.
18. Zatar W., Xiao F., Chen G. S., Hulsey J. L. Nonlinear vibration of a bridge with fractional-order viscoelastic constitutive relation // Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control. 2020. Vol. 40, no. 3. P. 1392–1400. DOI: 10.1177/1461348420979478.
19. Wang L., Sun D., Li P., Xie Y. Dynamic responses of plate on elastic foundation with fractional derivative model under moving load // Computers and Geotechnics. 2017. Vol. 83. P. 30–39. DOI: 10.1016/j.compgeo.2016.10.020.
20. Krusser A. I., Shitikova M. V. Numerical analysis of nonlinear vibrations of a plate on a viscoelastic foundation under a moving oscillating load based on models with fractional derivatives // Vestnik of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2022. Vol. 26, no. 4. P. 694–714. DOI: 10.14498/vsgtu1957. (in Russian).
21. Amabili M. Nonlinear vibrations of rectangular plates with different boundary conditions: Theory and experiments // Computers and Structures. 2004. Vol. 82, no. 31/32. P. 257–267. DOI: 10.1016/j.compstruc.2004.03.077.
22. Leissa A. Vibration of Plates. Washington, D.C.: Scientific, Technical Information Division, Office of Technology Utilization, NASA, 1969. 353 p.
23. Shitikova M. V. The fractional derivative expansion method in nonlinear dynamic analysis of structures // Nonlinear Dynamics. 2020. Vol. 99. P. 109–122. DOI: 10.1007/s11071-019-05055-w.
24. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. Free damped nonlinear vibrations of a viscoelastic plate under the two-to-one internal resonance // Materials Science Forum. 2003. Vol. 440/441. P. 29–36. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.440-441.29.
25. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V., Ngenzi J. C. A New Approach for Studying Nonlinear Dynamic Response of a Thin Plate with Internal Resonance in a Fractional Viscoelastic Medium // Shock and Vibration. 2015. Vol. 2015. P. 1–29. DOI: 10.1155/2015/795056.
26. Shitikova M. V., Rossikhin Y. A., Kandu V. Interaction of internal and external resonances during force driven vibrations of a nonlinear thin plate embedded into a fractional derivative medium // Procedia Engineering. Vol. 199. 2017. P. 832–837. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.09.006.
27. Shitikova M. V., Kandu V. V. Force driven nonlinear vibrations of a thin plate in one to one internal resonance in a fractional viscoelastic medium // News of Higher Educational Institutions. Construction. 2018. No. 12. P. 9–22. DOI: 10.32683/0536-1052-2018-720-12-9-22. (in Russian).
28. Shitikova M. V., Osipova E. I. Analysis of forced vibrations of a nonlinear viscoelastic plate taken into account of shear and rotational inertia // News of Higher Educational Institutions. Construction. 2024. No. 1. P. 15–29. DOI: 10.32683/0536-1052-2024-781-1-15-29. (in Russian).
29. Nayfeh A. H. Perturbation Methods. New York: Wiley, 1973. 455 p.
30. Nayfeh A. H., Mook D. T. Nonlinear Oscillations. New York: Wiley, 1995. 704 p.

31. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. New approach for the analysis of damped vibrations of fractional oscillators // Shock and Vibration. 2009. Vol. 16, no. 4. P. 365–387. DOI: 10.3233/SAV-2009-0475.
32. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. On fallacies in the decision between the Caputo and Riemann-Liouville fractional derivatives for the analysis of the dynamic response of a nonlinear viscoelastic oscillator // Mechanics Research Communications. 2012. Vol. 45. P. 22–27. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2012.07.001.
33. Shitikova M. V., Kandu V. V. Force driven nonlinear vibrations of a thin plate with 1:1 internal resonance in a fractional viscoelastic medium // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019. Vol. 489. P. 012043. DOI: 10.1088/1757-899X/489/1/012043.

Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.006 *EDN: OXNFHJ*

Научная статья *УДК: 539.374*

А. А. Адамов, И. Э. Келлер

БАЗОВЫЕ ИСПЫТАНИЯ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОГО ПОВЕДЕНИЯ ЭЛАСТОМЕРОВ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

Аннотация. Предложена программа базовых испытаний и методика идентификации модели вязкоупругого поведения слабосжимаемого гиперупругого материала, испытывающего конечные деформации при комнатной температуре. Рассмотрены три модели, использующие линейный наследственный оператор обобщенного тела Максвелла в сочетании с двухконстантной аппроксимацией сдвиговой части упругого потенциала, в которых различным образом реализовано разложение движения на упругую и вязкоупругую части. Вязкоупругие константы находятся по данным испытаний на свободное сжатие цилиндрических образцов по программе деформирования с этапами нагружения с постоянной скоростью и релаксации, осуществляемые на жесткой электромеханической испытательной машине. Модуль объемного сжатия находится из испытания на стесненное сжатие по циклической программе с этапами нагружения постоянной скоростью, разгрузки и выдержки. Предложен алгоритм определения констант по данным испытаний, сводящий задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений. Предложенная методика применена к определению констант рассматриваемых моделей для высоконаполненной маслостойкой резины. Реализованы циклические испытания на свободное сжатие цилиндрических образцов с растущими уровнями деформации 10, 20 и 30% с двумя значениями скорости и выдержками при фиксированной деформации и в разгруженном состоянии в течение 900 с, а также на стесненное сжатие таких же образцов до напряжения 127 МПа с выдержками в течение 60 с. Модели, идентифицированные по части одного цикла, удовлетворительно предсказывают изменение напряжения при выполнении дальнейшей программы, а также при изменении скорости деформации. Для охвата большего диапазона деформаций предложенная программа реализована для испытания растяжением колец. Установлено не очень хорошее описание обратной релаксации, однако использование для идентификации моделей комбинированных данных испытаний не помогает исправить этот дефект, для чего требуется исправлять принципиальные дефекты рассматриваемых обобщений нелинейно-упругих моделей с помощью линейного вязкоупругого оператора.

Ключевые слова: вязкоупругость, гиперупругость, слабосжимаемые материалы, эластомеры, идентификация, испытания.

Адамов Анатолий Арсангалеевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник; `e-mail:` adamov@icmm.ru; https://orcid.org/0000-0001-6800-337X; AuthorID: 2174

Келлер Илья Эрнстович, доктор физико-математических наук, заведующий лаборатории нелинейной механики деформируемого твердого тела; `e-mail:` kie@icmm.ru; `https://orcid.org/0000-0001-9914-8870`; AuthorID: 11695

для цитирования: *Адамов А. А., Келлер И. Э.* Базовые испытания и идентификация модели вязкоупругого поведения эластомеров при конечных деформациях // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 83–103. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.006. EDN: OXNFHJ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© Адамов А. А., Келлер И. Э. 2026

Поступила: 30.04.26; принята в печать: 30.05.26; опубликована: 29.10.26.

Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.006 *EDN: OXNFHJ*
Research Article

A. A. Adamov, I. E. Keller

BASIC TESTS AND IDENTIFICATION OF A VISCOELASTIC MODEL OF ELASTOMERS UNDER FINITE DEFORMATIONS

Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Perm, Russia

Abstract. A program of basic tests and a methodology for identifying a viscoelastic model of a slightly compressible hyperelastic material under finite deformations are proposed. The study focuses on elastomeric materials subjected to large strains at room temperature. Three model variants based on a linear hereditary operator of the generalized Maxwell body combined with a two-constant approximation of the deviatoric part of the strain energy potential are considered. The viscoelastic parameters are determined from free compression tests of cylindrical specimens with loading and relaxation stages. The bulk modulus is obtained from confined compression tests under cyclic loading. An identification algorithm reducing the problem to solving a system of linear algebraic equations is proposed. The approach is validated for oil-resistant rubber. The identified models adequately predict stress evolution under different loading programs and strain rates. Limitations in describing reverse relaxation are discussed.

Keywords: viscoelasticity, hyperelasticity, elastomers, finite deformations, identification, experiments

Anatoly A. Adamov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher; `e-mail:` adamov@icmm.ru; `https://orcid.org/0000-0001-6800-337X`; AuthorID: 2174

Ilya E. Keller, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Laboratory of Nonlinear Mechanics of Solids; `e-mail:` kie@icmm.ru;
`https://orcid.org/0000-0001-9914-8870`; AuthorID: 11695

to cite this article: *Adamov A. A., Keller I. E.* Basic Tests and Identification of a Viscoelastic Model of Elastomers under Finite Deformations // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 83–103. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.006

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Received: 30.04.26; *accepted: 30.05.26;* *published: 29.10.26.*

1. Введение. Слабосжимаемые вязкоупругие тела широко распространены в природе и технике. Биологические ткани человека, полимерные защитно-упрочняющие покрытия оптического волокна, эластомеры в качестве материала амортизаторов, герметизирующих элементов, автомобильных шин, связующего пороховых композиций и многие другие материалы, важные в своих приложениях, делают востребованным их теоретическое описание и экспериментальные методы для калибровки моделей. Подобные модели и методы в рамках данной работы будут рассматриваться применительно к высоконаполненным маслостойким резинам, используемым в конструкции погружных нефтяных насосов для герметизации, работающим в условиях однократного нагружения и конечных деформаций при сжимающих средних напряжениях и постоянной температуре, однако интересует механическое поведение материала на длительных интервалах времени, то есть его вязкоупругие свойства. Поэтому ограничимся обзором нескольких важных теоретических и методических работ в этом контексте, не расширяя поле условий воздействий на исследуемый материал.

Описание различных моделей гиперупругих материалов, в том числе слабосжимаемых, для конечных деформаций можно найти, например, в [1—3] либо в мануалах любого пакета программ механики деформируемого твердого тела [4—7]. Простейший способ обобщения таких соотношений на вязкоупругое поведение состоит в “конструировании” обобщенного тела Максвелла путем добавления к равновесной упругой части тензора напряжений диссипативного слагаемого, которое записывается в виде линейной интегральной свертки функции деформаций с функцией релаксации, которая обычно берется в виде отрезка ряда Прони. Первым идею рассматривать вязкоупругие соотношения для малых деформаций в таком виде, по-видимому, высказал Ю.Н. Работнов в 1948 году [8, 9]. Для конечных деформаций подобная свертка выглядит вполне естественной и вытекает из требований корректности модели (независимости напряжений от наложенного жесткого движения). По-видимому, в рамках конечных деформаций один из вариантов таких соотношений вязкоупругости впервые записал Я.Ч. Фанг [10]. В зарубежной литературе за соответствующей моделью утвердилось данное самим автором название “квазилинейная вязкоупругость” (QLV), не представляющееся нам удачным, поскольку вязкоупругий оператор, действующий на функцию меры деформаций, является как раз линейным. Дальнейшее развитие модели выполнялось J.S. Simo и G.A. Holzapfel [11—13], и этот вариант соотношений численно реализован в пакетах ANSYS [5], COMSOL [6], ABAQUS [7], и (в качестве примера) использовался для описания вязкоупругих свойств мозга при ударном нагружении в [14]. Подобные уравнения предлагались и в [15] одним из авторов настоящей работы. L.M. Yang с соавторами [16] предложили квазилинейные соотношения с зависимостью ядра релаксации от деформированного состояния. Если в их соотношениях этой зависимостью пренебречь, модель все равно отличается от предыдущей принятой гипотезой о разложении движения. В качестве примера данная модель использовалась в работах [17, 18].

В пакете LS-DYNA [4] реализована еще одна модель в рамках другого разложения движения, в котором ядро релаксации сворачивается с логарифмической мерой деформаций. Более сложные, “многоконстантные”, теории, основой которых выступали более сложные структурные (реологические) схемы, например, предлагались А.В. Шутовым [19] и А.Л. Свистковым [20], но мы не предполагаем здесь описывать свойства резины за рамками оговоренных выше условий нагружения.

Вязкоупругие свойства макроскопических образцов при конечных деформациях обычно определяются из испытаний на свободное растяжение образцов в виде лопатки или кольца, свободного сжатия, двухосного растяжения оболочки и стесненного сжатия [15]. Нелинейность отклика при конечных деформациях не позволяет обходиться лишь данными DMA. Еще одним важным вопросом является конструирование программы испытаний, как для определения пригодности модели для описания ею данных испытаний, так и для надежного определения ее констант и валидации. Практически в каждой из цитированных выше работ этот вопрос так или иначе решался.

Далее в работе приводится формулировка упругого потенциала слабосжимаемого материала для конечных деформаций, содержащего две константы в его сдвиговой части и одну – в объёмной. Выводятся соотношения, связывающие регистрируемые переменные в процессах свободного и стесненного сжатия в рамках соответствующей упругой модели. Приводятся формулировки трех обобщений рассматриваемого упругого закона с помощью линейного вязкоупругого оператора обобщенной модели Максвелла. Для каждой из моделей выводится система линейных алгебраических уравнений метода наименьших квадратов для определения вязкоупругих констант модели и предлагается алгоритм для определения оставшихся констант. Описывается реализация предложенной программы испытаний на свободное сжатие цилиндрических образцов маслостойкой резины по циклическим программам деформирования с повышающимся уровнем деформации и выдержками при двух значениях скорости деформации. Предложено и реализовано альтернативное испытание растяжением колец, допускающего больший диапазон деформаций. Также описывается реализация второго базового испытания Ï на стесненное сжатие по программе с циклами нагружения и разгрузки с постоянной скоростью деформации и выдержками. Подобная методика испытания и идентификации модели была реализована недавно двумя из соавторов настоящей работы для порошкообразного парафина [21]. Выполняется идентификация по данным испытаний констант всех рассмативаемых вязкоупругих обобщений моделей гиперупругого слабосжимаемого материала, реализованных в популярных пакетах прикладных программ.

2. Соотношения при свободном и стесненном сжатии образца гиперупругого слабосжимаемого материала. Потенциал нелинейно-упругого слабосжимаемого материала выбирается в следующем виде

$$W = \Phi + U, \Phi = \frac{\mu}{2}\left(\left(I_1 I_3^{-1/3} - 3\right) + b\left(I_1 I_3^{-1/3} - 3\right)^2\right), U = \frac{K}{2}\left(I_3^{1/2} - 1\right)^2, \quad (1)$$

где $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, $I_3 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2$ – первый и третий инварианты меры деформации Коши – Грина. Данная форма упругого потенциала использовалась в обобщении на вязкоупругое поведение в [15]; также она включена в семейство полиномиальных упругих потенциалов и используется в обобщениях на вязкоупругое поведение в пакетах программ LS-DYNA (MAT_077_H) [4], ANSYS [5], COMSOL [6] и ABAQUS [7] (в которых приняты обозначения $c_{10} = \mu/2$, $c_{20} = \mu b/2$).

Для записи определяющих уравнений применительно к испытаниям на одноосное растяжение и сжатие далее будут использоваться запись тензоров напряжений в ортонормированном базисе их главных осей, а также кратности удлинений линейных материальных элементов вдоль этих осей $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Главные компоненты упругого тензора напряжений Коши имеют вид [2, 3, 22]

$$\sigma_i^e = 2\lambda_i^2 I_3^{-1/2}\frac{\partial\Phi}{\partial I_1} + 2I_3^{1/2}\frac{\partial\Phi}{\partial I_3} + 2I_3^{1/2}\frac{\partial U}{\partial I_3}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Для (1) компоненты (2) с учетом выражений

$$\frac{\partial\Phi}{\partial I_1} = \frac{\mu}{2}\left(I_3^{-1/3} + b(I_1 I_3^{-1/3} - 3)I_3^{-1/3}\right),$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial I_3} = -\frac{\mu}{6}\left(I_1 I_3^{-4/3} + 2b(I_1 I_3^{-1/3} - 3)I_1 I_3^{-4/3}\right), \quad \frac{\partial U}{\partial I_3} = \frac{K}{2}\left(I_3^{1/2} - 1\right)I_3^{-1/2},$$

принимают вид

$$\sigma_3^e = \sigma_3^{es} + \sigma_{vol}, \qquad \sigma_3^{es} = \mu I_3^{-5/6}\left(\lambda_3^2 - \frac{1}{3}I_1\right)\left(1 + 2b(I_1 I_3^{-1/3} - 3)\right),$$
$$\sigma_{vol} = K\left(I_3^{1/2} - 1\right). \quad (3)$$

$$\sigma_{1,2}^e = \sigma_{1,2}^{es} + \sigma_{vol}, \quad \sigma_{1,2}^{es} = \mu I_3^{-5/6}\left(\lambda_{1,2}^2 - \frac{1}{3}I_1\right)\left(1 + 2b(I_1 I_3^{-1/3} - 3)\right),$$
$$\sigma_{vol} = K\left(I_3^{1/2} - 1\right). \quad (4)$$

Связывая в испытаниях на свободное или стесненное сжатие координату 3 с осью сжатия, примем обозначения

$$\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda_T, \quad \lambda_3 \equiv \lambda, \quad \sigma_1^e = \sigma_2^e \equiv \sigma_T^e, \quad \sigma_1^{es} = \sigma_2^{es} \equiv \sigma_T^{es},$$
$$\sigma_3^e \equiv \sigma^e, \quad \sigma_3^{es} \equiv \sigma^{es}. \quad (5)$$

В испытании на свободное сжатие

$$\sigma_T^e = 0; \quad (6)$$

при стесненном сжатии

$$\lambda_T = 1. \tag{7}$$

При свободном сжатии из (3), (4) следует

$$\sigma^e = \mu(\lambda^2 - \lambda_T^2) I_3^{-5/6} \left(1 + 2b(I_1 I_3^{-1/3} - 3)\right). \tag{8}$$

Для слабосжимаемого материала

$$I_3 = \lambda^2 \lambda_T^4 \approx 1 \tag{9}$$

и поэтому

$$\sigma^e = \mu \left(1 + 2b(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3)\right)(\lambda^2 - \lambda^{-1}). \tag{10}$$

Для рассматриваемых испытаний в (3), (4) можно перейти к главным значениям тензора номинальных напряжений

$$n_i^e = \lambda_i^{-1} \sigma_i^e, \quad \Sigma i, \tag{11}$$

и далее – к следующему выражению для осевой главной компоненты этого тензора

$$n^e = \mu \left(1 + 2b(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3)\right)(\lambda - \lambda^{-2}). \tag{12}$$

Эта компонента записывается испытательной машиной в протокол. Для обобщения гиперупругих соотношений на вязкоупругость обычно используется второй тензор Пиолы – Кирхгоффа, который определен в базисе отсчетной конфигурации и для которого существует одна объективная скорость, задаваемая оператором материальной производной. Главные компоненты этого тензора для рассматриваемых испытаний выражаются как

$$s_i^e = \sigma_i^e / \lambda_i^2, \quad \Sigma i, \tag{13}$$

и из (3), (4) для осевой главной компоненты следует

$$s^e = \mu \left(1 + 2b(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3)\right)(1 - \lambda^{-3}). \tag{14}$$

В терминах перемещения траверсы $\Delta l \geq 0$ при сжатии образца кратность удлинения выражается в виде $\lambda = 1 - \Delta l / l_0 = 1 - \varepsilon$ (l_0 Ï начальная высота цилиндра-образца, а $-\varepsilon < 0$ Ï линейная деформация сжатия). В выражениях (10), (12), (14) можно учесть более точное выражение, чем (9),

$$\lambda_T^2 \approx \lambda^{-1} - \mu / K \quad , \tag{15}$$

вытекающее из (4)-(6) при условии $\mu / K \ll 1$, характерном для слабосжимаемых материалов. В испытании резин на свободное сжатие $\mu / K \approx 0.001$, и в сравнении с $1/\lambda \approx 1 + \varepsilon$ при $\varepsilon < 0.3$ использование более точного выражения (13) при обработке эксперимента изменяет третью значащую цифру в выражении $\lambda^2 - \lambda_T^2$ в (8) и поэтому нецелесообразно.

При стесненном сжатии из (7) $I_3 = \lambda^2$, $I_1 = 2 + \lambda^2$, $I_3^{-5/6} = \lambda^{-5/3}$, поэтому (3) примет вид

$$\sigma = n = \frac{2\mu}{3} \lambda^{-5/3} (\lambda^2 - 1) \left(1 + 2b\left((2 + \lambda^2)\lambda^{-2/3} - 3\right)\right) + K(\lambda - 1). \tag{16}$$

В испытаниях на стесненное сжатие слабосжимаемых материалов линейная деформация ε обычно не превышает 0.05, а модуль объемного сжатия на три порядка превосходит линейный сдвиговой модуль, поэтому с точностью до третьей значащей цифры выражение (16) можно приближенно заменить на

$$\sigma = n = K(\lambda - 1). \tag{17}$$

3. Обобщения нелинейно-упругой модели с помощью линейного вязкоупругого оператора. Для обобщения гиперупругого поведения слабосжимаемого материала с учетом вязкоупругости сдвиговой составляющей напряжений вводится линейный оператор

$$R(f(t)) = \int\limits_0^t R(t-\tau)df(\tau), \tag{18}$$

где $R(t)$ – функция релаксации, представляемая в виде

$$R(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i \exp(-t/\tau_i) \tag{19}$$

где $\tau_i, \quad i = 1, ..., n$ Ï времена релаксации, а $r_i, \quad i = 1, ..., n$ Ï положительные константы.

Поведение объемной составляющей будет полагаться упругим, и для определения его упругого модуля служит испытание на стесненное сжатие и соотношение (1.17). Сдвиговые свойства рассматриваемых ниже вязкоупругих обобщений гиперупругого слабосжимаемого материала определяются из испытаний на свободное сжатие.

Рассматриваемые обобщения отражают существование равновесного и диссипативного составляющих тензора напряжений. В первом обобщении оператор релаксации (1), (2) действует на упругую сдвиговую часть второго тензора напряжений Пиолы – Кирхгоффа и записывается для рассматриваемых здесь процессов с сохранением ориентации главных осей в этих осях следующим образом

$$s_i(t) = s_i^e(t) + R(s_i^e(t)) = s_i^e(t) + \int\limits_0^t R(t-\tau)ds_i^{es}(\tau), \tag{20}$$

что приводит к выражению для осевой компоненты

$$s(t) = s^{es}(t) + R(s^{es}(t)) - \lambda^{-3}R(s_T^{es}(t)). \tag{21}$$

Деформированию однородного образца свободным сжатием с постоянной скоростью движения траверсы $l(t) = l_0 - v_0 t$ соответствует $\dot{\lambda} = -\dot{\varepsilon}_0 = -v_0/l_0$. Для

(1.12) с $b = 0$

$$n(t) = \mu(\lambda - \lambda^{-2}) + \mu\dot{\varepsilon}_0 \sum_{m=1}^{n} r_m \left(2\lambda \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_m}\right)\lambda^{-4}(\tau)d\tau + \right.$$
$$\left. + \lambda^{-2} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_m}\right)\lambda^{2}(\tau)d\tau \right), \quad \lambda(t) = 1 - \dot{\varepsilon}_0 t. \tag{22}$$

Следует заметить, что в (5) $r_i, \quad i = 1, ..., n$ — безразмерные константы. Соотношения вида (3) рассматривались многими авторами [10—15], и они реализованы в пакетах ANSYS [5], COMSOL [6] и ABAQUS [7]. В пакете ANSYS используются обозначения $c_{10} = \mu/(2\alpha_\infty)$, $c_{20} = \mu b/(2\alpha_\infty)$, $\alpha_i = \alpha_\infty r_i$, $i = 1, ..., n$, $\alpha_\infty = 1/(1 + \sum_{m=1}^{n} r_m)$. Можно показать, что значение секущего модуля $n/(\lambda - \lambda^{-2})$ при одноосном сжатии с конечной скоростью деформации приблизительно равно $\mu\left(1 + \sum_{m=1}^{n} r_m \frac{1-\exp(-t_0/\tau_m)}{t_0/\tau_m}\right)$, зависит лишь от времени нагружения и лежит в интервале между значениями равновесного μ и мгновенного модулей $\mu\left(1 + \sum_{m=1}^{n} r_m\right)$ вязкоупругого тела.

Во втором обобщении оператор релаксации (1), (2) действует на тензор деформации Коши - Грина и записывается для рассматриваемых здесь процессов с сохранением ориентации главных осей в этих осях следующим образом

$$s_i(t) = s_i^e(t) + R(\tfrac{1}{2}\lambda_i^2(t)) = s_i^e(t) + \tfrac{1}{2}\int_0^t R(t-\tau)d\lambda_i^2(\tau), \tag{23}$$

что приводит к выражению для осевой компоненты

$$s(t) = s^{es}(t) + \tfrac{1}{2}R(\lambda^2(t)) - \tfrac{1}{2}\lambda^{-3}R(\lambda^{-1}(t)). \tag{24}$$

Деформированию однородного образца свободным сжатием с постоянной скоростью движения траверсы соответствует выражение

$$n(t) = \mu\left(1 + 2b(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3)\right)(\lambda - \lambda^{-2}) +$$
$$+\dot{\varepsilon}_0 \sum_{m=1}^{n} r_m \left(\lambda \int_0^t \exp\left(-\tfrac{t-\tau}{\tau_m}\right)\lambda(\tau)d\tau + \tfrac{1}{2}\lambda^{-2}\int_0^t \exp\left(-\tfrac{t-\tau}{\tau_m}\right)\lambda^{-2}(\tau)d\tau \right), \quad \lambda(t) = 1 - \dot{\varepsilon}_0 t. \tag{25}$$

Данная модель является частным случаем квазилинейных вязкоупругих соотношений с $r_i(I_1, I_2) \equiv r_i, \quad i = 1, ..., n$, предложенных L.M. Yang с соавторами [16] и использованных в [17, 18]. В исходной формулировке она предлагалась для несжимаемого тела.

Во третьем обобщении оператор релаксации (1), (2) действует на логарифмический тензор деформации и записывается для рассматриваемых здесь процессов с сохранением ориентации главных осей в этих осях следующим образом

$$\sigma_i(t) = \sigma_i^e(t) + 2R(\ln\lambda(t)) = \sigma_i^e(t) + 2\int_0^t R(t-\tau)d\ln\lambda(\tau), \tag{26}$$

что приводит к выражению для осевой компоненты

$$\sigma(t) = \sigma^{es}(t) + 3R(\ln\lambda(t)). \tag{27}$$

Деформированию однородного образца свободным сжатием с постоянной скоростью движения траверсы соответствует выражение

$$\begin{gathered} n(t) = \mu\left(1 + 2b(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3)\right)(\lambda - \lambda^{-2}) + 3\dot{\varepsilon}_0\lambda \sum_{m=1}^{n} r_m \int_0^t \exp\left(-\tfrac{t-\tau}{\tau_m}\right)\lambda^{-1}(\tau)d\tau, \\ \lambda(t) = 1 - \dot{\varepsilon}_0 t. \end{gathered} \tag{28}$$

Эта модель реализована в пакете LS-DYNA для семейства материалов MAT_077_H, где используются обозначения $c_{10} = \mu/2,\ c_{20} = \mu b/2,\ G_i = r_i,\ i = 1, ..., n$ [4]. Следует отметить, что в двух последних моделях $r_i,\quad i = 1, ..., n$ Ï размерные константы. Для обеих значение секущего модуля $n/(\lambda - \lambda^{-2})$ при одноосном сжатии с конечной скоростью деформации приблизительно равно $\mu + \sum_{m=1}^{n} r_m \frac{1-\exp(-t_0/\tau_m)}{t_0/\tau_m}$, зависит лишь от времени нагружения и лежит в интервале между значениями равновесного μ и мгновенного модулей $\mu + \sum_{m=1}^{n} r_m$ вязкоупругого тела.

4. Определение констант моделей по данным испытаний. Пусть известны значения номинального напряжения $n(t)$ в испытании на свободное сжатие образца по программе $\dot{\varepsilon}(t) = \{\dot{\varepsilon}_0, t \le t_0; 0, t > t_0\}$ – нагружения с постоянной скоростью за время t_0 и релаксации в течение времени T. По этим данным оценивается равновесный модуль $\mu = -n_\infty/(\lambda_\infty - \lambda_\infty^{-2})$, где $n_\infty = n(t_0 + T)$ – значение номинального напряжения в конце периода релаксации, а $\lambda_\infty = 1 - \dot{\varepsilon}_0 t_0$. Для рассматриваемого процесса спектр времен релаксации также можно выбрать из интервала $0 \le \tau_i \le T,\ i = 1, ..., n$, из которых хотя бы одно должно быть $\tau_1 < t_0$. Тогда при известном равновесном модуле константы $r_i,\ i = 1, ..., n$ и b для любой из рассматриваемых моделей входят в нее линейно, поэтому минимизация квадратичной невязки экспериментальных и теоретических напряжений в точках $0 \le t_k \le T,\ k = 1, ..., K$ приведет к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^T & a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ w \end{Bmatrix}, \tag{29}$$

где $\mathbf{r}^T = \{r_1, r_2, ..., r_n\}$,

$$\begin{gathered} A_{mp} = \sum_{k=1}^{K} q_m^k q_p^k, \quad a_p = \sum_{k=1}^{K} q_0^k q_p^k, \quad a = \sum_{k=1}^{K} q_0^k q_0^k, \\ w_p = \sum_{k=1}^{K} \Delta_k q_p^k, \quad w = \sum_{k=1}^{K} \Delta_k q_0^k, \end{gathered} \tag{30}$$

а q_m^k, q_0^k и Δ_k – выражения, которые в качестве примера для третьей модели записываются как

$$\Delta_k = \frac{n_k}{\mu} + \left(\lambda_k - \lambda_k^{-2}\right), \quad q_0^k = -2\left(\lambda_k - \lambda_k^{-2}\right)\left(\lambda_k^2 + 2\lambda_k^{-1} - 3\right),$$

$$q_m^k = 3\lambda_k^{-1}\int\limits_0^{t_k} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_m}\right)\lambda^{-1}(\tau)\dot{\varepsilon}(\tau)d\tau, \quad k = 1, ..., K, \tag{31}$$

$$\lambda(t) = 1 - \int_0^t \dot{\varepsilon}(\tau)d\tau$$

В (31) в контексте данной работы для удобства принят положительный знак для сжимающих напряжений. Предлагаемая методика предполагает предварительный выбор спектра времен релаксации опытным путем. Необходимость изменения этого спектра возникает, если решение $r_i,\ i = 1, ..., n$ существенно (более чем на порядок) различаются между собой. В том случае, если спектр времен релаксации выбран неудачно либо если модель принципиально не может описать свойства материала, в этом решении могут оказаться отрицательные элементы, чего нельзя допускать.

Реализация метода наименьших квадратов для обработки испытания на свободное сжатие в рамках аппроксимации (3.17) элементарна и в подробностях не рассматривается.

5. Экспериментальная часть. Испытания на свободное сжатие проведены на составных цилиндрических образцах высоконаполненной маслостойкой резины диаметром 20.08 мм и высотой 24.81-25.53 мм на универсальной машине Zwick Z100 с использованием специального приспособления с шаровым шарниром и ограничителями деформации до величины 0.3 (рис. 1). Для устранения трения по торцам образцов использовались 2 слоя пленки ПТФЭ 50 мкм со смазкой ЦИАТИМ-201Ф. Одна из программ включала ступень деформирования со скоростью деформации $\dot{\varepsilon}_0$ =0.03 с$^{-1}$ до максимальной линейной осевой деформации ε_0 =0.3 с релаксацией напряжений при этой деформации в течении 900 с, полной разгрузкой и выдержкой при нулевой нагрузке в течение 900 с. Вторая программа включала три последовательных цикла деформирования со скоростью $\dot{\varepsilon}_0$ = 0.01 с$^{-1}$ до уровней ε_0 =0.1, 0.2, 0.3 и выдержками в течении 900 с при амплитудных значениях деформации и при разгрузках. На рис. 2 приведены программы изменения скорости деформации и деформации в этих программах, а на рис. 3 – результаты экспериментов в виде диаграмм на плоскости напряжение-деформация (обе переменные приняты с противоположным знаком) и напряжение-время.

Испытания на стесненное сжатие выполнялись на составных цилиндрических образцах диаметром 20.06 мм и высотой 17.84-18.54 мм, аналогичных испытанным на свободное сжатие. Использовано оригинальное приспособление для универсальной испытательной машины Zwick Z100 (рис. 4) — толстостенный полый цилиндр и плотно пригнанный входящий в него шток, установленное на

сферический центрирующий шарнир. Это приспособление позволяет получать надежные данные до величин осевых сжимающих напряжений 150 МПа. Программа состояла из трех повторяющихся циклов, состоящих из этапа нагружения до 127 МПа со скоростью деформации 0.001 $с^{-1}$, последующей выдержки в течение 60 с и разгрузки с той же скоростью. Результаты испытания двух образцов приведены на рис. 5 в виде диаграмм зависимости напряжения от линейной деформации. Диаграммы показывают ничтожную релаксацию, что позволяет считать объёмное изменение упругим. О малости неупругих релаксационных процессов говорит узость (малая площадь) петель гистерезиса.

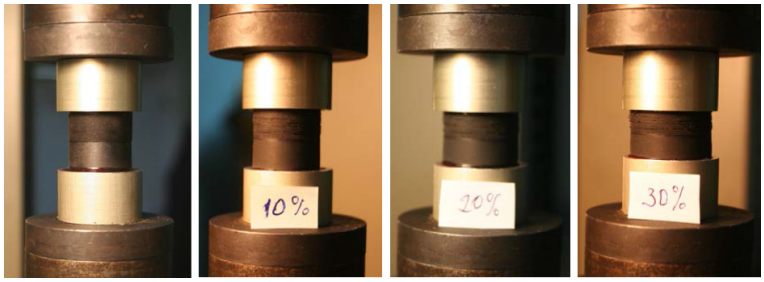
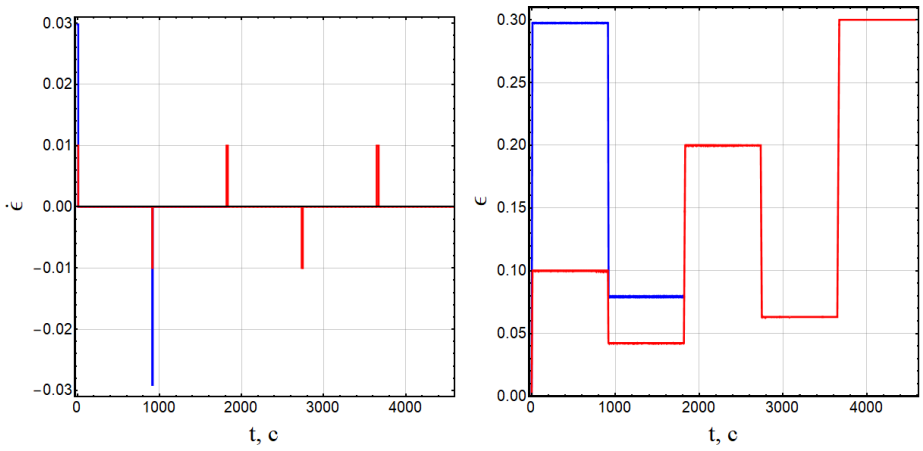


Рис. 1. Фото образца в испытании на свободное сжатие при линейной осевой деформации 0, 0.1, 0.2 и 0.3.



а) б)

Рис. 2. Программы деформирования в испытании свободным сжатием образцов резины

6. Обработка данных испытаний. Из данных испытаний на свободное сжатие (рис. 3) представляют интерес напряжения в конце каждого этапа

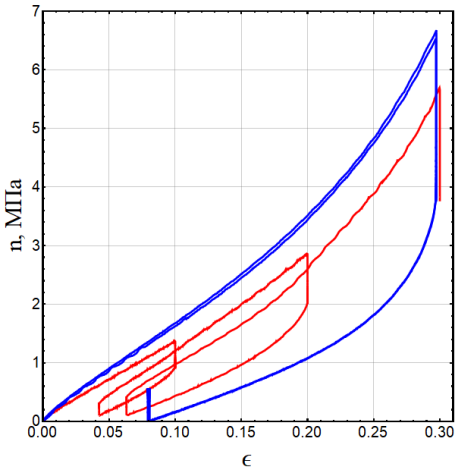


Рис. 3. Диаграммы зависимости номинального напряжения от линейной деформации при испытании на свободное сжатие по программам на рис. 2.

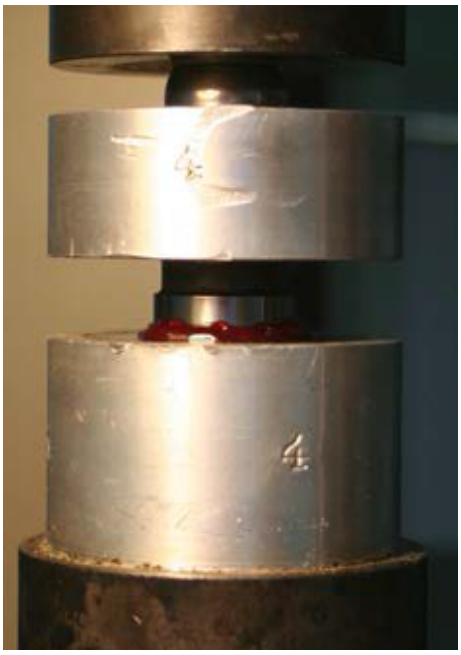


Рис. 4. Приспособление для испытаний на стесненное сжатие цилиндрических образцов.

прямой и обратной релаксации. Эти данные сведены в табл. 1. Значения напряжения в конце этапа релаксации при деформации 30% (кратность удлинения 0.7) различаются на 1%, хотя имеют разную историю деформирования (рис. 2).

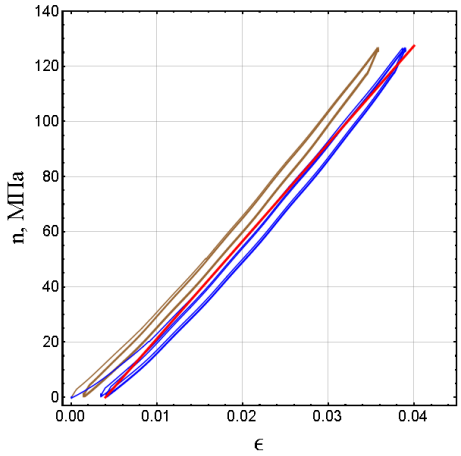


Рис. 5. Данные испытаний на стесненное сжатие и их аппроксимация линейным законом (18) с модулем $B = 3540$ МПа

Равновесный модуль сдвига, оцененный по этим напряжениям при уровнях деформации 10%, 20% и 30% не различаются более чем на 10%. Оценки равновесного модуля по напряжениям и деформациям в процессе обратной релаксации дают существенно более низкие значения.

Параметр	Релаксация				Обратная релаксация		
λ_∞	0.90	0.80	0.70	0.703	0.96	0.94	0.92
n_∞	0.93	2.01	3.78	3.83	0.31	0.41	0.54
$\mu = -n_\infty/(\lambda_\infty - \lambda_\infty^{-2})$	2.79	2.64	2.82	2.90	2.30	2.04	2.10

Таблица 1. Оценки равновесного модуля

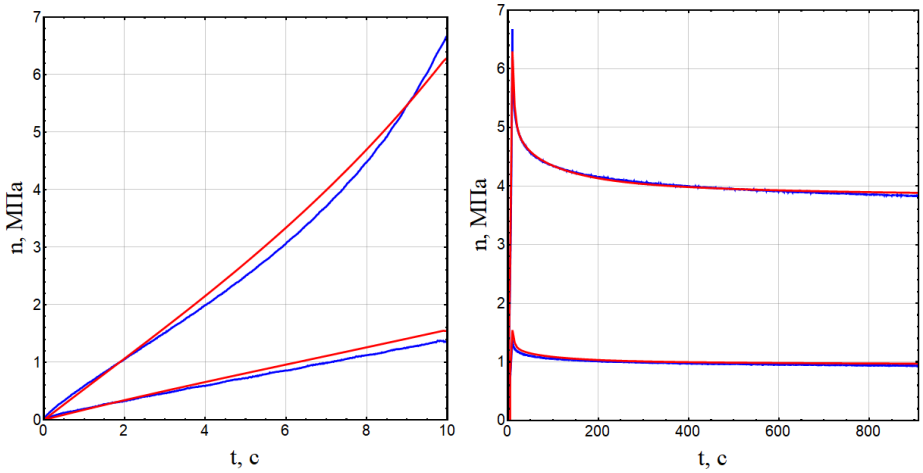
Для определения констант b, r_i, $i = 1, ..., n$ моделей был взят спектр времен релаксации τ_i ={4, 20, 100, 500}, оценка $\mu = 2.9$ МПа и экспериментальные данные этапов нагружения и релаксации первой программы. Система (3.1), (3.2) решалась для каждой из моделей; интегралы считались численно. В результате константа b не оказалась значимой для описания данных эксперимента. Значения констант вязкоупругости, определенные для моделей с $b = 0$ (вязкоупругих обобщений “неогука”) сведены в табл. 2.

На рис. 6 приведены расчеты этапов нагружения и релаксации, а на рис. 7 Ï полных программ испытаний. Расчеты согласно всем трем моделям практически совпадают, что объясняется линейностью вязкоупругого оператора (1), действующего на нелинейные меры деформации. Модели, идентифицированные по минимальному отрезку одной программы, в целом удовлетворительно воспроизводят эволюцию напряжения во времени для обеих, причем во второй программе участки нагружений и разгрузок выполнялись с втрое меньшей

Модель	Константы				
Simo	$a_1 = 0.434$	$a_2 = 0.038$	$a_3 = 0.076$	$a_4 = 0.032$	$c_{10} = 2.98$ МПа
Yang	$r_1 = 4.66$ МПа	$r_2 = 0.90$ МПа	$r_3 = 1.06$ МПа	$r_4 = 0.50$ МПа	$\mu = 2.90$ МПа
Log	$G_1 = 1.99$ МПа	$G_2 = 0.31$ МПа	$G_3 = 0.45$ МПа	$G_4 = 0.20$ МПа	$c_{10} = 1.45$ МПа

Таблица 2. Константы вязкоупругости маслостойкой резины

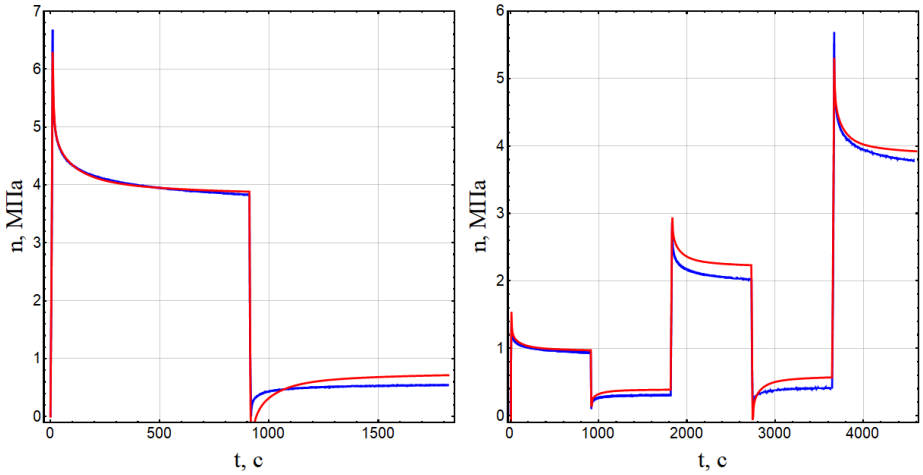
скоростью деформаций (рис. 2). Использование для идентификации моделей комбинированных данных испытаний не помогает лучше описать весь комплекс испытаний, для чего требуется исправлять принципиальные дефекты моделей. Расчеты испытаний также выполнены в пакетах ANSYS (первая модель, обозначенная как “Simo” в табл. 2), и LS-DYNA (третья модель, обозначенная как “Log” в табл. 2). Эти расчеты воспроизводят данные непосредственного интегрирования уравнений, что говорит о корректности реализации соответствующих моделей в этих пакетах.



а) б)

Рис. 6. Данные испытаний на свободное сжатие (нагружения с двумя различными скоростями и релаксация) и их аппроксимация рассматриваемыми моделями

По данным испытаний на стесненное сжатие было определено значение модуля объемного сжатия $B = 3540$ МПа, наилучшим образом описывающего данные испытаний в рамках (17) (расчет показан на рис. 4 красной линией). В том случае, когда в пакете программ задается не постоянный модуль объемного сжатия, а постоянный коэффициент Пуассона, последний может быть определен по формуле $\nu_{\dot{\varepsilon}} = (3B - E_{\dot{\varepsilon}})/6B$, где значение условного модуля Юнга



а) б)

Рис. 7. Данные испытаний на свободное сжатие по двум программам с нагружениями, разгрузками и выдержками и их аппроксимация рассматриваемыми моделями.

может быть оценено по секущему модулю кривой нагружения вязкоупругого материала с конечной скоростью. Для скоростей деформаций от 0 до 0.03 $с^{-1}$ можно оценить 8.7 МПа $< E_{\dot{\varepsilon}} <$ 13.8 МПа, и $0.4994 < \nu_{\dot{\varepsilon}} < 0.4996$.

7. Испытания на растяжение. Предел деформаций в испытании на свободное сжатие ограничен условием однородности образца, которое лимитируется трением. Для определения свойств эластомеров до значительно более высоких степеней деформации можно рассматривать испытания на растяжение образцов в виде лопатки либо кольца согласно ГОСТ 270-75. Для рассматриваемого выше материала делать это не было необходимости, но такие испытания были реализованы для резиновых колец, используемых в качестве уплотнений и направляющих подвижных элементов погружного насоса. Исследуемые кольца имели торообразную форму с внешним диаметром 63 мм и диаметром сечения 3 мм. Кольца располагались между стальными пальцами диаметром 7,82 мм, натягивались небольшой нагрузкой до выпрямления, затем на параллельные сегменты (рабочую часть образца) длиной 48,4 мм наносились метки, и далее относительно этого напряженно-деформированного состояния производилось нагружение со скоростью перемещения траверсы 3 мм/с (что соответствует скорости деформации 0,03 $с^{-1}$) в течение 10 с до линейной деформации $\varepsilon_0 = 0{,}3$. На рис. 8 приведены две последовательные конфигурации кольца при его испытании на растяжение между пальцами. Далее при этой деформации в течение 900 с происходила релаксация напряжений, разгрузка и возврат при нулевой нагрузке, как и в испытании на свободное сжатие.

На рис. 9 приведены экспериментальные кривые нагружения и релаксации при испытании растяжением колец и их аппроксимации рассматриваемыми моделями с соответствующими константами (табл. 2). В записанных выше соотношениях модели для одноосного сжатия использовалось соотношение для кратности удлинения

$$\lambda(t) = 1 + \dot{\varepsilon}_0 t \tag{32}$$

и приняты положительные знаки для номинального напряжения и линейной деформации. Здесь также потребовался лишь одноконстантный вариант сдвиговой части упругого закона, и так же не очень хорошо прогнозируется процесс обратной релаксации. В табл. 3 приведены сдвиговые вязкоупругие константы рассматриваемых моделей (спектр времен релаксации взят тот же). Данное испытание предполагается дополняющим испытания на свободное и стесненное сжатие.

Модель	Константы				
Simo	$a_1 = 0.535$	$a_2 = 0.010$	$a_3 = 0.112$	$a_4 = 0.038$	$c_{10} = 1.52$ МПа
Yang	$r_1 = 1.99$ МПа	$r_2 = 0.07$ МПа	$r_3 = 0.43$ МПа	$r_4 = 0.17$ МПа	$\mu = 0.93$ МПа
Log	$G_1 = 1.67$ МПа	$G_2 = 0.11$ МПа	$G_3 = 0.38$ МПа	$G_4 = 0.14$ МПа	$c_{10} = 0.47$ МПа

Таблица 3. Константы вязкоупругости материала колец

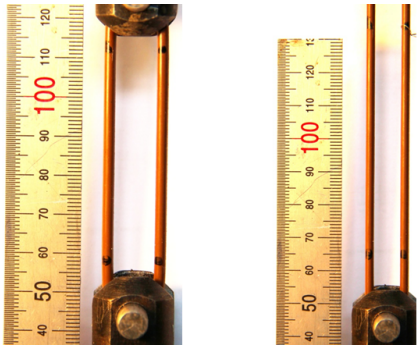
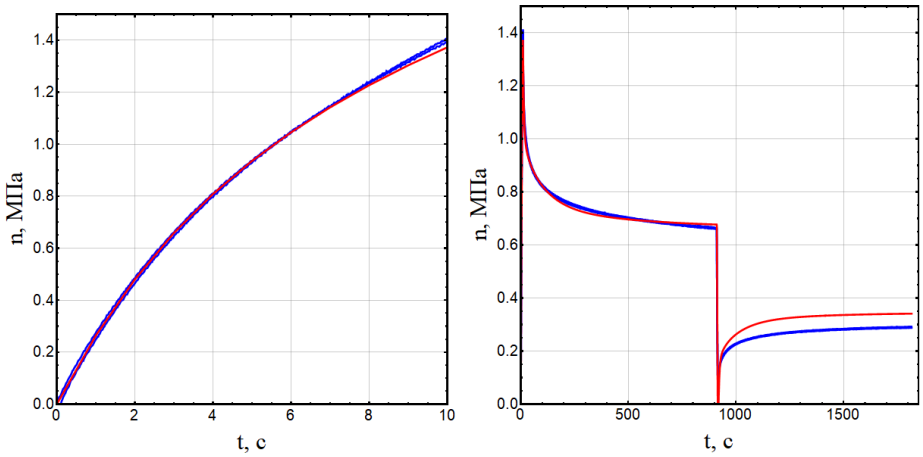


Рис. 8. Две последовательные конфигурации кольца при его испытании на растяжение между пальцами

8. Заключение. Предложена программа базовых испытаний и методика идентификации подходящих моделей для описания вязкоупругих свойств слабосжимаемых материалов при конечных деформациях, которая реализована для высоконаполненных маслостойких резин, применяемых в качестве



а) б)

Рис. 9. Данные испытаний на растяжение колец по программе с нагружением, разгрузкой и выдержками и их аппроксимация рассматриваемыми моделями.

элементов уплотнения погружных нефтяных насосов. Реализация испытаний осуществляется с помощью универсальной электромеханической испытательной машины с жестким приводом, снабженной экстензометром и требует минимальной оснастки. Методика определения констант моделей элементарна и прозрачна, если свойства материала в принципе описываются рассматриваемыми простейшими линейными наследственными обобщениями гиперупругих соотношений. С использованием методики по части данных испытаний определены константы трех моделей, в целом удовлетворительно описывающие полные программы испытаний. Данные модели реализованы во всех популярных пакетах программ механики деформируемого твердого тела. Для более корректного описания обратной ползучести необходимо рассматривать квазилинейные модели вязкоупругости [16, 19, 20], которые для поставленной задачи выглядят избыточными.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Исследование выполнено в рамках госзадания (номер госрегистрации 126020916885-8).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).
Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.
Funding. The study was carried out within the framework of a state assignment (state registration number 126020916885-8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bergström J. Mechanics of Solid Polymers: Theory and Computational Modeling. Elsevier, 2015. 509 p.
2. Адамов А. А. Сравнительный анализ двухконстантных обобщений закона Гука для изотропных упругих материалов при конечных деформациях // Прикладная механика и техническая физика. 2001. Т. 42, № 5. С. 183–192.
3. Роговой А. А. Формализованный подход к построению моделей механики деформируемого твердого тела. Часть 2. Упругие и термо-упруго-неупругие процессы при конечных деформациях. Москва, Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2023. 318 с.
4. LS-DYNA Theory Manual. ANSYS Inc., 2024. 902 p.
5. ANSYS/R1 Theory Reference. ANSYS Inc., 2024. 986 p.
6. COMSOL Multiphysics User Guide. COMSOL, 2012. 1292 p.
7. ABAQUS Analysis User's Guide. Vol. III: Materials. Dassault Systems, 2013. 697 p.
8. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последействием // ПММ. 1948. Т. 12, № 1. С. 53–62.
9. Хохлов А. В. Свойства семейства диаграмм деформирования, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для реономных материалов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2019. № 2. С. 29–47.
10. Фанг Я. Ч. Математические модели зависимости напряжение-деформация для мягких тканей // Механика полимеров. 1975. № 5. С. 850–867.
11. Simo J. C. On a Fully Three-Dimensional Finite-Strain Viscoelastic Damage Model: Formulation and Computational Aspects // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1987. Vol. 60. P. 153–173.
12. Simo J. C., Hughes T. J. R. Computational Inelasticity. New York: Springer, 1998. 392 p.
13. Holzapfel G. A. On Large Strain Viscoelasticity: Continuum Formulation and Finite Element Applications to Elastomeric Structures // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1996. Vol. 39. P. 3903–3926.
14. Laksari K., Shafieian M., Darvish K. Constitutive Model for Brain Tissue under Finite Compression // Journal of Biomechanics. 2012. Vol. 45, no. 4. P. 642–646.
15. Адамов А. А. Исследование и моделирование нестационарного термомеханического поведения вязкоупругих резиноподобных материалов и элементов конструкций при конечных деформациях: дис. ... канд. / Адамов А. А. Пермь, 2004. С. 303. Дисс. ... д-ра физ.-мат. н.
16. Yang L. M., Shim V. P. W., Lim C. T. A Visco-Hyperelastic Approach to Modelling the Constitutive Behaviour of Rubber // International Journal of Impact Engineering. 2000. Vol. 24. P. 545–560.

17. Belyakova T. A., Zezin Y. P., Lomakin E. V. Thermovisco-Hyperelastic Behavior of Elastomeric Materials Modified by Filler Nanoparticles // Mechanics of Solids. 2010. Vol. 45, no. 4. P. 546–561.
18. Wang X., Ji H., Li X., et al. Static and Dynamic Compressive and Tensile Response of Highly Stretchable Polyurea // International Journal of Impact Engineering. 2022. Vol. 166. P. 104250. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2022.104250.
19. Ghobadi E., Shutov A., Steeb H. Parameter Identification and Validation of Shape-Memory Polymers within the Framework of Finite Strain Viscoelasticity // Materials. 2021. Vol. 14. P. 2049. DOI: 10.3390/ma14082049.
20. Mokhireva K. A., Svistkov A. L., Shadrin V. V. Investigation of the Strain Rate and Stretch Level Dependent Behavior of Elastomeric Nanocomposites in Complex Uniaxial Tests under Finite Strains // Mechanics of Materials. 2024. Vol. 199. P. 105177. DOI: 10.1016/j.mechmat.2024.105177.
21. Adamov A. A., Keller I. E., Zhilin S. G., Bogdanova N. A. Identification of the Cap Model of Elastoplasticity of Non-Compact Media Under Compressive Mean Stress // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 4. DOI: 10.1134/S002565442460291X.
22. Адамов А. А., Матвеенко В. П., Труфанов Н. А., Шардаков И. Н. Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 с.

REFERENCES

1. Bergström J. Mechanics of Solid Polymers: Theory and Computational Modeling. Elsevier, 2015. 509 p.
2. Adamov A. A. Comparative Analysis of Two-Constant Generalizations of Hooke's Law for Isotropic Elastic Materials under Finite Deformations // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2001. Vol. 42, no. 5. P. 183–192. (in Russian).
3. Rogovoi A. A. A Formalized Approach to Constructing Models of Deformable Solid Mechanics. Part 2. Elastic and Thermo-Elastic-Inelastic Processes under Finite Deformations. Moscow, Izhevsk: Institute of Computer Science, 2023. 318 p. (in Russian).
4. LS-DYNA Theory Manual. ANSYS Inc., 2024. 902 p.
5. ANSYS/R1 Theory Reference. ANSYS Inc., 2024. 986 p.
6. COMSOL Multiphysics User Guide. COMSOL, 2012. 1292 p.
7. ABAQUS Analysis User's Guide. Vol. III: Materials. Dassault Systems, 2013. 697 p.
8. Rabotnov Y. N. Equilibrium of an Elastic Medium with Aftereffect // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1948. Vol. 12, no. 1. P. 53–62. (in Russian).
9. Khokhlov A. V. Properties of a Family of Stress–Strain Curves Generated by Rabotnov's Nonlinear Relation for Rheonomic Materials // Mechanics of Solids. 2019. No. 2. P. 29–47. (in Russian).
10. Fang Y. C. Mathematical Stress–Strain Models for Soft Tissues // Mechanics of Polymers. 1975. No. 5. P. 850–867. (in Russian).
11. Simo J. C. On a Fully Three-Dimensional Finite-Strain Viscoelastic Damage Model: Formulation and Computational Aspects // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1987. Vol. 60. P. 153–173.

12. Simo J. C., Hughes T. J. R. Computational Inelasticity. New York: Springer, 1998. 392 p.
13. Holzapfel G. A. On Large Strain Viscoelasticity: Continuum Formulation and Finite Element Applications to Elastomeric Structures // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1996. Vol. 39. P. 3903–3926.
14. Laksari K., Shafieian M., Darvish K. Constitutive Model for Brain Tissue under Finite Compression // Journal of Biomechanics. 2012. Vol. 45, no. 4. P. 642–646.
15. Adamov A. A. Investigation and Modeling of the Unsteady Thermomechanical Behavior of Viscoelastic Rubber-Like Materials and Structural Elements under Finite Deformations: PhD thesis / Adamov A. A. Perm, 2004. P. 303. Doctoral Dissertation in Physical and Mathematical Sciences; (in Russian).
16. Yang L. M., Shim V. P. W., Lim C. T. A Visco-Hyperelastic Approach to Modelling the Constitutive Behaviour of Rubber // International Journal of Impact Engineering. 2000. Vol. 24. P. 545–560.
17. Belyakova T. A., Zezin Y. P., Lomakin E. V. Thermovisco-Hyperelastic Behavior of Elastomeric Materials Modified by Filler Nanoparticles // Mechanics of Solids. 2010. Vol. 45, no. 4. P. 546–561.
18. Wang X., Ji H., Li X., et al. Static and Dynamic Compressive and Tensile Response of Highly Stretchable Polyurea // International Journal of Impact Engineering. 2022. Vol. 166. P. 104250. DOI: `10.1016/j.ijimpeng.2022.104250`.
19. Ghobadi E., Shutov A., Steeb H. Parameter Identification and Validation of Shape-Memory Polymers within the Framework of Finite Strain Viscoelasticity // Materials. 2021. Vol. 14. P. 2049. DOI: `10.3390/ma14082049`.
20. Mokhireva K. A., Svistkov A. L., Shadrin V. V. Investigation of the Strain Rate and Stretch Level Dependent Behavior of Elastomeric Nanocomposites in Complex Uniaxial Tests under Finite Strains // Mechanics of Materials. 2024. Vol. 199. P. 105177. DOI: `10.1016/j.mechmat.2024.105177`.
21. Adamov A. A., Keller I. E., Zhilin S. G., Bogdanova N. A. Identification of the Cap Model of Elastoplasticity of Non-Compact Media Under Compressive Mean Stress // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 4. DOI: `10.1134/S002565442460291X`.
22. Adamov A. A., Matveenko V. P., Trufanov N. A., Shardakov I. N. Methods of Applied Viscoelasticity. Yekaterinburg: Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 2003. 411 p. (in Russian).

Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.007 *EDN: NYRJLR*
Научная статья *УДК: 539.375*

И. М. Лавит, О. С. Перова

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИНЫ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТРЕЩИНЫ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОЛОСЕ

Тульский государственный университет, Тула, Россия

Аннотация. Рассматривается плоская задача линейной механики разрушения для полосы с прямоугольным поперечным сечением, ослабленной центральной прямолинейной трещиной. В дополнение к коэффициенту интенсивности напряжений определяется Т-напряжение, имеющее конечное и отличное от нуля значение в кончике трещины. Решение задачи ищется методом конечных элементов. Необходимость вычисления Т-напряжения предъявляет повышенные требования к точности решения задачи. С этой целью в дополнение к обычным функциям формы конечных элементов вводятся координатные функции, моделирующие сингулярность поля напряжений в кончике трещины. Для согласования с главными граничными условиями в качестве таких функций используется аналитическое решение этой же задачи для бесконечной области. Результаты расчетов сопоставляются с данными других исследователей.

Ключевые слова: разрушение, трещина, метод конечных элементов, метод Ритца—Галеркина, Т-напряжение

Лавит Игорь Михайлович, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры вычислительной механики и математики; `e-mail:` IgorLavit@yandex.ru; https://orcid.org/0000-0002-8683-5943; AuthorID:14837

Перова Ольга Сергеевна, аспирант 2-го года обучения кафедры вычислительной механики и математики; `e-mail:` o.s.perova@yandex.ru; https://orcid.org/009-0000-7489-9256; AuthorID:1272696

для цитирования: *Лавит И. М., Перова О. С.* Напряженное состояние окрестности вершины центральной трещины в прямоугольной полосе // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 104–118. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.007. EDN: NYRJLR

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© Лавит И. М., Перова О. С. 2026

Поступила: 22.12.25; принята в печать: 10.06.26; опубликована: 29.10.26.

Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.007 *EDN: NYRJLR*
Research Article

I. M. Lavit, O. S. Perova

THE STRESS STATE OF THE VICINITY OF THE CENTRAL CRACK IN A RECTANGULAR STRIP

Tula State University, Tula, Russia

Abstract. A plane problem of linear fracture mechanics is considered for a strip with a rectangular cross-section, weakened by a central straight crack. In addition to the stress intensity factor, the T-stress is determined, which has a finite and non-zero value at the crack tip. The problem is solved using the finite element method. The need to calculate the T-stress imposes higher requirements on the accuracy of the problem solution. To achieve this, coordinate functions are introduced in addition to the usual shape functions of the finite elements, which model the singularity of the stress field at the crack tip. To agree with the main boundary conditions, an analytical solution of the same problem for an infinite domain is used as such functions. The results of calculations are compared with data from other researchers.

Keywords: fracture, crack, finite element method, Ritz—Galerkin method, T-stress.

Igor M. Lavit, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor of the Department of Computational Mechanics and Mathematics; `e-mail:` IgorLavit@yandex.ru; `https://orcid.org/0000-0002-8683-5943`; AuthorID:14837

Olga S. Perova, 2nd-year postgraduate student at the Department of Computational Mechanics and Mathematics; `e-mail:` o.s.perova@yandex.ru; `https://orcid.org/009-0000-7489-9256`; AuthorID: 1272696

to cite this article: *Lavit I. M., Perova O. S.* The stress state of the vicinity of the central crack in a rectangular strip // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 104–118. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.007

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Received: 22.12.25; *accepted: 10.06.26;* *published: 29.10.26.*

Введение. В последние годы к оценке роста трещины существенно расширяются: наряду с коэффициентами интенсивности напряжений в расчет включают несингулярные компоненты тензора напряжений, действующие в зоне вблизи вершины (кончика) трещины [1, 2].Для определения как этих составляющих, так и самих коэффициентов интенсивности применяют разнообразные численные методы [1]. Среди них особое место занимает метод конечных элементов – он считается наиболее универсальным, простым в реализации и надежным [3, 4]. Однако у стандартных конечных элементов есть существенный недостаток: их функции формы представляют собой многочлены сравнительно низкого порядка. Из—за этого аппроксимация полей напряжений в окрестности кончика трещины—то есть в особой точке—отличается невысокой точностью. Чтобы корректно воспроизвести асимптотическое поведение поля напряжений, требуется модификация метода конечных элементов. Одна из таких модификаций представлена ниже. Ее суть заключается во включении в описание каждого конечного элемента специальных функций, отражающих сингулярное поведение поля. При этом используемые для моделирования сингулярности функции идентичны для всех элементов—это позволяет сохранить непрерывность поля перемещений на границах между элементами. Важное достоинство подхода—отсутствие жестких требований к типу конечных элементов: допустимо применять элементы произвольной формы. С концептуальной точки зрения данный метод представляет собой синтез классического метода конечных элементов и классического метода Ритца—Галеркина [4]. Координатные функции включают в себя как функции с компактными носителями—конечными элементами, так и функции, имеющие единое аналитическое выражение во всей области.

Метод применим к широкому спектру квазистатических задач механики разрушения – в том числе в задачам с криволинейными трещинами. Для оценки точности метода и анализа его потенциала необходимо обратиться к базовым, фундаментальным задачам. Ниже приведено решение одной из таких задач: рассматривается прямоугольная область (поперечное сечение полосы), находящаяся под действием растягивающих нагрузок и ослабленная центральной трещиной.

1. Постановка задачи. На рисунке 1 показана расчетная схема прямоугольной области, содержащей центральную трещину. Принято, что кромки трещины не испытывают внешней нагрузки. Поскольку и сечение, и прикладываемая нагрузка симметричны относительно оси абсцисс, рассматриваемая трещина классифицируется как трещина нормального разрыва [5].

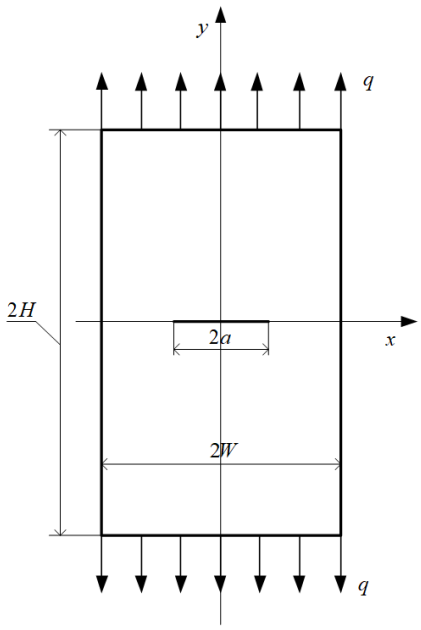


Рис. 1. Прямоугольная область с центральной трещиной

Математическая модель основана на известных соотношениях теории упругости, записываемых как [6]:

$$\begin{aligned} &\partial_m \sigma_{km} = 0; \quad \varepsilon_{km} = (\partial_k u_m + \partial_m u_k)/2; \\ &\sigma_{km} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\nu \varepsilon_{ii} \delta_{km} + (1-2\nu)\, \varepsilon_{km}\right]; \\ &i, k, m = 1, 2; \quad \partial_k = \partial/\partial x_k, \end{aligned} \tag{1}$$

где $u_k(x_m)$—поле перемещений, ε_{km}—тензор напряжений, E—модуль Юнга, ν—коэффициент Пуассона, δ_{km}—символ Кронекера. Далее будем также использовать следующие обозначения:

$$x = x_1; \quad y = x_2; \quad u = u_1; \quad v = u_2 \tag{2}$$

Решение уравнения равновесия (первое уравнение системы (1)) должно удовлетворять граничным условиям. Граничные условия могут быть либо главными (кинематическими), либо естественными (статическими) [3].

Пусть r, θ—полярные координаты точки:

$$x = r\cos\theta; \quad y = r\sin\theta \tag{3}$$

В окрестности кончика трещины ($r \to 0$) напряжения представляются в виде:

$$\sigma_{km} = \sigma_{km}^{(0)} + \sigma_{km}^{(1)} + O\left(\sqrt{r}\right) \tag{4}$$

где $\sigma_{km}^{(0)}$—сингулярные составляющие тензора напряжений, $\sigma_{km}^{(1)}$—несингулярные составляющие, отличные от нуля в кончике трещины. Напряжения $\sigma_{km}^{(0)}$ и соответствующие им деформации и перемещения записываются в виде [5]:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{km}^{(0)} = K_I \sigma_{km}^*; \quad u_k^{(0)} = K_I u_k^*; \quad \varepsilon_{km}^{(0)} = K_I \varepsilon_{km}^*;\\
&\sigma_{11}^* = \sigma_{xx}^* = \frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2\pi r}}\left[1 - \sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)\right];\\
&\sigma_{12}^* = \sigma_{xy}^* = \frac{\cos(\theta/2)\sin(\theta/2)\cos(3\theta/2)}{\sqrt{2\pi r}};\\
&\sigma_{22}^* = \sigma_{yy}^* = \frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2\pi r}}\left[1 + \sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)\right];\\
&\varepsilon_{11}^* = \frac{(1+\nu)}{E}\left[(1-\nu)\sigma_{11}^* - \nu\sigma_{22}^*\right]; \quad \varepsilon_{22}^* = \frac{(1+\nu)}{E}\left[(1-\nu)\sigma_{22}^* - \nu\sigma_{11}^*\right];\\
&\varepsilon_{12}^* = \frac{(1+\nu)}{E}\sigma_{12}^*; \quad u_1^* = u^* = \frac{(1+\nu)}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\,(\kappa - \cos\theta)\cos(\theta/2);\\
&u_2^* = v^* = \frac{(1+\nu)}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\,(\kappa - \cos\theta)\sin(\theta/2)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где для плоской деформации $\kappa = 3-4\nu$. Вследствие непрерывности напряжений $\sigma_{km}^{(1)}$ получается:

$$\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{22}^{(1)} = 0; \quad \sigma_{11}^{(1)} = T \tag{6}$$

где величина T, называемая T-напряжением [1, 2], определяется в процессе решения задачи. Для оценки несингулярных напряжений в кончике трещины Ливерс и Радон [7] предложили безразмерный параметр B, названный ими двухосевым отношением:

$$B = T\sqrt{\pi a}/K_I \tag{7}$$

Таким образом, целью решения задачи является определение K_I и B.

2. Метод решения задачи. Решение задачи ищется методом конечных элементов. Оно получается из принципа виртуальных работ [6]:

$$\int\limits_S \sigma_{km}\delta\varepsilon_{km}dS = \int\limits_L p_k\delta u_k dL \tag{8}$$

где S—площадь рассматриваемой области, ограниченной контуром L, к которому приложена распределенная нагрузка p_k; δ—символ вариации. Уравнение (8) эквивалентно уравнению равновесия (1) и естественным граничным условиям. Решение уравнения (8) разыскивается в классе функций, удовлетворяющих главным граничным условиям. При этом вариации перемещений на участках граничного контура, где заданы главные граничные условия, равны нулю.

В ходе решения задачи применяли изопараметрические конечные элементы первого порядка. В глобальной системе координат (x, y) такие элементы, как правило, имеют форму произвольных выпуклых четырехугольников [3].Однако в рамках данной задачи, где граничный контур сформирован отрезками прямых, ориентированных параллельно координатным осям, все элементы принимают прямоугольную форму. В локальной системе координат эти элементы идентичны друг другу (рис. 2).

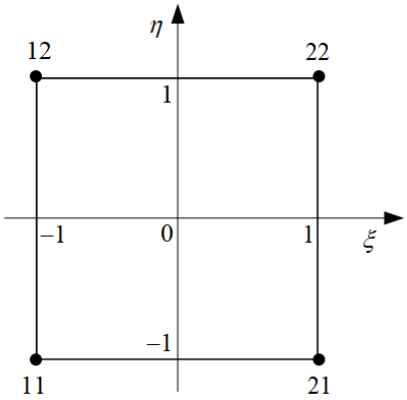


Рис. 2. Конечный элемент в локальных координатах—квадрат. Узлы имеют двойную нумерацию

Рассмотрим интегрирование в уравнении (8) по одному элементу. Глобальные координаты точек элемента определяются формулами:

$$x = L_i(\xi)\, L_j(\eta)\, X_{ij}; \quad y = L_i(\xi)\, L_j(\eta)\, Y_{ij};$$
$$i, j = 1,\, 2; \quad \xi,\, \eta \in [-1,\, 1] \tag{9}$$

где X_{ij}, Y_{ij}—известные глобальные координаты узла с номером i, j, $L_I(\zeta)$—интерполяционные полиномы Лагранжа, которые в данном случае имеют вид:

$$L_1(\zeta) = 0.5\,(1-\zeta)\,; \quad L_2(\zeta) = 0.5\,(1+\zeta)\,; \quad \zeta \in [-1;\, 1] \tag{10}$$

Для перемещений точек элемента используются те же функции формы, что и для координат. Но для точного моделирования асимптотик перемещений и напряжений к ним добавляются составляющие, определенные равенствами (5). Таким образом, получаем:

$$u = L_i(\xi)\, L_j(\eta)\, U_{ij} + K_{\mathrm{I}} u^*; \quad v = L_i(\xi)\, L_j(\eta)\, V_{ij} + K_{\mathrm{I}} v^* \tag{11}$$

Вторые слагаемые добавляются в выражения перемещений во все конечные элементы. За счет этого обеспечивается межэлементная непрерывность поля перемещений. Конечно, теперь величины U_{ij}, V_{ij} не являются узловыми перемещениями. Это просто неизвестные коэффициенты при координатных функциях.

К ним добавляется еще и коэффициент K_I. Приведенных соотношений достаточно, чтобы выполнить интегрирование уравнения (8) по элементу. Интеграл от левой части получается в виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\Big\{\Big[\Big((1-\nu)\,c^{(1)}_{ijmn}+0.5\,(1-2\nu)\,c^{(2)}_{ijmn}\Big)U_{mn}+\\
&+\Big(\nu c^{(3)}_{ijmn}+0.5\,(1-2\nu)\,c^{(3)}_{mnij}\Big)V_{mn}\Big]\,\delta U_{ij}+\\
&+\Big[\Big(\nu c^{(3)}_{mnij}+0.5\,(1-2\nu)\,c^{(3)}_{ijmn}\Big)U_{mn}+\\
&+\Big((1-\nu)\,c^{(2)}_{ijmn}+0.5\,(1-2\nu)\,c^{(1)}_{ijmn}\Big)V_{mn}\Big]\,\delta V_{ij}\Big\}+\\
&+\Big(e^{(1)}_{ij11}+e^{(2)}_{ij12}\Big)K_{\mathrm{I}}\delta U_{ij}+\Big(e^{(2)}_{ij22}+e^{(1)}_{ij12}\Big)K_{\mathrm{I}}\delta V_{ij}+\\
&+\Big[\Big(e^{(1)}_{mn11}+e^{(2)}_{mn12}\Big)U_{mn}+\Big(e^{(2)}_{mn22}+e^{(1)}_{mn12}\Big)V_{mn}\Big]\,\delta K_{\mathrm{I}}+gK_{\mathrm{I}}\delta K_{\mathrm{I}}
\end{aligned}\tag{12}$$

где обозначено:

$$\begin{aligned}
&c^{(1)}_{ijmn}=\int\limits_S \Phi_{ij}\Phi_{mn}dS;\quad c^{(2)}_{ijmn}=\int\limits_S F_{ij}F_{mn}dS;\quad c^{(3)}_{ijmn}=\int\limits_S \Phi_{ij}F_{mn}dS;\\
&e^{(1)}_{ijmn}=\int\limits_S \Phi_{ij}\sigma^*_{mn}dS;\quad e^{(2)}_{ijmn}=\int\limits_S F_{ij}\sigma^*_{mn}dS;\\
&g=\frac{(1+\nu)}{E}\int\limits_S\left[(1-\nu)\,\sigma^*_{mm}\sigma^*_{mm}-2\nu\sigma^*_{11}\sigma^*_{22}+2(\sigma^*_{12})^2\right]dS
\end{aligned}\tag{13}$$

Здесь S—площадь одного элемента. Интегрирование и вычисление подынтегральных функций проводится в локальных координатах по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_S f\,dS=\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} f\,|J|\,d\xi d\eta;\quad J=\det\mathbf{J};\\
&\mathbf{J}=\begin{pmatrix}\partial_\xi x & \partial_\eta x\\ \partial_\xi y & \partial_\eta y\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}\partial_x\xi & \partial_y\xi\\ \partial_x\eta & \partial_y\eta\end{pmatrix}=\mathbf{J}^{-1};\\
&\Phi_{ij}(\xi,\eta)=0.5\left[(-1)^iL_j(\eta)\,\partial_x\xi+(-1)^jL_i(\xi)\,\partial_x\eta\right];\\
&F_{ij}(\xi,\eta)=0.5\left[(-1)^iL_j(\eta)\,\partial_y\xi+(-1)^jL_i(\xi)\,\partial_y\eta\right]
\end{aligned}\tag{14}$$

где обозначено: $\partial_\alpha = \partial/\partial\alpha$. Суммирование вкладов всех конечных элементов и переход к глобальной нумерации переменных приводит левую часть уравнения (8) к виду:

$$\begin{aligned} &\delta\mathbf{Z}^T\mathbf{A}\mathbf{Z}; \quad \mathbf{Z} = [z_m]; \quad \mathbf{A} = [a_{km}]; \quad k,\ m = 1,\dots N+1; \\ &N = 2M; \quad z_{N+1} = K_I \end{aligned} \tag{15}$$

где $\mathbf{Z}$—матрица-столбец искомых неизвестных, $\mathbf{A}$—глобальная матрица жесткости, M—число узлов конечноэлементной сетки, индекс T обозначает транспонирование. Матрица $\mathbf{A}$ симметрична и положительно определена. Если бы не было последних строки и столбца, она была бы ленточной.

Определим вклад отдельного конечного элемента в правую часть уравнения (8). Следует учитывать, что значимый (ненулевой) вклад формируют лишь те элементы, чьи стороны располагаются на участке граничного контура с приложенной нагрузкой. В результате получаем:

$$\begin{aligned} &\int\limits_L p_k\delta u_k dL = \chi_{ij}^{(1)}\delta U_{ij} + \chi_{ij}^{(2)}\delta V_{ij} + \psi\delta K_{\mathrm{I}} \\ &\chi_{ij}^{(1)} = \int\limits_L p_1 L_i(\xi)\, L_j(\eta)\, dL; \quad \chi_{ij}^{(2)} = \int\limits_L p_2 L_i(\xi)\, L_j(\eta)\, dL; \\ &\psi = \int\limits_L (p_1 u^* + p_2 v^*)\, dL; \quad dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \end{aligned} \tag{16}$$

Интегрирование проводится вдоль какой-либо стороны элемента. Пусть, например, это сторона $\eta = 1$. Интегралы (16) записываются в виде:

$$\begin{aligned} &\chi_{i1}^{(1)} = 0; \quad \chi_{i1}^{(2)} = 0; \quad \chi_{i2}^{(1)} = \omega\int\limits_{-1}^{1} p_1 L_i(\xi)\, d\xi; \quad \chi_{i2}^{(2)} = \omega\int\limits_{-1}^{1} p_2 L_i(\xi)\, d\xi; \\ &\psi = \omega\int\limits_{-1}^{1} (p_1 u^* + p_2 v^*)\, d\xi; \quad \omega = 0.5\sqrt{(X_{22} - X_{12})^2 + (Y_{22} - Y_{12})^2} \end{aligned} \tag{17}$$

В результате суммирования по элементам и переходу к глобальной нумерации получается матрица—столбец свободных членов $\mathbf{Q} = [q_m]$, $m = 1,\dots N+1$. Уравнение (8) принимает вид:

$$\delta\mathbf{Z}^T\mathbf{A}\mathbf{Z} = \delta\mathbf{Z}^T\mathbf{Q} \tag{18}$$

Важно принять во внимание главные граничные условия—их требуется обеспечить в точках коллокации. В рассматриваемой задаче такими точками выступают узлы конечноэлементной сетки, расположенные на тех участках граничного контура, где заданы главные граничные условия. Согласно подходу, описанному в работе [3], удовлетворение этих условий осуществляется уже на этапе после построения разрешающей системы линейных алгебраических уравнений. Поэтому будем считать все вариации $\delta\mathbf{Z}$ произвольными, но зато добавим к известным активным силам $\mathbf{Q}$ неизвестные силы реакции связей $\mathbf{R} = [r_m]\,,\ m = 1, \ldots N+1$. Величины r_m отличны от нуля только для тех m, для которых заданы узловые перемещения, которые и являются главными граничными условиями. Вариация работы реакции связи на таком перемещении будет, в соответствии с равенствами (11), равна:

$$r_m\left(\delta z_m + \gamma_m \delta K_I\right) \tag{19}$$

где коэффициент γ_m представляет собой $u^*\left(r,\theta\right)$ или $v^*\left(r,\theta\right)$ в зависимости от того, по какой оси направлено заданное перемещение. Координаты r, θ здесь являются полярными координатами узла, перемещение которого задано. Из выражения (19) следует, что

$$\delta\mathbf{Z}^T\mathbf{R} = \sum_{m=1}^{N} r_m \delta z_m + r_{N+1}\delta K_I; \quad r_{N+1} = \sum_{m=1}^{N} \gamma_m r_m \tag{20}$$

Так как вариации $\delta\mathbf{Z}$ произвольны, получаем вариационное уравнение и эквивалентную ему систему линейных алгебраических уравнений в виде:

$$\delta\mathbf{Z}^T\mathbf{A}\mathbf{Z} = \delta\mathbf{Z}^T\left(\mathbf{Q}+\mathbf{R}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{Z} = \mathbf{Q}+\mathbf{R} \tag{21}$$

Выделим из матрицы $\mathbf{A}$ первые N строк и столбцов. Они образуют новую матрицу $\mathbf{A}' = [a'_{km}]$ порядка N. Отметим, что эта матрица является ленточной. Выделим также из матрицы $\mathbf{Q}$ первые N элементов. Они образуют матрицу—столбец $\mathbf{Q}' = [q'_m]$ порядка N. Образуем матрицу—столбец из первых N элементов последнего столбца матрицы $\mathbf{A}$: $\mathbf{S}' = [s'_m]\,;\ \ s'_m = -a_{m,N+1}$. Это позволяет разделить матрицу-столбец $\mathbf{Z}$ на две составляющие, одна из которых определяется нагрузкой, а вторая—величиной K_I.

Число неизвестных в системе (21) превышает число уравнений. Но вместо того чтобы дополнять систему (21) уравнениями связей (главных граничных условий), преобразуем матрицы $\mathbf{A}'$, $\mathbf{Q}'$, $\mathbf{S}'$ методом, предложенным в работе [3]. Пусть задано перемещение c_j. В соответствии с равенством

$$z_j = c_j - \gamma_j z_{N+1} \tag{22}$$

перенесем известные величины в правые части:

$$q'_m := q'_m - a'_{mj}c_j; \quad s'_m := s'_m + a'_{mj}\gamma_j; \quad m = 1, \ldots N \tag{23}$$

После выполнения этой процедуры для всех заданных перемещений, обнуляются j-ая строка и j-ый столбец матрицы $\mathbf{A}'$ за исключением диагонального

элемента, а также задаются j-ые элементы правых частей в соответствии с равенством (22):

$$\begin{aligned} &a'_{jm} := 0; \quad a'_{mj} := 0; \quad m = 1, \dots N; \\ &a'_{jj} := 1; \quad q'_j := c_j; \quad s'_j := -\gamma_j \end{aligned} \tag{24}$$

В результате этих преобразований матрица $\mathbf{A}'$ по-прежнему остается симметричной и ленточной. Приходим к решению двух систем уравнений N-ого порядка, отличающихся правой частью:

$$\mathbf{A}'\mathbf{Z}' = \mathbf{Q}'; \quad \mathbf{A}'\mathbf{Z}'' = \mathbf{S}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Z} = \mathbf{Z}' + K_I\mathbf{Z}'' \tag{25}$$

Равенства (25) относятся только к первым N элементам матрицы-столбца $\mathbf{Z}$. Таким образом, в результате решения систем уравнений (25) эти элементы оказались определены с точностью до константы $K_I = z_{N+1}$. Она находится из последнего уравнения системы (21). Предварительно нужно выразить реакции связей из уравнения (21):

$$r_m = -q_m + \sum_{n=1}^{N} a_{mn} z'_n + K_I \left(\sum_{n=1}^{N} a_{mn} z''_n + a_{m,N+1} \right) \tag{26}$$

Отметим, что величины r_m отличны от нуля только для тех m, для которых заданы главные граничные условия. С учетом равенства (20) последнее уравнение системы (21) принимает вид:

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{N} a_{N+1,m} z'_m + K_I \left(\sum_{m=1}^{N} a_{N+1,m} z''_m + a_{N+1,N+1} \right) = \\ &q_{N+1} + \sum_{m=1}^{N} \gamma_m \left[-q_m + \sum_{n=1}^{N} a_{mn} z'_n + K_I \left(\sum_{n=1}^{N} a_{mn} z''_n + a_{m,N+1} \right) \right] \end{aligned} \tag{27}$$

Из этого уравнения определяется коэффициент интенсивности напряжений K_I.

Рассмотрим важный частный случай, когда составляющие перемещений (5) удовлетворяют нулевым главным граничным условиям, то есть когда все величины γ_j равны нулю (см. равенство (22)). При этом уравнение (27) существенно упрощается:

$$K_I = \frac{q_{N+1} - \sum\limits_{m=1}^{N} a_{N+1,m} z'_m}{\sum\limits_{m=1}^{N} a_{N+1,m} z''_m + a_{N+1,N+1}} \tag{28}$$

Несингулярные компоненты тензора напряжений вычисляются с использованием стандартных соотношений, принятых в методе конечных элементов. Внутри отдельного конечного элемента производные от перемещений (без учета сингулярных составляющих) задаются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} &\partial_x u = \Phi_{ij}\left(\xi,\eta\right) U_{ij}; \quad \partial_y u = F_{ij}\left(\xi,\eta\right) U_{ij}; \\ &\partial_x v = \Phi_{ij}\left(\xi,\eta\right) V_{ij}; \quad \partial_y v = F_{ij}\left(\xi,\eta\right) V_{ij} \end{aligned} \tag{29}$$

Далее по формулам (1) находятся несингулярные составляющие деформаций и напряжений. Пусть кончик трещины совпадает с каким-либо узлом конечноэлементной сетки. Этот узел входит в два конечных элемента. Обозначим их через "+ "и "– ". Пусть $\sigma_{xx}^{(+)}$ представляет собой несингулярное напряжение в кончике трещины для одного элемента, а $\sigma_{xx}^{(-)}$—для другого. В качестве Т-напряжения выбирается средняя величина:

$$T = 0.5\left(\sigma_{xx}^{(+)} + \sigma_{xx}^{(-)}\right) \tag{30}$$

3. Результаты расчетов. Поставленная задача (1) имеет две оси симметрии. Расчетная схема, учитывающая симметрию задачи, изображена на рис. 3. Сформулируем граничные условия задачи. Участок контура AB (условия симметрии): $u = 0$; $\sigma_{xy} = 0$. Первое условие является главным, а второе—естественным. Участок контура BC: $\sigma_{xy} = 0$; $\sigma_{yy} = q$. Оба условия являются естественными. Участок контура CD: $\sigma_{xx} = 0$; $\sigma_{xy} = 0$. Оба условия являются естественными. Участок контура DE (условия симметрии): $v = 0$; $\sigma_{xy} = 0$. Первое условие является главным, а второе—естественным. Участок контура EA (линия трещины): $\sigma_{xy} = 0$; $\sigma_{yy} = 0$. Оба условия являются естественными. Как несложно заметить, компоненты перемещений (5)не соответствуют главному граничному условию на участке контура AB. В связи с этим для нахождения K_I следует воспользоваться уравнением (27). Вместе с тем допустимо применить и альтернативный способ решения задачи. В работе [5], приведено аналитическое решение схожей задачи для плоскости, то есть при H, $W \to \infty$. Перемещения, отвечающие сингулярной части этого решения, согласуются с условиями симметрии, а значит, удовлетворяют и главным граничным условиям рассматриваемой задачи.

В рассматриваемом случае для моделирования сингулярной части численного решения в качестве координатных функций допустимо использовать сингулярную компоненту решения задачи о трещине в плоскости [5]. В результате

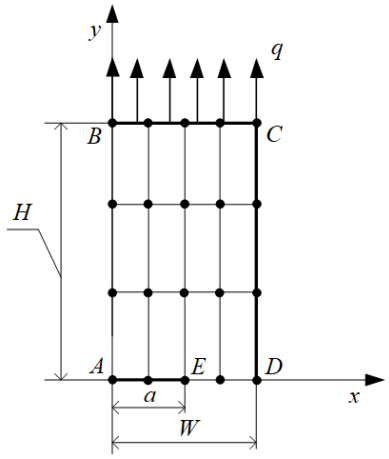


Рис. 3. Расчетная схема—верхняя четверть области, вырезанная осями симметрии. Конечные элементы—прямоугольники. Их количество в горизонтальном направлении равно n_1 (на рисунке $n_1 = 4$), их количество в вертикальном направлении равно n_2 (на рисунке $n_2 = 3$)

получаем следующие выражения [5, 6]:

$$\begin{gathered}
\begin{cases} \sigma^*_{xx} + \sigma^*_{yy} = 2\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right] \\ \sigma^*_{yy} - \sigma^*_{xx} + 2i\sigma^*_{xy} = 2\left[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)\right] \end{cases} \\
u^* + iv^* = \frac{1+\nu}{E}\left[\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}\right]; \\
\varphi(z) = \frac{(z^2-a^2)^{1/2}}{2\sqrt{\pi a}}; \quad \psi(z) = -\frac{a^2}{2\sqrt{\pi a}(z^2-a^2)^{1/2}}; \quad z = x + iy
\end{gathered} \tag{31}$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$—комплексные потенциалы [6], i—мнимая единица. Начало координат расположено в середине трещины (1). Черта над символом обозначает комплексное сопряжение.

Разбиение расчетной области на конечные элементы вдоль осей координат выбрано равномерным. Такой подход обусловлен тем, что использование неравномерной конечноэлементной сетки может привести к возникновению неконтролируемой погрешности и тем самым снизить достоверность результатов решения задачи. Для оценки сходимости решения рассмотрен вариант с $H = W$, $a = 0.5W$. При этом число элементов в горизонтальном и вертикальном направлениях одинаково и равно n. В таблице 1 представлены результаты расчетов безразмерного коэффициента интенсивности напряжений $K^*_I = K_I/(q\sqrt{\pi a})$, безразмерного Т-напряжения $T^* = T/q$ и двухосевого отношения (7) в зависимости от числа конечных элементов n. Индекс I соответствует выбору координатных

функций, ответственных за сингулярность, в виде (5), а индекс II соответствует выбору в виде (31).

n		6	10	20	50	100	150	200
K_I^*	I	1.335	1.337	1.336	1.335	1.335	1.334	1.334
	II	1.337	1.337	1.336	1.335	1.335	1.334	1.334
T^*	I	-1.345	-1.354	-1.362	-1.370	-1.375	-1.378	-1.380
	II	-1.443	-1.429	-1.416	-1.405	-1.400	-1.398	-1.398
B	I	-1.008	-1.013	-1.019	-1.026	-1.031	-1.033	-1.034
	II	-1.079	-1.069	-1.060	-1.052	-1.049	-1.048	-1.047

Таблица 1. Зависимость результатов расчетов от числа конечных элементов вдоль координатных осей

Для этой задачи Исида [7] получил $K_I^* = 1.334$, Ливерс и Радон [8] получили $B = -1.043$, Фетт [9] получил $T^* = -1.384$; $B = -1.038$. Результаты расчетов, приведенные в табл. 1, показывают хорошую сходимость решения с увеличением числа конечных элементов. Они удовлетворительно согласуются с результатами, полученными ранее другими исследователями. Поэтому при проведении расчетов, результаты которых приведены ниже, полагалось $n_1 = n_2 = n = 200$, а координатные функции, моделирующие сингулярность, брались в виде (31). При этом отличие результатов расчетов от результатов, полученных на сетке с $n = 150$, составляет менее 0.01%. Результаты расчетов величины K_I^* для различных длин трещины и для различных отношений H/W представлены в таблице 2. В ней курсивом показаны результаты Исиды [7]. В таблице 3 даны соответствующие значения параметра B. Курсивом показаны результаты Фетта [9]. Данные этих таблиц демонстрируют приемлемое согласие полученных результатов с результатами предшествующих исследований.

a/W	*H/W=0.5*	*H/W=1.0*	*H/W=1.5*	*H/W=2.0*
0.1	1.046 *(1.046)*	1.014 *(1.014)*	1.007 *(1.007)*	1.006
0.2	1.175 *(1.175)*	1.056 *(1.055)*	1.029 *(1.029)*	1.025
0.3	1.372 *(1.371)*	1.124 *(1.123)*	1.066 *(1.066)*	1.059
0.4	1.631 *(1.629)*	1.216 *(1.216)*	1.122 *(1.122)*	1.110
0.5	1.969 *(1.967)*	1.334 *(1.334)*	1.203 *(1.203)*	1.188
0.6	2.426 *(2.424)*	1.481 *(1.481)*	1.321 *(1.32)*	1.304
0.7	3.040 *(3.04)*	1.678 *(1.68)*	1.505	1.489
0.8	3.770	1.991	1.830	1.816
0.9	4.487	2.709	2.586	2.576

Таблица 2. Зависимость величины K_I^* от длины трещины и отношения длин сторон прямоугольной области с центральной трещиной

a/W	*H/W=0.5*	*H/W=1.0*	*H/W=1.5*	*H/W=2.0*
0.1	-1.003 *(-1.001)*	-1.006 *(-1.007)*	-1.003	-1.002
0.2	-0.9817 *(0.975)*	-1.018 *(-1.017)*	-1.010	-1.006
0.3	-0.9060 *(-0.892)*	-1.032 *(-1.028)*	-1.021	-1.015
0.4	-0.7861 *(-0.763)*	-1.042 *(-1.037)*	-1.037	-1.031
0.5	-0.6585 *(-0.626)*	-1.047 *(-1.038)*	-1.064	-1.061
0.6	-0.5560 *(-0.519)*	-1.058 *(-1.045)*	-1.113	-1.115
0.7	-0.4852 *(-0.440)*	-1.103 *(-1.092)*	-1.204	-1.213
0.8	-0.4422 *(-0.387)*	-1.255 *(-1.207)*	-1.394	-1.407
0.9	-0.6475 *(-0.632)*	-1.742 *(-1.581)*	-1.876	-1.890

Таблица 3. Зависимость двухосевого отношения B от длины трещины и отношения длин сторон прямоугольной области с центральной трещиной

Заключение. Приложенный метод объединяет в себе классические подходы—метод конечных элементов и метод Ритца—Галеркина. Благодаря такому сочетанию удается адекватно воспроизвести сингулярные компоненты тензора напряжений. Существенным преимуществом методики выступает ее универсальность: она допускает применение конечных элементов произвольного типа—никаких жестких ограничений на их форму или характеристики не накладывается.

В настоящей статье рассмотрена классическая задача вычислительной механики разрушения—задача о центральной трещине в прямоугольной области. Цель этого—в наиболее ясном изложении сути метода и демонстрации его эффективности. Метод несложно обобщить на несимметричные задачи механики разрушения. Более того, его можно применять к решению задач теории упругости для областей с концентраторами напряжений при условии, что известно аналитическое решение задачи для бесконечной области. Это решение включается в набор координатных функций численного решения. Конечность области фактически учитывается конечными элементами, как это сделано при решении рассмотренной задачи. Можно отметить также простоту метода, что особенно важно для технических приложений.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. И. М. Лавит написание текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, О. С. Перова обзор литературы по теме статьи, редактирование текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. I. M. Lavit writing the text of the manuscript, agreeing on the final version of the manuscript, O. S. Perova reviewing the literature on the topic of the article, editing the text of the manuscript.
Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.
Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gupta M., Alderliesten R. C., Benedictus R. A review of T-stress and its effects in fracture mechanics // Eng. Fract. Mech. 2015. Vol. 134. P. 218–241.
2. Матвиенко Ю. Г. Модели и критерии механики разрушения. М.: Физматлит, 2006. 328 с.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 521 с.
4. Brenner S. C., Scott L. R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods. N.Y.: Springer, 2008. 397 p.
5. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
6. Тимошенко С. П., Гудьер Д. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
7. Под ред. Мураками Ю. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. М.: Мир, 1990. 448 с.
8. Leevers P. S., Radon J. C. Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries // Int. J. Fract. 1982. Vol. 19. P. 311–325.
9. Fett T. T-stresses in rectangular plates and circular disks // Eng. Fract. Mech. 1998. Vol. 60. P. 631–652.

REFERENCES

1. Gupta M., Alderliesten R. C., Benedictus R. A review of T-stress and its effects in fracture mechanics // Eng. Fract. Mech. 2015. Vol. 134. P. 218–241.
2. Matvienko Y. G. Models and criteria of fracture mechanics. M.: Fizmatlit, 2006. 328 p. (in Russian).
3. Zenkiewicz O. The finite element method in engineering. M.: Mir, 1975. 521 p. (in Russian).
4. Brenner S. C., Scott L. R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods. N.Y.: Springer, 2008. 397 p.
5. Cherepanov G. P. Mechanics of brittle fracture. M.: Science, 1974. 640 p. (in Russian).
6. Timoshenko S. P., Gudyer J. Theory of elasticity. M.: Science, 1975. 576 p. (in Russian).
7. Edited by Murakami Y. Handbook of stress intensity coefficients. M.: Mir, 1990. 448 p. (in Russian).
8. Leevers P. S., Radon J. C. Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries // Int. J. Fract. 1982. Vol. 19. P. 311–325.
9. Fett T. T-stresses in rectangular plates and circular disks // Eng. Fract. Mech. 1998. Vol. 60. P. 631–652.

Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.008 *EDN: GMZHZY*

Научная статья *УДК: 539.376*

К. С. Стрелков

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ ДЕФОРМАЦИОННОГО УПРОЧНЕНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ ГЕРМЕТИЧНОСТИ ПРЕМИАЛЬНЫХ РЕЗЬБОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Аннотация. Представлены результаты экспериментального исследования ползучести материала класса прочности P110, применяемого для изготовления труб нефтегазового сортамента с резьбовыми соединениями класса «Премиум». Математическое описание накопления деформаций ползучести в процессе эксплуатации соединения выполнено с использованием модели деформационного упрочнения. Идентификация параметров модели осуществлялась посредством численного решения нелинейного дифференциального уравнения методом Рунге–Кутты четвертого порядка и последующей минимизации отклонений между расчетными и экспериментальными данными. При прогнозировании обусловленной ползучестью релаксации контактных давлений в радиальном уплотнении типа «металл–металл» проведено сопоставление результатов, полученных по модели деформационного упрочнения и вязкоупругой модели Максвелла–Вихерта. При этом в качестве нагрузки был выбран самый тяжелый режим эксплуатации нефтегазовой колонны: действие внутреннего давления и растяжения с выдержкой в течении заданного временного интервала. После выдержки было реализовано нагружение в соответствии с требованиями стандартов, регламентирующих проведение натурных испытаний для имитации эксплуатации резьбового соединения в скважине: воздействие осевых растягивающих и сжимающих нагрузок с внутренним и внешним давлениями со специальной последовательностью нагружения. Оценка герметичности резьбового соединения с учетом релаксации контактных давлений проводилась на основе сформулированного критерия по газонепроницаемости, характеризующего способность уплотнительного узла сохранять герметичность в условиях действия газовой среды. Сравнение двух моделей наглядно показывает консервативность модели деформационного упрочнения для оценки релаксации контактных давлений в условиях ползучести. Разработанная методика может быть применима при конструировании резьбовых соединений класса «Премиум» и оценки возможности их эксплуатации в условиях высокотемпературных скважин и при использовании специальных методов добычи нефти и газа.

Ключевые слова: ползучесть, модель деформационного упрочнения, вязкоупругость, премиальные резьбовые соединения, герметичность

Стрелков Кирилл Сергеевич, аспирант лаборатории механики новых материалов и технологий; e-mail: ks.strelkov@yandex.ru; https://orcid.org/0009-0001-9203-9599

для цитирования: *Стрелков К. С.* Применение модели деформационного упрочнения для оценки герметичности премиальных резьбовых соединений // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 119–131. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.008. EDN: GMZHZY

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© Стрелков К. С. 2026

Поступила: 01.05.26; принята в печать: 10.09.26; опубликована: 29.10.26.

Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.008 *EDN: GMZHZY*
Research Article

K. S. Strelkov

APPLICATION OF THE STRAIN HARDENING MODEL FOR SEALABILITY ESTIMATION OF PREMIUM THREADED CONNECTIONS

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. This study reports the results of creep tests performed on specimens of P110-grade steel used in the manufacture of Oil Country Tubular Goods (OCTG) equipped with premium threaded connections. To describe material creep during connection service, the parameters of a strain-hardening model were identified by numerically integrating a nonlinear differential equation using the fourth-order Runge–Kutta method. Creep-induced relaxation of contact pressure within the radial metal-to-metal seal was then evaluated by comparing the strain-hardening formulation with the Maxwell–Wiechert viscoelastic model.

The numerical analysis considered a threaded connection subjected to combined axial tension and internal pressure, followed by a prescribed load-hold period. Upon completion of the hold stage, the connection was exposed to a loading sequence consistent with the requirements of the applicable full-scale qualification standard, thereby reproducing representative downhole operating conditions. Sealability was assessed using a sealability criterion based on the contact-pressure distribution within the sealing region.

Comparison of the two constitutive approaches showed that the strain-hardening model predicts a more pronounced creep-induced reduction in sealing performance and therefore provides a more conservative estimate of contact pressure relaxation. The proposed methodology may be employed in the design of premium threaded connections and in the assessment of their suitability for high-temperature well conditions and specialized production technologies.

Keywords: creep, strain hardening model, viscoelasticity, OCTG, sealability

Kirill S. Strelkov, Scientific Researcher; `e-mail:` ks.strelkov@yandex.ru;
`https://orcid.org/0009-0001-9203-9599`

to cite this article: *Strelkov K. S.* Application of the strain hardening model for sealability estimation of premium threaded connections // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 119–131. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.008

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Received: 01.05.26; *accepted: 10.09.26;* *published: 29.10.26.*

Введение. Резьбовые соединения класса «Премиум» широко используются при строительстве нефтяных и газовых скважин, в том числе эксплуатируемых при повышенных температурах, давлениях и механических нагрузках. Характерными конструктивными особенностями таких соединений являются оптимизированная геометрия резьбового профиля и наличие специального уплотнительного узла с радиальным натягом.

Создаваемый при сборке натяг обеспечивает формирование области контактного взаимодействия, параметры которой в значительной степени определяют герметичность соединения. Однако при продолжительном воздействии механических нагрузок и температур, достигающих 350°C, в материале труб и муфт могут накапливаться необратимые деформации ползучести. Их развитие сопровождается изменением напряженно-деформированного состояния уплотнительного узла и может приводить к снижению контактных давлений и последующей утрате герметичности [1, 2].

Прогнозирование изменения контактного взаимодействия во времени может выполняться с использованием различных реологических и феноменологических моделей материала. В настоящей работе сопоставлены два подхода к описанию релаксации контактных давлений применительно к премиальному резьбовому соединению собственной разработки.

1. Экспериментальное и теоретическое исследование ползучести. Для построения экспериментальных кривых ползучести при различных температурных режимах в лаборатории «Гибридные наноструктурные материалы» НИТУ МИСИС были проведены испытания цилиндрических образцов на одноосное растяжение. Продолжительность выдержки под нагрузкой составляла 300 ч, а температура испытаний принималась равной 150°C, 250°C и 350°C.

В каждом температурном режиме образцы нагружались до уровня, составляющего 95% минимального предела текучести. Значение предела текучести было предварительно определено по результатам статических испытаний на одноосное растяжение, выполненных в АО «Выксунский металлургический завод» (АО "ВМЗ"). Выбранная интенсивность нагружения соответствует уровню эквивалентных напряжений по критерию текучести Мизеса, применяемому при комплексной квалификационной оценке резьбовых соединений обсадных и насосно-компрессорных труб [3].

Образцы для исследования изготавливались из муфтовой заготовки. Из материала той же заготовки впоследствии были изготовлены натурные образцы премиального резьбового соединения ОМК VEGA [4]. Такой подход обеспечил соответствие механических свойств материала лабораторных образцов характеристикам исследуемого соединения.

2. Определение параметров модели ползучести. Анализ экспериментальных результатов показал, что при температуре 350°C на кривой ползучести отчетливо выделяются первичная и вторичная стадии процесса. Для

температур 150°C и 250°C выраженный участок первичной ползучести в пределах рассматриваемой продолжительности испытаний практически отсутствует.

В связи с необходимостью описания как неустановившейся, так и установившейся стадий ползучести в качестве определяющего соотношения была принята модель деформационного упрочнения. Ее основу составляет степенной закон Нортона [5], дополненный зависимостями от накопленной деформации ползучести и температуры:

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt} = C_1 \sigma_{\text{экв}}^{C_2} \varepsilon_c^{C_3} exp\left(-\frac{C_4}{T}\right), \tag{1}$$

где ε_c — эквивалентная деформация ползучести; $\sigma_{\text{экв}}$ — эквивалентное напряжение, МПа; T — температура, K; C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные, которые подбираются на основе экспериментальных данных, причем $C_4 = Q/R$ (Q — энергия активация, Дж; R — газовая постоянная, Дж/(моль·K)).

Определение параметров уравнения (1) выполнялось по следующей вычислительной схеме:

1. Для заданного набора коэффициентов C_1, C_2, C_3 и C_4 численно интегрировалось нелинейное дифференциальное уравнение ползучести (1). Интегрирование проводилось методом Рунге–Кутты четвертого порядка.

2. Полученная расчетная зависимость сопоставлялась с экспериментальными значениями, после чего методом наименьших квадратов минимизировалась целевая функция:

$$f = \sum_{i=1}^{n} \left(\varepsilon_i^{\text{эксп}} - \varepsilon_i^{\text{мод}}(C_1, C_2, C_3, C_4)\right)^2 \to min, \tag{2}$$

где $\varepsilon_i^{\text{эксп}}$ — экспериментальное значение деформации ползучести для i-ой точки кривой; $\varepsilon_i^{\text{мод}}(C_1, C_2, C_3, C_4)$ — значение модели деформационного упрочнения для i-ой точки кривой.

3. Качество описания экспериментальных данных оценивалось с помощью коэффициента детерминации

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i^{\text{эксп}} - \varepsilon_i^{\text{мод}})^2}{\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i^{\text{эксп}} - \bar{\varepsilon}_i^{\text{эксп}})^2}, \ \bar{\varepsilon}^{\text{эксп}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{\text{эксп}}. \tag{3}$$

Сопоставление экспериментальных точек с кривыми, рассчитанными по модели деформационного упрочнения, приведено на Рис. 1. Для температур 350°C, 250°C и 150°C значения коэффициента детерминации составили соответственно 0.99, 0.43 и 0.01.

Невысокое качество аппроксимации результатов при 150°C и 250°C обусловлено малой интенсивностью ползучести на рассматриваемом временном интервале. В этих условиях измеряемые деформации оказываются сопоставимыми с погрешностью экспериментального оборудования, вследствие чего разброс данных затрудняет их описание единым определяющим соотношением (1).

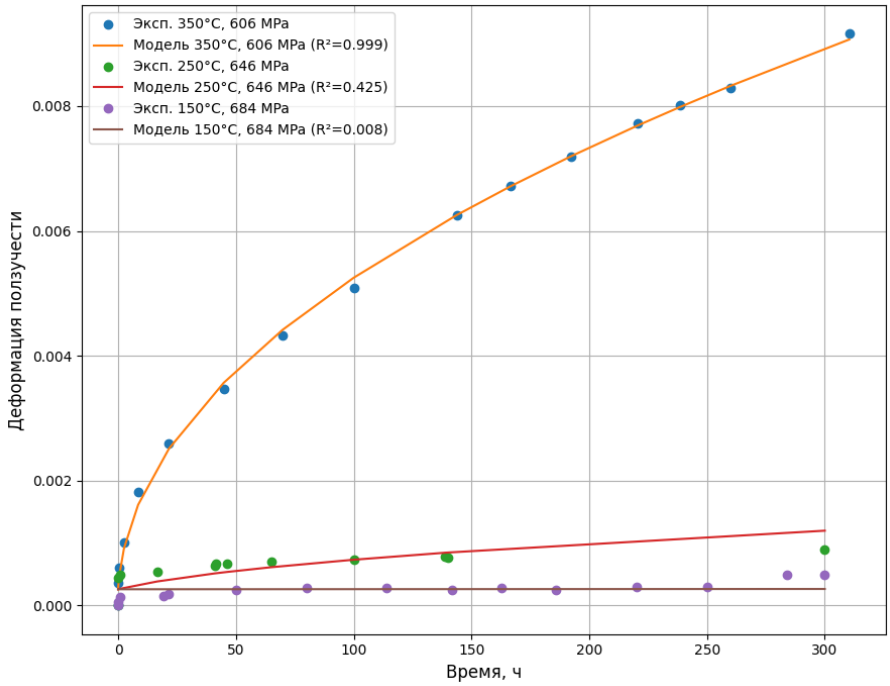


Рис. 1. Экспериментальные данные и кривые, полученные с помощью модели деформационного упрочнения.

Основное внимание в настоящем исследовании уделялось результатам, полученным при 350°C, поскольку данный температурный режим является наиболее неблагоприятным с точки зрения работоспособности резьбового соединения. Следует также отметить, что при исключении общей температурной зависимости из уравнения (1) и независимой идентификации коэффициентов C_1, C_2 и C_3 для каждой экспериментальной кривой точность их аппроксимации может быть существенно повышена.

Корректность определенных параметров дополнительно проверялась путем конечно-элементного моделирования условий лабораторного эксперимента. Расчетная область представляла собой четверть продольного сечения цилиндрического образца; задача решалась в осесимметричной постановке. Поле накопленной деформации ползучести, полученное в конечно-элементной модели, а также сопоставление расчетной и экспериментальной кривых для температуры 350°C представлены на Рис. 2.

3. Сравнение модели деформационного упрочнения и модели Максвелла–Вихерта при оценке герметичности премиального соединения. Количественная оценка герметичности соединения класса «Премиум» требует определения изменения контактных давлений в радиальном

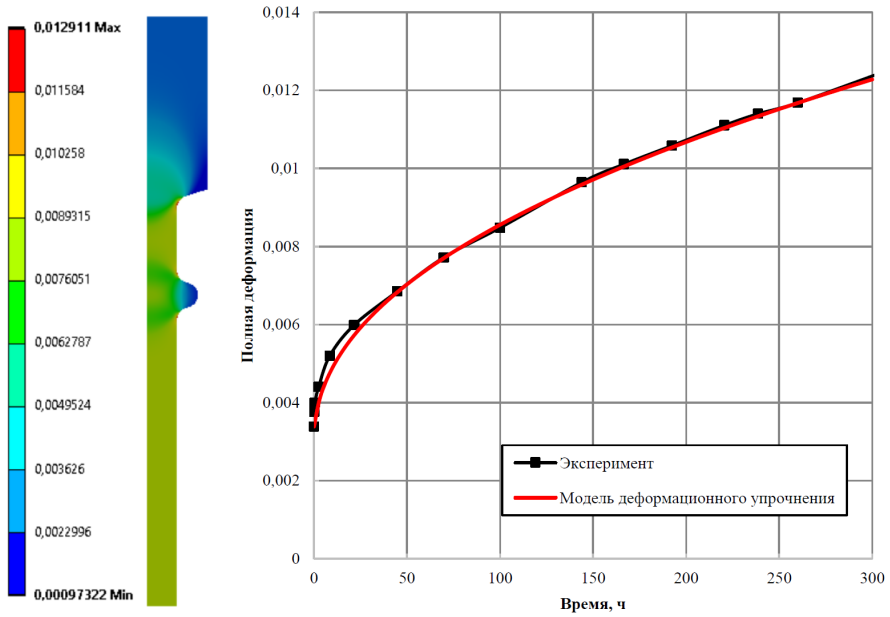


Рис. 2. Распределение эквивалентных деформаций ползучести в модели и сравнение экспериментальной и расчётной кривых.

уплотнительном узле вследствие длительного накопления деформаций ползучести. Для решения этой задачи в программном комплексе ANSYS была разработана детальная осесимметричная конечно-элементная модель резьбового соединения OMK VEGA.

На торцевой поверхности ниппеля задавалось осевое усилие, а в центральном сечении муфты вводились граничные условия симметрии. Внутреннее давление прикладывалось к внутренним поверхностям трубы и муфты, а также к поверхностям упорного торца ниппеля и ответного упора муфты.

На поверхности радиального уплотнения применялся алгоритм проникновения давления, учитывающий локальное распределение контактных давлений. Для программной реализации данного алгоритма был разработан пользовательский скрипт на языке APDL.

Расчетная последовательность включала следующие этапы:

1) устранение исходного геометрического перекрытия контактирующих поверхностей и формирование напряженного состояния, соответствующего сборочному натягу;

2) одновременное приложение растягивающего осевого усилия и внутреннего давления, соответствующих наиболее неблагоприятному режиму квалификационных испытаний;

3) выдержка соединения под постоянной нагрузкой в течение установленного интервала времени.

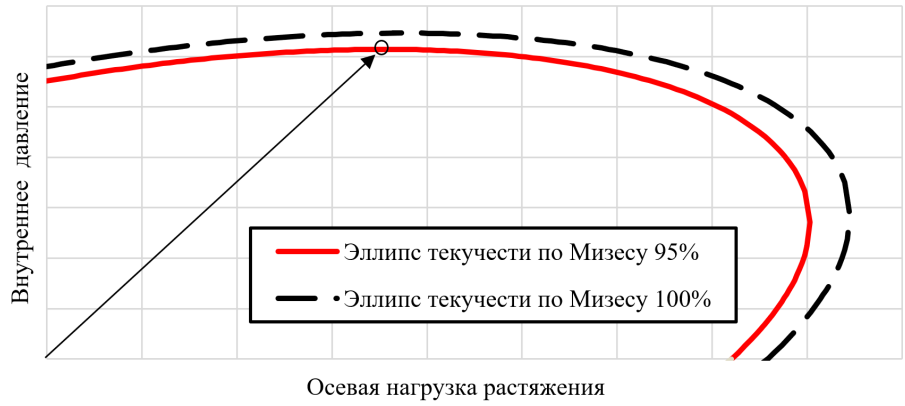


Рис. 3. Эллипс текучести по Мизесу и выбранное сочетание нагрузок для оценки герметичности.

Сочетание осевой нагрузки и внутреннего давления выбиралось таким образом, чтобы напряженное состояние оставалось в пределах упругой области эллипса текучести Мизеса, построенного в координатах «осевая нагрузка — внутреннее давление». Направление перехода к нагрузкам второго расчетного этапа показано стрелкой на Рис. 3.

Для анализа влияния ползучести на релаксацию контактных давлений были сопоставлены результаты двух вариантов расчета. В первом случае использовалась модель деформационного упрочнения (1), во втором — описанная в работах [1, 6] вязкоупругая модель Максвелла–Вихерта.

В модели Максвелла–Вихерта релаксационный модуль материала представляется посредством разложения в ряд Прони [7, 8]. Параметры такого представления определяются из следующего соотношения:

$$\alpha E_0 T_{ij} m_j = e_j \tag{4}$$

где α — калибровочный коэффициент; E_0 — мгновенный модуль упругости; T_{ij} — компоненты тензора времен релаксации, m_j — компоненты тензора безразмерных параметров Прони, e_j — компоненты тензора изменения мгновенного модуля.

Методом Монте-Карло было установлено, что для решения уравнения (4) достаточно использовать $n = 6$ точек. Последующее увеличение их количества практически не изменяет точность аппроксимации. Вместе с тем модель Максвелла–Вихерта относится к классу линейных вязкоупругих моделей и не воспроизводит нелинейную зависимость скорости деформирования от уровня действующих напряжений. Для согласования расчетных и экспериментальных характеристик в нее был введен дополнительный калибровочный коэффициент.

Газонепроницаемость соединения оценивалась по критерию, основанному на интегральном анализе распределения контактных давлений в пределах радиального уплотнения [9, 10]:

$$n_g = \frac{W_a}{W_{ac}}, \quad W_a = \int_{-a}^{a} p(x)^k dx, \quad W_{ac} = B\left(\frac{q}{p_a}\right)^m \tag{5}$$

где $p(x)$ — распределение контактного давления в определенный момент времени; a — полуширина контактной зоны, мм; параметры для случая отсутствия резьбоуплотнительной смазки (соответствует методике испытаний [2] при использовании процедуры прогрева образца): $k = 1.4$, $m = 0.838$, $B = 10$МПа^{k}мм; q — заданное давление, МПа; p_a — атмосферное давление, МПа.

Результаты численного решения по двум рассматриваемым моделям материала приведены на Рис. 4 и Рис. 5.

Согласно данным Рис. 4, применение модели деформационного упрочнения приводит к существенно большему перемещению области контактного взаимодействия по сравнению с расчетом по модели Максвелла–Вихерта. Одновременно наблюдается более интенсивное сокращение ширины контактной зоны. При этом максимальные значения контактного давления, прогнозируемые двумя моделями к концу рассматриваемого интервала, оказываются приблизительно одинаковыми.

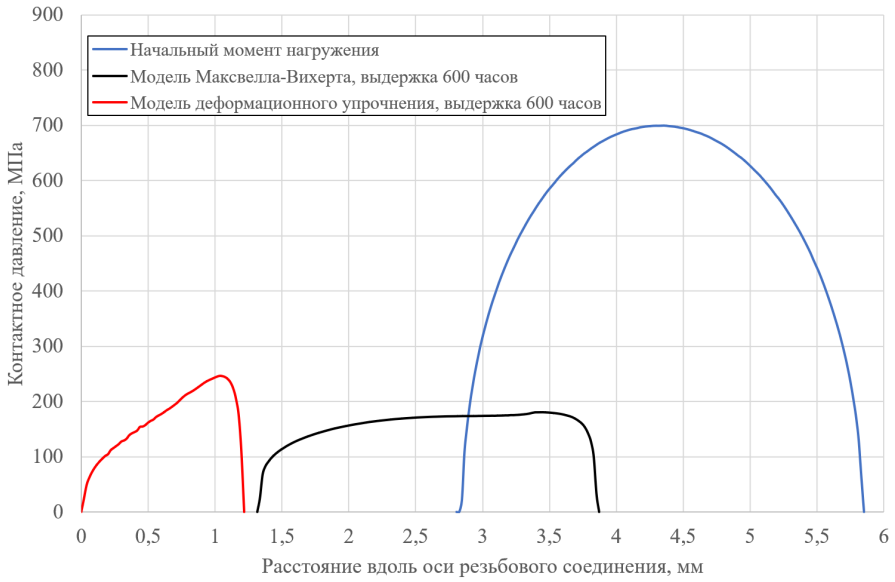


Рис. 4. Распределение контактных давлений на уплотнительной поверхности в начальный момент нагружения и после выдержки 600 часов для двух моделей.

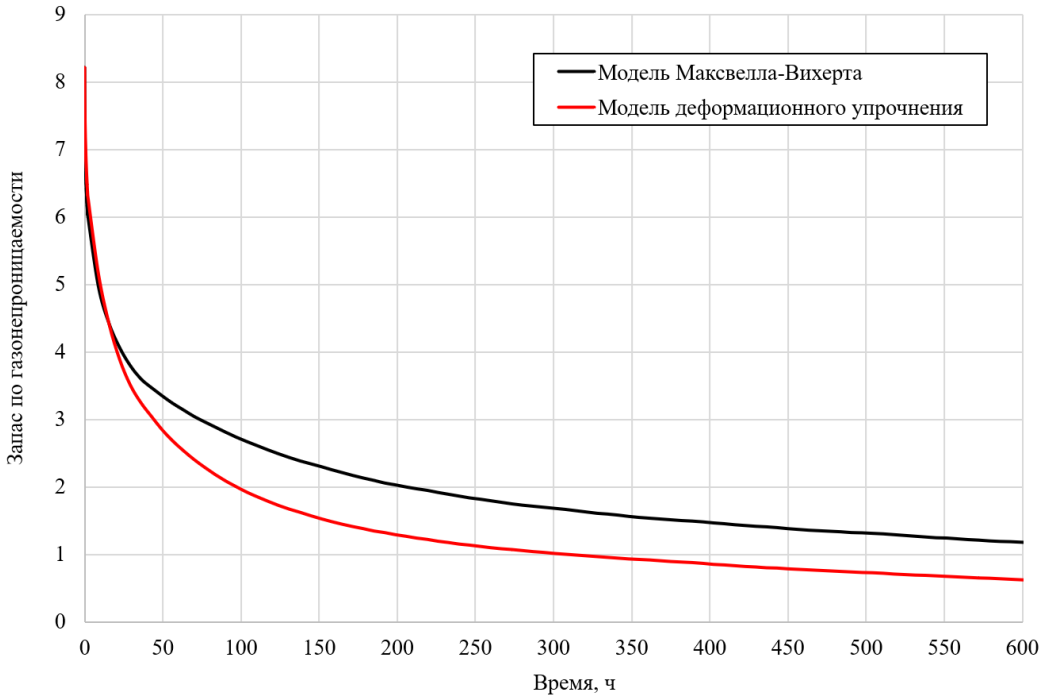


Рис. 5. Изменение запаса по газонепроницаемости при выдержке с нагрузкой растяжением и внутренним давлением.

Из зависимостей, представленных на рис. 5, следует, что после 600 ч непрерывной выдержки уменьшение запаса газонепроницаемости составляет 92 % при использовании модели деформационного упрочнения и 85 % при использовании модели Максвелла–Вихерта. Более того, расчет по модели деформационного упрочнения показывает, что условие герметичности, определяемое критерием (5), перестает выполняться уже после 300 ч действия постоянной нагрузки.

Для обеих моделей дополнительно исследовалась герметичность соединения после продолжительной выдержки при последующем прохождении маршрута квалификационных испытаний, регламентированного стандартом [3]. Нагрузочное воздействие на соединение задавалось сочетанием осевого усилия — растягивающего либо сжимающего — и внутреннего или внешнего давления. На основе анализа зависимости на Рис. 5 в качестве времени выдержки был выбран интервал 100 часов, так как начиная с этого значения разность между значениями запаса по газонепроницаемости для двух кривых принимает постоянное значение. Оценка герметичности конструкции проводилась по запасу по газаонепроницаемости и ширине контактной зоны как по двум ключевым параметрам оценки герметичности. Результаты моделирования представлены на Рис. 6 и Рис. 7 соответственно.

Стоит отметить, что на Рис. 6 значения запаса по газонепроницаемости отсутствуют для точек 1, 4, 13, 14, 15, 21, так как для этих точек нет нагружения

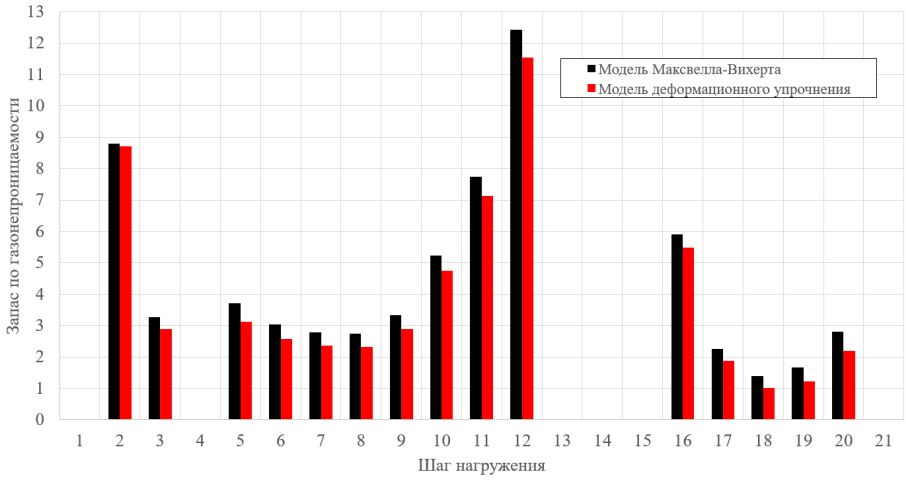


Рис. 6. Изменение запаса по газонепроницаемости после выдержки и действия нагрузок.

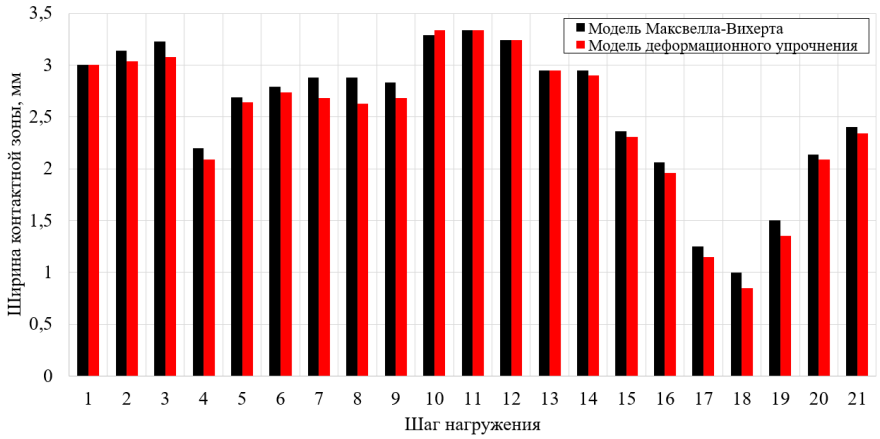


Рис. 7. Изменение ширины контактной зоны после выдержки и действия нагрузок.

давлением, что является обязательной компонентой критерив (5). Из диаграмм видно, что характер изменения данных характеристик подобен для двух моделей, при этом наиболее существенная разница возникает на шаге нагружения 18 при действии внешнего давления и растяжения и составляет 28% и 15% для запаса по газонепроницаемости и ширине контактной зоны соответственно. При этом для модели деформационного упрочнения запас по газонепроницемости для этого шага близок к 1, что может приводить к утечке при эксплуатации

резьбового соединения с текущими параметрами и с подобной последовательностью нагружения в скважине. Таким образом корректную оценку применимости резьбового соединения в условиях ползучести необходимо оценивать по модели деформационного упрочнения как по наиболее консервативной.

Заключение. Выполнено экспериментальное исследование ползучести материала труб нефтегазового сортамента производства АО «Выксунский металлургический завод». Полученные при различных температурах зависимости деформации от времени были описаны посредством модели деформационного упрочнения. Для прогнозирования релаксации контактных давлений в радиальном уплотнении результаты данной модели сопоставлялись с расчетами по вязкоупругой модели Максвелла–Вихерта.

Количественный анализ герметичности показал, что модель деформационного упрочнения прогнозирует более интенсивное уменьшение ширины контактной зоны и запаса газонепроницаемости. Таким образом, применительно к рассматриваемой конструкции она обеспечивает более консервативную оценку продолжительности сохранения герметичности резьбового соединения.

В качестве продолжения исследования планируется проведение испытаний на ползучесть при других уровнях напряжений и подбор соответствующих параметров моделей, а также натурных испытаний резьбового соединения в условиях АО "ВМЗ".

Представленные результаты могут быть использованы при проектировании резьбовых соединений класса «Премиум», а также при расчетной оценке их работоспособности и ресурса в условиях эксплуатации геотермальных скважин.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. К. С. Стрелков написание текста рукописи, обзор литературы по теме статьи, проведение экспериментов, редактирование текста рукописи.
Конфликт интересов. Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
Источник финансирования. Исследование выполнено по теме государственного задания (государственный регистрационный номер 124012500437-9).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. K. S. Strelkov writing the text of the manuscript,eviewing the literature on the topic of the article, conducting experiments, editing the text of the manuscript.
Competing interests. The author declare that they have no competing interests.
Funding. The study was carried out on the topic of the state assignment (state registration number 124012500437-9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Стрелков К. С. Теоретическое и экспериментальное исследование ползучести стали марки Р110 // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. 4(66). С. 157–165. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.010.

2. Merliahmad M., Giacomel B., Sakura K. Casing Connection Selection for Geothermal Applications Using Input From HPHT and Thermal Wells Testing Protocols // SPE/GRC Workshop: High-Temperature and Corrosion in Drilling and Production—Exploring Geothermal and Oil and Gas Synergies. Melbourne, Australia, 2017.
3. ГОСТ Р ИСО 13679-2023. Трубы стальные обсадные и насосно-компрессорные для нефтяной и газовой промышленности. Методы испытаний резьбовых соединений. Москва: Федеральное агентство по техническому регулированию, 2023.
4. Резьбовое соединение трубных изделий нефтепромыслового сортамента: 2767871 / Д. В. Никифоров, К. С. Стрелков. Заявл. 2022. Опубл. 22.03.2022. Бюл. № 9.
5. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. 2-е изд. Москва: Машиностроение, 1975. 398 с.
6. Strelkov K. S., Murashkin E. V. Sealability of Premium Threaded Connections under Creep // Mechanics of Solids. 2025. Vol. 60, no. 7. P. 1–8. DOI: 10.1134/S0025654425607025.
7. Кристенсен Р. М. Введение в теорию вязкоупругости. Москва: Мир, 1974. 340 с.
8. Findley W. N., Lai J. S., Onaran K. Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials with an Introduction to Linear Viscoelasticity. Dover Publications, 1989. 364 p.
9. Murtagian G. R., Fanelli V., Villasante J. A., et al. Sealability of Stationary Metal-to-Metal Seals // Journal of Tribology. 2004. Vol. 126. P. 591–596. DOI: 10.1115/1.1715103.
10. Xie J. Numerical Evaluation of Tubular Connections for HPHT Applications // Proceedings of the Baosteel Conference. Shanghai, 2013. P. 6–14.

REFERENCES

1. Strelkov K. S. Theoretical and Experimental Study of Creep in P110 Grade Steel // Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2025. 4(66). P. 157–165. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.010. (in Russian).
2. Merliahmad M., Giacomel B., Sakura K. Casing Connection Selection for Geothermal Applications Using Input From HPHT and Thermal Wells Testing Protocols // SPE/GRC Workshop: High-Temperature and Corrosion in Drilling and Production—Exploring Geothermal and Oil and Gas Synergies. Melbourne, Australia, 2017.
3. GOST R ISO 13679-2023. Steel casing and tubing pipes for the oil and gas industry. Test methods for threaded connections. 2023. (in Russian).
4. Threaded Connection of Oilfield Tubular Goods: 2767871 / D. V. Nikiforov, K. S. Strelkov. 2022. (in Russian).
5. Malinin N. N. Applied Theory of Plasticity and Creep. 2nd ed. Moscow: Mashinostroenie, 1975. 398 p. (in Russian).
6. Strelkov K. S., Murashkin E. V. Sealability of Premium Threaded Connections under Creep // Mechanics of Solids. 2025. Vol. 60, no. 7. P. 1–8. DOI: 10.1134/S0025654425607025.

7. Christensen R. M. Introduction to the Theory of Viscoelasticity. Moscow: Mir, 1974. 340 p. (in Russian).
8. Findley W. N., Lai J. S., Onaran K. Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials with an Introduction to Linear Viscoelasticity. Dover Publications, 1989. 364 p.
9. Murtagian G. R., Fanelli V., Villasante J. A., et al. Sealability of Stationary Metal-to-Metal Seals // Journal of Tribology. 2004. Vol. 126. P. 591–596. DOI: 10.1115/1.1715103.
10. Xie J. Numerical Evaluation of Tubular Connections for HPHT Applications // Proceedings of the Baosteel Conference. Shanghai, 2013. P. 6–14.

Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.009 *EDN: GEUHBR*
Научная статья *УДК: 539.374*

А. С. Бегун

КОНЕЧНЫЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ НЕСЖИМАЕМОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия

Владивостокский государственный университет, Владивосток, Россия

Аннотация. Рассматривается деформирование несжимаемой упругопластической пластины в условиях цилиндрического изгиба. Для математического моделирования используется модель больших упругопластических деформаций. В условиях плоской деформации при возрастающем изгибающем моменте исследуется сначала чисто упругое деформирование, затем деформирование при наличии областей пластического течения. Считается, что в процессе деформирования каждая линия в поперечном сечении пластины переходит в соответствующую дугу окружности. Для описания исходного недеформированного и текущего деформированного состояний пластины используются декартовая прямоугольная и цилиндрическая системы координат соответственно. Найдены условия начала пластического течения и закономерности его развития. Получены распределения напряжений и деформаций в пластине.

Ключевые слова: большие деформации, цилиндрический изгиб, упругопластический материал.

Бегун Александра Сергеевна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории механики деформируемого твердого тела, доцент кафедры математики и моделирования; `e-mail:` asustinova@mail.ru; https://orcid.org/0000-0003-4067-9161; AuthorID: 162735

для цитирования: *Бегун А. С.* Конечный цилиндрический изгиб несжимаемой упругопластической пластины // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 132–141. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.009. EDN: GEUHBR

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© Бегун А. С. 2026

Поступила: 01.05.26; принята в печать: 31.07.26; опубликована: 29.10.26.

Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.009 *EDN: GEUHBR*
Research Article

A. S. Begun

FINITE BENDING OF AN INCOMPRESSIBLE ELASTIC-PLASTIC BLOCK

Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences Vladivostok, Russia

Vladivostok State University, Vladivostok, Russia

Abstract. This article examines the deformation of an incompressible elastoplastic plate under cylindrical bending. A large elastoplastic deformation model is used for mathematical modeling. Under plane strain conditions with monotonically increasing bending moment, purely elastic deformation is first investigated, followed by deformation in the presence of regions of plastic flow. It is assumed that during deformation, each line in the plate's cross-section transforms into a corresponding circular arc. Cartesian rectangular and cylindrical coordinate systems are used to describe the initial undeformed and current deformed states of the plate, respectively. The conditions for the onset of plastic flow and the patterns of its development are determined. Stress and strain distributions in the plate are obtained.

Keywords: large strains, cylindrical bending, elastic-plastic material.

Aleksandra S. Begun, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher at the Laboratory of Mechanics of Deformable Solids, Associate Professor at the Department of Mathematics and Modeling; `e-mail:` asustinova@mail.ru;
`https://orcid.org/0000-0003-4067-9161;` AuthorID: 162735

to cite this article: *Begun A. S.* Finite bending of an incompressible elastic-plastic block // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 132–141. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.009

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Received: 01.05.26; *accepted: 31.07.26;* *published: 29.10.26.*

Введение. Изгиб упругопластической пластины представляет теоретический и практический интерес, поэтому рассматривался неоднократно, например [1—10]. Классические решения основаны на теории Кирхгофа-Лява и описывают поведение пластин при малых перемещениях и деформациях. Однако современные технологии требуют расчета, учитывающего большие деформации, как обратимые, так и необратимые. Решения для чисто упругого конечного изгиба в условиях плоского деформированного состояния представлены в [4, 7]. Жесткопластический изгиб рассматривался в [6]. В работе [3] получены решения для изгиба упругопластических пластин в рамках эйлеровой модели конечных деформаций, основанной на логарифмической скорости. В [1] представлен обзор решений для жесткопластических и упругопластических материалов, а также экспериментальных работ. В настоящей работе цилиндрический изгиб исследуется в рамках модели больших упругопластических деформаций, предложенной в [11].

1. Модельные соотношения. Для описания процесса деформирования будем использовать модель больших деформаций [11]. В эйлеровой системе координат обратимые и необратимые деформации определяются дифференциальными уравнениями переноса:

$$
\begin{gathered}
d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2} e_{ik} e_{kj} - e_{ik} p_{kj} - p_{ik} e_{kj} + e_{ik} p_{ks} e_{sj}, \\
\frac{De_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - \frac{1}{2} \left((\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik}) e_{kj} + e_{ik} (\gamma_{kj} - \varepsilon_{kj} - z_{kj}) \right), \\
\frac{Dp_{ij}}{Dt} = \gamma_{ij} - p_{ik} \gamma_{kj} - \gamma_{ik} p_{kj}, \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik} n_{kj} + n_{ik} r_{kj}, \\
\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(v_{i,j} + v_{j,i} \right), \quad r_{ij} = w_{ij} + z_{ij} \left(e_{ij}, \varepsilon_{ij} \right), \quad w_{ij} = \frac{1}{2} \left(v_{i,j} - v_{j,i} \right),
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где u_i и v_i – компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды, d_{ij}, e_{ij}, p_{ij} – компоненты тензоров полных, обратимых и пластических деформаций соответственно, r_{ij} – тензор вращений, ε_{ij} и γ_{ij} – компоненты скоростей полных и пластических деформаций.

Считаем, что напряжения в среде полностью определяются обратимыми деформациями, и связаны зависимостями:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial d_{ik}}(\delta_{kj} - 2d_{kj}) \qquad \text{при} \qquad p_{ij} \equiv 0,$$
$$\sigma_{ij} = -p_1\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - e_{kj}) \qquad \text{при} \qquad p_{ij} \neq 0,$$
$$W = (a-\mu)J_1 + aJ_2 + bJ_1^2 - \kappa J_1 J_2 - \chi J_1^3 + ..., \tag{2}$$
$$J_k = \begin{cases} L_k, & \text{при} \quad p_{ij} \equiv 0 \\ I_k, & \text{при} \quad p_{ij} \neq 0 \end{cases}, \qquad L_1 = d_{kk}, \quad L_2 = d_{ik}d_{ki},$$
$$I_1 = e_{kk} - \frac{1}{2}e_{sk}e_{ks}, \qquad I_2 = e_{st}e_{ts} - e_{sk}e_{kt}e_{ts} + \frac{1}{4}e_{sk}e_{kt}e_{tn}e_{ns},$$

Здесь σ_{ij} – компоненты тензора напряжений Эйлера-Коши, p_1 – добавочное гидростатическое давление, $W = W(e_{ij})$ – упругий потенциал (плотность распределения свободной энергии) , μ – модуль сдвига исследуемого материала, a, b, κ, χ – упругие модули более высокого порядка.

Связь скоростей пластических деформаций ε_{ij}^p с напряжениями в условиях принимаемого принципа максимума Мизеса устанавливается ассоциированным законом пластического течения

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = k, \qquad \lambda > 0. \tag{3}$$

В качестве условия пластичности будем использовать условие Треска

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2k, \tag{4}$$

где σ_i, ε_k^p – главные значения тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций, k – предел текучести.

2. Постановка задачи, основные кинематические соотношения. Пусть в недеформированном состоянии прямоугольная пластина толщиной h и длиной $2l$ занимает область $-h/2 \leq x_1 \leq h/2$, $-l \leq x_2 \leq l$, $-b \leq x_3 \leq b$ (рис. 1). Считаем, что под действием приложенного изгибающего момента $M = M(t)$ пластина деформируется так, что плоскости $x_1 = const$, переходят в сектора цилиндрических поверхностей $r = const$, а плоскости $x_2 = const$ в плоскости $\theta = const$. Внутренняя и внешняя поверхности предполагаются свободными от напряжений $\sigma_{rr}(r_1) = \sigma_{rr}(r_2) = 0$

Начальные (x_1, x_2, x_3) и текущие (y_1, y_2, y_3) координаты точки среды связаны формулами:

$$y_1 = r(x_1)\cos\theta(x_2) - R^*, \quad y_2 = r(x_1)\sin\theta(x_2), \quad y_3 = x_3. \tag{5}$$

Используя условие несжимаемости найдем

$$r = \sqrt{R^2 + 2x_1 r_*}, \quad \theta = \frac{x_2}{r_*}, \quad r' = \frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{r_*}{r}, \quad \theta' = \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{1}{r_*} \tag{6}$$

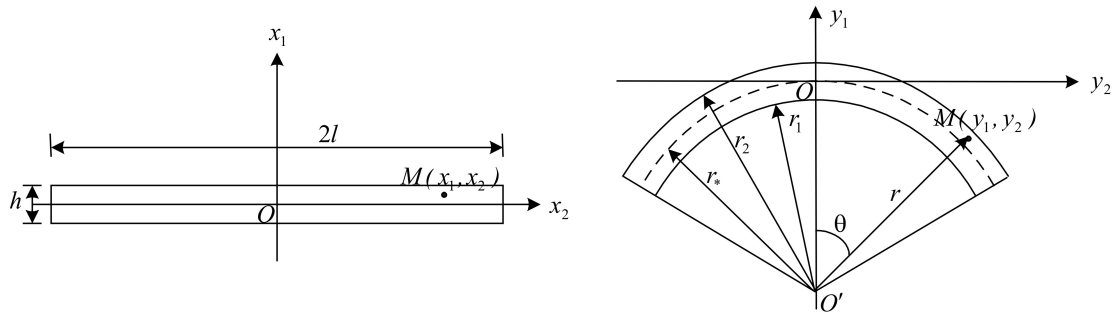


Рис. 1. Недеформированное и деформированное состояние прямоугольной пластины при изгибе.

Если e_1, e_2, e_3 — базисные вектора исходной декартовой системы координат, а e_r, e_φ, e_z – базисные вектора текущей цилиндрической системы координат, тогда для тензора градиента деформаций $\mathbf{F}$ и тензора деформаций Альманси $\mathbf{d}$ получим соотношения

$$\mathbf{F} = r' e_r \otimes e_1 + r\theta' e_\varphi \otimes e_2, \quad \mathbf{d} = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{r}{r_*}\right)^2\right) e_r \otimes e_r + \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{r_*}{r}\right)^2\right) e_\varphi \otimes e_\varphi. \quad (7)$$

Тензор градиента скоростей $\mathbf{L}$, тензор скоростей деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ и тензор вращения $\boldsymbol{\omega}$ определяются следующими равенствами

$$\mathbf{L} = \frac{\dot{r}'}{r'} e_r \otimes e_r - \dot{\theta}' e_r \otimes e_\varphi + \dot{\theta}' e_\varphi \otimes e_r - \frac{\dot{r}'}{r'} e_\varphi \otimes e_\varphi,$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\dot{r}'}{r'} e_r \otimes e_r - \frac{\dot{r}'}{r'} e_\varphi \otimes e_\varphi, \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}' e_r \otimes e_\varphi + \dot{\theta}' e_\varphi \otimes e_r. \quad (8)$$

Здесь и далее $(\cdot)$ — производная по времени.

3. Упругое деформирование. Считаем, что, до достижения изгибающим моментом M значения M_0 вся пластина деформируется обратимо. Отличные от нуля компоненты тензора напряжения имеют вид

$$\begin{gathered}
\sigma_{rr} = -p + a - \mu - (k + 3\chi)(d_{rr} + d_{\varphi\varphi}) - (k + 3\chi)(d_{rr}^2 + d_{\varphi\varphi}^2) + \\
+ 2\mu d_{rr} - 2(k + 2b + 2a) d_{rr}^2, \\
\sigma_{\varphi\varphi} = -p + a - \mu - (k + 3\chi)(d_{rr} + d_{\varphi\varphi}) - (k + 3\chi)(d_{rr}^2 + d_{\varphi\varphi}^2) + \\
+ 2\mu d_{\varphi\varphi} - 2(k + 2b + 2a) d_{\varphi\varphi}^2, \\
\sigma_{zz} = -p + a - \mu + (2b - 3\chi)(d_{rr} + d_{\varphi\varphi}) - (k + 3\chi)(d_{rr}^2 + d_{\varphi\varphi}^2), \\
\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2\mu(d_{rr} - d_{\varphi\varphi}) - 2(k + 2b + 2a)(d_{rr}^2 - d_{\varphi\varphi}^2).
\end{gathered} \quad (9)$$

Интегрируя уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}}{r}, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \tag{10}$$

и считая, что внутренняя и внешняя поверхности свободны от напряжений ($\sigma_{rr}(r_1) = \sigma_{rr}(r_2) = 0$), найдем компоненты напряжений и изгибающий момент

$$\sigma_{rr} = \frac{\mu}{2}\left(\frac{r^2 - r_1^2}{r_*^2} + r_*^2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2}\right)\right) - \frac{k + 2b + 2a}{2}\left(\frac{r^2 - r_1^2}{r_*^2} + r_*^2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{r^4 - r_1^4}{4r_*^4} - \frac{r_*^4}{4}\left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r_1^2}\right)\right),$$
$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} + \mu\left(\frac{r^2}{r_*^2} - \frac{r_*^2}{r^2}\right) - \frac{k + 2b + 2a}{2}\left(2\frac{r^2}{r_*^2} - 2\frac{r_*^2}{r^2} - \frac{r^4}{r_*^4} + \frac{r_*^4}{r^4}\right), \tag{11}$$
$$M = \int\limits_{r_1}^{r_2} r\sigma_{\varphi\varphi} dr = \frac{\mu}{2}\left(\frac{r_2^4 - r_1^4}{4r_*^2} + r_*^2 \ln\frac{r_2}{r_1}\right) - \frac{k + 2b + 2a}{4}\left(\frac{r_2^4 - r_1^4}{2r_*^2} - 2r_*^2 \ln\frac{r_2}{r_1} - \right.$$
$$\left. - \frac{r_*^4}{2}\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) - \frac{r_2^6 - r_1^6}{6r_*^4}\right), \quad r_*^2 = r_2 r_1.$$

Задавая изгибающий момент и используя соотношение $r_*^2 = r_2 r_1$, получим уравнение для определения положения нейтральной линии r_*

$$\frac{k + 2b + 2a}{4\mu}\left(\frac{1}{2}\left(1 - \tilde{r}_*^4\right) + 2\tilde{r}_*^2 \ln\left(\tilde{r}_*^2\right) + \frac{1}{6}\left(\tilde{r}_*^8 - \frac{1}{\tilde{r}_*^4}\right) - \frac{1}{2}\left(\tilde{r}_*^6 - \frac{1}{\tilde{r}_*^2}\right)\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\left(\tilde{r}_*^6 - \frac{1}{\tilde{r}_*^2}\right) - \tilde{r}_*^2 \ln\left(\tilde{r}_*^2\right)\right) = \frac{M(t)}{r_1^2 \mu}, \quad \tilde{r}_* = \frac{r_*}{r_1}.$$

Далее находятся внутренняя r_1 и внешняя r_2 цилиндрические поверхности. Деформации и напряжения находятся из соотношений (7) и (9) соответственно.

Условие пластичности в рассматриваемом случае записывается в виде

$$|\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}| = 2k.$$

Согласно выведенным соотношениям, напряженное состояние достигнет предела текучести одновременно на внутренней $r = r_1$ и внешней $r = r_2$ цилиндрической поверхности.

4. Пластическое течение. После того как изгибающий момент M достигнет значения M_0, в пластине будут упругая область $r_1^p \le r \le r_2^p$ и две пластические области $r_2^p \le r \le r_2$ и $r_1 \le r \le r_1^p$, развивающиеся от внешней и внутренней границы соответственно. Интегрируя уравнения равновесия и используя граничные условия $\sigma_{rr}(r_1) = \sigma_{rr}(r_2) = 0$, в областях пластического течения найдем

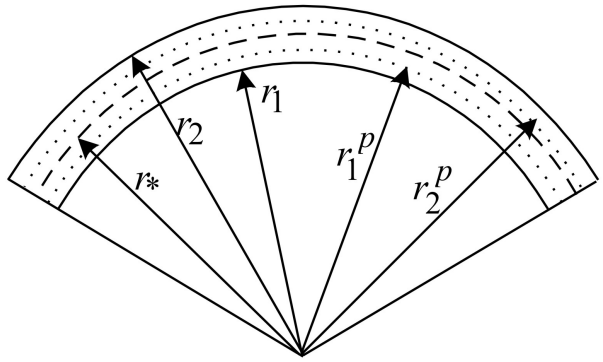


Рис. 2. Упругая и пластические области.

$$r_1 \le r \le r_1^p: \quad \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = -2k, \quad \sigma_{rr} = 2k \ln \frac{r_1}{r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 2k \left(\ln \frac{r_1}{r} - 1 \right); \tag{12}$$

$$r_2^p \le r \le r_2: \quad \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = 2k, \quad \sigma_{rr} = 2k \ln \frac{r}{r_2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 2k \left(\ln \frac{r}{r_2} + 1 \right).$$

Используя условие непрерывности напряжений на упругопластической границе $r = r_1^p$ в области обратимого деформирования $r_1^p \le r \le r_2^p$ имеем:

$$\sigma_{rr} = -\frac{k+2b+2a}{2} \left(\frac{r^2 - r_1^{p2}}{r_*^2} + r_*^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^{p2}} \right) - \frac{r^4 - r_1^{p4}}{4r_*^4} - \frac{r_*^4}{4} \left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r_1^{p4}} \right) \right) +$$
$$+ \frac{\mu}{2} \left(\frac{r^2 - r_1^{p2}}{r_*^2} + r_*^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^{p2}} \right) \right) + 2k \ln \frac{r_1}{r_1^p}, \tag{13}$$
$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} + \mu \left(\frac{r^2}{r_*^2} - \frac{r_*^2}{r^2} \right) - \frac{k+2b+2a}{2} \left(2\frac{r^2}{r_*^2} - 2\frac{r_*^2}{r^2} - \frac{r^4}{r_*^4} + \frac{r_*^4}{r^4} \right).$$

Изгибающий момент теперь можно вычислить по формуле

$$M = \int_{r_1}^{r_2} r\sigma_{\varphi\varphi} dr = \int_{r_1}^{r_1^p} r\sigma_{\varphi\varphi} dr + \int_{r_1^p}^{r_2^p} r\sigma_{\varphi\varphi} dr + \int_{r_2^p}^{r_2} r\sigma_{\varphi\varphi} dr =$$
$$= \frac{\mu}{2} \left(\frac{r_2^{p4} - r_1^{p4}}{4r_*^2} + r_*^2 \ln \frac{r_2^p}{r_1^p} \right) - \frac{k+2b+2a}{4} \left(\frac{r_2^{p4} - r_1^{p4}}{2r_*^2} - 2r_*^2 \ln \frac{r_2^p}{r_1^p} - \right. \tag{14}$$
$$\left. - \frac{r_*^4}{2} \left(\frac{1}{r_2^{p2}} - \frac{1}{r_1^{p2}} \right) - \frac{r_2^{p6} - r_1^{p6}}{6r_*^4} \right) + k \left(\frac{r_2^2 - r_2^{p2} + r_1^2 - r_1^{p2}}{2} - r_2^{p2} \ln \frac{r_2^p}{r_2} - r_1^{p2} \ln \frac{r_1^p}{r_1} \right).$$

Используя соотношения (14) и (13) и условие непрерывности напряжений на упругопластических границах, получим систему алгебраических уравнений

для определения положения нейтральной линии r_*, внутренней r_1, внешней r_2 поверхностей и упругопластических границ r_1^p и r_2^p

$$M(t) = \frac{\mu}{2}\left(\frac{r_2^{p4} - r_1^{p4}}{4r_*^2} + r_*^2 \ln\frac{r_2^p}{r_1^p}\right) - \frac{k+2b+2a}{4}\left(\frac{r_2^{p4} - r_1^{p4}}{2r_*^2} - 2r_*^2 \ln\frac{r_2^p}{r_1^p} - \right.$$

$$\left. -\frac{r_*^4}{2}\left(\frac{1}{r_2^{p2}} - \frac{1}{r_1^{p2}}\right) - \frac{r_2^{p6} - r_1^{p6}}{6r_*^4}\right) + k\left(\frac{r_2^2 - r_2^{p2} + r_1^2 - r_1^{p2}}{2} - r_2^{p2}\ln\frac{r_2^p}{r_2} - r_1^{p2}\ln\frac{r_1^p}{r_1}\right),$$

$$\mu\left(\frac{r_1^{p2}}{r_*^2} - \frac{r_*^2}{r_1^{p2}}\right) - \frac{k+2b+2a}{2}\left(2\frac{r_1^{p2}}{r_*^2} - 2\frac{r_*^2}{r_1^{p2}} - \frac{r_1^{p4}}{r_*^4} + \frac{r_*^4}{r_1^{p4}}\right) = -2k,$$

$$\mu\left(\frac{r_2^{p2}}{r_*^2} - \frac{r_*^2}{r_2^{p2}}\right) - \frac{k+2b+2a}{2}\left(2\frac{r_2^{p2}}{r_*^2} - 2\frac{r_*^2}{r_2^{p2}} - \frac{r_2^{p4}}{r_*^4} + \frac{r_*^4}{r_2^{p4}}\right) = 2k$$

$$-\frac{k+2b+2a}{2}\left(\frac{r_2^{p2} - r_1^{p2}}{r_*^2} + r_*^2\left(\frac{1}{r_2^{p2}} - \frac{1}{r_1^{p2}}\right) - \frac{r_2^{p4} - r_1^{p4}}{4r_*^4} - \frac{r_*^4}{4}\left(\frac{1}{r_2^{p4}} - \frac{1}{r_1^{p4}}\right)\right) +$$

$$+\frac{\mu}{2}\left(\frac{r_2^{p2} - r_1^{p2}}{r_*^2} + r_*^2\left(\frac{1}{r_2^{p2}} - \frac{1}{r_1^{p2}}\right)\right) = 2k\ln\frac{r_2 r_1^p}{r_1 r_2^p}, \quad r_2^2 - r_1^2 = 2hr_*.$$

Далее находим компоненты тензора напряжений и тензора деформаций Альманси. В упругой области $r_1^p \le r \le r_2^p$ для компонент обратимых деформаций справедливы формулы

$$e_{rr} = 1 - \sqrt{1 - 2d_{rr}} = 1 - \frac{r}{r_*}, \quad e_{\varphi\varphi} = 1 - \sqrt{1 - 2d_{\varphi\varphi}} = 1 - \frac{r_*}{r}. \qquad (15)$$

На рис.3 показано изменение упругопластических границ и нейтральной линии.

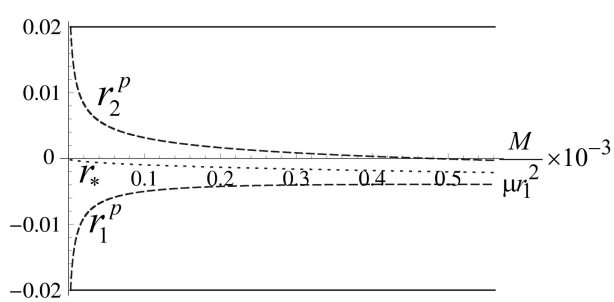


Рис. 3. Изменение упругопластических границ и нейтральной линии.

В областях пластического течения обратимые деформации не изменяются и равны в каждой точке значению в тот момент времени, когда до нее дошла упругопластическая граница. Компоненты пластических деформаций через полные

и обратимые деформации находятся по формулам

$$p_{rr} = \frac{1}{2} - \frac{1 - 2d_{rr}}{2(e_{rr} - 1)^2}, \quad p_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} - \frac{1 - 2d_{\varphi\varphi}}{2(e_{\varphi\varphi} - 1)^2}. \tag{16}$$

5. Заключение. В рамках модели больших упругопластических деформаций получено решение о цилиндрическом изгибе прямоугольной пластины. Найдены условия зарождения и продвижения упругопластических границ. Рассчитаны поля напряжений и полных, обратимых и необратимых деформаций. Представленное решение может в дальнейшем использоваться для задачи разгрузки пластины при постепенном уменьшении изгибающего момента.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Конфликт интересов. Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
Источник финансирования. Работа выполнена в рамках государственных заданий ИАПУ ДВО РАН (тема № FWFW-2021-0005).

ADDITIONAL INFORMATION

Competing interests. The author declare that they have no competing interests.
Funding. The research was carried out within the state assignment of IACP FEB RAS (Theme № FWFW-2021-0005) .

ЛИТЕРАТУРА

1. Alexandrov S., Lyamina E., Hwang Y.-M. Plastic Bending at Large Strain: A Review // Processes. 2021. Т. 9, № 3. С. 406. DOI: 10.3390/pr9030406.
2. Arslan E., Eraslan A. N. Analytical solution to the bending of a nonlinearly hardening wide curved bar // Acta Mechanica. 2010. Т. 210, № 1. С. 71–84. DOI: 10.1007/s00707-009-0195-y.
3. Bruhns O. T., Gupta N. K., Meyers A. T. M., Xiao H. Bending of an elastoplastic strip with isotropic and kinematic hardening // Archive of Applied Mechanics. 2003. Т. 72. С. 759–778. DOI: 10.1007/s00419-002-0273-2.
4. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
5. Dadras P. Plane strain elastic-plastic bending of a strain hardening curved beam // International Journal of Mechanical Sciences. 2001. Т. 43, № 1. С. 39–56. DOI: 10.1016/S0020-7403(99)00104-4.
6. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford, UK: Clarendon Press, 1950.
7. Kassianidid F., Ogden R. On large bending deformations of transversely isotropic rectangular elastic blocks // Note di Matematica. 2007. Т. 27, № 2. С. 131–154. DOI: 10.1285/i15900932v27n2p131.
8. Rivlin R. S. Large elastic deformations of isotropic materials – V: The problem of flexure // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1949. Т. 195. С. 463–473. DOI: 10.1098/rspa.1949.0004.
9. Timoshenko S. P., Goodier J. N. Theory of Elasticity. New York: McGraw-Hill, 1970.
10. Yu T. X., Zhang L. C. Plastic Bending: Theory and Applications. Singapore: World Scientific, 1996. DOI: 10.1142/2754.

11. Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Доклады Академии наук. 1996. Т. 347, № 2. С. 199–201.

REFERENCES

1. Alexandrov S., Lyamina E., Hwang Y.-M. Plastic Bending at Large Strain: A Review // Processes. 2021. Vol. 9, no. 3. P. 406. DOI: 10.3390/pr9030406.
2. Arslan E., Eraslan A. N. Analytical solution to the bending of a nonlinearly hardening wide curved bar // Acta Mechanica. 2010. Vol. 210, no. 1. P. 71–84. DOI: 10.1007/s00707-009-0195-y.
3. Bruhns O. T., Gupta N. K., Meyers A. T. M., Xiao H. Bending of an elastoplastic strip with isotropic and kinematic hardening // Archive of Applied Mechanics. 2003. Vol. 72. P. 759–778. DOI: 10.1007/s00419-002-0273-2.
4. Chernykh K. F. Nonlinear Theory of Elasticity in Mechanical Engineering Calculations. L.: Mechanical Engineering, 1986. 336 p.
5. Dadras P. Plane strain elastic-plastic bending of a strain hardening curved beam // International Journal of Mechanical Sciences. 2001. Vol. 43, no. 1. P. 39–56. DOI: 10.1016/S0020-7403(99)00104-4.
6. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford, UK: Clarendon Press, 1950.
7. Kassianidid F., Ogden R. On large bending deformations of transversely isotropic rectangular elastic blocks // Note di Matematica. 2007. Vol. 27, no. 2. P. 131–154. DOI: 10.1285/i15900932v27n2p131.
8. Rivlin R. S. Large elastic deformations of isotropic materials – V: The problem of flexure // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1949. Vol. 195. P. 463–473. DOI: 10.1098/rspa.1949.0004.
9. Timoshenko S. P., Goodier J. N. Theory of Elasticity. New York: McGraw-Hill, 1970.
10. Yu T. X., Zhang L. C. Plastic Bending: Theory and Applications. Singapore: World Scientific, 1996. DOI: 10.1142/2754.
11. Burenin A., Bykovtsev G., Kovtanyuk L. A simple model of finite strain in an elastoplastic medium // Doklady Physics. 1996. Vol. 41, no. 3. P. 127–129.

Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.001 *EDN: IHLIMK*
Научная статья *УДК: 539.319*

М. Н. Михин

О ПРИВЕДЕНИИ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМАЦИИ ГЕМИТРОПНЫХ ТЕЛ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ МЕТОДОМ ЯКОБИ

Филиал Российского государственного гуманитарного университета, Домодедово, Россия

Аннотация. Гемитропные тела представляют собой класс микрополярных сред, характеризующийся инвариантностью определяющих тензоров относительно произвольных поворотов и изменением при зеркальных отражениях пространства. Приведение квадратичной формы энергии деформации таких материалов к каноническому виду является необходимой задачей для анализа устойчивости, идентификации материальных параметров и построения эффективных вычислительных моделей в механике деформируемого твердого тела. Исследование выполнено в рамках линейной теории микрополярной упругости. Используется аппарат линейной алгебры и теории квадратичных форм. Приведение квадратичной формы энергии деформации к каноническому виду осуществляется методом Якоби, основанным на вычислении угловых миноров матрицы квадратичной формы. Положительная определенность энергии деформации проверяется посредством критерия Сильвестра. Сформулирована система определяющих неравенств для девяти материальных констант, обеспечивающих положительную определенность энергии деформации. Показано, что метод Якоби позволяет объединить процедуру приведения квадратичной формы с проверкой физической корректности материала по критерию Сильвестра.

Ключевые слова: микрополярная упругость, гемитропные тела, квадратичная форма, канонический вид, метод Якоби, критерий Сильвестра, положительная определенность, определяющие неравенства

Михин Михаил Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математических и естественнонаучных дисциплин; `e-mail:` mmikhin@inbox.ru; https://orcid.org/0009-0007-2081-3462; AuthorID: 493518

для цитирования: *Михин М. Н.* О приведении энергии деформации гемитропных тел к каноническому виду методом Якоби // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 142–155. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.001. EDN: IHLIMK

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© Михин М. Н. 2026

Поступила: 12.04.2026; принята в печать: 22.05.2026; опубликована: 29.10.26.

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.001 *EDN: IHLIMK*
Research Article

M. N. Mikhin

ON THE REDUCTION OF THE STRAIN ENERGY OF HEMITROPIC SOLIDS TO CANONICAL FORM BY THE JACOBI METHOD

Russian State University for the Humanities, Domodedovo, Russia

Abstract. Hemitropic solids are a class of micropolar media whose constitutive tensors are invariant under arbitrary rotations but vary under spatial mirror reflections. Reducing the strain energy quadratic form of such materials to its canonical form is a necessary task for stability analysis, material parameter identification, and constructing efficient computational models in solid mechanics. The present study is conducted within the linear theory of micropolar elasticity. The tools of linear algebra and the theory of quadratic forms are employed. The reduction of the quadratic form of the strain energy to its canonical form is performed using Jacobi's method, which is based on the computation of the leading principal minors of the quadratic form matrix. Positive definiteness of the strain energy is verified via Sylvester's criterion. A system of constitutive inequalities for nine material constants that guarantee positive definiteness of the strain energy is formulated. It is shown that Jacobi's method enables the reduction of the quadratic form to be combined with the verification of the material's physical admissibility via Sylvester's criterion.

Keywords: micropolar elasticity, hemitropic solids, quadratic form, canonical form, Jacobi's method, Sylvester's criterion, positive definiteness, constitutive inequalities.

Mikhail N. Mikhin, Cand. Sci. (Phys. & Math.), Associate Professor, Head of the Department of Mathematics and Natural Sciences `e-mail:` mmikhin@inbox.ru; https://orcid.org/0009-0007-2081-3462; AuthorID: 493518

to cite this article: *Mikhin M. N.* On the reduction of the strain energy of hemitropic solids to canonical form by the Jacobi method // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 142–155. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.001

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Received: 12.04.2026; *accepted: 22.05.2026;* *published: 29.10.26.*

1. Введение. Теория микрополярной упругости описывает материалы с внутренней структурой, в которых каждая материальная точка обладает не только тремя трансляционные перемещениями, но и тремя спинорными перемещениями (микроповоротами). Среди микрополярных сред особый класс составляют гемитропные тела, характеризующиеся тем, что компоненты его определяющих тензоров инвариантны при любых поворотах, но изменяются при зеркальных отражения пространства. Построение математической модели механического поведения микрополярных упругих тел традиционно опирается на задание энергии деформации, которая полностью определяет упругие свойства материала в рамках линейной постановки [1—5].

Среди существующих методов приведения квадратичных форм к каноническому виду (метод Лагранжа, метод ортогональных преобразований, метод Якоби) особое место занимает метод Якоби, основанный на вычислении угловых миноров матрицы квадратичной формы. Этот метод обладает рядом достоинств: 1) коэффициенты d_i $(i = 1, ..., 18)$ канонического вида вычисляются с помощью явных формул; 2) преобразование к новым переменным имеет верхнетреугольной вид: каждая новая переменная равна сумме соответствующей исходной переменной и линейной комбинации последующих исходных переменных.

Физическая реализуемость гемитропного тела требует положительной определенности энергии деформации. Для симметричной матрицы квадратичной формы это условие эквивалентно критерию Сильвестра, согласно которому все угловые миноры должны быть положительными. Метод Якоби естественным образом, оперирующий угловыми минорами, что позволяет объединить процедуру приведения квадратичной формы с проверкой физической корректности материала.

Скажем несколько слов о содержании работы. После вводного раздела рассматриваются энергия деформации для гемитропных тел. В рамках A-представления энергии деформации вводится вспомогательный 18-мерный вектор формальных переменных, который посредством линейного невырожденного преобразования переведен в новый канонический вектор.

В третьем разделе работы излагается метод Якоби диагонализации квадратичной формы. Приводятся явные выражения коэффициентов канонического вида через угловые миноры, описывается алгоритм построения преобразования Якоби невырожденной верхнетреугольной замены переменных, а также рассматриваются вычислительные особенности метода применительно к форме от 18 переменных.

В четвертом разделе формулируется система определяющих неравенств для гемитропных тел. Выводятся условия положительной определенности через угловые миноры, которые конкретизируются в виде неравенств на механические модули.

В заключительной части статьи представлены обсуждение результатов и выводы.

2. Энергия деформации гемитропного тела. Гемитропное (гиротропное) микрополярное тело характеризуется тем, что компоненты его определяющих тензоров инвариантны при любых поворотах, но изменяются при зеркальных отражениях пространства. В рамках микрополярной теории основными кинематическими величинами являются трансляционные u_j и спинорные ϕ_k перемещения.

В терминах трансляционных и спинорных перемещений асимметричный тензор деформаций и асимметричный тензор изгиба-кручения записываются следующим образом:

$$\epsilon_{ij} = \partial_i u_j - e_{ijk}\phi_k, \quad \kappa_{is} = \partial_i \phi_s,$$

где e_{ijk} — альтернируемый тензор (символ Леви-Чивиты), ∂_j — частная производная по пространственной координате x_j.

Через асимметричный тензор деформаций и асимметричный тензор изгиба-кручения выражения для вектора относительного микровращения и вектора сопутствующего антисимметричной части тензора изгиба-кручения можно представить в виде

$$\varphi_k = \phi_k - \frac{1}{2}e_{kij}\partial_i u_j, \quad \kappa_i = \frac{1}{2}e_{ijs}\kappa_{[js]}.$$

В принятых обозначениях квадратные скобки обозначают операцию кососимметризации (альтернирования) по индексам, заключенным в них, а круглые скобки означают симметризацию по индексам, находящимся внутри них.

Введем энергию деформации $\mathcal{U}$ [5, 6]:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon_{(ij)},\ \kappa_{(ij)}, \varphi_i, \kappa_i), \tag{1}$$

где

$$\varepsilon_{(ij)} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i), \quad \kappa_{(ij)} = \frac{1}{2}(\partial_i \kappa_j + \partial_j \kappa_i).$$

А-представление энергии деформации (1) в декартовой системе координат примет вид [5]

$$\begin{aligned}\mathcal{U} = \underset{1}{A}\delta_{is}\delta_{lm}\varepsilon_{(is)}\varepsilon_{(lm)} + \underset{2}{A}\delta_{is}\delta_{lm}\kappa_{(is)}\kappa_{(lm)} + \underset{3}{A}\delta_{is}\delta_{lm}\varepsilon_{(il)}\varepsilon_{(sm)} + \\ + \underset{4}{A}\delta_{is}\delta_{lm}\kappa_{(il)}\kappa_{(sm)} + \underset{5}{A}\delta_{is}\varphi_i\varphi_s + \underset{6}{A}\delta_{is}\kappa_i\kappa_s + \\ + \underset{7}{A}\delta_{is}\delta_{lm}\varepsilon_{(is)}\kappa_{(lm)} + \underset{8}{A}\varepsilon_{(is)}\kappa_{(is)} + \underset{9}{A}\kappa_i\varphi_i,\end{aligned} \tag{2}$$

где δ_{is} — символ Кронекера, A_τ $(\tau = 1, \ldots, 9)$ — определяющие механические модули микрополярной среды.

Для обеспечения единообразия при использовании алгебраических алгоритмов диагонализации выполняется формальная замена независимых переменных

энергии деформации $\mathcal{U}$ в соответствии со следующими правилами:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{(11)} = Y_1, \quad \kappa_{(11)} = Y_7, \quad \varphi_1 = Y_{\underline{13}},\\
&\varepsilon_{(22)} = Y_2, \quad \kappa_{(22)} = Y_8, \quad \varphi_2 = Y_{\underline{14}},\\
&\varepsilon_{(33)} = Y_3, \quad \kappa_{(33)} = Y_9, \quad \varphi_3 = Y_{\underline{15}},\\
&\varepsilon_{(23)} = Y_4, \quad \kappa_{(23)} = Y_{\underline{10}}, \quad \kappa_1 = Y_{\underline{16}},\\
&\varepsilon_{(13)} = Y_5, \quad \kappa_{(13)} = Y_{\underline{11}}, \quad \kappa_2 = Y_{\underline{17}},\\
&\varepsilon_{(12)} = Y_6, \quad \kappa_{(12)} = Y_{\underline{12}}, \quad \kappa_3 = Y_{\underline{18}},
\end{aligned} \tag{3}$$

где для того чтобы отличить двузначный индекс, состоящий из двух цифр, от однозначных индексов, идущих подряд, двузначный индекс выделяется подчеркиванием.

После выполнения замен (3) квадратичная форма энергии деформации (2) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} = {}& (\underset{1}{A} + \underset{3}{A})Y_1^2 + 2\underset{1}{A}Y_1Y_2 + 2\underset{1}{A}Y_1Y_3 + (\underset{7}{A} + \underset{8}{A})Y_1Y_7 + \underset{7}{A}Y_1Y_8 + \underset{7}{A}Y_1Y_9 +\\
&+(\underset{1}{A} + \underset{3}{A})Y_2^2 + 2\underset{1}{A}Y_2Y_3 + \underset{7}{A}Y_2Y_7 + (\underset{7}{A} + \underset{8}{A})Y_2Y_8 + \underset{7}{A}Y_2Y_9 +\\
&+(\underset{1}{A} + \underset{3}{A})Y_3^2 + \underset{7}{A}Y_3Y_7 + \underset{7}{A}Y_3Y_8 + (\underset{7}{A} + \underset{8}{A})Y_3Y_9 + 2\underset{3}{A}Y_4^2 + 2\underset{8}{A}Y_4Y_{\underline{10}} +\\
&+2\underset{3}{A}Y_5^2 + 2\underset{8}{A}Y_5Y_{\underline{11}} + 2\underset{3}{A}Y_6^2 + 2\underset{8}{A}Y_6Y_{\underline{12}} + (\underset{2}{A} + \underset{4}{A})Y_7^2 + 2\underset{2}{A}Y_7Y_8 +\\
&+2\underset{2}{A}Y_7Y_9 + (\underset{2}{A} + \underset{4}{A})Y_8^2 + 2\underset{2}{A}Y_8Y_9 + (\underset{2}{A} + \underset{4}{A})Y_9^2 + 2\underset{4}{A}Y_{\underline{10}}^2 + 2\underset{4}{A}Y_{\underline{11}}^2 +\\
&+2\underset{4}{A}Y_{\underline{12}}^2 + \underset{5}{A}Y_{\underline{13}}^2 + \underset{9}{A}Y_{\underline{13}}Y_{\underline{16}} + \underset{5}{A}Y_{\underline{14}}^2 + \underset{9}{A}Y_{\underline{14}}Y_{\underline{17}} + \underset{5}{A}Y_{\underline{15}}^2 +\\
&+\underset{9}{A}Y_{\underline{15}}Y_{\underline{18}} + \underset{6}{A}Y_{\underline{16}}^2 + \underset{6}{A}Y_{\underline{17}}^2 + \underset{6}{A}Y_{\underline{18}}^2.
\end{aligned} \tag{4}$$

Таким образом, построена квадратичная форма 18 переменных, которая может быть записана в матричной форме:

$$\mathcal{U} = [Y]^T [A] [Y],$$

где

$$[Y] = [Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7, Y_8, Y_9, Y_{\underline{10}}, Y_{\underline{11}}, Y_{\underline{12}}, Y_{\underline{13}}, Y_{\underline{14}}, Y_{\underline{15}}, Y_{\underline{16}}, Y_{\underline{17}}, Y_{\underline{18}}]^T$$

— транспонированная вектор-строка, составленная из формальных переменных, $[A]$ — симметричная матрица квадратичной формы, элементами которой являются механические модули микрополярной среды.

Симметричную матрицу $[A]$ квадратичной формы можно представить в следующем блочном виде:

$$[A] = \begin{pmatrix}
[A_{11}] & 0 & [A_{13}] & 0 & 0 & 0\\
0 & [A_{22}] & 0 & [A_{24}] & 0 & 0\\
[A_{31}] & 0 & [A_{33}] & 0 & 0 & 0\\
0 & [A_{42}] & 0 & [A_{44}] & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & [A_{55}] & [A_{56}]\\
0 & 0 & 0 & 0 & [A_{65}] & [A_{66}]
\end{pmatrix},$$

где

$$[A_{11}] = \begin{bmatrix} \underset{1}{A} + \underset{3}{A} & \underset{1}{A} & \underset{1}{A} \\ \underset{1}{A} & \underset{1}{A} + \underset{3}{A} & \underset{1}{A} \\ \underset{1}{A} & \underset{1}{A} & \underset{1}{A} + \underset{3}{A} \end{bmatrix},$$

$$[A_{13}] = [A_{31}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underset{7}{A} + \underset{8}{A} & \underset{7}{A} & \underset{7}{A} \\ \underset{7}{A} & \underset{7}{A} + \underset{8}{A} & \underset{7}{A} \\ \underset{7}{A} & \underset{7}{A} & \underset{7}{A} + \underset{8}{A} \end{bmatrix},$$

$$[A_{22}] = 2 \begin{bmatrix} \underset{3}{A} & 0 & 0 \\ 0 & \underset{3}{A} & 0 \\ 0 & 0 & \underset{3}{A} \end{bmatrix}, \quad [A_{24}] = \begin{bmatrix} \underset{8}{A} & 0 & 0 \\ 0 & \underset{8}{A} & 0 \\ 0 & 0 & \underset{8}{A} \end{bmatrix},$$

$$[A_{44}] = 2 \begin{bmatrix} \underset{4}{A} & 0 & 0 \\ 0 & \underset{4}{A} & 0 \\ 0 & 0 & \underset{4}{A} \end{bmatrix}, \quad [A_{33}] = \begin{bmatrix} \underset{2}{A} + \underset{4}{A} & \underset{2}{A} & \underset{2}{A} \\ \underset{2}{A} & \underset{2}{A} + \underset{4}{A} & \underset{2}{A} \\ \underset{2}{A} & \underset{2}{A} & \underset{2}{A} + \underset{4}{A} \end{bmatrix},$$

$$[A_{56}] = [A_{65}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underset{9}{A} & 0 & 0 \\ 0 & \underset{9}{A} & 0 \\ 0 & 0 & \underset{9}{A} \end{bmatrix},$$

$$[A_{55}] = \begin{bmatrix} \underset{5}{A} & 0 & 0 \\ 0 & \underset{5}{A} & 0 \\ 0 & 0 & \underset{5}{A} \end{bmatrix}, \quad [A_{66}] = \begin{bmatrix} \underset{6}{A} & 0 & 0 \\ 0 & \underset{6}{A} & 0 \\ 0 & 0 & \underset{6}{A} \end{bmatrix}.$$

3. Диагонализация энергии деформации методом Якоби. Рассмотрим процесс приведения квадратичной формы к каноническому виду с использованием одного из основных методов линейной алгебры — метод Якоби (метод треугольного преобразования). Приведем энергию деформации к каноническому (или диагональному) виду, используя один из основных методов линейной алгебры — метод Якоби [7—9].

Метод Якоби применим, если все угловые миноры матрицы $[A]$ квадратичной формы отличны от нуля:

$$\Delta_1 \neq 0, \;\; \Delta_2 \neq 0, \; \dots \, , \; \Delta_{18} \neq 0. \tag{5}$$

В дальнейшем будет рассмотрен частный случай

$$\Delta_1 > 0, \;\; \Delta_2 > 0, \; \dots \, , \; \Delta_{18} > 0. \tag{6}$$

В этом случае существует единственное невырожденное линейное преобразование переменных вида:

$$\begin{cases} Y_1 &= X_1 + c_{12}X_2 + c_{13}X_3 + \ldots + c_{1\,\underline{18}}X_{\underline{18}}, \\ Y_2 &= X_2 + c_{23}X_3 + \ldots + c_{2\,\underline{18}}X_{\underline{18}}, \\ Y_3 &= X_3 + \ldots + c_{3\,\underline{18}}X_{\underline{18}}, \\ \vdots & \\ Y_{\underline{18}} &= X_{\underline{18}}, \end{cases} \tag{7}$$

приводящее рассматриваемую квадратичную форму к каноническому виду

$$\sum_{i=1}^{18} d_i X_i^2, \tag{8}$$

где

$$d_1 = \Delta_1, \;\; d_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}, \;\; j = 2, ..., 18. \tag{9}$$

Для коэффициентов c_{ij} $(i < j)$ этого преобразования справедлива следующая формула [7, 9]:

$$c_{ij} = \frac{A_{ji}^{(j)}}{\Delta_{j-1}}, \tag{10}$$

где $A_{ji}^{(j)}$ — алгебраическое дополнение к элементу a_{ji} в матрице, составленной из первых j строк и j столбцов матрицы $[A]$.

Перейдем к непосредственной диагонализации энергии деформации $\mathcal{U}(Y_1, \ldots, Y_{\underline{18}})$. Последовательно вычисляем все 18 угловых миноров матрицы $[A]$:

$$\Delta_1 = \underset{1}{A} + \underset{3}{A}, \quad \Delta_2 = \underset{3}{A}\,(2\underset{1}{A} + \underset{3}{A}), \quad \Delta_3 = \underset{3}{A}^2(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A}),$$

$$\Delta_4 = 2\underset{3}{A}^3(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A}), \quad \Delta_5 = 4\underset{3}{A}^4(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A}), \quad \Delta_6 = 8\underset{3}{A}^5(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A}).$$

$$\Delta_7 = 2\underset{3}{A}^4[4\underset{3}{A}(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A})(\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) - \underset{8}{A}^2(2\underset{1}{A} + \underset{3}{A}) - \underset{3}{A}\underset{7}{A}(3\underset{7}{A} + 2\underset{8}{A})],$$

$$\Delta_8 = \frac{1}{2}\underset{3}{A}^3(4\underset{3}{A}\underset{4}{A} - \underset{8}{A}^2)[4\underset{3}{A}(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A})(2\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) - \underset{8}{A}^2(\underset{1}{A} + \underset{3}{A}) - 2\underset{3}{A}\underset{7}{A}(3\underset{7}{A} + 2\underset{8}{A})],$$

$$\Delta_9 = \frac{1}{8}\underset{3}{A}^3(4\underset{3}{A}\underset{4}{A} - \underset{8}{A}^2)^2\,[4(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A})(3\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) - (3\underset{7}{A} + \underset{8}{A})^2],$$

$$\Delta_{10} = \frac{1}{16}\underset{3}{A}^2(4\underset{3}{A}\underset{4}{A} - \underset{8}{A}^2)^3[4(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A})(3\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) - (3\underset{7}{A} + \underset{8}{A})^2],$$

$$\Delta_{11} = \frac{1}{32}\underset{3}{A}(4\underset{3}{A}\underset{4}{A} - \underset{8}{A}^2)^4[4(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A})(3\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) - (3\underset{7}{A} + \underset{8}{A})^2],$$

$$\Delta_{12} = \frac{1}{64}(4\underset{3}{A}\underset{4}{A} - \underset{8}{A}^2)^5[4(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A})(3\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) - (3\underset{7}{A} + \underset{8}{A})^2],$$

$$\Delta_{13} = \frac{1}{64}\underset{5}{A}(4\underset{3}{A}\underset{4}{A} - \underset{8}{A}^2)^5[4(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A})(3\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) - (3\underset{7}{A} + \underset{8}{A})^2],$$

$$\Delta_{14} = \frac{1}{64}\underset{5}{A}^2(4\underset{3}{A}\underset{4}{A} - \underset{8}{A}^2)^5[4(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A})(3\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) - (3\underset{7}{A} + \underset{8}{A})^2],$$

$$\Delta_{15} = \frac{1}{64}\underset{5}{A}^3(4\underset{3}{A}\underset{4}{A} - \underset{8}{A}^2)^5[4(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A})(3\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) - (3\underset{7}{A} + \underset{8}{A})^2],$$

$$\Delta_{16} = \frac{1}{256}\underset{5}{A}^2(4\underset{3}{A}\underset{4}{A} - \underset{8}{A}^2)^5(4\underset{5}{A}\underset{6}{A} - \underset{9}{A}^2)[4(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A})(3\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) - (3\underset{7}{A} + \underset{8}{A})^2],$$

$$\Delta_{17} = \frac{1}{1024}\underset{5}{A}\,(4\underset{3}{A}\underset{4}{A} - \underset{8}{A}^2)^5(4\underset{5}{A}\underset{6}{A} - \underset{9}{A}^2)^2[4(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A})(3\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) - (3\underset{7}{A} + \underset{8}{A})^2],$$

$$\Delta_{18} = \frac{1}{4096}(4\underset{3}{A}\underset{4}{A} - \underset{8}{A}^2)^5(4\underset{5}{A}\underset{6}{A} - \underset{9}{A}^2)^3[4(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A})(3\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) - (3\underset{7}{A} + \underset{8}{A})^2].$$

В итоге исходная квадратичная форма записывается в каноническом виде (8), при этом коэффициенты $d_i \quad (i = 1, ..., 18)$ этого вида, в согласно (9), принимают вид:

$$d_1 = \Delta_1 = \underset{1}{A} + \underset{3}{A}, \quad d_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{\underset{3}{A}(2\underset{1}{A} + \underset{3}{A})}{\underset{1}{A} + \underset{3}{A}}, \quad d_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = \frac{\underset{3}{A}(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A})}{2\underset{1}{A} + \underset{3}{A}},$$

$$d_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta_3} = 2\underset{3}{A}, \quad d_5 = \frac{\Delta_5}{\Delta_4} = 2\underset{3}{A}, \quad d_6 = \frac{\Delta_6}{\Delta_5} = 2\underset{3}{A},$$

$$d_7 = \frac{\Delta_7}{\Delta_6} = \frac{4\underset{3}{A}(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A})(\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) - \underset{8}{A}^2(2\underset{1}{A} + \underset{3}{A}) - \underset{3}{A}\underset{7}{A}(3\underset{7}{A} + 2\underset{8}{A})}{4\underset{3}{A}(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A})},$$

$$d_8 = \frac{\Delta_8}{\Delta_7} = \frac{(4\underset{3}{A}\underset{4}{A} - \underset{8}{A}^2)[4\underset{3}{A}(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A})(2\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) - \underset{8}{A}^2(\underset{1}{A} + \underset{3}{A}) - 2\underset{3}{A}\underset{7}{A}(3\underset{7}{A} + 2\underset{8}{A})]}{4\underset{3}{A}[4\underset{3}{A}(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A})(\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) - \underset{8}{A}^2(2\underset{1}{A} + \underset{3}{A}) - \underset{3}{A}\underset{7}{A}(3\underset{7}{A} + 2\underset{8}{A})]},$$

$$d_9 = \frac{\Delta_9}{\Delta_8} = \frac{(4\underset{3}{A}\underset{4}{A} - \underset{8}{A}^2)[4(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A})(3\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) - (3\underset{7}{A} + \underset{8}{A})^2]}{4[4\underset{3}{A}(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A})(\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) - \underset{8}{A}^2(2\underset{1}{A} + \underset{3}{A}) - \underset{3}{A}\underset{7}{A}(3\underset{7}{A} + 2\underset{8}{A})]},$$

$$d_{10} = \frac{\Delta_{10}}{\Delta_9} = \frac{4\underset{3}{A}\underset{4}{A} - \underset{8}{A}^2}{2\underset{3}{A}}, \quad d_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{10}} = \frac{4\underset{3}{A}\underset{4}{A} - \underset{8}{A}^2}{2\underset{3}{A}}, \quad d_{12} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = \frac{4\underset{3}{A}\underset{4}{A} - \underset{8}{A}^2}{2\underset{3}{A}},$$

$$d_{13} = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12}} = \underset{5}{A}, \quad d_{14} = \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{13}} = \underset{5}{A}, \quad d_{15} = \frac{\Delta_{15}}{\Delta_{14}} = \underset{5}{A},$$

$$d_{16} = \frac{\Delta_{16}}{\Delta_{15}} = \frac{4\underset{5}{A}\underset{6}{A} - \underset{9}{A}^2}{4\underset{5}{A}}, \quad d_{17} = \frac{\Delta_{17}}{\Delta_{16}} = \frac{4\underset{5}{A}\underset{6}{A} - \underset{9}{A}^2}{4\underset{5}{A}}, \quad d_{18} = \frac{\Delta_{18}}{\Delta_{17}} = \frac{4\underset{5}{A}\underset{6}{A} - \underset{9}{A}^2}{4\underset{5}{A}}.$$

Найдем преобразование приводящее квадратичною форму $\mathcal{U}(Y_1, \ldots, Y_{\underline{18}})$ к каноническому виду. Ввиду громоздкости выкладок, продемонстрируем вычисление некоторых из коэффициентов c_{ij}.

Используя (10), находим элемент c_{12}:

$$c_{12}=\frac{A_{21}^{(2)}}{\Delta_1}=-\frac{a_{12}}{a_{11}}=-\frac{\underset{1}{A}}{\underset{1}{A}+\underset{3}{A}}.$$

Определим элементы c_{13} и c_{23} третьего столбца (7):

$$c_{13}=\frac{A_{31}^{(3)}}{\Delta_2}=\frac{1}{\Delta_2}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}=\frac{1}{\Delta_2}\begin{vmatrix} \underset{1}{A} & \underset{1}{A} \\ \underset{1}{A}+\underset{3}{A} & \underset{1}{A} \end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{\underset{1}{A}\underset{3}{A}}{\underset{3}{A}(2\underset{1}{A}+\underset{3}{A})}=-\frac{\underset{1}{A}}{2\underset{1}{A}+\underset{3}{A}},$$

$$c_{23}=\frac{A_{32}^{(3)}}{\Delta_2}=-\frac{1}{\Delta_2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix}=-\frac{1}{\Delta_2}\begin{vmatrix} \underset{1}{A}+\underset{3}{A} & \underset{1}{A} \\ \underset{1}{A} & \underset{1}{A} \end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{\underset{1}{A}\underset{3}{A}}{\underset{3}{A}(2\underset{1}{A}+\underset{3}{A})}=-\frac{\underset{1}{A}}{2\underset{1}{A}+\underset{3}{A}}.$$

Элементы c_{14}, c_{24}, c_{34} четвертого столбца, c_{15}, c_{25}, c_{35}, c_{45} пятого столбца и c_{16}, c_{26}, c_{36}, c_{46}, c_{56} шестого столбца равны нулю.

Перейдем к элементам c_{17}, c_{27}, c_{37} седьмого столбца (7):

$$c_{17}=\frac{A_{71}^{(7)}}{\Delta_6}=\frac{4}{\Delta_6}\begin{vmatrix} \underset{1}{A} & \underset{1}{A} & 0 & 0 & 0 & \underset{7}{A}+\underset{8}{A} \\ \underset{1}{A}+\underset{3}{A} & \underset{1}{A} & 0 & 0 & 0 & \underset{7}{A} \\ \underset{1}{A} & \underset{1}{A}+\underset{3}{A} & 0 & 0 & 0 & \underset{7}{A} \\ 0 & 0 & \underset{3}{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underset{3}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underset{3}{A} & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{\underset{3}{A}\underset{7}{A}+2\underset{1}{A}\underset{8}{A}+\underset{3}{A}\underset{8}{A}}{6\underset{1}{A}\underset{3}{A}+2\underset{3}{A}^2},$$

$$c_{27}=\frac{A_{72}^{(7)}}{\Delta_6}=-\frac{4}{\Delta_6}\begin{vmatrix} \underset{1}{A}+\underset{3}{A} & \underset{1}{A} & 0 & 0 & 0 & \underset{7}{A}+\underset{8}{A} \\ \underset{1}{A} & \underset{1}{A} & 0 & 0 & 0 & \underset{7}{A} \\ \underset{1}{A} & \underset{1}{A}+\underset{3}{A} & 0 & 0 & 0 & \underset{7}{A} \\ 0 & 0 & \underset{3}{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underset{3}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underset{3}{A} & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{\underset{3}{A}\underset{7}{A}-\underset{1}{A}\underset{8}{A}}{6\underset{1}{A}\underset{3}{A}+2\underset{3}{A}^2},$$

$$c_{37}=\frac{A^{(7)}_{73}}{\Delta_6}=\frac{4}{\Delta_6}\begin{vmatrix} \underset{1}{A}+\underset{3}{A} & \underset{1}{A} & 0 & 0 & 0 & \underset{7}{A}+\underset{8}{A} \\ \underset{1}{A} & \underset{1}{A}+\underset{3}{A} & 0 & 0 & 0 & \underset{7}{A} \\ \underset{1}{A} & \underset{1}{A} & 0 & 0 & 0 & \underset{7}{A} \\ 0 & 0 & \underset{3}{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underset{3}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underset{3}{A} & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{\underset{3\ 7}{AA}-\underset{1\ 8}{AA}}{6\underset{1\ 3}{AA}+2\underset{3}{A}^2}.$$

В итоге линейное преобразование (7) принимает следующий вид:

$$Y_1=X_1-\frac{\underset{1}{A}}{\underset{1}{A}+\underset{3}{A}}X_2-\frac{\underset{1}{A}}{2A_1+\underset{3}{A}}X_3-\frac{\underset{3\ 7}{AA}+2\underset{1\ 8}{AA}+\underset{3\ 8}{AA}}{6\underset{1\ 3}{AA}+2\underset{3}{A}^2}X_7+$$
$$+\frac{4\underset{1}{A}(3\underset{2}{A}+\underset{4}{A})\underset{8}{A}-\underset{7\ 8}{AA}(3\underset{7}{A}+\underset{8}{A})+4\underset{3}{A}(\underset{2\ 8}{AA}-\underset{4\ 7}{AA})}{2[4\underset{3}{A}(3\underset{1}{A}+\underset{3}{A})(\underset{2}{A}+\underset{4}{A})-\underset{8}{A}^2(2\underset{1}{A}+\underset{3}{A})-\underset{3\ 7}{AA}(3\underset{7}{A}+2\underset{8}{A})]}X_8+$$
$$+\frac{4\underset{1}{A}(3\underset{2}{A}+\underset{4}{A})\underset{8}{A}-\underset{7\ 8}{AA}(3\underset{7}{A}+\underset{8}{A})+4\underset{3}{A}(\underset{2\ 8}{AA}-\underset{4\ 7}{AA})}{2[\underset{1}{A}(24\underset{2\ 3}{AA}+12\underset{3\ 4}{AA}-\underset{8}{A}^2)+\underset{3}{A}(8\underset{2\ 3}{AA}+4\underset{3\ 4}{AA}-6\underset{7}{A}^2-4\underset{7\ 8}{AA}-\underset{8}{A}^2)]}X_9,$$

$$Y_2=X_2-\frac{\underset{1}{A}}{2A_1+\underset{3}{A}}X_3-\frac{\underset{3\ 7}{AA}-\underset{1\ 8}{AA}}{6\underset{1\ 3}{AA}+2\underset{3}{A}^2}X_7+$$
$$+\frac{\underset{1\ 8}{AA}^3+\underset{3\ 8}{AA}(3\underset{7}{A}^2+3\underset{7\ 8}{AA}+\underset{8}{A}^2-4\underset{1}{A}(3\underset{2}{A}+2\underset{4}{A}))-4\underset{3}{A}^2(\underset{2\ 8}{AA}+\underset{4}{A}(\underset{7}{A}+\underset{8}{A}))}{2\underset{3}{A}[2\underset{1}{A}(6\underset{2\ 3}{AA}+6\underset{3\ 4}{AA}-\underset{8}{A}^2)+\underset{3}{A}(4\underset{2\ 3}{AA}+4\underset{3\ 4}{AA}-3\underset{7}{A}^2-2\underset{7\ 8}{AA}-\underset{8}{A}^2)]}X_8+$$
$$+\frac{4\underset{1}{A}(3\underset{2}{A}+\underset{4}{A})\underset{8}{A}-\underset{7\ 8}{AA}(3\underset{7}{A}+\underset{8}{A})+4\underset{3}{A}(\underset{2\ 8}{AA}-\underset{4\ 7}{AA})}{2[\underset{1}{A}(24\underset{2\ 3}{AA}+12\underset{3\ 4}{AA}-\underset{8}{A}^2)+\underset{3}{A}(8\underset{2\ 3}{AA}+4\underset{3\ 4}{AA}-6\underset{7}{A}^2-4\underset{7\ 8}{AA}-\underset{8}{A}^2)]}X_9,$$

$$Y_3=X_3-\frac{\underset{3\ 7}{AA}-\underset{1\ 8}{AA}}{6\underset{1\ 3}{AA}+2\underset{3}{A}^2}X_7-$$
$$-\frac{(\underset{3\ 7}{AA}-\underset{1\ 8}{AA})(4\underset{3\ 4}{AA}-\underset{8}{A}^2)}{2\underset{3}{A}[2\underset{1}{A}(6\underset{2\ 3}{AA}+6\underset{3\ 4}{AA}-\underset{8}{A}^2)+\underset{3}{A}(4\underset{2\ 3}{AA}+4\underset{3\ 4}{AA}-3\underset{7}{A}^2-2\underset{7\ 8}{AA}-\underset{8}{A}^2)[}X_8+$$
$$+\frac{\underset{8}{A}(6\underset{7}{A}^2+5\underset{7\ 8}{AA}+\underset{8}{A}^2-8\underset{1}{A}(3\underset{2}{A}+\underset{4}{A}))-8\underset{3}{A}(\underset{2\ 8}{AA}+2\underset{4}{A}(\underset{7}{A}+\underset{8}{A}))}{2[\underset{1}{A}(24\underset{2\ 3}{AA}+12\underset{3\ 4}{AA}-\underset{8}{A}^2)+\underset{3}{A}(8\underset{2\ 3}{AA}+4\underset{3\ 4}{AA}-6\underset{7}{A}^2-4\underset{7\ 8}{AA}-\underset{8}{A}^2)]}X_9,$$

$$Y_4 = X_4 - \frac{\underset{8}{A}}{2\underset{3}{A}} X_{\underline{10}}, \quad Y_5 = X_5 - \frac{\underset{8}{A}}{2\underset{3}{A}} X_{\underline{11}}, \quad Y_6 = X_6 - \frac{\underset{8}{A}}{2\underset{3}{A}} X_{\underline{12}},$$

$$Y_7 = X_7 + \frac{\underset{3}{A}(\underset{7}{A}(3\underset{7}{A} + 2\underset{8}{A}) - 4\underset{2\,3}{AA}) - \underset{1}{A}(12\underset{2\,3}{AA} + \underset{8}{A^2})}{2\underset{1}{A}[2\underset{1}{A}(6\underset{2\,3}{AA} + 6\underset{3\,4}{AA} - \underset{8}{A^2}) + \underset{3}{A}(4\underset{2\,3}{AA} + 4\underset{3\,4}{AA} - 3\underset{7}{A^2} - 2\underset{7\,8}{AA} - \underset{8}{A^2})]} X_{\underline{8}} +$$
$$+ \frac{\underset{3}{A}(\underset{7}{A}(3\underset{7}{A} + 2\underset{8}{A}) - 4\underset{2\,3}{AA}) - \underset{1}{A}(12\underset{2\,3}{AA} + \underset{8}{A^2})}{\underset{1}{A}(24\underset{2\,3}{AA} + 12\underset{3\,4}{AA} - \underset{8}{A^2}) + \underset{3}{A}(8\underset{2\,3}{AA} + 4\underset{3\,4}{AA} - 6\underset{7}{A^2} - 4\underset{7\,8}{AA} - \underset{8}{A^2})} X_9,$$

$$Y_8 = X_8 + \frac{\underset{3}{A}(\underset{7}{A}(3\underset{7}{A} + 2\underset{8}{A}) - 4\underset{2\,3}{AA}) - \underset{1}{A}(12\underset{2\,3}{AA} + \underset{8}{A^2})}{\underset{1}{A}(24\underset{2\,3}{AA} + 12\underset{3\,4}{AA} - \underset{8}{A^2}) + \underset{3}{A}(8\underset{2\,3}{AA} + 4\underset{3\,4}{AA} - 6\underset{7}{A^2} - 4\underset{7\,8}{AA} - \underset{8}{A^2})} X_9,$$

$$Y_9 = X_9, \quad Y_{\underline{10}} = X_{\underline{10}}, \quad Y_{\underline{11}} = X_{\underline{11}}, \quad Y_{\underline{12}} = X_{\underline{12}},$$

$$Y_{\underline{13}} = X_{\underline{13}} - \frac{\underset{9}{A}}{2\underset{5}{A}} X_{\underline{16}}, \quad Y_{\underline{14}} = X_{\underline{14}} - \frac{\underset{9}{A}}{2\underset{5}{A}} X_{\underline{17}}, \quad Y_{\underline{15}} = X_{\underline{15}} - \frac{\underset{9}{A}}{2\underset{5}{A}} X_{\underline{18}},$$

$$Y_{\underline{16}} = X_{\underline{16}}, \quad Y_{\underline{17}} = X_{\underline{17}}, \quad Y_{\underline{18}} = X_{\underline{18}}.$$

4. Система определяющих неравенств. Положительная определенность энергии деформации (4) в соответствии с критерием Сильвестра обеспечивается выполнением неравенств $\Delta_k > 0 \quad (k = 1, ..., 18)$ [7—9]. С учетом очевидных упрощений, полученных ранее 18 угловых миноров эти неравенства, выраженные через определяющие механические модули микрополярной среды, принимают следующую форму:

$$\begin{gathered}
\underset{1}{A} + \underset{3}{A} > 0, \quad 2\underset{1}{A} + \underset{3}{A} > 0, \quad 3\underset{1}{A} + \underset{3}{A} > 0, \quad \underset{3}{A} > 0, \\
4\underset{3\,4}{AA} - \underset{8}{A^2} > 0, \quad 4\underset{5\,6}{AA} - \underset{9}{A^2} > 0, \quad \underset{5}{A} > 0, \\
4\underset{3}{A}(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A})(\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) - \underset{8}{A^2}(2\underset{1}{A} + \underset{3}{A}) - \underset{3\,7}{AA}(3\underset{7}{A} + 2\underset{8}{A}) > 0, \\
4\underset{3}{A}(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A})(2\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) - \underset{8}{A^2}(\underset{1}{A} + \underset{3}{A}) - 2\underset{3\,7}{AA}(3\underset{7}{A} + 2\underset{8}{A}) > 0, \\
4(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A})(3\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) - (3\underset{7}{A} + \underset{8}{A})^2 > 0.
\end{gathered} \tag{11}$$

Очевидно, каждое из неравенств $\underset{1}{A} + \underset{3}{A} > 0$ и $2\underset{1}{A} + \underset{3}{A} > 0$, являются следствием неравенств $3\underset{1}{A} + \underset{3}{A} > 0$ и $\underset{3}{A} > 0$. В результате приходим к системе восьми

неприводимых неравенств:

$$
\begin{gathered}
3\underset{1}{A}+\underset{3}{A}>0, \quad \underset{3}{A}>0, \quad \underset{5}{A}>0, \\
4\underset{3}{A}\underset{4}{A}-\underset{8}{A}^2>0, \quad 4\underset{5}{A}\underset{6}{A}-\underset{9}{A}^2>0, \\
4\underset{3}{A}(3\underset{1}{A}+\underset{3}{A})(\underset{2}{A}+\underset{4}{A})-\underset{8}{A}^2(2\underset{1}{A}+\underset{3}{A})-\underset{3}{A}\underset{7}{A}(3\underset{7}{A}+2\underset{8}{A})>0, \\
4\underset{3}{A}(3\underset{1}{A}+\underset{3}{A})(2\underset{2}{A}+\underset{4}{A})-\underset{8}{A}^2(\underset{1}{A}+\underset{3}{A})-2\underset{3}{A}\underset{7}{A}(3\underset{7}{A}+2\underset{8}{A})>0, \\
4(3\underset{1}{A}+\underset{3}{A})(3\underset{2}{A}+\underset{4}{A})-(3\underset{7}{A}+\underset{8}{A})^2>0.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Полученная система неравенств обеспечивает положительную определенность энергии деформации.

5. Выводы. В данной работе представлена методика приведения квадратичной формы энергию деформации (18 переменных) к каноническому виду методом Якоби. Основные результаты работы могут быть сформулированы следующим образом:

(1) В рамках Апредставления энергии деформации введен вспомогательный 18мерный вектор формальных переменных, который посредством линейного невырожденного преобразования переведен в новый канонический вектор.

(2) Диагонализация квадратичной формы выполнена методом Якоби, основанным на последовательном приведении матрицы квадратичной формы к диагональному виду с использованием угловых миноров. Было показано, что предложенный метод обладает рядом достоинств: 1) коэффициенты d_i $(i = 1, ..., 18)$ канонического вида вычисляются с помощью явных формул; 2) преобразование к новым переменным имеет верхнетреугольной вид: каждая новая переменная равна сумме соответствующей исходной переменной и линейной комбинации последующих исходных переменных.

(3) Из требования положительной определенности квадратичной формы выведены ограничения на определяющие механические модули. Проведенный анализ показал, что исходная система из 18 условий, формально следующих из критерия Сильвестра, является избыточной. Благодаря структуре Апредставления и свойствам метода Якоби эти 18 неравенств удается свести к восьми эквивалентным неприводимым неравенствам. Такая редукция сокращает число проверяемых условий при идентификации материала и упрощает аналитическое исследование области допустимых значений параметров.

(4) Благодаря существованию обратного преобразования все результаты, полученные в новых переменных (система неприводимых неравенств, диагональный вид формы, условия положительной определенности), могут быть выражены непосредственно через исходные переменные. Это

обеспечивает переход (интеграцию) от формального математического аппарата к прикладной механике гемитропных сред

Автор выражает признательность Ю. Н. Радаеву и Е. В. Мурашкину за ценные замечания и постоянное внимание к работе.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Конфликт интересов. Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
Источник финансирования. Автор заявляет об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Competing interests. The author declare that they have no competing interests.
Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gunther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums // Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 1958. Jg. 10. S. 195–213.
2. Kessel S. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums // Abh. Braunschw. Wiss. Ges. 1964. Jg. 16. S. 1–22. DOI: 10.24355/dbbs.084-201301181342-0.
3. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics / ed. by H. Görtler. Berlin, Heidelberg: Springer, 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
4. Nowacki W. Theory of Micropolar Elasticity: Course held at the Department for Mechanics of Deformable Bodies, July 1970, Udine. Vol. 25. Wien, New York: Springer, 1972. 286 p. (International Centre for Mechanical Sciences. Courses and Lectures). DOI: 10.1007/978-3-7091-2720-9.
5. Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
6. Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
7. Апатенок Р. Ф., Маркина А. М., Попова Н. В., Хейнман В. Б. Элементы линейной алгебры. Минск: Вышэйш. школа, 1977. 256 с.
8. Шилов Г. Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. Москва: Наука, 1969. 432 с.
9. Яцкин Н. И. Линейная алгебра: Теоремы и алгоритмы. Иваново: Иван. гос. ун-т, 2008. 607 с.

REFERENCES

1. Günther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums // Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 1958. Vol. 10. P. 195–213.

2. Kessel S. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums // Abh. Braunschw. Wiss. Ges. 1964. Vol. 16. P. 1–22. DOI: 10.24355/dbbs.084-201301181342-0.
3. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics / ed. by H. Görtler. Berlin, Heidelberg: Springer, 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
4. Nowacki W. Theory of Micropolar Elasticity: Course held at the Department for Mechanics of Deformable Bodies, July 1970, Udine. Vol. 25. Wien, New York: Springer, 1972. 286 p. (International Centre for Mechanical Sciences. Courses and Lectures). DOI: 10.1007/978-3-7091-2720-9.
5. Radayev Y. N. Multiplier Rule in Covariant Formulations of Micropolar Continuum Mechanics Theories // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki. 2018. Vol. 22, no. 3. P. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
6. Radayev Y. N., Murashkin E. V. Pseudotensor Formulation of the Mechanics of Hemitropic Micropolar Media // Problemy prochnosti i plastichnosti. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
7. Apatenok R. F., Markina A. M., Popova N. V., Kheinman V. B. Elements of Linear Algebra. Minsk: Vysheyshaya Shkola, 1977. 256 p.
8. Shilov G. E. Mathematical Analysis: Finite-Dimensional Linear Spaces. Moscow: Nauka, 1969. 432 p.
9. Yatskin N. I. Linear Algebra: Theorems and Algorithms. Ivanovo: Ivanovo State University, 2008. 607 p.

Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.002 *EDN: ZVGTAT*

Научная статья *УДК: 539.3*

М. В. Петров, О. А. Алексеева, Б. В. Михайлов

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ПУСТЫХ И НАПОЛНЕННЫХ СЫПУЧИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК СРЕДНЕЙ ДЛИНЫ ПРИ ИЗГИБЕ С КРУЧЕНИЕМ

Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, Чебоксары, Россия

Аннотация. Проведены экспериментальные исследования потери устойчивости пустых и наполненных сыпучим заполнителем тонкостенных цилиндрических оболочек средней длины при комбинированной нагрузке изгиба и кручения. Для этих целей разработана и изготовлена специальная экспериментальная установка, позволяющая испытывать образцы на прямой изгиб, кручение и изгибе с кручением. Образцы одним концом жестко закреплялись к стенке установки, на другой, свободный конец в начале прикладывали поперечную силу, равными ступенями нагружения, отмечая после каждой ступени нагружения вертикальный прогиб на свободном конце. Поперечная сила составляла от 20 до 80 % ожидаемой критической силы. Затем на свободный конец дополнительно прикладывали крутящий момент, определенными ступенями нагружения, отмечая после каждой ступени нагружения угол закручивания. Нагружение крутящим моментом проводилось до потери устойчивости цилиндрической оболочки. По экспериментальным данным определяли среднестатистические значения поперечной силы при изгибе и среднестатистическое значение крутящего момента тонкостенной цилиндрической оболочки из алюминиевого сплава 3004 в состоянии H19. Образцом являлась оболочка радиусом срединной поверхности 31,48 мм, толщиной стенки 0,1 мм.

Ключевые слова: эксперимент, цилиндрическая оболочка, изгиб, кручение, сыпучий заполнитель, устойчивость, ожидаемая критическая сила, крутящий момент, железный порошок.

Петров Михаил Васильевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры строительных конструкций; `e-mail:` 21pmv@mail.ru; https://orcid.org/0000-0002-7355-8553; AuthorID: 831162

Алексеева Олеся Анатольевна, аспирант кафедры строительных конструкций; `e-mail:` aosk21@yandex.ru; https://orcid.org/0009-0001-1155-8013; AuthorID: 1250072

Михайлов Борис Васильевич, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры строительных конструкций; `e-mail:` boris.mihaylov.63@mail.ru; https://orcid.org/0000-0001-6511-6985; AuthorID: 780012

для цитирования: *Петров М. В., Алексеева О. А., Михайлов Б. В.* Экспериментальное исследование потери устойчивости пустых и наполненных сыпучим заполнителем тонкостенных цилиндрических оболочек средней длины при изгибе с кручением // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 156–172. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.002. EDN: ZVGTAT

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© Петров М. В., Алексеева О. А., Михайлов Б. В. 2026

Поступила: 10.03.26; принята в печать: 03.06.26; опубликована: 29.10.26.

Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.002 *EDN: ZVGTAT*
Research Article

M. V. Petrov, O. A. Alekseeva, B. V. Mikhailov

EXPERIMENTAL STUDY OF THE LOSS OF STABILITY OF EMPTY AND FILLING FRACTURED THIN-WALLED CYLINDRICAL CASINGS OF MEDIUM LENGTH DURING BENDING WITH TORSION

I.N. Ulianov Chuvash State University, Cheboksary, Russia

Abstract. Experimental studies have been conducted on the loss of stability of empty and filled with a loose filler thin-walled cylindrical shells of medium length under combined bending and torsion loads. For this purpose, a special experimental setup has been developed and manufactured, which allows testing samples for straight bending, torsion, and bending with torsion. The samples were fixed at one end to the wall of the installation, on the other, free end at the beginning applied a lateral force, equal loading steps, noting after each loading step vertical deflection at the free end. Lateral force was from 20 to 80% of the expected critical force. Then, an additional torque was applied to the free end in certain loading steps, and the torsion angle was recorded after each loading step. The torque loading was performed until the cylindrical shell lost stability. Based on the experimental data, the average values of the transverse bending force and the average value of the torque were determined for a thin-walled cylindrical shell made of aluminum alloy 3004 in the H19 state. The sample was a shell with a radius of 31.48 mm and a wall thickness of 0.1 mm.

Keywords: experiment, cylindrical shell, bending, torsion, loose filler, stability, expected critical force, torque, iron powder.

Mikhail V. Petrov, Doctor of Technical Sciences, Professor; `e-mail:` 21pmv@mail.ru; `https://orcid.org/0000-0002-7355-8553`; AuthorID: 831162

Olesya A. Alekseeva, Postgraduate Student; `e-mail:` aosk21@yandex.ru; `https://orcid.org/0009-0001-1155-8013`; AuthorID: 1250072

Boris V. Mikhailov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor; `e-mail:` boris.mihaylov.63@mail.ru; `https://orcid.org/0000-0001-6511-6985`; AuthorID: 780012

to cite this article: *Petrov M. V., Alekseeva O. A., Mikhailov B. V.* Experimental study of the loss of stability of empty and filling fractured thin-walled cylindrical casings of medium length during bending with torsion // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 156–172. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.002

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Received: 10.03.26; *accepted: 03.06.26;* *published: 29.10.26.*

Введение. Тонкостенные цилиндрические оболочки традиционно применяются в авиационных конструкциях, трубопроводах, транспортной технике и в других отраслях. В частности, в транспортной технике для транспортировки как жидких, так и сыпучих материалов, широко используют различные автоцистерны, железнодорожные цистерны. Все данные емкости в основном представляют собой цилиндрическую оболочку. Обеспечение устойчивости цилиндрических оболочек является одной из главных задач при их эксплуатации. Устойчивость тонкостенных цилиндрических оболочек при простых и сложных видах нагружения теоретически и экспериментально исследованы во многих научных трудах [1—18]. Теоретический и экспериментальный анализ, а также влияние геометрических параметров на устойчивость цилиндрических оболочек при изгибе исследовалось в [7, 8]. Экспериментальные испытания пустых тонкостенных цилиндрических оболочек при совместном изгибе и кручении приведены в научном труде [18]. Данные экспериментальные испытания показали, что большое отношение диаметра к толщине приводит к потере несущей способности. Совместное действие изгиба и кручения приводит к снижению несущей способности по сравнению с изгибом [18]. Серьезное влияние на потерю устойчивости тонкостенных оболочек оказывают начальные несовершенства геометрии оболочки и другие факторы [1, 3, 9, 18]. Устойчивость тонкостенных оболочек, заполненных сыпучим заполнителем при действии комбинированной нагрузки не изучено.

Целью настоящей работы является экспериментальное исследование потери устойчивости пустых и наполненных сыпучим заполнителем тонкостенных цилиндрических оболочек средней длины при изгибе с кручением.

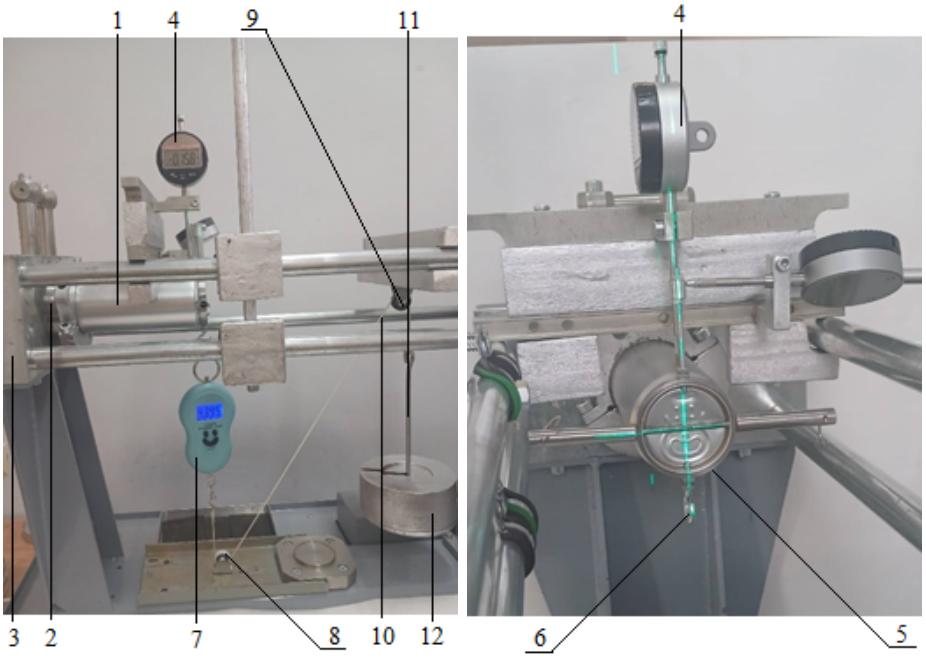
1. Экспериментальное исследование потери устойчивости пустых и наполненных сыпучим заполнителем тонкостенных цилиндрических оболочек средней длины при изгибе и кручении. Испытание цилиндрических оболочек на устойчивость при изгибе и кручении проводилось поэтапно. Образцы одним концом жестко закреплялись к стенке установки, на другой, свободный конец в начале прикладывали поперечную силу, равными ступенями нагружения, отмечая после каждой ступени нагружения вертикальный прогиб на свободном конце. Затем на свободный конец дополнительно прикладывали крутящий момент, определенными ступенями нагружения, отмечая после каждой ступени нагружения угол закручивания. Нагружение крутящим моментом проводилось до потери устойчивости цилиндрической оболочки. На начальном этапе экспериментов были испытаны пустые образцы. Затем образцы наполнялись сыпучим заполнителем на 90% по объему. В качестве заполнителя использовался железный порошок ПЖ-5 насыпной плотностью $\rho = 2,74$ г/см^3.

Для экспериментальных исследований потери устойчивости пустых и наполненных сыпучим заполнителем при изгибе и кручении тонкостенной цилиндрической оболочки из алюминиевого сплава марки 3004 в состоянии Н-19 изготовлена и собрана специальная экспериментальная установка, которая представлена на рисунках 1а, 1б. Исследуемые образцы (1) одним концом жестко закреплялись к оправке (2). В свою очередь, оправка жестко закреплялась к станине (3). Для измерения прогиба свободного конца образца установлен высококачественный микронный цифровой индикатор (4). Для придания жесткости на свободный конец испытываемого образца, закреплялось жесткое кольцо (5), к которому прикреплялся крючок (6). Соосность центра кольца и центра свободного конца цилиндрической оболочки контролировали с помощью лазерного уровня (нивелира) рис.1б. На крючок (6) для измерения поперечной силы при изгибе устанавливался динамометр (7). Другой конец динамометра через блоки (8) и (9) при помощи троса (10) соединялся с подвесом (11).

Испытуемый образец из алюминиевого сплава 3004 в состоянии Н19 имел следующие размеры: внешний диаметр $D = 63,05$ мм, внутренний диаметр $d = 62,85$ мм, расчетная длина образцов $l = 140$ мм, толщина стенки $h = 0,1$ мм.

После сборки специальной экспериментальной установки (рис. 1а) до нагружения показания высококачественного микронного цифрового индикатора (4) устанавливали на «0». Затем на подвес (11) для создания поперечной силы устанавливался груз (12), который создавал изгибающий момент. Нагружали образец равными ступенями, отмечая после каждой ступени нагружения вертикальный прогиб на свободном конце образца (1). При нагружении образца после каждой ступени давали выдержку во времени для сохранения постоянства показаний динамометра в течении не менее 30 с [19]. При каждом испытании значение поперечной силы составляла в пределах от 20 до 80 % ожидаемой критической силы. Нагрузку, которая создавала поперечную силу и показания цифрового индикатора (4), записывали в журнал испытаний.

При испытании на изгиб с кручением на свободный конец образца дополнительно прикладывали крутящий момент (рис.2). Для создания крутящего момента на свободном конце образца (1) закреплялись рычаги (2). На свободных концах рычагов устанавливали динамометры (3) для измерения крутящего момента при кручении. К другому концу правого динамометра устанавливался подвес (4), на который укладывались грузы (5). К другому концу левого динамометра (3) через блок (6) огибался трос (7) и соединялся с подвесом (4). Перпендикулярно к оси образца (1) к жесткому кольцу (8) прикреплялся стержень (9), к концу которого подходила ножка высококачественного микронного цифрового индикатора (10) для измерения угла закручивания. Показания высококачественного микронного цифрового индикатора (10) до нагружения устанавливали на «0». Грузы (5) укладывались на подвесы (4) с учетом плавности статического нагружения (без толчков и ударов). Концы динамометров (3) находились на расстоянии 82,5 мм от продольной оси образца. Тем самым, на



а) б)

Рис. 1. Специальная экспериментальная установка для испытаний на поперечный изгиб

свободный конец образца прикладывали грузы (5) определенными ступенями нагружения, отмечая после каждой ступени нагружения угол закручивания. Время регистрации угла закручивания не превышало 10 с. [19]. Нагружение крутящим моментом проводилось до потери устойчивости цилиндрической оболочки.

Вначале определили значение критической силы пустых образцов отдельно при изгибе. Для этого пустые образцы размерами указанными выше подвергались прямому изгибу. Испытывались десять образцов с последующей статистической обработкой результатов [20]. По результатам статистической обработки были получены следующие данные: среднее значение критической силы $F_{\text{кр}}^{exp} = 106,83$ Н, среднее квадратическое отклонение – 14,11 Н, доверительный интервал – (106,83±10,08) Н, коэффициент вариации – ν=13,21%, коэффициент асимметрии – $S_\mu = -0,738$, коэффициент эксцесса – $E_x = -0,804$, средняя квадратическая ошибка асимметрии – $S_A^2 = 0,377$, средняя квадратическая ошибка эксцесса – S_E^2=0,569.

По данным статистической обработки результатов испытаний проверили, подчиняются ли они нормальному закону распределения при помощи неравенств (1) и (2) [20].

Рис. 2. Специальная экспериментальная установка для испытания на устойчивость при изгибе с кручением.

$$|S_\mu| \leq 3 \cdot \sqrt{S_A^2}, \tag{1}$$

где $S_A^2 = \frac{6\cdot(n-1)}{(n+1)\cdot(n+3)}$

$$|E_x| \leq 5 \cdot \sqrt{S_E^2}, \tag{2}$$

где $S_E^2 = \frac{24\cdot n\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{(n+1)^2\cdot(n+3)\cdot(n+5)}$

Подставив значения в формулы (1) и (2), проверили соблюдение условий: $|-0,738| \leq 3 \cdot \sqrt{0,377}$ и $|-0,804| \leq 5 \cdot \sqrt{0,569}$.

Вышеуказанные условия соблюдаются, т.е. асимметрия и эксцесс несущественны, вызваны влиянием случайных факторов. Следовательно, приведенные результаты подчиняются нормальному закону распределения.

Далее определили значение критического крутящего момента отдельно при кручении. Для этого пустые образцы размерами указанными выше подвергались кручению. Так же испытывались десять образцов с последующей статистической обработкой результатов [20]. По результатам статистической обработки были получены следующие данные: среднее значение критического крутящего момента $T_{\text{кр}}^{exp}$=1008,43 Н·см, среднее квадратическое отклонение 58,26 Н·см, доверительный интервал (1008,43±41,64) Н·см, коэффициент вариации $\nu = 5,78\%$, коэффициент асимметрии $S_\mu = 0,068$, коэффициент эксцесса $E_x = -0,647$, средняя квадратическая ошибка асимметрии S_A^2=0,377, средняя квадратическая ошибка эксцесса $S_E^2 = 0,569$.

По данным статистической обработки испытаний проверили, подчиняются ли они нормальному закону распределения при помощи неравенств (1) и (2) [20].

Подставив значения в формулы (1) и (2), проверили соблюдение условий:

$$|0,068| \leq 3 \cdot \sqrt{0,377} \quad \text{и} \quad |-0,647| \leq 5 \cdot \sqrt{0,569}.$$

Вышеуказанные условия соблюдаются, т.е. асимметрия и эксцесс несущественны, вызваны влиянием случайных факторов. Следовательно, приведенные результаты подчиняются нормальному закону распределения.

Далее, проводились экспериментальные исследования пустых тонкостенных цилиндрических оболочек при изгибе с кручением. Для этого, выбирали значение поперечной силы в пределах от 20 до 80 % ожидаемой критической силы. На свободный конец образца прикладывали поперечную силу, равными ступенями нагружения доводя до значения 20,18 Н. Отмечали после каждой ступени нагружения вертикальный прогиб на свободном конце. Затем на свободный конец дополнительно прикладывали крутящий момент, определенными ступенями нагружения, отмечая после каждой ступени нагружения угол закручивания. Нагружение крутящим моментом проводилось до потери устойчивости цилиндрической оболочки. Подобные действия были выполнены для значений поперечных сил 39,85 Н и 62,66 Н.

Результаты статистической обработки испытаний пустых тонкостенных цилиндрических оболочек при изгибе с кручением с поперечными силами, указанными выше при доверительной вероятности $P = 0,95$ приведены в таблице 1.

Подставив значения в формулу (1), проверили соблюдение условий:

- поперечная сила F=20,18 Н, $|-0,471| \leq 3 \cdot \sqrt{0,377}$;
- поперечная сила F=39,85 Н, $|-0,014| \leq 3 \cdot \sqrt{0,377}$;
- поперечная сила F=62,66 Н, $|-0,077| \leq 3 \cdot \sqrt{0,377}$.

Подставив значения в формулу (2), проверили соблюдение условий:

- поперечная сила F=20,18 Н, $|-1,329| \leq 5 \cdot \sqrt{0,569}$;
- поперечная сила F=39,85 Н, $|2,000| \leq 5 \cdot \sqrt{0,569}$;
- поперечная сила F=62,66 Н, $|-1,646| \leq 5 \cdot \sqrt{0,569}$.

Поперечная сила, F, Н	Значение критического крутящего момента $T_{\text{кр}}^{\text{exp}}$, Н·см	Среднее квадратическое отклонение, Н·см	Доверительный интервал, Н·см	Коэффициент вариации ν, %	Коэффициент асимметрии S_μ	Коэффициент эксцесса E_x	Средняя квадратическая ошибка асимметрии S_A^2	Средняя квадратическая ошибка эксцесса S_E^2
20,18	913,07	67,33	$(913{,}07 \pm 48{,}12)$	7,37	−0,471	−1,329	0,377	0,569
39,85	764,23	44,73	$(764{,}23 \pm 31{,}97)$	5,85	0,014	−2,000	0,377	0,569
62,66	595,72	70,17	$(595{,}72 \pm 50{,}15)$	11,78	−0,077	−1,646	0,377	0,569

Таблица 1. Результаты статистической обработки испытаний пустых тонкостенных цилиндрических оболочек при изгибе с кручением

Вышеуказанные условия соблюдаются, т.е. асимметрия и эксцесс несущественны, вызваны влиянием случайных факторов. Следовательно, приведенные в табл.1 результаты подчиняются нормальному закону распределения.

По данным исследования пустых тонкостенных цилиндрических оболочек при изгибе с кручением построили график изменения критического состояния при различных нагрузках рисунок 3 (график 1). Данный график имеет полиномиальную зависимость второй степени, уравнение описывается следующей зависимостью: $y = -57,42 \cdot x^2 - 3,1914 \cdot x + 1,0034$, у которой коэффициент аппроксимации R^2=0,9985.

Далее выполнены исследования наполненных сыпучим заполнителем тонкостенных цилиндрических оболочек. Вначале определили значение критической силы отдельно при изгибе. Для этого образцы, наполненные сыпучим заполнителем на 90% по объему, подвергались прямому изгибу. Испытывались десять образцов с последующей статистической обработкой результатов [20].

В серии данных испытаний образцы теряли устойчивость в две стадии: первая – потеря местной устойчивости, вторая – полная потеря устойчивости образца. Местная потеря устойчивости происходила с образованием одной или нескольких вмятин в шахматном порядке в два ряда в сжатой зоне максимальных нормальных напряжений изгиба. Далее, через несколько ступеней нагружения наступала полная потеря устойчивости с образованием нескольких наклонных вмятин на боковой поверхности образца.

Результаты статистической обработки испытаний потери устойчивости образцов при прямом изгибе, с доверительной вероятностью P=0,95, приведены в таблице 2.

Подставив значения в формулу (1), проверили соблюдение условий:

- поперечная сила $F_{\text{кр}}^{exp}$=124,56 Н, $|1,432| \leq 3 \cdot \sqrt{0,377}$;
- поперечная сила $F_{\text{кр}}^{exp}$=140,00 Н, $|1,103| \leq 3 \cdot \sqrt{0,377}$;

Подставив значения в формулу (2), проверили соблюдение условий:

- поперечная сила $F_{\text{кр}}^{exp}$=124,56 Н, $|1,470| \leq 5 \cdot \sqrt{0,569}$;
- поперечная сила $F_{\text{кр}}^{exp}$=140,00 Н, $|-0,233| \leq 5 \cdot \sqrt{0,569}$.

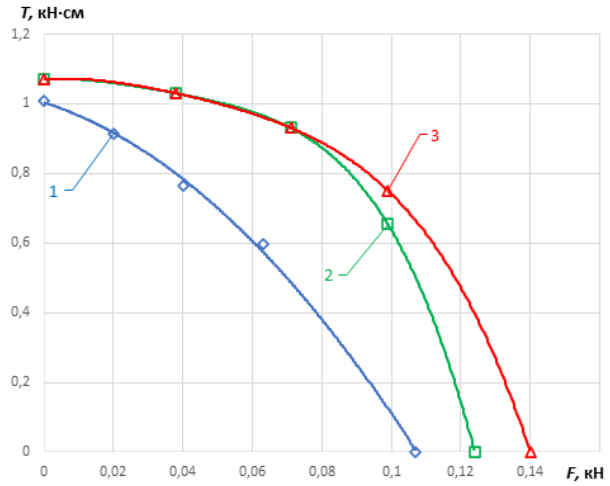


Рис. 3. Графики изменения критического состояния при различных видах нагружения

Вышеуказанные условия соблюдаются, т.е. асимметрия и эксцесс несущественны, вызваны влиянием случайных факторов. Следовательно, приведенные в табл.2 результаты подчиняются нормальному закону распределения.

В следующей серии опытов определяли значение критического крутящего момента заполненных образцов отдельно при кручении. Для этого наполненные сыпучим заполнителем на 90% по объему образцы подвергались кручению. В данной серии опытов испытывались десять образцов с последующей статистической обработкой результатов.

Потеря устойчивости	Значение критической силы $F_{\text{кр}}^{\text{exp}}$, Н	Среднее квадратическое отклонение, Н	Доверительный интервал, Н	Коэффициент вариации ν, %	Коэффициент асимметрии S_μ	Коэффициент эксцесса E_x	Средняя квадратическая ошибка асимметрии S_A^2	Средняя квадратическая ошибка эксцесса S_E^2
Местная потеря устойчивости	124,56	18,60	(124,56± 13,29)	14,93	1,432	1,470	0,377	0,569
Полная потеря устойчивости	140,00	21,68	(140,00± 15,49)	15,49	1,103	−0,233	0,377	0,569

Таблица 2. Результаты статистической обработки результатов испытаний заполненных образцов при прямом изгибе

По результатам статистической обработки были получены следующие данные: среднее значение критического крутящего момента $T_{\text{кр}}^{exp}$=1067,50 Н·см,

среднее квадратическое отклонение 24,66 Н·см, доверительный интервал (1067,50±17,62) Н·см, коэффициент вариации ν=2,31%, коэффициент асимметрии $S_\mu = -0,282$, коэффициент эксцесса $E_x = -1,845$, средняя квадратическая ошибка асимметрии S_A^2=0,377, средняя квадратическая ошибка эксцесса S_E^2=0,569.

По данным статистической обработки испытаний проверили, подчиняются ли они нормальному закону распределения при помощи неравенств (1) и (2).

Подставив значения в формулы (1) и (2), проверили соблюдение условий: $|-0,282| \leq 3 \cdot \sqrt{0,377}$ и $|-1,845| \leq 5 \cdot \sqrt{0,569}$.

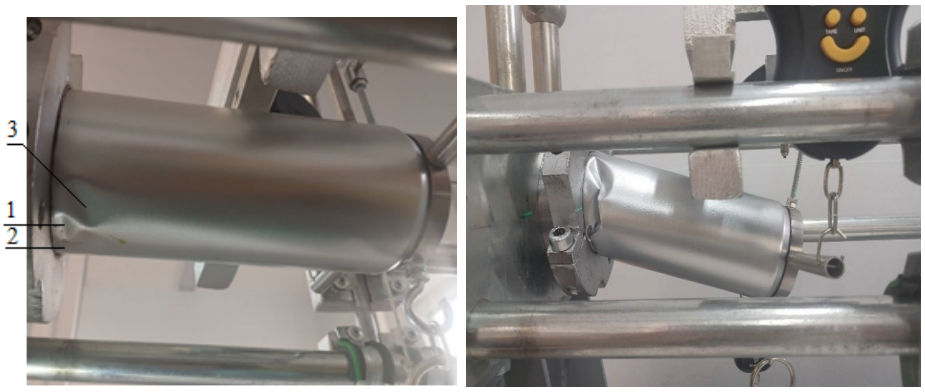
Вышеуказанные условия соблюдаются, т.е. асимметрия и эксцесс несущественны, вызваны влиянием случайных факторов. Следовательно, приведенные результаты подчиняются нормальному закону распределения.

Далее, проводились экспериментальные исследования потери устойчивости наполненных сыпучим заполнителем тонкостенных цилиндрических оболочек при изгибе с кручением. Для этого, выбирали значение поперечной силы в пределах от 20 до 80 % ожидаемой критической силы. На свободный конец образца прикладывали поперечную силу, равными ступенями нагружения доводя до значения 38,45 Н. Отмечали после каждой ступени нагружения вертикальный прогиб на свободном конце. Затем на свободный конец дополнительно прикладывали крутящий момент, определенными ступенями нагружения, отмечая после каждой ступени нагружения угол закручивания. Нагружение крутящим моментом проводилось до потери устойчивости цилиндрической оболочки. Подобные действия также были выполнены для значений поперечных сил 71,03 Н и 99,53 Н.

При прикладывании поперечной силы значениями 38,45 Н и 71,03 Н образцы теряли устойчивость в одну стадию – полная потеря устойчивости образца. При значении поперечной силы равной 99,53 Н образцы теряли устойчивость в две стадии: первая – потеря местной устойчивости, вторая – полная потеря устойчивости образца.

Местная потеря устойчивости наблюдалась в появлении одной вмятины (1) около зоны максимальных нормальных напряжений прямого изгиба рис. 4а (вид снизу). Затем, при дальнейшем нагружении образца одновременно появлялись вмятины в зоне максимальных нормальных напряжений изгиба (2) и наклонная вмятина (3) между зонами максимальных нормальных напряжений изгиба и максимальных касательных напряжений. При дальнейшем нагружении наступала вторая стадия – полная потеря устойчивости образца, рис. 4б (вид слева). После местной потери устойчивости образец разгружали и в этом случае образец принимал начальную форму. Значит устойчивость терялась в упругости.

Результаты статистической обработки результатов испытаний образцов, наполненных сыпучим заполнителем на 90% по объему, при изгибе и кручении с начальными поперечными силами, указанными выше при доверительной вероятности P=0,95 приведены в таблице 3.



а) б)

Рис. 4. Стадии потери устойчивости при значении поперечной силы равной 99,53 Н

Поперечная сила, F, Н	Значение критического крутящего момента $T_{\text{кр}}^{\text{exp}}$, Н·см	Среднее квадратическое отклонение, Н·см	Доверительный интервал, Н·см	Коэффициент вариации ν, %	Коэффициент асимметрии S_μ	Коэффициент эксцесса E_x	Средняя квадратическая ошибка асимметрии S_A^2	Средняя квадратическая ошибка эксцесса S_E^2
38,45 Полная потеря устойчивости	1030,50	50,60	(1030,50 ± 36,16)	4,91	−0,253	−1,456	0,377	0,569
71,03 Полная потеря устойчивости	931,30	54,92	(931,30 ± 39,25)	5,90	0,111	−1,255	0,377	0,569
99,53 Местная потеря устойчивости	654,10	451,73	(654,10 ± 322,84)	69,06	1,344	−0,124	0,377	0,569
99,53 Полная потеря устойчивости	751,30	423,17	(751,30 ± 302,43)	56,32	1,741	0,613	0,377	0,569

Таблица 3. Результаты статистической обработки результатов испытаний наполненных сыпучим заполнителем тонкостенных цилиндрических оболочек при изгибе с кручением

Подставив значения в формулу (1), проверили соблюдение условий:

- критический крутящий момент, полная потеря устойчивости $T_{\text{кр}}^{exp}$=1030,50 Н·см

$$|-0,253| \leq 3 \cdot \sqrt{0,377};$$

- критический крутящий момент, полная потеря устойчивости $T_{\text{кр}}^{exp}$=931,30 Н·см

$$|0,111| \leq 3 \cdot \sqrt{0,377};$$

- критический крутящий момент, местная потеря устойчивости $T_{\text{кр}}^{exp}$=654,10 Н·см

$$|1,344| \leq 3 \cdot \sqrt{0,377};$$

- критический крутящий момент, полная потеря устойчивости $T_{\text{кр}}^{exp}$=751,30 Н·см

$$|1,741| \leq 3 \cdot \sqrt{0,377}.$$

Подставив значения в формулу (2), проверили соблюдение условий:

- критический крутящий момент, полная потеря устойчивости $T_{\text{кр}}^{exp}$=1030,50 Н·см

$$|-1,456| \leq 5 \cdot \sqrt{0,569};$$

- критический крутящий момент, полная потеря устойчивости $T_{\text{кр}}^{exp}$=931,30 Н·см

$$|-1,255| \leq 5 \cdot \sqrt{0,569};$$

- критический крутящий момент, местная потеря устойчивости $T_{\text{кр}}^{exp}$=654,10 Н·см

$$|-0,124| \leq 5 \cdot \sqrt{0,569};$$

- критический крутящий момент, полная потеря устойчивости $T_{\text{кр}}^{exp}$=751,30 Н·см

$$|0,613| \leq 5 \cdot \sqrt{0,569}.$$

Вышеуказанные условия соблюдаются, т.е. асимметрия и эксцесс несущественны, вызваны влиянием случайных факторов. Следовательно, приведенные в табл. 3 результаты подчиняются нормальному закону распределения.

По данным исследования, наполненных сыпучим заполнителем тонкостенных цилиндрических оболочек при изгибе и кручении построены графики критического состояния при различных значениях поперечной силы и крутящего момента рисунок 3 (график 2, 3).

График 2 имеет полиномиальную зависимость четвертой степени, уравнение описывается следующей зависимостью

$$y \;=\; -11215 \cdot x^4 \;+\; 1468,4 \cdot x^3 \;-\; 84,493 \cdot x^2 \;+\; 0,6532 \cdot x \;+\; 1,07,$$

у которой коэффициент аппроксимации R^2=1.

График 3 имеет полиномиальную зависимость четвертой степени, уравнение описывается следующей зависимостью

$$y = -6053,3 \cdot x^4 + 968,39 \cdot x^3 - 77,395 \cdot x^2 + 0,8222 \cdot x + 1,07,$$

у которой коэффициент аппроксимации R^2=1.

По полученным экспериментальным данным был выполнен анализ графиков 1, 2 и 3 (рис.3).

При прямом изгибе была установлена зависимость критической силы пустых и наполненных сыпучим заполнителем на 90 % по объему. Повышение устойчивости образцов наполненных сыпучим заполнителем относительно пустых образцов при местной потере составляла около 16 %, а повышение устойчивости образцов при полной потере составляла около 31%. В работе [10] для цилиндрических образцов, у которых наружный диаметр 65,5 мм, длина 135 мм, толщина 0,1 мм возрастание критической нагрузки образцов заполненных сыпучими материалами относительно пустых образцов составляла 40,50 % [10].

При кручении так же была установлена зависимость критического крутящего момента пустых и наполненных сыпучим заполнителем на 90 % по объему. Повышение устойчивости образцов наполненных сыпучим заполнителем относительно пустых образцов при полной потере устойчивости составляла около 7%. Приблизительно такие же проценты (7,7%) повышения критического крутящего момента относительно пустых образцов получены в работе [13].

Заключение.

(1) Анализ результатов экспериментальных исследований показал, что приведенные результаты статистической обработки результаты всех испытаний подчиняются нормальному закону распределения и эксперименты выполнены с доверительной вероятностью $P = 0,95$. Анализ результатов исследования, наполненных сыпучим заполнителем тонкостенных цилиндрических оболочек показывает, что, начиная от поперечной силы равной 71,03 Н до 124,56 Н, оболочки теряют устойчивость в две стадии: первая – потеря местной устойчивости, вторая – полная потеря устойчивости образца. Начиная от величины поперечной силы равной 124,56 Н до 140,00 Н происходит сразу полная потеря устойчивости образца.

(2) Для тонкостенных оболочек, заполненных сыпучим материалом, устойчивость повышается.

(3) Практические расчеты на устойчивость необходимо выполнять для критического состояния местной потери устойчивости.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. М.В. Петров – постановка задачи, написание текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, О.А. Алексеева – обзор литературы, постановка и проведение экспериментов, обработка данных, Б.В. Михайлов – постановка и проведение экспериментов, обработка данных, анализ результатов, оформление таблиц и рисунков.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. M.V. Petrov – formulation of the task, writing of the manuscript text, coordination of the final version of the manuscript, O.A. Alekseeva – literature review, formulation and execution of experiments, data processing, B.V. Mikhailov – formulation and execution of experiments, data processing, analysis of results, and design of tables and figures.
Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.
Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. Т. 2. Ч. 2. 3-е изд. Москва: Издательство Юрайт, 2025. 480 с. (Высшее образование). Учебник для вузов.
2. Вольмир А. С., Григорьев Ю. П., Станкевич А. И. Сопротивление материалов. Москва: Дрофа, 2007. 591 с. EDN: SDTWRP. Учебник для вузов.
3. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Иосилевич Г. Б. Расчет на прочность деталей машин. 4-е изд. Москва: Машиностроение, 1993. 640 с. EDN: KOJBWQ. Справочник.
4. Ильюшин А. А., Огибалов П. М. Упругопластические деформации полых цилиндров. Москва: Издательство Московского университета, 1960. 227 с.
5. Зубчанинов В. Г. Устойчивость и пластичность: Устойчивость. Т. 1. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 448 с.
6. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. 3-е изд. Москва: Либроком, 2009. 640 с.
7. Маневич А. И., Пономаренко Е. А., Прокопало Е. Ф. Устойчивость ортотропных цилиндрических оболочек при изгибе поперечной силой. Сообщение 1. Теория // Проблемы прочности. 2013. № 1. С. 101–111.
8. Маневич А. И., Пономаренко Е. А., Прокопало Е. Ф. Устойчивость ортотропных цилиндрических оболочек при изгибе поперечной силой. Сообщение 2. Эксперимент // Проблемы прочности. 2013. № 2. С. 114–120.
9. Баженов В. Г. и др. Теоретическое и экспериментальное исследование потери устойчивости и закритического поведения тонкостенной цилиндрической оболочки при изгибе // Проблемы прочности и пластичности. 2009. № 71. С. 77–83. EDN: KYYOXT.
10. Петров М. В., Гоник Е. Г., Федорова Т. Г. Устойчивость при изгибе тонкостенных оболочек, заполненных различными сыпучими материалами // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 4. С. 52–58. EDN: YXCEQO.
11. Гоник Е. Г., Петров М. В., Федорова Т. Г. Экспериментальное исследование потери устойчивости консольно закрепленных цилиндрических тонкостенных оболочек при поперечном изгибе // Проблемы прочности и пластичности. 2016. Т. 78, № 2. С. 228–235. EDN: WAASCR.
12. Петров М. В. и др. Экспериментальные исследования устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек средней длины, заполненных сыпучим материалом, при кручении // Международный журнал по расчету гражданских и

строительных конструкций. 2023. Т. 19, № 3. С. 49–57. DOI: 10.22337/2587-9618-2023-19-3-49-57. EDN: LHABAO.

13. Петров М. В. и др. Приближенный метод расчета на устойчивость тонкостенных цилиндрических оболочек средней длины, заполненных сыпучим материалом, при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2. С. 10–18. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.002. EDN: JYAIGD.
14. Петров М. В. и др. Экспериментальное определение модуля сдвига алюминиевого сплава 3004 в состоянии Н19 // Строительство и застройка: жизненный цикл – 2024: материалы VII Международной (XIII Всероссийской) конференции (Чебоксары, 20–21 нояб. 2024). Чебоксары: ООО «Издательский дом „Среда“», 2024. С. 196–202. EDN: WCDAQX.
15. Баженов В. Г. и др. Численное моделирование предельных состояний упругопластических оболочек вращения при комбинированных сложных нагружениях // Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела: материалы VIII Международного научного симпозиума, посвященного 85-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники РФ профессора В. Г. Зубчанинова (Тверь, 9–11 дек. 2015). Тверь: Тверской государственный технический университет, 2015. С. 34–41.
16. Rotter J. M., Sadowski A. J. Full plastic resistance of tubes under bending and axial force: exact treatment and approximations // Structures. 2016. Vol. 10. P. 30–38. DOI: 10.1016/j.istruc.2016.11.004.
17. Сысоев О. Е., Намоконов А. Н., Сысоев Е. О. Численные исследования колебаний тонкостенной цилиндрической оболочки в пластической зоне деформации // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. 4(66). С. 173–184. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.012. EDN: ESVEFT.
18. URL: https://files.ssrcweb.org/proceedings/2023/Ding_et_al_SSRC_2023.pdf. (Дата обр. 10.04.2026).
19. URL: https://gostrf.com/normadata/1/4294852/4294852782.pdf. (Дата обр. 14.04.2026).
20. Золотухин Ю. Д. Испытание строительных конструкций. Минск: Вышэйшая школа, 1983. 208 с. Учебное пособие для вузов по специальности «Промышленное и гражданское строительство».

REFERENCES

1. Vol'mir A. S. Stability of Deformable Systems. Vol. 2. Part 2. 3rd ed. Moscow: Yurait, 2025. 480 p. (Higher Education). Textbook for higher education institutions (in Russian).
2. Vol'mir A. S., Grigor'ev Y. P., Stankevich A. I. Strength of Materials. Moscow: Drofa, 2007. 591 p. EDN: SDTWRP. Textbook for higher education institutions (in Russian).
3. Birger I. A., Shorr B. F., Iosilevich G. B. Strength Analysis of Machine Components. 4th ed. Moscow: Mashinostroenie, 1993. 640 p. EDN: KOJBWQ. Handbook (in Russian).

4. Il'yushin A. A., Ogibalov P. M. Elastoplastic Deformations of Hollow Cylinders. Moscow: Moscow University Press, 1960. 227 p. (in Russian).
5. Zubchaninov V. G. Stability and Plasticity: Stability. Vol. 1. Moscow: FIZMATLIT, 2007. 448 p. (in Russian).
6. Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells. 3rd ed. Moscow: Librokom, 2009. 640 p. (in Russian).
7. Manevich A. I., Ponomarenko E. A., Prokopalo E. F. Stability of Orthotropic Cylindrical Shells under Bending by a Transverse Force. Part 1. Theory // Strength of Materials. 2013. No. 1. P. 101–111. (in Russian).
8. Manevich A. I., Ponomarenko E. A., Prokopalo E. F. Stability of Orthotropic Cylindrical Shells under Bending by a Transverse Force. Part 2. Experiment // Strength of Materials. 2013. No. 2. P. 114–120. (in Russian).
9. Bazhenov V. G. et al. Theoretical and Experimental Investigation of Buckling and Postbuckling Behavior of a Thin-Walled Cylindrical Shell under Bending // Problems of Strength and Plasticity. 2009. No. 71. P. 77–83. EDN: KYYOXT. (in Russian).
10. Petrov M. V., Gonik E. G., Fedorova T. G. Bending Stability of Thin-Walled Shells Filled with Various Granular Materials // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I. Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2017. No. 4. P. 52–58. EDN: YXCEQO. (in Russian).
11. Gonik E. G., Petrov M. V., Fedorova T. G. Experimental Investigation of Buckling of Cantilevered Thin-Walled Cylindrical Shells under Transverse Bending // Problems of Strength and Plasticity. 2016. Vol. 78, no. 2. P. 228–235. EDN: WAASCR. (in Russian).
12. Petrov M. V. et al. Experimental Investigations of the Torsional Stability of Medium-Length Thin-Walled Cylindrical Shells Filled with Granular Material // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2023. Vol. 19, no. 3. P. 49–57. DOI: 10.22337/2587-9618-2023-19-3-49-57. EDN: LHABAO. (in Russian).
13. Petrov M. V. et al. Approximate Method for Calculating the Torsional Stability of Medium-Length Thin-Walled Cylindrical Shells Filled with Granular Material // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I. Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2022. No. 2. P. 10–18. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.002. EDN: JYAIGD. (in Russian).
14. Petrov M. V. et al. Experimental Determination of the Shear Modulus of 3004 Aluminum Alloy in the H19 Temper // Construction and Development: Life Cycle – 2024: Proceedings of the VII International (XIII All-Russian) Conference (Cheboksary, Nov. 20–21, 2024). Cheboksary: Sreda Publishing House, 2024. P. 196–202. EDN: WCDAQX. (in Russian).
15. Bazhenov V. G. et al. Numerical Modeling of Limit States of Elastoplastic Shells of Revolution under Combined Complex Loading // Strength, Plasticity, and Stability Problems in the Mechanics of Deformable Solids: Proceedings of the VIII International Scientific Symposium Dedicated to the 85th Anniversary of Professor V. G. Zubchaninov (Tver, Dec. 9–11, 2015). Tver: Tver State Technical University, 2015. P. 34–41. (in Russian).

16. Rotter J. M., Sadowski A. J. Full Plastic Resistance of Tubes under Bending and Axial Force: Exact Treatment and Approximations // Structures. 2016. Vol. 10. P. 30–38. DOI: 10.1016/j.istruc.2016.11.004.
17. Sysoev O. E., Namokonov A. N., Sysoev E. O. Numerical Investigation of Vibrations of a Thin-Walled Cylindrical Shell in the Plastic Deformation Zone // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I. Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. 4(66). P. 173–184. DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.012. EDN: ESVEFT. (in Russian).
18. Ding et al. SSRC 2023 Conference Paper. URL: https://files.ssrcweb.org/proceedings/2023/Ding_et_al_SSRC_2023.pdf (visited on 04/10/2026).
19. Regulatory Document. URL: https://gostrf.com/normadata/1/4294852/4294852782.pdf (visited on 04/14/2026); (in Russian).
20. Zolotukhin Y. D. Testing of Building Structures. Minsk: Vysheishaya Shkola, 1983. 208 p. Textbook for higher education institutions specializing in industrial and civil construction (in Russian).

Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.010 *EDN: GDIBGH*

Научная статья *УДК: 531.534*

Н. Ю. Зайко[1], *О. Н. Любимова*[1,2]

О СВЯЗИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТРЕНИЯ И СТЕСНЕННОЙ ДЕФОРМАЦИИ В КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ПРИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАГРУЗКАХ

[1]*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия*

[2]*Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, Хабаровск, Россия*

Аннотация. Исследуется новый подход к решению контактной задачи для системы сопряженных цилиндров из материалов с разными термомеханическими свойствами при температурных нагрузках. Предложены неклассические условия, позволяющие моделировать контактное взаимодействие через стесненную деформацию, при температурных нагрузках. Введен новый параметр, характеризующий степень проскальзывания на границе сопряжения материалов – коэффициент стесненной деформации. За стесненную деформацию принимается разница деформаций при разных условиях проскальзывания по границе сопряжения материалов. Контактное условие имеет простой физический смысл: стесненная деформация прямо пропорциональна максимальной разнице деформаций в условиях свободного проскальзывания сопряженных слоев при нагреве (или охлаждении), коэффициент пропорциональности и есть коэффициент стесненной деформации. В условиях осевой симметрии и обобщенного плоского деформированного состояния, при поставленном условии для задачи получено аналитическое решение. Параллельно, в рамках классической постановки контактной задачи проведено численное моделирование в конечно-элементном пакете ANSYS для сопряженных цилиндров с разными модулями упругости и коэффициентами линейного температурного расширения. Получена аналитическая связь введенного коэффициента стесненной деформации с коэффициентом трения и показана сходимость решения в новой постановке к решению в классической постановке. Теоретическая и практическая значимость вводимого коэффициента стесненной деформации связана с возможностью его экспериментальной оценки посредством дилатометрических измерений в соединениях при изменении температуры. Зная связь коэффициента стесненной деформации с коэффициентом трения появляется возможность экспериментальной оценки коэффициента трения для разнородных соединений при температурных изменениях. Несмотря на то, что основной целью работы является моделирование поведения стеклометаллических изделий (стеклометаллокомпозитных оболочек и стержней), установленные результаты могут быть полезны при моделирований контактного взаимодействия в сварных конструкциях и слоистых композитах.

Ключевые слова: контактная задача, термонапряженное состояние, соосные цилиндрические системы, стесненная деформация, коэффициент трения, коэффициент стесненной деформации

Зайко Надежда Юрьевна, старший преподаватель; `e-mail:` golobokova.nju@dvfu.ru; `https://orcid.org/0009-0008-8420-6183`;

Любимова Ольга Николаевна, профессор; e-mail: berms@mail.ru; https://orcid.org/0000-0003-4802-7352;

для цитирования: *Зайко Н. Ю., Любимова О. Н.* О связи коэффициентов трения и стесненной деформации в контактной задаче при температурных нагрузках // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 173–191. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.010. EDN: GDIBGH

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© Зайко Н. Ю., Любимова О. Н. 2026

Поступила: 01.05.26; принята в печать: 31.07.26; опубликована: 29.10.26.

Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.010 *EDN: GDIBGH*
Research Article

N. Y. Zaiko[1], *O. N. Lyubimova*[1,2]

ON THE RELATIONSHIP BETWEEN COEFFICIENTS OF FRICTION AND CONSTRAINED DEFORMATION IN A CONTACT PROBLEM UNDER TEMPERATURE LOADS

[1] *Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russian Federation*

[2] *Khabarovsk Branch of the Federal State Budgetary Institution of Science Institute of Applied Mathematics, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russian Federation*

Abstract. This paper presents a new approach to solving the contact problem that arises when a system of cylindrical elements made of materials with different thermomechanical properties interacts under temperature loads. Within the framework of this approach, non-standard conditions are proposed that make it possible to simulate the process of contact interaction through a constrained deformation that occurs under the influence of temperature. A new parameter has been introduced — the coefficient of constrained deformation, which characterizes the degree of slippage at the boundary between materials. Constrained deformation is defined as the difference between deformations that occur under different slip conditions at the interface of the materials. The contact condition has a simple physical meaning: the relative deformation that occurs in a confined state is directly proportional to the maximum difference in deformations that occur when the conjugate layers slip freely when the temperature changes. The coefficient of proportionality between these values is called the coefficient of constrained deformation. Under the conditions of axial symmetry and generalized planar deformed state, when all the necessary conditions of the problem are fulfilled, an analytical solution was obtained. In parallel, within the framework of the classical formulation of the contact problem, numerical modeling was carried out in software system for finite element analysis ANSYS for coupled cylinders with various modulus of elasticity and coefficients of linear thermal expansion. As a result, an analytical relationship was established between the introduced coefficient of constrained deformation and the coefficient of friction, and the convergence of the solution in the new formulation to the solution in the classical formulation was demonstrated. The theoretical and practical value of the coefficient of constrained deformation lies in the possibility of its experimental determination using dilatometric methods in compounds with temperature changes. Knowing the relationship between the coefficient of constrained deformation and the coefficient of friction, it is possible to estimate the coefficient of friction for joints made of dissimilar materials under temperature changes. Although the main purpose of the study is to model the behavior of glass-metal products, such as glass-metal composite shells and rods, the results obtained can also be useful for modeling contact interaction in welded structures and layered composites.

Keywords: contact problem, thermally stressed state, coaxial cylindrical systems, constrained deformation, coefficient of friction, coefficient of constrained deformation

Nadezhda Y. Zaiko, Senior Lecturer; `e-mail:` golobokova.nju@dvfu.ru; `https://orcid.org/0009-0008-8420-6183`;

Olga N. Lyubimova, Professor; e-mail: berms@mail.ru; https://orcid.org/0000-0003-4802-7352;

to cite this article: *Zaiko N. Y., Lyubimova O. N.* On the relationship between coefficients of friction and constrained deformation in a contact problem under temperature loads // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 173–191. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.010

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Received: 01.05.26; accepted: 31.07.26; published: 29.10.26.

Введение Актуальность работы определяет практическая задача получения стеклометаллокомпозитных цилиндрических оболочек как элементов корпуса глубоководных аппаратов [1—3]. В целом стеклометаллокомпозитные оболочки представляют из себя двух- и трехслойный стеклометаллический композит, в котором стеклянный монослой из неорганического кварцевого стекла внутренний или заключен между металлическими слоями из стали или алюминия (Рис. 1). Технология получения связана с термической обработкой, в результате которой соединение слоев происходит за счет диффузии через границу раздела (сталь-стекло) [2], либо за счет механического сцепления при термодеформировании в зоне пластичности (стекло-алюминий) [3].

Если технологические параметры подобраны неточно, то зона контакта может содержать промежуточные хрупкие слои или дефекты, в виде неплотного прилегания материалов, что влияет на напряженно-деформируемое состояние при следующих циклах технологической температурной обработки и при эксплуатации в режимах циклического нагрева-охлаждения. Одновременно существенную сложность представляет диагностика качества зоны соединения особенно для трехслойного композита, когда внутренний стеклянный монослой закрыт даже от визуального осмотра. Подготовка к микроскопическим исследованиям зоны соединения, вносит дополнительные дефекты при пробоподготовке и существенно ограничена по оценки качества во всем объеме зоны соединения[2]. В методике определение адгезионной прочности при механических нагрузках, посредством выдавливания стеклянного слоя вдоль металлических, не удается зафиксировать начало хрупкого разрушения в стекле, что приводит к заниженной или завышенной оценке прочности соединения [4]. Перспективные неразрушающие методы контроля, например, ультразвуковые исследования представляют отдельную задачу для диагностики слоистых материалов, трудность оценки этими методами связана с ограничением по доступности к зоне соединения как для случая наличия дефектов в монослое стекла и металла, так и в случае трехслойной оболочки или стержня [5].

Вместе с тем, моделируя термические напряжения в стеклометаллокомпозите было предложено описывать качество контактного взаимодействия через температурные деформации и дилатометрические исследования [6]. Не претендуя на полноту, проведенный анализ существующих модельных представлений в механике контактного взаимодействия многослойных систем позволил выделить два основных подхода. Первый заключается в том, что контактное взаимодействие между слоями рассматривается как взаимодействие слоистых структур при соблюдении условий непрерывности перемещений и напряжений при переходе через межфазную границу (идеальный контакт) [7—10], такой подход не позволяет оценить неоднородную межфазную границу, которая может сама являться причиной снижения адгезионного сцепления между слоями, в следствии неоднородности своей структуры и расслоений внутри себя по границам различных фаз. Второй подход связан с моделированием покрытий с дефектами, неполным контактом или неоднородными свойствами в зоне соединений,

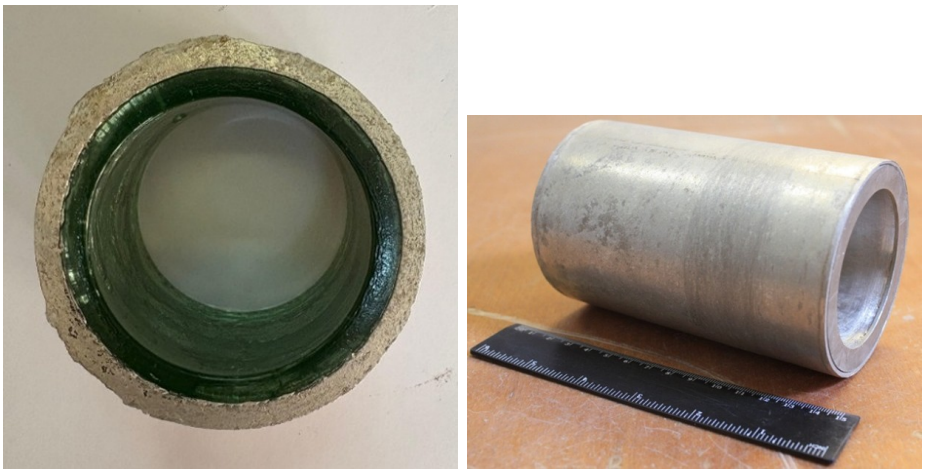


Рис. 1. Фотографии экспериментальных стеклометаллических оболочек 2-х и 3-х слойных

а также, наличие зон с ослабленным межфазным контактом на поверхностях раздела смежных слоев и разрабатывался для задач трибологии [11—14]. Соответственно параллельно отрабатывались приемы экспериментальной оценки параметров моделей и уточнения модельных представлений методами индентирования и истирания.

Для рассматриваемого стеклометаллического материала, моделирование в рамках второго подхода, во-первых существенной усложняет моделирование в интервале стеклования при расчете релаксации напряжений в стеклянном слое и пластического течения в металлическом и во вторых, остается открытым вопрос экспериментального определения коэффициента трения, на границе соединяемых материалов, в том числе и его зависимости от температуры. Несмотря на то, что исследования зависимости коэффициента трения от изменения температуры в контактирующих материалах проводятся регулярно [15—19], но учитывая, сложность, обусловленную влиянием множества факторов, например, таких как: изменение механических свойств контактирующих материалов; изменение состава и свойств промежуточных слоев; физическая и химическая адсорбции; химические реакции на поверхности, активируемые трением, сохраняют свою актуальность.

Применение первого подхода, в рамках которого разработан и алгоритм расчета релаксации аморфных покрытий на металлических подложках [10, 20], хорошо описывает ситуацию идеального контакта, моделирование зоны соединения возможно, как отдельного монослоя с физико-механическими характеристиками, которые не ясно как экспериментально определять. Вместе с тем введенная в работе [10] стесненная деформация постоянная по толщине стеклянной компоненты спая (Рис. 2), оказалась эффективной в качественном описании

остаточных напряжений и моделировании отжига как стекло-металлических спаев, так и аморфных покрытий.

Актуальность построения моделей, учитывающих эффекты механического взаимодействия между поверхностями и более ясного представления о вводимых в граничные условия коэффициентов трения и определила цель настоящей работы. В работах [6, 20] предложено модельное представление о стесненной деформации в условиях неоднородного температурного поля для конструктивных элементов в соединении стекла и металла и введено понятие коэффициента характеризующего качество сцепления, в настоящей работе это коэффициент назван коэффициентом стесненной деформации. Теоретическая и практическая значимость вводимого коэффициента стесненной деформации связана с возможностью его экспериментальной оценки посредством дилатометрических измерений в соединениях при изменении температуры. Если определить связь коэффициента стесненной деформации с коэффициентом трения вводимым в классических контактных задачах (реализованных, в том числе, в конечно-элементном пакете ANSYS), то появится возможность экспериментальной оценки коэффициента трения для разнородных соединений при температурных изменениях. Которая, в свою очередь, приведет к повышению точности модельных представлений при проектировании разнородных соединений и конструкций из них в CAE системах.

Целью данной работы являлось установления зависимости между коэффициентом стеснённой деформации и классическим коэффициентом трения скольжения.

Изложение в работе определено следующим образом, в пункте 1 задача о термодеформировании сопряженных цилиндрических тел при предположении об осесимметричном и одинаковом по образующей распределении температуры решена с новым модельным представлением о деформации на границе с коэффициентом стесненной деформации. В пункте 2 в конечно-элементном пакете ANSYS получено решение аналогичной задачи для различных значений коэффициента трения. В пункте 3 исследуется зависимость между коэффициентом трения и коэффициентом стесненной деформации. В пункте 4 проведено сравнение экспериментальных данных с расчетными с применением модели.

1. Постановка задачи и математическая модель Рассматривается контактное взаимодействие длинной осесимметричной цилиндрической системы из материалов с разными физико-механическими характеристиками при температурных нагрузках. Внешний радиус R_2, радиус на границе сопряжения R_1, внутренний R_0 (для стеклометаллокомпозитного стержня $R_0 = 0$) (Рис. 2a). Материалы имеют разное температурное расширение, которое является причиной термических напряжений даже при одинаковой температуре, в работе [20] такие напряжения называются коэффициентными, а деформация стесненной. Предполагается возможность проскальзывания только в осевом направлении. При отсутствии дополнительных внешних нагрузок на торцы возможны два

предельных состояния, представленные на Рис. 2*б* последовательно, после изменения температуры на ΔT: свободное проскальзывание вдоль оси z и идеальный контакт. При $\Delta T = T - T_0 > 0$ моделируется нагрев и контактное расширение, соответственно при $\Delta T < 0$ – охлаждение и сжатие, T_0 – начальная температура. Очевидно, что разница в относительном линейном удлинении в осевом направлении при сжатии (расширении) достигает своего максимального значения при свободном проскальзывании.

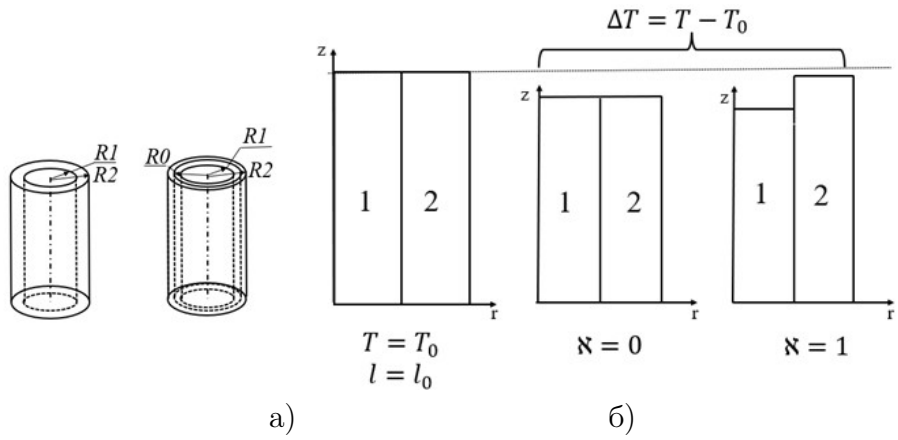


Рис. 2. Геометрия исследуемых образцов (а); схема контактного взаимодействия при изменении температуры (б)

В данной постановке приняты гипотезы об осевой симметрии, обобщенном плоском деформированном состоянии и аддитивном представлении общих деформаций, что позволяет представить общую деформацию в виде суммы упругой и температурной. Вводятся следующие обозначения: r, φ, z – цилиндрические координаты; T – температура; α – коэффициент линейного температурного расширения; G – модуль сдвига; K – модуль объемной деформации; k – индекс слоев (в скобочках обозначает именно номер слоя, а не порядок производной); ε_r, ε_φ, ε_z и σ_r, σ_φ, σ_z – компоненты тензоров деформации и напряжения, соответственно, которые при принятых гипотезах имеют диагональный вид, u_r, u_φ, u_z – компоненты вектора перемещений, которые при принятых гипотезах имеют вид

$$u_r^{(k)} = u^{(k)}(r,T), \quad u_\varphi^{(k)} = const, \quad u_z^{(k)} = zw^{(k)}(T) \tag{1}$$

$$\varepsilon_{r,\varphi,z} = \varepsilon^e_{r,\varphi,z} + \varepsilon^T \tag{2}$$

здесь $\varepsilon^T = \int_{T_0}^{T} \alpha^{(k)}(T)dT$ – температурные деформации, $\varepsilon^e_{r,\varphi,z}$ – упругие деформации, при $k = 1 : r \in [R_0, R_1]$; $k = 2 : r \in [R_1, R_2]$.

С учетом (1) и (2) математическая формулировка задачи для каждого слоя включает:

соотношения Коши в виде

$$\varepsilon_r{}^{(k)} = \frac{\partial u^{(k)}}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi{}^{(k)} = \frac{u^{(k)}}{r}, \quad \varepsilon_z{}^{(k)} = w^{(k)}(T) \tag{3}$$

уравнения Дюамеля-Неймана

$$\begin{aligned}
\sigma_r{}^{(k)} &= \left(\frac{4}{3}G^{(k)} + K^{(k)}\right)\frac{\partial u^{(k)}}{\partial r} + \left(K^{(k)} - \frac{2}{3}G^{(k)}\right)\left(\frac{u^{(k)}}{r} + w^{(k)}\right) - 3K^{(k)}\varepsilon^T, \\
\sigma_\varphi{}^{(k)} &= \left(K^{(k)} - \frac{2}{3}G^{(k)}\right)\left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial r} + w^{(k)}\right) + \left(\frac{4}{3}G^{(k)} + K^{(k)}\right)\frac{u^{(k)}}{r} - 3K^{(k)}\varepsilon^T, \\
\sigma_z{}^{(k)} &= \left(K^{(k)} - \frac{2}{3}G^{(k)}\right)\left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial r} + \frac{u^{(k)}}{r}\right) + \left(\frac{4}{3}G^{(k)} + K^{(k)}\right)w^{(k)} - 3K^{(k)}\varepsilon^T,
\end{aligned} \tag{4}$$

уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r{}^{(k)}}{\partial r} + \frac{\sigma_r{}^{(k)} - \sigma_\varphi{}^{(k)}}{r} = 0 \tag{5}$$

Уравнения (1)-(5) дополняются условиями на внешних поверхностях (при $r = R_0$ и $r = R_2$)

$$\sigma_r\left(R_0, T\right) = P_1(T), \quad \sigma_r\left(R_2, T\right) = P_2(T) \tag{6}$$

и условиями контактного взаимодействия по перемещениям и напряжениям (при $r = R_1$). Нормальные проекции векторов напряжений и перемещений задаются как для идеального контакта

$$u^{(1)}\left(R_1, T\right) = u^{(2)}\left(R_1, T\right), \quad \sigma_r^{(1)}\left(R_1, T\right) = \sigma_r^{(2)}\left(R_1, T\right) \tag{7}$$

Для учета проскальзывания вдоль оси предлагается новое условие, взамен условию Амонтона-Кулона о пропорциональности нормальных касательным напряжениям с коэффициентом пропорциональности μ – называемым коэффициентом трения скольжения. Новое условие формулируется как прямая пропорциональность разницы осевых деформаций максимальной разнице этих деформаций $\Delta\varepsilon_z(T)$ в условиях свободного проскальзывания сопряженных слоев при нагреве (или охлаждении) с коэффициентом пропорциональности $\aleph$ – называемым коэффициентом стесненной деформации (в работе [6] назван коэффициентом проскальзывания (сцепления)). Принимаются также условия равенства нулю осевой нагрузки, приложенной к цилиндру.

Предлагаемое контактное условие реализуется в две итерации: в первой определяется максимальная разница осевых деформаций в условиях сопряженных слоев, при этом, принято, что

$$\aleph = 1: \quad \Delta\varepsilon_z(T) = \varepsilon_z^{(1)}(T) - \varepsilon_z^{(2)}(T) \tag{8}$$

$$\int_{R_0}^{R_1} \sigma_z^{(1)}(r,T) r dr = 0, \quad \int_{R_1}^{R_2} \sigma_z^{(2)}(r,T) r dr = 0 \tag{9}$$

Далее во второй итерации для стесненной деформации принимается, что

$$0 \le \aleph < 1: \quad \varepsilon_z^{(1)} - \varepsilon_z^{(2)} = \aleph \Delta\varepsilon_z(t) \tag{10}$$

$$\int_{R_0}^{R_1} \sigma_z^{(1)}(r,T) r dr + \int_{R_1}^{R_2} \sigma_z^{(2)}(r,T) r dr = 0 \tag{11}$$

Идеальный контакт является следствием условий 10)-(11) при $\aleph = 0$.

В начальный момент времени при $T = T_0$ все напряжения и деформации считаются нулевыми.

Решение задачи (1)-(11) находится в аналитическом виде, причем задача допускает увеличение слоев и моделирование разной степени проскальзывания на границах сопряжения, кроме того, возможно усложнение уравнений (4) для учета более сложного реологического поведения материалов с сохранением возможности получения аналитического решения.

Далее исследуется сходимость решений задачи (1)-(11) к решению полученному в классической постановке контактной задачи с условием Амонтона-Кулона при численном моделировании в конечно-элементном пакете ANSYS.

2. Численная реализация в ANSYS В рамках данной работы исследуется сходимость решений в предложенной постановке(1)-(11) к классической постановке контактной задачи в системе анализа МКЭ ANSYS. Задача решалась при разном коэффициенте трения между материалами, который варьировался от 0 до 1 с шагом 0,01. Для моделирования касательных напряжений в модели когезионной зоны (CZM) при контакте верхней и нижней поверхностей используется изотропный закон трения Кулона.

Моделировались два типа соединения: стеклометаллический стержень (тип 1, Табл. 2); цилиндрическая двухслойная оболочка (тип 2, Табл. 2). Материалы слоев имели теплофизические характеристики, представленные в Таблице 2.

Рассматривались три вида контакта на границе контактирующих материалов R_1: идеальный контакт; контакт с трением вдоль образующей коэффициент трения μ варьировался от 0 до 1 с шагом 0,01; свободное проскальзывание вдоль образующей при температурном расширении. Сетка конечных элементов задавалась неоднородной, с измельчением на границе контакта (Табл. 2); тип элементов SOLID186, гексаэдр. Рассматривается упругая задача, поэтому температурный режим выбран ниже температуры стеклования: равномерное охлаждение от 500 °C до 20 °C.

	$k = 1$ (стекло)		$k = 2$ (сталь)
	R_0, м	R_1, м	R_2, м
Тип 1	0	0.004	0.005
Тип 2	0.003	0.004	0.005
α, °C^{-1}	$5.2 \cdot 10^{-6}$		$12.1 \cdot 10^{-6}$
G, МПа	29230.76923		74626.86568
K, МПа	63333.33333		208333.33334
T, °C	20		
T_0, °C	500		

Таблица 1. Геометрические и теплофизические характеристики

Параметр		Тип1	Тип 2
Размер элемента сетки, 10^{-3} м	в объеме слоя	0.1	0.01
	на границе	0.05	0.01
Количество элементов сетки		1094221	1968348
Количество граней		3528558	7553009
Невязка, МПа		0.138737	0.00402

Таблица 2. Характеристики разбиения

Во время анализа результатов моделирования выявлены торцевые эффекты, которые охватывают область около 2,5 мм в глубь образца, что негативно сказывается на представлении результатов, так как максимальные напряжения в этой зоне в два раза выше чем в основном теле образца. Торцевые эффекты наблюдаются при условиях контакта без разделения и контакта с трением, в то время как для условия без трения торцевой эффект не обнаружен (Рис. 3*а*). Для того что бы вывести результаты без торцевых эффектов построена вспомогательная геометрия в виде линии у границы симметрии, т.е. отображаются только напряжения для центральной части длины образца, результаты приведены на Рис. 3*б*.

Заметно что в результатах моделирования контакта без разделения максимальные напряжения по Мизесу определяются в стали у границы со стеклом и полностью совпадает со значением полученным в модели, что продемонстрированно на графиках рисунка (Рис. 3*б,в* (слева). При моделировании контакта без трения напряженно деформированное состояние модели имеет качественно такое же распределение как в случае с контактом без разделения, максимальные напряжения также совпадают со значениями полученными в модели (1)-(11) (Рис. 3*б,в* (справа).

3. Результаты расчетов Сравнение производилось по инвариантам тензоров напряжений, полученных в разных модельных представлениях:

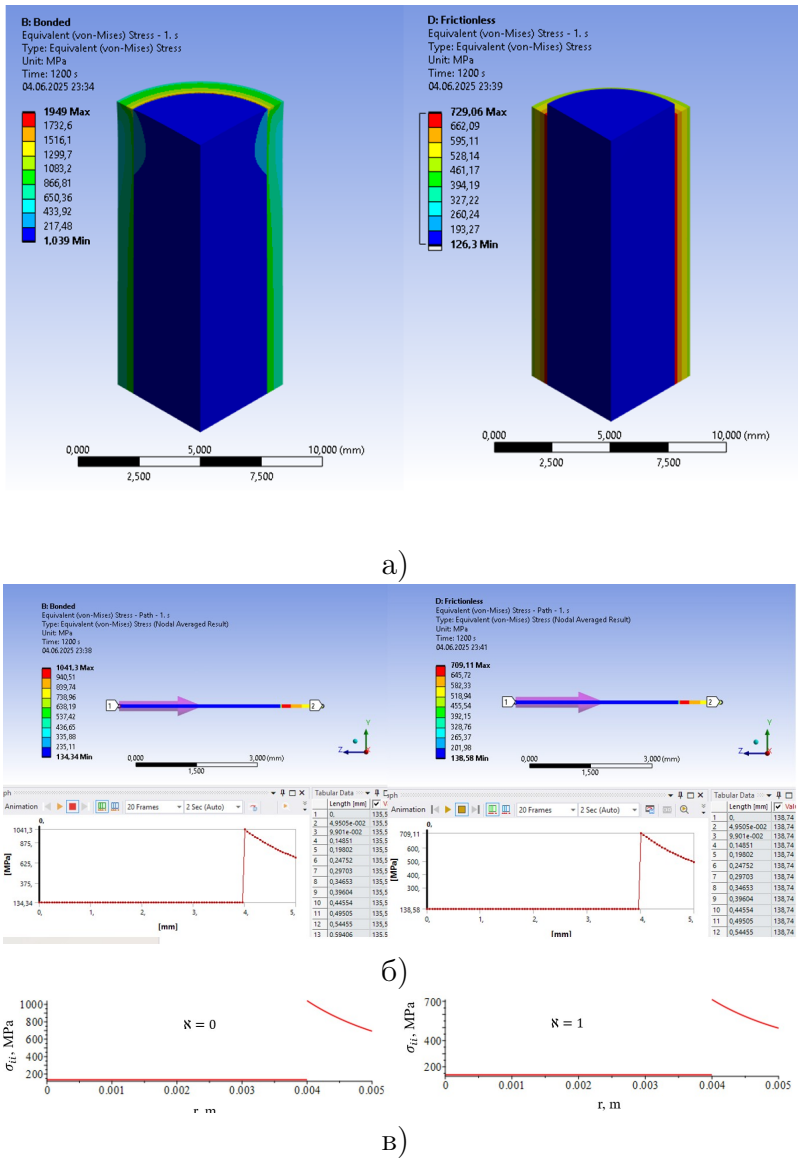


Рис. 3. Эквивалентные напряжения по Мизесу, идеальный контакт (слева) и свободное проскальзывание (справа), тип 1 (стеклометаллокомпозитный стержень). Реализация в CAE ANSYS (а), (б); численное моделирование (в)

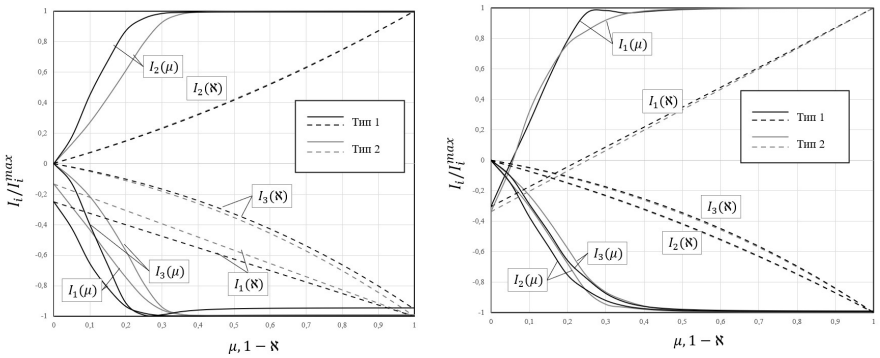
$I_i(\mu)$ – инварианты тензора напряжений, полученные в ANSYS при разных значениях коэффициента трения μ (Рис. 4)

$$
\begin{aligned}
I_1(\mu) &= \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{rr} + \sigma_{zz}, \\
I_2(\mu) &= -{\sigma_{\varphi r}}^2 - {\sigma_{\varphi z}}^2 + \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{rr}\sigma_{zz} - {\sigma_{rz}}^2, \\
I_3(\mu) &= -\sigma_{rr}{\sigma_{\varphi z}}^2 + 2\sigma_{rz}\sigma_{\varphi r}\sigma_{\varphi z} - \sigma_{zz}{\sigma_{\varphi r}}^2 + \sigma_{zz}\sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{rr} - {\sigma_{rz}}^2\sigma_{\varphi\varphi},
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$I_i(\aleph)$ – инварианты тензора напряжений полученные в модели (1)-(11), при разных значениях коэффициента стесненной деформации $\aleph$ (Рис. 4)

$$
\begin{aligned}
I_1(\aleph) &= \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{rr} + \sigma_{zz}, \\
I_2(\aleph) &= \sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{zz} + \sigma_{rr}\sigma_{zz}, \\
I_3(\aleph) &= \sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{zz}\sigma_{rr}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

На рисунке 4 по вертикальной оси отложены относительные значения инвариант $I_i/I_i^{\max}$, где $I_i^{\max}$ максимальное значение для каждого значения инварианта.



а) б)

Рис. 4. Зависимость инвариантов тензора напряжений от коэффициента стесненной деформации в модели и от коэффициента трения в ANSYS на границе контакта в стекле (а) и в металле (б)

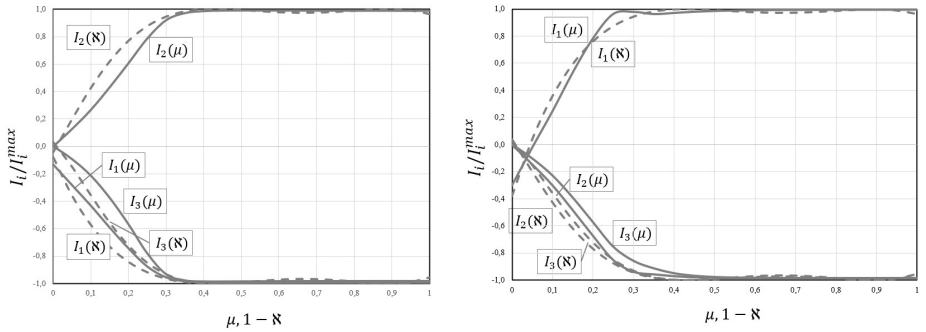
Для каждого значения коэффициента трения μ, с учетом соответствующего ему значения инварианта I_i (i=1..3), было найдено значение коэффициента стесненной деформации $\aleph$. Дальнейший анализ проводился для математического ожидание по всей выборке. Зависимость между средним значением коэффициента стесненной деформации и коэффициентом трения аппроксимирована в виде:

$$
\aleph = a_1\mu^4 + a_2\mu^3 + a_3\mu^2 + a_4\mu + a_5 \tag{14}
$$

здесь $a_1 = -7.21031$, $a_2 = 19.106$, $a_3 = -18.212$, $a_4 = 7.3564$, $a_5 = 0.0622$.

После пересчета значений инвариантов тензора напряжений в модели (1)-(11) с коэффициентом стесненной деформации $\aleph(\mu)$ определяемым по (14) можно

сказать о сходимости решений предлагаемой модели к классической контактной задаче, реализованной в ANSYS (Рис. 5).



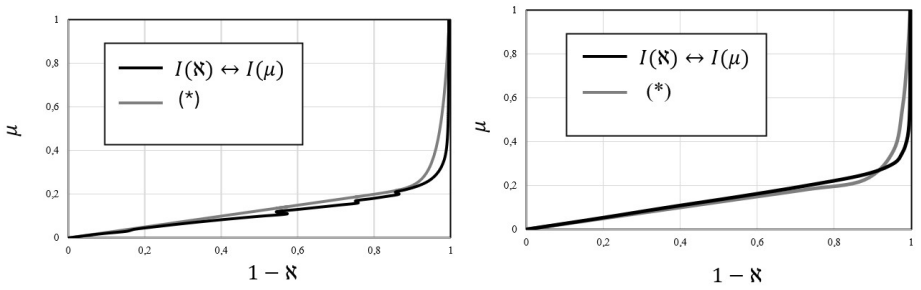
а) б)

Рис. 5. Зависимость инвариантов тензора напряжений от коэффициента стесненной деформации в модели и от коэффициента трения в ANSYS на границе контакта для типа 2 в стекле (а) и в металле (б) после пересчета значений инвариантов в модели с учетом (14)

Зависимость между коэффициентом трения и коэффициентом стесненной деформации предлагается рассматривать в виде:

$$\mu = a_1 \aleph \operatorname{ch}\left(a_2 \aleph^{a_3}\right) \tag{15}$$

Заметим, что значения коэффициентов: $a_1 = 0.25001$; $a_2 = 2.17113$; $a_3 = 17.1115$ определенные для образца типа 1 (Рис. 6*а*) остаются такими же и для образца типа 2 (Рис. 6*б*).



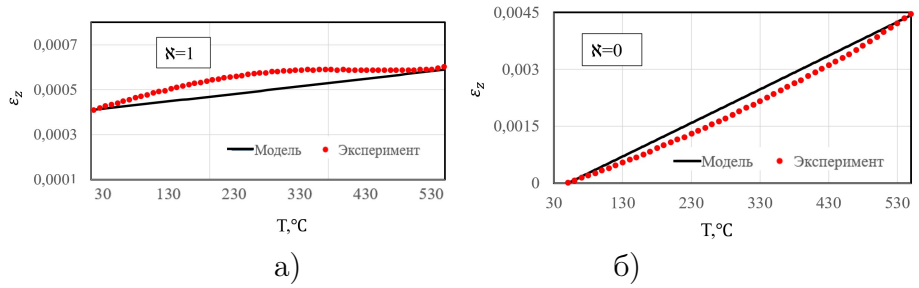
а) б)

Рис. 6. Результаты сходимости решений для образца типа 1(а), для образца типа 2(б)

Для сравнения полученных результатов по модели (1)-(11) с экспериментальными были проведены экспериментальные исследования для цилиндрических элементов стекла и стеклометаллокомпозита на дилатометре NETZSCH DIL 402

РС и лабораторной экспериментальной установке с горизонтальной загрузкой образцов и индукционным нагревом (Дт-ГИ). В работе [21] отработана технология получения идеального контакта при получении стеклометаллических стержней на основе стали 10 и боросиликатного неорганического стекла СН-1, с идеальным контактом приняты экспериментальные образцы изученной технологии включающей стадию предварительной химической двухступенчатой обработки с определенным временем выдержки при максимальной температуре (Рис. 7*б* (красные точки)), свободное проскальзывание исследовалось на образцах полученных по технологии с предварительной холодной химической обработкой полученных горячей посадкой (Рис. 7*б* (красные точки)). Дилатометрические измерения на интервале (30, 550) °C сопоставлялись с результатами моделирования при коэффициентах стесненной деформации $\aleph = 0$ (Рис.7*б*) и $\aleph = 1$ (Рис. 7*а*). Экспериментально исследовались цилиндрические образцы диаметром 10 мм и длиной 25 мм. Стандартные дилатометрические исследования предполагают измерение перемещения с торцов цилиндрических образцов при изменяющейся температуре.

Для стеклянного образца исследования проводились на дилатометре NETZSCH DIL 402 PC, а для стеклометаллического образца на Дт-ГИ. Хорошее совпадение результатов экспериментальных и аналитических деформаций определяет направление дальнейших исследований, которые должны быть направлены на анализ и соответствие качества зоны соединения $\leftrightarrow$ коэффициент стесненной деформации.



а) б)

Рис. 7. Результаты сравнения: а) NETZSCH DIL 402 PC, стекло, $\aleph = 1$; б) Дт-ГИ, стеклометаллокомпозит, $\aleph = 0$

4. Выводы В работе предложена новая постановка контактной задачи для одномерного случая, который возникает при гипотезах осевой симметрии и обобщенного плоского деформированного состояния в сопряженных цилиндрических системах в задачах трения при температурном расширении.

Известно, что контактную задачу обычно записывают с контактными условиями Амонтона-Кулона, что сразу повышает размерность задачи, приводит к нелинейности и численной реализации.

Задача с краевыми условиями (6)-(11) решается аналитически причем не только для упругих тел, но и для тел с более сложной реологией.

Естественно предлагаемая модель имеет ограничения связанные прежде всего с принятыми гипотезами, но ее практическая значимость не ограничена только экспериментальной работой по получению определенных пар соединений стекла-металла которой увлечены авторы. Не трудно найти другие практически значимые приложения, например, в задачах об усталостной прочности при периодических температурных нагрузках в слоистых трубках из разнородных материалов для химической промышленности, в изделиях типа вал в цилиндре полученных горячей посадкой и последующей эксплуатацией при изменяющейся температуре.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Н. Ю. Зайко – проведение численного моделирования, анализ результатов, написание текста; О. Н. Любимова – разработка математической модели, постановка задачи, написание текста.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН № 075-00459-25-00

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. N.Y. Zaiko – numerical modeling, analysis of results, writing; O.N. Lyubimova – development of mathematical model, problem formulation, writing.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment of the Institute of Applied Mathematics, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences No. 075-00459-25-00

ЛИТЕРАТУРА

1. Pikul V., Goncharuk V., Maslennikova I. A Cylindrical Shell Made of Glass-Metal Composite // Applied Mechanics and Materials. 2015. Vol. 756. P. 230–235.
2. Любимова О., Морковин А., Дрюк С. Особенности структуры зоны соединения стекла и стали в технологии получения стеклометаллокомпозита // Материаловедение. 2017. № 4. С. 3–7.
3. Гончарук В., Бочарова А., Ратников А., Голобокова Н. Разработка технологических основ изготовления цилиндрических оболочек из стеклометаллического композита методом центробежного литья // Труды Самарского научного центра Российской академии наук. 2016. Т. 18, 2(3). С. 864–868.
4. Гончарук В., Зайко Н., Ратников А., Шелковников К. Экспериментальные исследования адгезионного взаимодействия в зоне контакта стекла и алюминия в стеклометаллокомпозитном элементе // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева, серия: механика предельного состояния. 2023. 4(58). С. 26–36.

5. Бойчук А., Чертищев В., Диков И., Генералов А. Особенности ультразвукового контроля ремонта монолитных зон вертолетных лопастей из полимерных композиционных материалов // Труды ВИАМ. 2023. 12 (130). С. 115–124. URL: http://www.viam-works.ru, DOI: 10.18577/2307-6046-2023-0-12-115-124.
6. Зайко Н., Любимова О. Температурные напряжения в соосных сопряженных цилиндрических системах и композиционных материалах с разной степенью проскальзывания по границе контакта // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. 4 (54). С. 5–13.
7. Арутюнян Н., Манжиров А., Наумов В. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 172 с.
8. Kalker J. Variational and non-variational theory of frictionless adhesive contact between elastic bodies // Wear. 1987. Vol. 119, no. 1. P. 63–76.
9. Сайфуллин Э., Князева А. Моделирование структуризации в адгезионном слое при создании многослойных объектов // Вычислительная механика сплошных сред. 2023. Т. 15, № 1. С. 5–18.
10. Мазурин О., Лебедева Р., Старцев Ю. Метод расчета напряжений в спаях стекла со стеклом // Физика и химия стекла. 1980. Т. 6. С. 190–194.
11. Горячева И., Фельдштейн И. Анализ влияния внутренней системы дефектов на напряженное состояние упругих тел // Известия РАН. Механика твердого тела. 1996. № 5. С. 55–61.
12. Горячева И., Торская Е. Напряженное состояние двухслойной упругой основы с неполным сцеплением слоев // Трение и износ. 1998. Т. 19, № 3. С. 289–296.
13. Горячева И. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
14. Буренин А., Ткачева А. О сборке горячей посадкой упруговязкопластического диска с некруговым включением // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2024. № 5. С. 29–47.
15. Крагельский И., Добычин М. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 528 с.
16. Чичинадзе А., Браун Э., Буше Н. и др. Основы трибологии (трение, износ, смазка). М.: Машиностроение, 2001. 664 с.
17. Шустер Л. Адгезионное взаимодействие твердых металлических тел. Уфа: Гилем, 1999. 199 с.
18. Марков Д. Трибология и ее применение на железнодорожном транспорте: Труды ВНИИЖТ. М.: Интекст, 2007. 408 с.
19. Морозов И., Беляев А., Изюмов Р. Индентирование слоя на упругой подложке: влияние толщины и модуля упругости покрытия // Вычислительная механика сплошных сред. 2025. Т. 18, № 1. С. 57–67.
20. Филиппенко Г. Энергетический анализ осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки, нагруженной периодическими сосредоточенными массами // Вычислительная механика сплошных сред. 2024. Т. 17, № 3. С. 276–289.
21. Lyubimova O., Barbotko M., Streltcov A. Experimental investigations of varying the temperature parameters in the glass-transition range for glass-metal composites when heated // Materials Physics and Mechanics. 2023. Vol. 51, no. 3. P. 52–58.

REFERENCES

1. Pikul V., Goncharuk V., Maslennikova I. A Cylindrical Shell Made of Glass-Metal Composite // Applied Mechanics and Materials. 2015. Vol. 756. P. 230–235. (in Russian).
2. Lyubimova O., Morkovin A., Dryuk S. Features of the Structure of the Glass-Steel Joint Zone in the Technology of Producing Glass-Metal Composite // Materialovedenie. 2017. No. 4. P. 3–7. (in Russian).
3. Goncharuk V., Bocharova A., Ratnikov A., Golobokova N. Development of Technological Bases for Manufacturing Cylindrical Shells from Glass-Metal Composite by Centrifugal Casting // Proceedings of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2016. Vol. 18, 2(3). P. 864–868. (in Russian).
4. Goncharuk V., Zayko N., Ratnikov A., Shelkovnikov K. Experimental Studies of Adhesive Interaction in the Contact Zone of Glass and Aluminum in a Glass-Metal Composite Element // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Series: Mechanics of the Limit State. 2023. 4(58). P. 26–36. (in Russian).
5. Boychuk A., Chertishchev V., Dikov I., Generalov A. Features of Ultrasonic Inspection of Repair of Monolithic Zones of Helicopter Blades Made of Polymer Composite Materials // Proceedings of VIAM. 2023. 12 (130). P. 115–124. (in Russian).
6. Zayko N., Lyubimova O. Temperature Stresses in Coaxial Conjugate Cylindrical Systems and Composite Materials with Different Degrees of Slip along the Contact Boundary // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Series: Mechanics of the Limit State. 2022. 4 (54). P. 5–13. (in Russian).
7. Arutyunyan N., Manzhirov A., Naumov V. Contact Problems of Mechanics of Growing Bodies. M.: Nauka, 1991. 172 p. (in Russian).
8. Kalker J. Variational and non-variational theory of frictionless adhesive contact between elastic bodies // Wear. 1987. Vol. 119, no. 1. P. 63–76. (in Russian).
9. Saifullin E., Knyazeva A. Modeling of Structurization in the Adhesive Layer during the Creation of Multilayer Objects // Computational Continuum Mechanics. 2023. Vol. 15, no. 1. P. 5–18. (in Russian).
10. Mazurin O., Lebedeva R., Startsev Y. Method for Calculating Stresses in Glass-to-Glass Seals // Physics and Chemistry of Glass. 1980. Vol. 6. P. 190–194. (in Russian).
11. Goryacheva I., Feldshtein I. Analysis of the Influence of Internal Defect System on the Stress State of Elastic Bodies // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids. 1996. No. 5. P. 55–61. (in Russian).
12. Goryacheva I., Torskaya E. Stress State of a Two-Layer Elastic Base with Incomplete Bonding of Layers // Friction and Wear. 1998. Vol. 19, no. 3. P. 289–296. (in Russian).
13. Goryacheva I. Mechanics of Frictional Interaction. M.: Nauka, 2001. 478 p. (in Russian).
14. Burenin A., Tkacheva A. On the Assembly by Hot Interference Fit of an Elastoviscoplastic Disk with a Non-Circular Inclusion // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids. 2024. No. 5. P. 29–47. (in Russian).
15. Kragelsky I., Dobychin M. Fundamentals of Friction and Wear Calculations. M.: Mashinostroenie, 1977. 528 p. (in Russian).
16. Chichinadze A., Braun E., Bushe N., et al. Fundamentals of Tribology (Friction, Wear, Lubrication). M.: Mashinostroenie, 2001. 664 p. (in Russian).

17. Shuster L. Adhesive Interaction of Solid Metal Bodies. Ufa: Gilem, 1999. 199 p. (in Russian).
18. Markov D. Tribology and Its Application in Railway Transport: Proceedings of VNIIZhT. M.: Intext, 2007. 408 p. (in Russian).
19. Morozov I., Belyaev A., Izyumov R. Indentation of a Layer on an Elastic Substrate: Influence of Coating Thickness and Elastic Modulus // Computational Continuum Mechanics. 2025. Vol. 18, no. 1. P. 57–67. (in Russian).
20. Filippenko G. Energy Analysis of Axisymmetric Vibrations of a Cylindrical Shell Loaded with Periodic Concentrated Masses // Computational Continuum Mechanics. 2024. Vol. 17, no. 3. P. 276–289. (in Russian).
21. Lyubimova O., Barbotko M., Streltcov A. Experimental investigations of varying the temperature parameters in the glass-transition range for glass-metal composites when heated // Materials Physics and Mechanics. 2023. Vol. 51, no. 3. P. 52–58. (in Russian).

Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.011 *EDN: FMIHTP*

Научная статья *УДК: 539.3*

В. Ю. Андрюкова, В. Н. Тарасов

УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ АРОК, ПОДКРЕПЛЕННЫХ НЕРАСТЯЖИМЫМИ НИТЯМИ

Федеральный исследовательский центр Коми научный центр УрО РАН, Сыктывкар, Россия

Аннотация. Рассматривается задача устойчивости системы двух круговых арок, связанных между собой нерастяжимыми нитями. Нити не выдерживают сжимающих усилий. Данная задача относится к области контактных задач с неизвестной областью активного взаимодействия элементов конструкции. Проблема сводится к отысканию точек бифуркации некоторой задачи нелинейного программирования, что приводит к необходимости решать задачу идентификации положительной определенности квадратичных форм на выпуклых конусах. В свою очередь это приводит к необходимости решения задачи минимизации квадратичной формы на конусе при условии, что некоторая другая квадратичная форма сохраняет постоянное значение.

Ключевые слова: устойчивость, круговая арка, вариационная задача, бифуркация, односторонние ограничения, критическая сила.

Андрюкова Вероника Юрьевна, к. ф.-м. н., научный сотрудник; `e-mail:` veran@list.ru; AuthorID: 762458

Тарасов Владимир Николаевич, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник; `e-mail:` vntarasov@ipm.komisc.ru; AuthorID: 3141

для цитирования: *Андрюкова В. Ю, Тарасов В. Н.* Устойчивость системы арок, подкрепленных нерастяжимыми нитями // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 192-201. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.011. EDN: FMIHTP

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© Андрюкова В. Ю, Тарасов В. Н. 2026

Поступила: 01.05.26; принята в печать: 31.07.26; опубликована: 29.10.26.

Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.011 *EDN: FMIHTP*
Research Article

V. Yu. Andryukova, V. N. Tarasov

STABILITY OF A SYSTEM OF ARCHES REINFORCED WITH INEXTENSIBLE THREADS

Federal Research Center Komi Scientific Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Syktyvkar, Russia

Abstract. We consider the stability problem of a system of two circular arches connected by inextensible threads. The threads cannot withstand compressive forces. This problem pertains to the field of contact problems with an unknown region of active interaction between the structural elements. The problem boils down to finding bifurcation points in a nonlinear programming problem, which necessitates identifying the positive definiteness of quadratic forms on convex cones. This, in turn, necessitates solving the problem of minimizing a quadratic form on a cone, provided that some other quadratic form maintains a constant value.

Keywords: stability, circular arc, variational problem, bifurcation, one-sided constraints, critical force.

Veronika Yu. Andryukova, Scientific Researcher, Professor; `e-mail:` veran@list.ru; AuthorID: 762458

Vladimir N. Tarasov, Scientific Researcher; `e-mail:` vntarasov@ipm.komisc.ru; AuthorID: 3141

to cite this article: *Andryukova V. Yu., Tarasov V. N.* Stability of a system of arches reinforced with inextensible threads // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 192-201. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.011

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Received: 01.05.26; *accepted: 31.07.26;* *published: 29.10.26.*

Введение. Расчет на устойчивость и прочность сложных тонкостенных конструкций связан с исследованием вариационных неравенств или решением вариационных задач с ограничениями на искомые функции в форме неравенств [1]. Арочные конструкции применяют в разных областях, включая строительство, архитектуру, машиностроение. Конструкции висячих систем, в которых несущими элементами являются ванты из высокопрочных материалов, работающих только на растяжение, получаются наиболее легкими, что является их существенным преимуществом. Расчет на прочность тонких систем сводится к решению задачи выпуклого нелинейного программирования. Особенно сложной проблемой является исследование конструкций на устойчивость. Интересные частные задачи устойчивости и закритического поведения упругих элементов конструкций при односторонних ограничениях на перемещения решены в книге В.И. Феодосьева [2]. Проблема устойчивости круговых арок ранее рассматривалась Е.Л. Николаи [3]. Экспериментальные и численные исследования влияния односторонних связей на устойчивость цилиндрических оболочек, сжимаемых продольной силой рассмотрены в работе Н.А. Алфутова [4]. Наличие односторонних ограничений на перемещение приводит к задаче идентификации условной положительной определенности квадратичных форм на конусах, которая рассматривалась в работах [5], [6]. При конечномерной аппроксимации наличие односторонних ограничений на перемещения приводит к некоторой задаче нелинейного программирования. При исследовании на устойчивость в данном случае приходим к задаче нахождения параметров нагрузки, при которых происходит бифуркация решений задачи нелинейного программирования. Некоторые задачи устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения и методы их решения рассматривались в работах авторов [7], [8], [9].

1. Постановка задачи. Пусть две круговые арки (рис. 1) связаны между собой нерастяжимыми нитями, которые не выдерживают сжимающих усилий, нагружены внешними силами, равномерно распределенными вдоль линии арок.

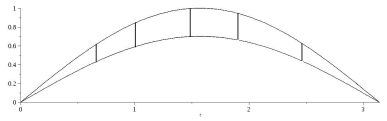


Рис. 1. Схема подкрепления арок

Уравнения недеформированной оси арок имеют вид:

$$x_i = R_i \cos\varphi, \;\; y_i = R_i \sin\varphi, \;\; \varphi \in (-\tau, \tau), \;\; i = 1:2.$$

R_i- радиусы арок.

Обозначим $\xi = (-\cos\varphi, -\sin\varphi)$, $\eta = (-\sin\varphi, \cos\varphi)-$ единичные векторы касательной и нормали. u_i, w_i- перемещения вдоль векторов η и ξ. Тогда изменение кривизны арок в результате деформации определяется формулами

$$\delta q_i = \frac{1}{R_i^2}(u_i^{''} + u_i).$$

Предполагается, что выполнено условие несжимаемости $u_i = w_i'$, $i = 1; 2$. Упругая энергия

$$U = U_1 + U_2 = \frac{B_1}{2R_1^3}\int_{-\tau}^{\tau}\left(u_1^{''} + w_1^{'}\right)^2 d\varphi + \frac{B_2}{2R_2^3}\int_{-\tau}^{\tau}\left(u_2^{''} + w_2^{'}\right)^2 d\varphi.$$

Работа внешних сил зависит от поведения нагрузки и определяется:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{P_1}{2}\int_{-\tau}^{\tau}\left(u_1^{'2} - k_1 u_1^2\right)d\varphi + \frac{P_2}{2}\int_{-\tau}^{\tau}\left(u_2^{'2} - k_2 u_2^2\right)d\varphi,$$

где $k_i = 1$, если нагрузка P_i направлена все время по нормали к деформированной оси (нормальные силы) и $k_i = 2$, если P_i направлена к центру кривизны недеформированной арки (центральные силы).

Предположим, что арки связаны нерастяжимыми нитями, один конец которых закреплен в некоторых точках на первой арке, а другой – к точкам второй арки при углах $\tau = \tau_j$ $j \in 1 : M$.

Нити не выдерживают сжимающих усилий, поэтому расстояние между точками прикрепления не может увеличиваться:

$$u_2(\tau_j) - u_1(\tau_j) \le 0, \quad j \in 1 : M. \tag{1}$$

В положении равновесия полная энергия системы арок достигает минимального значения, таким образом, приходим к задаче на экстремум:

$$U - V \to \min_{u_i, w_i} \tag{2}$$

при выполнении условий несжимаемости $u_i = w_i'$, $i = 1; 2$ и ограничений (1). Далее рассмотрим граничные условия:

1) жесткой заделки: $u_i = 0$, $w_i = 0$, $u_i^{'} = 0$ при $\varphi = -\tau, \tau$.

2) шарнирного опирания: $u_i = 0$, $w_i = 0$, $u_i^{'} + w_i^{'} = 0$ при $\varphi = -\tau, \tau$.

При наличии ограничений (1) задачу (1)–(2) можно исследовать только численными методами.

2. Численный метод Будем аппроксимировать искомые четыре функциии $u_1(\varphi)$, $u_2(\varphi)$, $w_1(\varphi)$, $w_2(\varphi)$ интерполяционными кубическими сплайнами вида [10]:

$$S(z, \varphi) = z_i(1-t)^2(1+2t) + z_{i+1}t^2(3-2t) + m_i h t(1-t)^2 - m_{i+1} h t^2(1-t), \tag{3}$$

где

$$z \in R^n, \quad \varphi_i = -\tau + ih,$$
$$m_i = S'(z, \varphi_i), \quad i = 0, ..., n+1,$$
$$h = \varphi_{i+1} - \varphi_i, \quad t = (\varphi - \varphi_i)/h, \quad t \in [0..1].$$

Условие непрерывности второй производной записывается в виде [10]:

$$\begin{gathered} 2m_0 + \mu_0^* m_1 = c_0^*, \\ \lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = c_i \quad i = 1, ..., N-1 \\ \lambda_N^* m_{N-1} + 2m_N = c_N^*, \end{gathered} \tag{4}$$

причем

$$c_i = 3\left(\mu_i \frac{z_{i+1} - z_i}{h} + \lambda_i \frac{z_i - z_{i-1}}{h}\right),$$

$$\mu_i = \lambda_i = 0,5.$$

Здесь для граничных условий шарнирного опирания

$$\mu_0^* = \lambda_N^* = 1, \quad c_0^* = 3\frac{z_1}{h}, \quad c_N^* = -3\frac{z_{N-1}}{h}.$$

Окончательно получаем, если интерполируются функции $u_i(\varphi)$ и выполнены граничные условия шарнирного опирания, то интерполяционный сплайн $S(z, \varphi)$ удовлетворяет условиям

$$z_0 = 0,\ z_{n+1} = 0,\ m_0 = \frac{3}{h} z_1 - \frac{1}{2} m_1,\ m_{n+1} = \frac{3}{h} z_n - \frac{1}{2} m_n, \tag{5}$$

Аналогично, если интерполируются функции $w_i(\varphi)$, и выполнены условия жесткой заделки, то сплайн удовлетворяет соотношениям

$$z_0 = 0,\ z_{n+1} = 0,\ m_0 = 0,\ m_{n+1} = 0. \tag{6}$$

Определим вектор $m = (m_1, m_2, ..., m_n)^T$. Тогда m может быть вычислен по формуле:

$$m = C^{-1} M u,$$

где матрицы C и M имеют вид:

$$C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & b & a \end{pmatrix},$$

$$M = \frac{3}{2h}\begin{pmatrix} c & d & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -d & c \end{pmatrix}.$$

где $a = 4$, $b = 1$, $c = 0$, $d = -1$ если сплайн $S(z, \varphi)$ удовлетворяет на концах интервала $[-\tau, \tau]$ условиям (6), и $a = 3.5$, $b = 1$, $c = -0.5$, $d = 1$, если выполняются условия (5).

Введем в рассмотрение векторы $v \in R^{4n}$:

$$v_i = u_1(\varphi_i),\ i \in [1, ..., n],$$
$$v_i = w_1(\varphi_i),\ i \in [n+1, ..., 2n],$$
$$v_i = u_2(\varphi_i),\ i \in [2n+1, ..., 3n],$$
$$v_i = w_2(\varphi_i),\ i \in [3n+1, ..., 4n],$$

и построим интерполяционные сплайны $S(v, \varphi)$.

Для того, чтобы учесть условие несжимаемости введем штрафную функцию:

$$F = \frac{D}{2}\int_{-\tau}^{\tau}\left(u - w'\right)^2 d\varphi,$$

где D – достаточно, большое число, которое определяется опытным путем в численных экспериментах.

Рассмотроим вариационную задачу:

$$U + F \to \min_{u,w\in\Gamma}, \tag{7}$$

$$V = 1 \tag{8}$$

при граничных условиях шарнирного опирания или жесткой заделки и выполнениии неравенств (1).

Пусть u_*, w_* – решение задачи (7), (8), (1) и λ_* – значение функционала U. Тогда для любого $\lambda \le \lambda_*$ выполняется

$$U - \lambda V \ge 0$$

для всех $(u_i, w_i) \in \Gamma$, и наоборот, если $\lambda > \lambda_*$, то найдутся функции $(u_i, w_i) \in \Gamma$ такие, что

$$U - \lambda V < 0,$$

то есть $P^* = \frac{B}{R^3}\lambda*$ имеет смысл критической нагрузки: при $P \le P^*$ задача (7),(8) имеет только тривиальное решение, при $P > P^*$ выполняется неравенство $U < 0$.

После подстановки сплайнов $S(v, \varphi)$ в (2) получаем две квадратичные формы:

$$g = \frac{1}{2}\int_{-\tau}^{\tau}\left(\frac{d^2S}{d\varphi^2} + S\right)^2 d\varphi + \frac{D}{2}\int_{-\tau}^{\tau}\left(S - \widetilde{S}'\right)^2 d\varphi = \frac{1}{2}(Gv, v),$$
$$q = \frac{1}{2}\int_{-\tau}^{\tau}\left(S'^2 - kS^2\right)d\varphi = \frac{1}{2}(Qv, v).$$

Для определения коэффициентов квадратичных форм необходимо вычислить следующие интегралы:

1. Интеграл от квадрата сплайна

$$\int_{-\tau}^{\tau} S^2(t)dt = h\sum_{i=0}^{n}\frac{11}{105}v_i m_i h - \frac{13}{210}v_i m_{i+1}h + \frac{13}{210}m_i h v_{i+1} - \frac{1}{70}m_i h^2 m_{i+1} -$$
$$-\frac{11}{105}v_{i+1}m_{i+1}h + \frac{13}{35}v_i^2 + \frac{1}{105}m_i^2h^2 + \frac{9}{35}v_i v_{i+1} + \frac{13}{35}v_{i+1}^2 + \frac{1}{105}m_{i+1}^2h^2.$$

2. Интеграл от квадрата первой производной

$$\int_{-\tau}^{\tau} S'^2(t)dt = \frac{1}{5h}\sum_{i=0}^{n}\Big(v_i m_i h + v_i m_{i+1} h - m_i h v_{i+1} - \frac{1}{3} m_i h^2 m_{i+1} -$$

$$-v_{i+1} m_{i+1} h + 6v_i^2 + \frac{2}{3} m_i^2 h^2 - 12 v_i v_{i+1} + 6v_{i+1}^2 + \frac{2}{3} m_{i+1}^2 h^2\Big).$$

3. Интеграл от квадрата второй производной

$$\int_{-\tau}^{\tau} S''^2(t)dt = \frac{1}{h^3}\sum_{i=0}^{n}\big(12v_i^2 + 12 v_i m_{i+1} h - 24 v_i v_{i+1} + 12 v_i m_i h -$$

$$-12 v_{i+1} m_{i+1} h + 4 m_i h^2 m_{i+1} + 4 m_{i+1}^2 h^2 + 12 v_{i+1}^2 - 12 m_i h v_{i+1} +$$

$$+4 m_i^2 h^2\big).$$

4. Интеграл от произведения второй производной и сплайна

$$\int_{-\tau}^{\tau} S''(t)\cdot \widetilde{S}(t)dt = \frac{1}{10}\sum_{i=0}^{n}\big(v_{n+i+1} m_i h - \widetilde{m}_i h v_{i+1} - v_{i+n} m_i h + \widetilde{m}_i h v_i -$$

$$-\widetilde{m}_{i+1} h v_i - v_{n+i+1} m_{i+1} h + v_{i+n} m_{i+1} h + \frac{1}{6}\widetilde{m}_i h^2 m_{i+1} + \widetilde{m}_{i+1} h v_{i+1} -$$

$$-\frac{1}{6}\widetilde{m}_{i+1} h^2 m_i + 5 v_{n+i+1} v_i + 5 v_{n+i+1} v_{i+1} - 5 v_{n+i} v_i - 5 v_{n+i} v_{i+1}\Big),$$

числа $v_0,\ v_{n+1},\ m_0,\ m_{n+1}$ (в зависимости от граничных условий) определяются формулами (6) или (5).

Приходим к конечномерной задаче оптимизации:

$$g(v) = \frac{1}{2}(Gv, v) \to \min_{v\in R^{4n}} \tag{9}$$

$$q(v) = \frac{1}{2}(Qv, v) = 1, \tag{10}$$

$$(a_j, v) \le 0,\ j \in 1..M. \tag{11}$$

В (11) векторы $a_j \in R^{4n}$ получаются в результате подстановки сплайнов $S(v,\varphi)$ в (1). Квадратичные формы $g(v)$ и $q(v)$ положительно определены, если $\alpha < \pi$.

Обозначим через Γ, конус определяемым неравенствами (11).

Пусть v_*– решение задачи (9)–(11). Тогда по теореме Куна–Таккера найдутся множители Лагранжа λ_* и τ_j, $\tau_j \ge 0,\ j \in 1..M$, такие, что

$$\begin{cases} Gv_* - \lambda_* Q v_* + \sum_{j=1}^{M} \tau_j a_j = 0, \\ \tau_j (a_j, v) = 0,\ j \in 1..M. \end{cases} \tag{12}$$

У системы уравнениий (12) есть необходимые условия экстремума, но так, как задача (9)–(11) не является задачей выпуклого программирования, то эти условия не являются достаточными. Точки v_*, удовлетворяющие (12) будем называть стационарными.

Для решения задачи (12) необходимо применять методы глобальной оптимизации (например метод ветвей и границ), число переменных может быть велико, а в данном случае трудоемкость метода ветвей и границ определяется размерностью задачи.

Поскольку метод ветвей и границ является довольно трудоемким, в данном случае можно предложить метод перебора вариантов, который в сочетании с локальным алгоритмом, описанным ниже, может оказаться более предпочтительным.

Пусть v_* – решение задачи (10)–(12) и $\lambda_* = U(v_*)$.

$$P_1^* = \lambda_* P_1, \;\; P_2^* = \lambda_* P_2$$

– значения критических нагрузок.

Задача решается методом последовательных приближений.

Пусть $v^0 \in \Gamma$, $q(v^0) = 1$ – некоторое приближение. Пусть уже получена точка $v^k \in \Gamma$, $q(v^k) = 1$.

Обозначим множество $\Omega_k = \{v \in \Gamma \mid (Qv^k, v - v^k) = 0\}$. Найдем точку $\widetilde{v}^k$, такую что $f(\widetilde{v}^k) = \min_{v \in \Omega_k} f(v)$.

Полагаем $v^{k+1} = \frac{\widetilde{v}^k}{\sqrt{g(\widetilde{v}^k)}}$. Очевидно, $g(\widetilde{v}^{k+1}) = 1$.

Можно показать, что любая предельная точка последовательности v^k, $k = 1, 2, ...$ удовлетворяет необходимым условиям экстремума задачи (9)–(11).

3. Результаты вычислений Без ограничения общности можно положить $B_1 = 1$, $B_2 = 1$, $R_1 = 1$, $R_2 = c_0 R_1$. Полагаем $P_2 = 0$ при граничных условиях жесткой заделки.

При вычислениях считаем $n = 40$, $M = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36\}$.

При $\tau = \frac{\pi}{2}$ безразмерное значение параметра критической нагрузки без ограничений на перемещения при $k = 2$ (центральная нагрузка) значение параметра $\lambda_0 = 8.0$.

Если $R_2 = c_0 R_1$, при наличии ограничений (2) значение параметра критической нагрузки λ приведено в таблице 1.

c_0	k_1	λ
0.8	2	31.02
0.8	1	23.47
0.5	2	89.83
0.5	1	69.37
0.25	2	109.07
0.25	1	107.3
0.1	2	109.3
0.1	1	107.45

Таблица 1. Таблица значений критического параметра в зависимости от радиуса R_2

Форма потери устойчивости приведены на рис. 2.

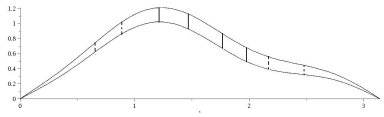


Рис. 2. Форма потери устойчивости системы арок

Наличие односторонних ограничений на перемещения арок значительно увеличивает критическую нагрузку. При этом результаты численных экспериментов показывают, что при $R_2 \to 0$ критическое давление быстро сходится к некоторому значению, которое зависит от угла τ.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.
Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
Источник финансирования. Работа выполнена в рамках госзадания ФМИ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН (проект 125031203621-2).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The authors' contribution is equal.
Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.
Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment of the Physics and Mathematics Institute of the Komi Scientific Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (project 125031203621-2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дюво Г., Лиос Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 382 с.
2. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1967. 376 с.
3. Николаи Е. Л. Труды по механике. М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1955. 584 с.
4. Алфутов Н. А., Еремичев А. Н. Влияние односторонних связей на устойчивость цилиндрических оболочек при осевом сжатии // Расчеты на прочность. 1989. № 1. С. 179–188.
5. Крепс В. Л. О квадратичных формах, неотрицательных на ортанте // ЖВМиМФ. 1984. 1 (14). С. 497–503. EDN: NMAKBS.
6. Рапопорт Л. Б. Устойчивость по Ляпунову и знакоопределенность квадратичной формы на конусе // Рапопорт Л.Б. 1986. 4 (50). С. 674–679. EDN: SBGRZR.
7. Андрюкова В. Ю. Некоторые конструктивно-нелинейные задачи устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. 4 (7). С. 412–422. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.4.39. EDN: UWFIXD.

8. Andryukova V., Tarasov V. Nonsmooth problem of stability for elastic rings // Abstracts of the International Conference “Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics” Dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. 2017. No. 1. P. 213–218. DOI: 10.1109/CNSA.2017.7973928.
9. Tarasov V. N. Nonsmooth problems in the mechanics of elastic systems // Abstracts of the International Conference “Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics” Dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. 2017. No. 1. P. 332–334. DOI: 10.1109/CNSA.2017.7974024.
10. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.

REFERENCES

1. Duvaux G., Lios J.-L. Inequalities in mechanics and physics. M.: Science, 1980. 382 p. (in Russian).
2. Feodosyev V. I. Selected problems and questions on strength of materials. M.: Nauka, 1967. 376 p. (in Russian).
3. Nikolai E. L. Works on mechanics. M.: Publishing house of technical, theoretical literature, 1955. 584 p. (in Russian).
4. Alfutov N. A., Eremichev A. N. The influence of one-way constraints on the stability of cylindrical shells under axial compression // Strength calculations. 1989. No. 1. P. 179–188. (in Russian).
5. Kreps V. L. On quadratic forms that are non-negative on the orthant // ZhVMiMF. 1984. 1 (14). P. 497–503. EDN: NMAKBS. (in Russian).
6. Rapoport L. B. Lyapunov stability and sign-definiteness of a quadratic form on a cone // PMM. 1986. 4 (50). P. 674–679. EDN: SBGRZR. (in Russian).
7. Andryukova V. Y. Some structurally nonlinear problems of stability of elastic systems under one-sided constraints on displacements // Computational continuum mechanics. 2014. 4 (7). P. 412–422. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.4.39. (in Russian).
8. Andryukova V., Tarasov V. Nonsmooth problem of stability for elastic rings // Abstracts of the International Conference “Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics” Dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. 2017. No. 1. P. 213–218. DOI: 10.1109/CNSA.2017.7973928. (in Russian).
9. Tarasov V. N. Nonsmooth problems in the mechanics of elastic systems // Abstracts of the International Conference “Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics” Dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. 2017. No. 1. P. 332–334. DOI: 10.1109/CNSA.2017.7974024. (in Russian).
10. Zavyalov Y. S., Kvasov, B. I. Miroshnichenko V. L. Spline function methods. M.: Nauka, 1980. 352 p. (in Russian).

Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.012 *EDN: ETDMTU*

Научная статья *УДК: 539.3*

В. С. Торосян[1], *А. В. Погосян*[2]

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ КАЧЕСТВЕННЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ИЗМЕНЕНИЯ СКАЧКОВ НАПРЯЖЕНИЙ НА ГРАНИЦЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ В ОДНОЙ ИЗВЕСТНОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОЙ ЭЛАСТОСТАТИКИ

[1] *Институт механики Национальной академии наук Армении, Ереван, Армения*

[2] *Институт математики Национальной академии наук Армении, Ереван, Армения*

Аннотация. Исследуется классическая задача теории упругости для прямоугольной пластины, боковые грани которой подвержены частичным, равномерно распределенным симметричным нагрузкам. Основное внимание уделено анализу сингулярностей и характера изменения скачков напряжений, формирующихся на границах рассматриваемой области. На основе применения модифицированных методов ускорения сходимости рядов Фурье определены точные качественные и количественные зависимости величины этих скачков от пространственных и физико-механических характеристик системы при типичных краевых условиях.

Ключевые слова: тонкая упругая пластина, вычисление разрывов (скачков) напряжений, качественные закономерности изменения скачков, геометрические и физические характеристики задачи

Торосян Вардан Стёпаевич, научный сотрудник отдела математической теории упругости; `e-mail:` vtorosyan99@gmail.com; `https://orcid.org/0009-0007-8236-5968`

Погосян Арнак Валериевич, кандидат физико-математических наук, заведующий отделом дифференциальных и интегральных уравнений; `e-mail:` arnak@instmath.sci.am; `https://orcid.org/0000-0002-6037-4851`

для цитирования: *Торосян В. С., Погосян А. В.* Об исследовании качественных закономерностей изменения скачков напряжений на границе прямоугольной области в одной известной задаче линейной эластостатики // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 202–214. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.012. EDN: ETDMTU

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© Торосян В. С., Погосян А. В. 2026

Поступила: 10.01.2026; принята в печать: 30.07.2026; опубликована: 29.10.26.

Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.012 *EDN: ETDMTU*
Research Article

V. S. Torosyan[1], *A. V. Poghosyan*[2]

ON THE STUDY OF QUALITATIVE PATTERNS OF STRESS JUMP VARIATIONS AT THE BOUNDARY OF A RECTANGULAR DOMAIN IN A WELL-KNOWN PROBLEM OF LINEAR ELASTOSTATICS

[1] *Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of the Republic of Armenia, Yerevan, Armenia*

[2] *Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of the Republic of Armenia, Yerevan, Armenia*

Abstract. A well-known problem in the theory of elasticity for a rectangular domain is considered, where the sides of the rectangle are only partially loaded by uniformly distributed symmetric forces. The characteristic variations of stress jumps occurring at the boundaries of the rectangle are investigated. Qualitative and quantitative patterns of these stress jump variations are calculated and identified as functions of the problem's geometric and physical parameters. This is achieved using classical methods for accelerating the convergence of Fourier series under typical boundary condition scenarios for the problem under consideration.

Keywords: thin elastic plate, calculation of stress discontinuities (jumps), qualitative patterns of jump variations, geometric and physical characteristics of the problem

Vardan S. Torosyan, Research Scientist at the Department of Mathematical Theory of Elasticity; `e-mail:` vtorosyan99@gmail.com; `https://orcid.org/0009-0007-8236-5968`

Arnak V. Poghosyan, Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Head of the Department of Differential and Integral Equations; `e-mail:` arnak@instmath.sci.am; `https://orcid.org/0000-0002-6037-4851`

to cite this article: *Torosyan V. S.*[1], *Poghosyan A. V.* On the study of qualitative patterns of stress jump variations at the boundary of a rectangular domain in a well-known problem of linear elastostatics // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 202–214. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.012

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Received: 10.01.2026; *accepted: 30.07.2026;* *published: 29.10.26.*

Введение. Двумерное моделирование напряженно-деформированного состояния бесконечной упругой призмы или тонкой прямоугольной пластины при поверхностном нагружении граней относится к классическим фундаментальным задачам линейной теории упругости. Благодаря широкому спектру физических приложений, данная проблема на протяжении долгого времени привлекает неослабевающий интерес со стороны специалистов по прикладной математике, механике сплошных сред и практикующих инженеров (подробный обзор см. [1—3]). В последние годы были предложены методы вычисления и выявления точек скачков функции на отрезке на основе конечного числа её коэффициентов Фурье [4—7]. Эти методы открывают новые возможности при исследовании поля напряжений на границе упругого тела.

Ранее в работе [8] на базе указанных подходов был предложен алгоритм, позволяющий локализовать все точки на контуре упругого тела, в которых могут возникать разрывы (скачки) напряжений. Высокая эффективность данного подхода и точность удовлетворения граничных условий были продемонстрированы на примере классической задачи о растяжении квадратной пластины симметричной нагрузкой, локализованной на конечном участке. Стоит подчеркнуть, что именно эта модельная задача традиционно применяется для верификации и оценки точности большинства классических методов исследования краевых задач теории упругости для прямоугольных областей (см., например, [9—12]). Настоящая статья является прямым развитием исследований, начатых в [8], и расширяет область применения новых методов ускорения сходимости рядов Фурье (подробнее в [13]). Основная цель работы заключается в выявлении качественных закономерностей изменения скачков напряжений на границах прямоугольника в зависимости от его геометрии и физических параметров в общем случае постановки краевой задачи. Для наиболее характерных вариантов граничных условий авторами рассчитано и графически представлено распределение напряжений вдоль протяженной стороны прямоугольной области.

1. Постановка задачи и решение. Рассмотрим задачу растяжения прямоугольной пластинки, граничные стороны которой частично нагружены только симметрическими равномерно распределенными нормальными силами интенсивности $q_1,\ q_2$ (рис. 1).

В работе [11] показано, что решение данной краевой задачи, которое при отсутствии массовых сил определяется из системы дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{cases} \nabla^2 \left(X_x + Y_y\right) = 0, \\ \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

можно представить разными способами в виде двойных тригонометрических рядов, в частности (см. также [8]):

$$X_x(x,y) = \frac{1}{4}A_{00} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} A_{0j}\cos(\beta_j y) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}\cos(\alpha_i x)\cos(\beta_j y), \tag{2}$$

$$Y_y(x,y) = \frac{1}{4}B_{00} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} B_{i0}\cos(\alpha_i x) + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} B_{ij}\cos(\alpha_i x)\cos(\beta_j y). \tag{3}$$

$$X_y(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} C_{ij}\sin(\alpha_i x)\sin(\beta_j y),$$

где

$$\alpha_i = \frac{i\pi}{a}, \qquad \beta_j = \frac{j\pi}{b}.$$

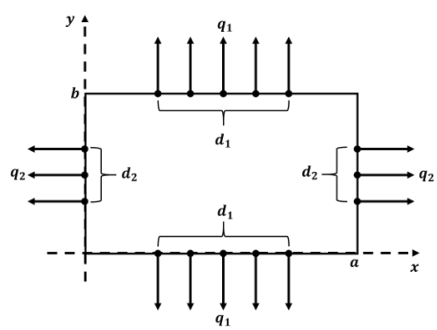


Рис. 1. Схематическое представление задачи

Вследствие симметрии заданных краевых условий искомые коэффициенты разложения A_{ij}, B_{ij} и C_{ij} находятся из совместного решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\left(\frac{1}{2} + \sum_{j=2,4,\ldots}^{\infty} \omega_{ij}\right) X_i + \sum_{j=2,4,\ldots}^{\infty} \omega_{ij} Y_j = \delta_{i0} R_i, \qquad i = 2,4,\ldots, \tag{4}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \sum_{i=2,4,\ldots}^{\infty} v_{ij}\right) Y_j + \sum_{i=2,4,\ldots}^{\infty} v_{ij} X_j = \delta_{0j} Q_j, \qquad j = 2,4,\ldots, \tag{5}$$

где

$$\delta_{ij} = \alpha_{ij}^2 + \beta_{ij}^2, \qquad \omega_{ij} = \left(\frac{\delta_{i0}}{\delta_{ij}}\right)^2, \qquad v_{ij} = \left(\frac{\delta_{0j}}{\delta_{ij}}\right)^2, \tag{6}$$

$$R_i = \frac{4q_1 d_1}{a\, i\pi} \cos\frac{i\pi}{2} \sin\frac{i\pi d_1}{2a}, \qquad i = 2, 4, \ldots, \tag{7}$$

$$Q_j = \frac{4q_2 d_2}{b\, j\pi} \cos\frac{j\pi}{2} \sin\frac{j\pi d_2}{2b}, \qquad j = 2, 4, \ldots. \tag{8}$$

Легко заметить, что совокупность бесконечных систем (4)–(5) регулярна. При подстановке

$$X_i = \alpha_i X_i^*, \qquad Y_j = \beta_j Y_j^*$$

данные системы сводятся к вполне регулярному виду [11]. Из общей теории вполне регулярных бесконечных систем вытекает, что условие ограниченности свободных членов гарантирует существование и единственность ограниченного решения [14]. Данное решение может быть эффективно получено с помощью стандартных численных процедур, метода редукции или последовательных приближений. Соответственно, коэффициенты разложения двойных тригонометрических рядов (2)–(3) поддаются вычислению с заведомо высокой степенью точности. При этом свободные члены определяются аналитически точно и записываются в следующем виде:

$$B_{00} = 4\frac{q_1 d_1}{a}, \qquad A_{00} = 4\frac{q_2 d_2}{b}.$$

Кроме того, из постановки задачи также следует, что тангенциальное напряжение на сторонах квадрата $X_y(x, y) = 0$ и в дальнейшем рассматривать не будем.

2. Вычисление значений разрывов напряжений на границе прямоугольника. Классические ряды Фурье для функций $f(x)$ с разрывами

$$f(x) \approx \sum_{n=-N}^{N} f_n e^{i\pi n x}$$

сходятся крайне медленно, со скоростью порядка $O\left(\frac{1}{N}\right)$, $N \to \infty$. Это приводит к вычислительным трудностям. Метод А. Н. Крылова [7] решает эту проблему путем выделения из функции её сингулярной (негладкой) части, которая и порождает медленную сходимость. Оставшаяся («гладкая») часть функции аппроксимируется тригонометрическим рядом, который сходится значительно быстрее. Функция $f(x)$ представляется в виде суммы специального полинома $P_m(x)$ и новой, «улучшенной» функции $g(x)$:

$$f(x) = P_m(x) + g(x).$$

Полином $P_m(x)$ подбирается таким образом, чтобы он полностью принимал на себя скачки самой функции и её первых m производных на границах интервала.

Коэффициенты этого полинома выражаются через величины скачков (разрывов):

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \Delta_k B_k(x),$$

где Δ_k величина скачка k-й производной функции на границе, а $B_k(x)$ специальные многочлены Бернулли или Крылова. В результате функция $g(x) = f(x) - P_m(x)$ становится достаточно гладкой на замкнутом интервале, а её коэффициенты Фурье g_n убывают со скоростью $g_n = O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right)$, $n \to \infty$. Финальная формула для ускоренного усеченного ряда принимает вид:

$$f(x) \approx f^{(c)}(x) = P_m(x) + \sum_{n=-N}^{N} g_n e^{i\pi n x}.$$

Из результатов работ [8, 15] следует, что напряжения возникающих на границах прямоугольника $X_x(x,0)$, $X_x(x,b)$ и $Y_y(0,y)$, $Y_y(a,y)$ на сторонах прямоугольника $0 \le x \le a$ и $0 \le y \le b$ соответственно имеют скачки в тех точках как и заданные граничные условия. Ввиду симметрии граничных условий относительно обеих осей симметрии прямоугольной области, для выявления качественных зависимостей скачков напряжений от геометрических и физических параметров задачи достаточно исследовать распределение нормальных напряжений $X_x(x,0)$, возникающих вдоль его большей стороны $y = 0$. Путем введения новых переменных тригонометрический ряд для $X_x(x,0)$ приводится к каноническому виду ($i = 1, 2, \dots$)

$$\begin{gathered} X_x(x,0) = \frac{h_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} h_k \cos \alpha_k x, \\ \frac{h_0}{2} = \frac{1}{4} A_{00} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} A_{0j}, \qquad h_i = \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}. \end{gathered} \tag{9}$$

Не ограничивая общности можно считать, что $b = 1$. Введем следующие обозначения

$$d_1 = x_2 - x_1, \qquad d_2 = y_2 - y_1$$

и

$$\begin{aligned} A_1 &= X_x(x_1 - 0, 0) - X_x(x_1 + 0, 0), \\ A_2 &= X_x(x_2 - 0, 0) - X_x(x_1 + 0, 0). \end{aligned} \tag{10}$$

Очевидно, $A_1 = -A_2$. В процессе проведения вычислительных экспериментов были рассмотрены различные группы характерных краевых условий для исследуемой задачи. Расчет разрывов (скачков) нормальных напряжений A_1 и A_2 на границах области осуществлялся в соответствии с методологией, предложенной и обоснованной в работах [4—7]. Результаты численных расчетов $|A_1|$ приведены в табл. 1–7. Чтобы более точно оценить влияные отдельных параметров граничных условий на характерные изменения скачков напряжений, ниже,

на основе данных табл. 1–7, в некоторых характерных случаях граничных случаях, представлены графики напряжений $X_x(x,0)$.

	$q_1 = 0.25$	$q_1 = 0.5$	$q_1 = 1$
$n = 64$	0.1173	0.2347	0.4693
$n = 128$	0.1149	0.2299	0.4598
$n = 256$	0.1137	0.2275	0.4550

Таблица 1. Численные значения скачка $|A_1|$ для параметров $a = 2$, $b = 1$, $d_1 = 0.5a$, $q_2 = 0$ и для различных q_1

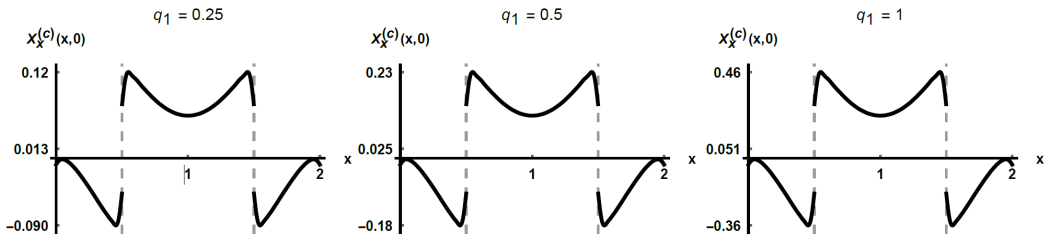


Рис. 2. Графики функции $X_x^{(c)}(x,0)$ для значений параметров, представленных в табл. 1

	$q_1 = 0.25$	$q_1 = 0.5$	$q_1 = 1$
$n = 64$	0.1174	0.2347	0.4694
$n = 128$	0.1149	0.2299	0.4598
$n = 256$	0.1137	0.2275	0.4550

Таблица 2. Численные значения скачка $|A_1|$ для параметров $a = 2$, $b = 1$, $d_1 = 0.5a$, $d_2 = 0.5b$, $q_2 = 0.5$ и для различных q_1

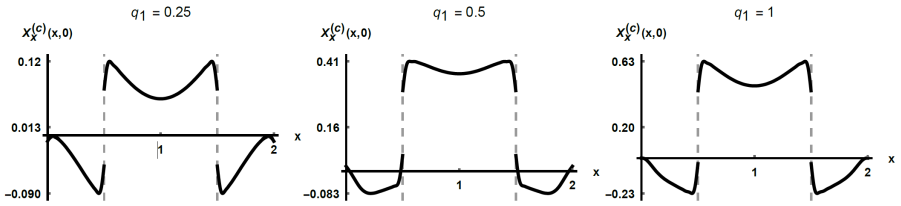


Рис. 3. Графики функции $X_x^{(c)}(x,0)$ для значений параметров, представленных в табл. 2

Замечание 1. При увеличении значения параметра q_1 в два раза, скачки $|A_1|$ увеличиваются практически в два раза. По-видимому, это увеличение не зависит от значения параметра q_2. Это можно строго показать.

	$q_2 = 0.25$	$q_2 = 0.5$	$q_2 = 1$
$n = 64$	0.4694	0.4694	0.4694
$n = 128$	0.4598	0.4598	0.4598
$n = 256$	0.4550	0.4550	0.4550

Таблица 3. Численные значения скачка $|A_1|$ для параметров $a = 2$, $b = 1$, $d_1 = 0.5a$, $d_2 = 0.5b$, $q_1 = 0.5$ и для различных q_2

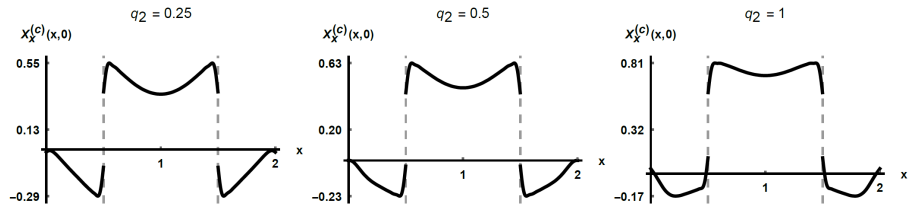


Рис. 4. Графики функции $X_x^{(c)}(x, 0)$ для значений параметров, представленных в табл. 3

	$d_2 = 0.25b$	$d_2 = 0.5b$	$d_2 = 0.75b$
$n = 64$	0.4694	0.4694	0.4694
$n = 128$	0.4598	0.4598	0.4598
$n = 256$	0.4550	0.4550	0.4550

Таблица 4. Численные значения скачка $|A_1|$ для параметров $a = 2$, $b = 1$, $d_1 = 0.5a$, $q_1 = 1$, $q_2 = 0.5$ и для различных d_2

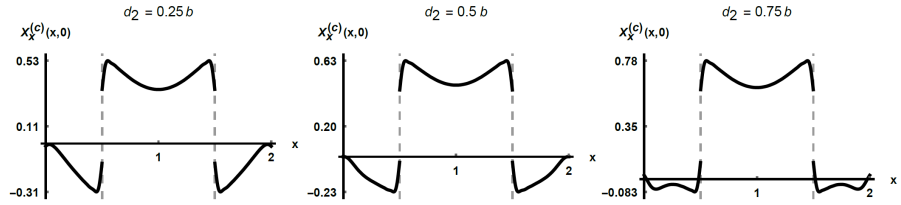


Рис. 5. Графики функции $X_x^{(c)}(x, 0)$ для значений параметров, представленных в табл. 4

Замечание 2. Значения скачков $|A_1|$ не зависят от значений параметров q_2 и d_2. Это можно строго показать.

	$d_1 = 0.25a$	$d_1 = 0.5a$	$d_1 = 0.75a$
$n = 64$	0.4786	0.4694	0.4602
$n = 128$	0.4643	0.4598	0.4551
$n = 256$	0.4572	0.4550	0.4527

Таблица 5. Численные значения скачка $|A_1|$ для параметров $a = 2$, $b = 1$, $d_2 = 0.5b$, $q_1 = 1$, $q_2 = 0.5$ и для различных d_1

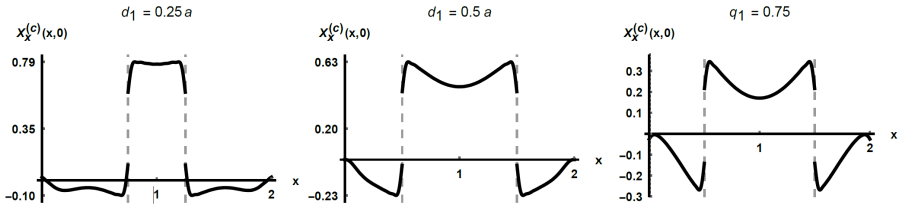


Рис. 6. Графики функции $X_x^{(c)}(x, 0)$ для значений параметров, представленных в табл. 5

Замечание 3. При увеличении значения параметра d_1, значения скачков $|A_1|$ изменяются крайне мало. Можно строго показать, что при увеличении значения параметра d_1 величина скачка не должна измениться.

	$a = 2$	$a = 4$	$a = 6$
$n = 64$	0.4694	0.7073	0.8009
$n = 128$	0.4598	0.7008	0.7963
$n = 256$	0.4550	0.6975	0.7940

Таблица 6. Численные значения скачка $|A_1|$ для параметров $b = 1$, $d_1 = 0.5a$, $d_2 = 0.5b$, $q_1 = 1$, $q_2 = 0.5$ и для различных a

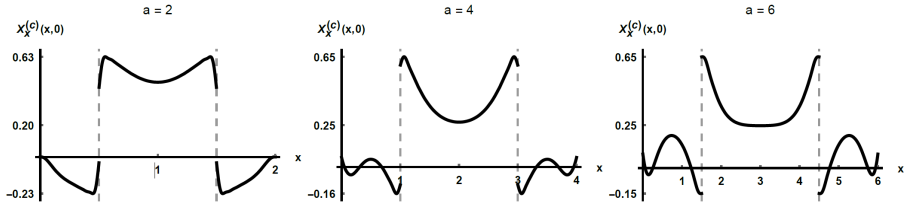


Рис. 7. Графики функции $X_x^{(c)}(x, 0)$ для значений параметров, представленных в табл. 6

Замечание 4. При увеличении значения параметра a, значения скачков $|A_1|$ увеличиваются.

	$a = 2$	$a = 4$	$a = 6$
$n = 64$	0.4694	0.7141	0.7950
$n = 128$	0.4598	0.7044	0.7963
$n = 256$	0.4550	0.6993	0.7920

Таблица 7. Численные значения скачка $|A_1|$ для параметров $b = 1$, $d_1 = 1$, $d_2 = 0.5b$, $q_1 = 1$, $q_2 = 0.5$ и для различных a

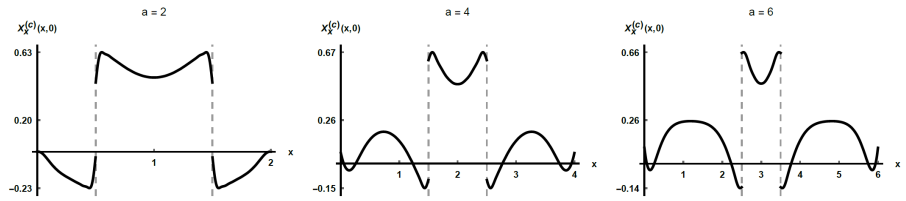


Рис. 8. Графики функции $X_x^{(c)}(x, 0)$ для значений параметров, представленных в табл. 7

Следует отметить, что графики нормальных напряжений $X_x(x, 0)$ построены посредством аппроксимацонной формулы для кусочно-гладкой на конечном отрезке функции предложенным в работе [5] и обозначены через $X_x^{(c)}(x, 0)$.

Основные выводы. На основе проведенного комплекса теоретических и численных исследований можно сформулировать следующие основные выводы: Для фиксированной геометрии прямоугольной области:

- Абсолютные величины разрывов $\{A_1, A_2\}$ нормального напряжения $X_x(x, 0)$ эквивалентны друг другу и определяются исключительно интенсивностью q_1 силового нагружения $Y_y(x, 0)$, приложенного к данной стороне прямоугольника. Указанные величины инвариантны относительно флуктуаций прочих параметров задачи.
- Между абсолютным значением разрыва напряжения и интенсивностью внешних нагрузок q_1 наблюдается линейная зависимость.

При заданных параметрах силового нагружения:

- Абсолютные значения скачков $|A_1|$ напряжения $X_x(x, 0)$ демонстрируют возрастание по мере увеличения протяженности (длины) прямоугольной области.
- Асимптотический анализ показывает, что для прямоугольников с большим аспектом соотношения сторон (при значительном увеличении длины) величины скачков $|A_1|$ монотонно приближаются к значению интенсивности внешней нагрузки q_1.

Почему длина прямоугольника физически влияет на скачок? В двумерных задачах для конечных областей (прямоугольников) напряжения в любой точке

контура формируются не только локальной нагрузкой, но и влиянием противоположных и смежных граней (эффект стеснения и перераспределения внутренних усилий). При малой длине прямоугольника (близкой к квадрату), смежные вертикальные грани находятся близко к зоне приложения нагрузки. Происходит интенсивный перенос сдвиговых и нормальных напряжений на соседние недеформированные участки. Часть энергии упругой деформации «уходит» в смежные углы и вертикальные ребра. Это физически сглаживает поле напряжений в окрестности разрыва, уменьшая фактический скачок нормального напряжения. При увеличении длины прямоугольника, влияние удаленных вертикальных граней стремительно затухает. Система физически приближается к состоянию бесконечной полуплоскости или упругой полосы. В этом предельном состоянии упругая среда уже не может эффективно перераспределять локальные напряжения вдоль бесконечного края, и жесткость системы в продольном направлении падает. В результате внутренние напряжения вынуждены полностью воспринимать скачок внешней нагрузки, и величина скачка асимптотически стремится к теоретическому максимуму, интенсивности q_1.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Автор подтверждает соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (внес существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочел и одобрил финальную версию перед публикацией).
Конфликт интересов. Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
Источник финансирования. Автор заявляет об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The author confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (the author have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).
Competing interests. The author declare that they have no competing interests.
Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мелешко В. В. Бигармоническая задача для прямоугольника: история и современность // Математические методы и физико-механические поля. 2004. Т. 47, № 3. С. 45–63.
2. Meleshko V. V. Biharmonic Problem in a Rectangle // Flow, Turbulence and Combustion. Vol. 58. 1997. P. 217–249. DOI: 10.1007/978-94-011-4986-0_14.
3. Meleshko V. V., Gomilko A. M., Gourjii A. A. Normal Reactions in a Clamped Elastic Rectangular Plate // Journal of Engineering Mathematics. 2001. Vol. 40. P. 377–393. DOI: 10.1023/A:1017501111057.
4. Нерсесян А. Б. Квазиполиномы типа Бернулли и ускорение сходимости рядов Фурье кусочно-гладких функций // Доклады Национальной академии наук Армении. 2004. Т. 104, № 4. С. 273–278.

5. Barkhudaryan A., Barkhudaryan R., Poghosyan A. Asymptotic Behavior of Eckhoff's Method for Fourier Series Convergence Accelerations // Analysis in Theory and Applications. 2007. Vol. 23, no. 3. P. 228–242. DOI: 10.1007/s10496-007-0228-0. EDN: LKQMPF.
6. Eckhoff K. S. Accurate Reconstructions of Functions of Finite Regularity from Truncated Fourier Series Expansions // Mathematics of Computation. 1995. Vol. 64, no. 210. P. 671–690. DOI: 10.1090/S0025-5718-1995-1265014-7.
7. Poghosyan A. On an Auto-Correction Phenomenon of the Krylov–Gottlieb–Eckhoff Method // IMA Journal of Numerical Analysis. 2011. Vol. 31, no. 2. P. 512–527. DOI: 10.1093/imanum/drp043. EDN: OMOUGN.
8. Торосян В. С., Погосян А. В. О выяснении особенностей напряжений на границе прямоугольной области в одной задаче теории упругости // Доклады Национальной академии наук Армении. 2023. Т. 123, № 1. С. 21–29.
9. Абрамян Б. Л. К плоской задаче теории упругости для прямоугольника // Прикладная математика и механика. 1957. Т. 21, № 1. С. 89–101.
10. Гринберг Г. Л., Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С. Метод решения общей бигармонической задачи для прямоугольной области при задании на контуре значений функции и ее нормальной производной // Прикладная математика и механика. 1953. Т. 17, № 1. С. 73–87.
11. Тодоров М. М. О решении плоской задачи для прямоугольника посредством двойных тригонометрических рядов // Известия Академии наук СССР. Механика и машиностроение. 1959. № 4. С. 185–192.
12. Meleshko V. V. Equilibrium of Elastic Rectangle: Mathieu–Inglis–Pickett Solution Revisited // Journal of Elasticity. 1995. Vol. 40. P. 207–235. DOI: 10.1007/BF00043957. EDN: XYGCOH.
13. Торосян В. С., Погосян А. В. Об исследовании характерных закономерностей изменения скачков напряжений на границе прямоугольной области в одной известной задаче теории упругости // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения: материалы 6-й Международной конференции DYSC 2024 (Иркутск, 16–22 сент. 2024). 2024. С. 70–73. EDN: PNDBJT.
14. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Москва: Физматгиз, 1962.
15. Batenkov D. Complete Algebraic Reconstruction of Piecewise-Smooth Functions from Fourier Data // Mathematics of Computation. 2015. Vol. 84, no. 295. P. 2329–2350. DOI: 10.1090/S0025-5718-2015-02948-2. EDN: UQTFIV.

REFERENCES

1. Meleshko V. V. The Biharmonic Problem for a Rectangle: History and Current State // Mathematical Methods and Physicomechanical Fields. 2004. Vol. 47, no. 3. P. 45–63. (in Russian).
2. Meleshko V. V. Biharmonic Problem in a Rectangle // Flow, Turbulence and Combustion. Vol. 58. 1997. P. 217–249. DOI: 10.1007/978-94-011-4986-0_14.
3. Meleshko V. V., Gomilko A. M., Gourjii A. A. Normal Reactions in a Clamped Elastic Rectangular Plate // Journal of Engineering Mathematics. 2001. Vol. 40. P. 377–393. DOI: 10.1023/A:1017501111057.

4. Nersesyan A. B. Bernoulli-Type Quasipolynomials and Acceleration of the Convergence of Fourier Series of Piecewise-Smooth Functions // Dokl. Natl. Acad. Sci. Armen. 2004. Vol. 104, no. 4. P. 273–278. (in Russian).
5. Barkhudaryan A., Barkhudaryan R., Poghosyan A. Asymptotic Behavior of Eckhoff's Method for Fourier Series Convergence Accelerations // Analysis in Theory and Applications. 2007. Vol. 23, no. 3. P. 228–242. DOI: 10.1007/s10496-007-0228-0. EDN: LKQMPF.
6. Eckhoff K. S. Accurate Reconstructions of Functions of Finite Regularity from Truncated Fourier Series Expansions // Mathematics of Computation. 1995. Vol. 64, no. 210. P. 671–690. DOI: 10.1090/S0025-5718-1995-1265014-7.
7. Poghosyan A. On an Auto-Correction Phenomenon of the Krylov–Gottlieb–Eckhoff Method // IMA Journal of Numerical Analysis. 2011. Vol. 31, no. 2. P. 512–527. DOI: 10.1093/imanum/drp043. EDN: OMOUGN.
8. Torosyan V. S., Poghosyan A. V. On Determining Stress Singularities at the Boundary of a Rectangular Domain in an Elasticity Problem // Dokl. Natl. Acad. Sci. Armen. 2023. Vol. 123, no. 1. P. 21–29. (in Russian).
9. Abramyan B. L. On the Plane Problem of Elasticity Theory for a Rectangle // Prikl. Mat. Mekh. 1957. Vol. 21, no. 1. P. 89–101. (in Russian).
10. Grinberg G. L., Lebedev N. N., Uflyand Y. S. A Method for Solving the General Biharmonic Problem for a Rectangular Domain with Prescribed Boundary Values of the Function and Its Normal Derivative // Prikl. Mat. Mekh. 1953. Vol. 17, no. 1. P. 73–87. (in Russian).
11. Todorov M. M. On the Solution of the Plane Problem for a Rectangle by Means of Double Trigonometric Series // Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Mashinostr. 1959. No. 4. P. 185–192. (in Russian).
12. Meleshko V. V. Equilibrium of Elastic Rectangle: Mathieu–Inglis–Pickett Solution Revisited // Journal of Elasticity. 1995. Vol. 40. P. 207–235. DOI: 10.1007/BF00043957. EDN: XYGCOH.
13. Torosyan V. S., Poghosyan A. V. Investigation of Characteristic Patterns in the Variation of Stress Jumps at the Boundary of a Rectangular Domain in a Known Elasticity Problem // Dynamic Systems and Computer Sciences: Theory and Applications: Proceedings of the 6th International Conference DYSC 2024 (Irkutsk, Sept. 16–22, 2024). 2024. P. 70–73. EDN: PNDBJT. (in Russian).
14. Kantorovich L. V., Krylov V. I. Approximate Methods of Higher Analysis. Moscow: Fizmatgiz, 1962. (in Russian).
15. Batenkov D. Complete Algebraic Reconstruction of Piecewise-Smooth Functions from Fourier Data // Mathematics of Computation. 2015. Vol. 84, no. 295. P. 2329–2350. DOI: 10.1090/S0025-5718-2015-02948-2. EDN: UQTFIV.

Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.014 *EDN: WUCMTZ*

Научная статья *УДК: 539.319*

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ И ИЗГИБОВ–КРУЧЕНИЙ В СЛУЧАЕ ГЕМИТРОПНОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ СРЕДЫ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Аннотация. В настоящем исследовании рассматривается каноническое преобразование деформаций и изгибов–кручения для гемитропной микрополярной упругой среды. Энергия деформации такой среды рассматривается как функция, зависящая от несимметричных тензоров деформации и изгиба-кручения, которые трактуются как термодинамические переменные состояния. Приведено А-представление энергии деформации гемитропной микрополярной упругой среды, характеризующейся 9 изоэнтропийными механическими модулями. Квадратичная форма энергии деформации диагонализуется методом выделения полных квадратов. Получены матрицы перехода от исходных переменных к новым (каноническим, сопряженным по остаточной энергии деформации).

Ключевые слова: энергия деформации, внутренняя энергия, гемитропная микрополярная среда, упругость, диагонализация, каноническая квадратичная форма, канонические переменные.

Мурашкин Евгений Валерьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики новых материалов и технологий; e-mail: murashkin@ipmnet.ru; https://orcid.org/0000-0002-3267-4742; AuthorID: 129570

Радаев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории механики новых материалов и технологий; e-mail: radayev@ipmnet.ru;; https://orcid.org/0000-0002-0866-2151; AuthorID: 103116

для цитирования: *Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.* Каноническое преобразование деформаций и изгибов–кручений в случае гемитропной микрополярной среды // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 215–231. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.014. EDN: WUCMTZ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. 2026

Поступила: 16.06.2026; принята в печать: 28.08.2026; опубликована: 29.10.26.

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.014 *EDN: WUCMTZ*
Research Article

E. V. Murashkin, Y. N. Radayev

CANONICAL TRANSFORMATION OF STRAINS AND BEND-TWISTS FOR A HEMITROPIC MICROPOLAR MEDIUM

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. This study considers the canonical transformation of strains and bending-torsion for a hemitropic micropolar elastic medium. The strain energy of such a medium is considered as a function dependent on asymmetric strain and bending-torsion tensors, which are treated as thermodynamic state variables. An A-representation of the strain energy of a hemitropic micropolar elastic medium characterized by nine isentropic mechanical moduli is presented. The quadratic form of the strain energy is diagonalized using the perfect squares method. Transition matrices from the original variables to new ones (canonical, conjugate with respect to the residual strain energy) are obtained.
Keywords: strain energy, internal energy, hemitropic micropolar medium, elasticity, diagonalization, canonical quadratic form, canonical variables

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; `e-mail:` evmurashkin@gmail.ru; https://orcid.org/0000-0002-3267-4742; AuthorID: 129570

Yuri N. Radayev, Dr. Sci. Phys. & Math., Prof., Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; `e-mail:` radayev@ipmnet.ru; https://orcid.org/0000-0002-0866-2151; AuthorID: 103116

to cite this article: *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* Canonical transformation of strains and bend-twists for a hemitropic micropolar medium // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 215–231. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.014

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Received: 16.06.2026; *accepted: 28.08.2026;* *published: 29.10.26.*

1. Предварительные замечания и вводная информация. Построение энергетических форм является актуальной задачей математического моделирования механического поведения деформируемых сред [**Kessel1964**, 1—14]. Указанные энергетические формы используются при формулировке вариационных принципов и выводе дифференциальных уравнений движения деформируемого тела. Кроме этого, исследование самой энергетической формы позволяет сформулировать условия устойчивости равновесия упругого тела. Проще всего получить такие условия если преобразовать квадратичную форму энергии деформации к каноническому виду, как это было проделано в работах [15—17]. В настоящем исследовании найдены законы преобразования формальных переменных к новым (каноническим, сопряженным по остаточной энергии деформации).

В основе исследования лежат понятия, терминология, обозначения, методы и результаты, представленные в предыдущих работах авторов [10, 11, 15—22].

Микрополярное твердое тело называется гемитропным, если компоненты определяющих тензоров инвариантны относительно группы полуизометрических преобразований трехмерного евклидова пространства, а именно группы ортогональных преобразований, исключая зеркальные отражения и инверсии трехмерного пространства. В этом случае правильная запись основных уравнений представляется в формализме псевдотензоров, но простой алгоритм преобразования псевдотензора в соответствующий абсолютный тензор помогает нам отложить в сторону формализм псевдотензоров и затем представить исследование в терминах абсолютных тензоров.

2. Энергетическая форма гемитропного микрополярного упругого тела. Введем энергию деформации $\mathscr{U}$ в расчете на единичный инвариантный элемент объема при постоянной энтропии ($S = \mathrm{const}$), как это, например, проделано в работах [11, 20, 21], следующим образом

$$U\Big|_{\text{adiabatic}} = \mathscr{U}\left(\epsilon_{(ij)}, \kappa_{(ij)}, \varphi_i, \kappa_i\right). \tag{1}$$

Причем функциональные аргументы определяются через трансляционные u_i и спинорные ϕ_i перемещения согласно соотношениям

$$\begin{aligned} &\epsilon_{ij} = \partial_i u_j - e_{ijk}\varphi_k, \quad 2\epsilon_{(ij)} = \partial_i u_j + \partial_j u_i, \quad \kappa_{ij} = \partial_i \phi_j, \\ &\kappa_{(ij)} = \partial_i \phi_j + \partial_j \phi_i, \quad \varphi_i = \phi_i - \frac{1}{2} e_{ikl}\partial_k u_l, \quad \kappa_i = \frac{1}{2} e_{ijs}\kappa_{[js]}. \end{aligned} \tag{2}$$

В уравнениях (1) и (2) используются следующие обозначения: ϵ_{ij} — асимметричный тензор деформаций; κ_{ij} — асимметричный тензор изгиба–кручения; u_i — трансляционные перемещения; ϕ_i — спинорные перемещения; ∂_i обозначает частную производную по пространственной координате x_i; e_{ijk} — дискриминантный тензор (тензор Леви–Чивиты); φ_i — относительные микроповороты; круглые скобки обозначают алгебраическую симметризацию; квадратные скобки обозначают алгебраическое альтернирование.

Термодинамический смысл энергии деформации аналогичен внутренней энергии, поскольку мы ограничиваемся изоэнтропийными (адиабатическими) процессами. В большинстве доступных исследований внутренняя энергия вводится как термодинамический потенциал состояния на единицу инвариантного объема и обозначается U.

Энергия деформации $\mathscr{U}$ инвариантна относительно вращений и трансляций пространства, а также относительно преобразований пространственной инверсии и зеркальных отражений, т.е. относительно полной изометрической группы. Нет никаких препятствий отказаться от инвариантности $\mathscr{U}$, т.е. можно в принципе вести речь об изменении энергии при зеркальных отражениях.[3] Существуют три различных подхода к определению энергии деформации, подробно описанные в статье [11]. А-представление [10] основано на понятиях теории рациональных алгебраических инвариантов, являясь линейной оболочкой индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов несимметричного тензора деформации и пространственного градиента поля микровращений. Основы теории целых рациональных алгебраических инвариантов подробно обсуждаются в фундаментальных монографиях [23, 24]. В исследованиях П.А. Жилина [25] также рассматривается такой же круг вопросов, однако форма представления служит препятствием к пониманию существа дела и дальнейшего использования.

Инварианты, принадлежащие полной неприводимой системе индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических квадратичных инвариантов симметричных компонент несимметричных тензоров деформации, тензора изгиба-кручения и связанных с ними векторов для гемитропного твердого тела, вычисляются в декартовых координатах следующим образом [26]

$$\begin{aligned}
&\underset{1}{\mathrm{I}} = \delta_{ik}\delta_{lm}\epsilon_{(ik)}\epsilon_{(lm)}, && \underset{2}{\mathrm{I}} = \delta_{ik}\delta_{lm}\kappa_{(ik)}\kappa_{(lm)}, && \underset{3}{\mathrm{I}} = \delta_{ik}\delta_{lm}\epsilon_{(il)}\epsilon_{(km)},\\
&\underset{4}{\mathrm{I}} = \delta_{ik}\delta_{lm}\kappa_{(il)}\kappa_{(km)}, && \underset{5}{\mathrm{I}} = \delta_{ik}\varphi_i\varphi_k, && \underset{6}{\mathrm{I}} = \delta_{ik}\kappa_i\kappa_k,\\
&\underset{7}{\mathrm{I}} = \delta_{ik}\delta_{lm}\epsilon_{(ik)}\kappa_{(lm)}, && \underset{8}{\mathrm{I}} = \epsilon_{(ik)}\kappa_{(ik)}, && \underset{9}{\mathrm{I}} = \kappa_k\varphi_k\,,
\end{aligned} \tag{3}$$

где δ_{lm} — символ Кронекера.

Вышеизложенные рассуждения приводят нас к А-представлению энергии деформации гемитропного микрополярного упругого твердого тела как линейной оболочке инвариантов (3):

$$\mathscr{U} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{9} \underset{\mathfrak{c}}{A}\,\underset{\mathfrak{c}}{\mathrm{I}}, \tag{4}$$

где $\underset{\mathfrak{c}}{A}$ $(\mathfrak{c} = 1, \ldots, 9)$ — произвольные (определяющие) постоянные. Очевидно эти константы могут интерпретироваться как определяющие упругие модули (абсолютные скаляры) при задании модели гемитропного микрополярного упругого твердого тела.

[3]Авторам неизвестны физические теории, в которых предполагался бы отказ от инвариантности энергии.

В силу формул (3) для инвариантов $\underset{\mathfrak{c}}{\mathrm{I}}$ ($\mathfrak{c} = 1, \ldots, 9$) энергия деформации (1) представляется в виде (см. [10, 11, 20]):

$$\begin{aligned}\mathscr{U} = \underset{1}{A}\delta_{is}\delta_{lm}\epsilon_{(is)}\epsilon_{(lm)} + \underset{2}{A}\delta_{is}\delta_{lm}\kappa_{(is)}\kappa_{(lm)} + \underset{3}{A}\delta_{is}\delta_{lm}\epsilon_{(il)}\epsilon_{(sm)} + \\ + \underset{4}{A}\delta_{is}\delta_{lm}\kappa_{(il)}\kappa_{(sm)} + \underset{5}{A}\delta_{is}\varphi_i\varphi_s + \underset{6}{A}\delta_{is}\kappa_i\kappa_s + \\ + \underset{7}{A}\delta_{is}\delta_{lm}\epsilon_{(is)}\kappa_{(lm)} + \underset{8}{A}\epsilon_{(is)}\kappa_{(is)} + \underset{9}{A}\kappa_i\varphi_i. \quad (5)\end{aligned}$$

Для унификации применения алгебраических алгоритмов диагонализации мы вводим формальные замены независимых переменных состояния $\epsilon_{(ij)}, \kappa_{(ij)}, \varphi_i, \kappa_i$ энергии деформации $\mathscr{U}$ согласно следующим правилам:

$$\begin{array}{llll}\epsilon_{(11)} \longleftrightarrow Y_{\underline{1}}, & \kappa_{(11)} \longleftrightarrow Y_{\underline{7}}, & \varphi_1 \longleftrightarrow Y_{\underline{13}}, & \kappa_1 \longleftrightarrow Y_{\underline{16}}, \\ \epsilon_{(22)} \longleftrightarrow Y_{\underline{2}}, & \kappa_{(22)} \longleftrightarrow Y_{\underline{8}}, & \varphi_2 \longleftrightarrow Y_{\underline{14}}, & \kappa_2 \longleftrightarrow Y_{\underline{17}}, \\ \epsilon_{(33)} \longleftrightarrow Y_{\underline{3}}, & \kappa_{(33)} \longleftrightarrow Y_{\underline{9}}, & \varphi_3 \longleftrightarrow Y_{\underline{15}}; & \kappa_3 \longleftrightarrow Y_{\underline{18}}; \\ \epsilon_{(23)} \longleftrightarrow Y_{\underline{4}}, & \kappa_{(23)} \longleftrightarrow Y_{\underline{10}}, & & \\ \epsilon_{(13)} \longleftrightarrow Y_{\underline{5}}, & \kappa_{(13)} \longleftrightarrow Y_{\underline{11}}, & & \\ \epsilon_{(12)} \longleftrightarrow Y_{\underline{6}}; & \kappa_{(12)} \longleftrightarrow Y_{\underline{12}}; & & \end{array} \quad (6)$$

где мы подчеркиваем один 18-векторный индекс, чтобы отличить составные двузначные индексы от двух соседних однозначных индексов. Вектор формальных переменных $[Y]$ принадлежит формальному векторному пространству алгебраической размерности 18.

Отметим, что формальные переменные теории микрополярной упругости не подлежат физической интерпретации, по крайней мере на данном этапе и могут быть введены несколькими способами. Изменения рассматриваемых способов нумерации деформаций и изгибов–кручений не принципиальны, но приведут к изменению матрицы квадратичной форм. Тем не менее это нисколько не повлияет на условия положительной определенности квадратичной формы и ее собственные числа. Приведем несколько альтернативных способов нумерации формальных переменных. Если ввести вектор формальных переменных $[Y]$ следующим образом:

$$\begin{array}{llll}\epsilon_{(11)} \longleftrightarrow Y_{\underline{1}}, & \epsilon_{(23)} \longleftrightarrow Y_{\underline{7}}, & \varphi_1 \longleftrightarrow Y_{\underline{13}}, & \kappa_1 \longleftrightarrow Y_{\underline{16}}, \\ \epsilon_{(22)} \longleftrightarrow Y_{\underline{2}}, & \epsilon_{(13)} \longleftrightarrow Y_{\underline{8}}, & \varphi_2 \longleftrightarrow Y_{\underline{14}}, & \kappa_2 \longleftrightarrow Y_{\underline{17}}, \\ \epsilon_{(33)} \longleftrightarrow Y_{\underline{3}}, & \epsilon_{(12)} \longleftrightarrow Y_{\underline{9}}, & \varphi_3 \longleftrightarrow Y_{\underline{15}}; & \kappa_3 \longleftrightarrow Y_{\underline{18}}; \\ \kappa_{(11)} \longleftrightarrow Y_{\underline{4}}, & \kappa_{(23)} \longleftrightarrow Y_{\underline{10}}, & & \\ \kappa_{(22)} \longleftrightarrow Y_{\underline{5}}, & \kappa_{(13)} \longleftrightarrow Y_{\underline{11}}, & & \\ \kappa_{(33)} \longleftrightarrow Y_{\underline{6}}; & \kappa_{(12)} \longleftrightarrow Y_{\underline{12}}; & & \end{array} \quad (7)$$

тогда матрица квадратичной формы будет блочно–диагональной, состоящей из трех подматриц алгебраической размерности 6×6. Одна из указанных подматриц будет полностью заполненной, а две другие — трехдиагональными матрицами. Указанное обстоятельство позволяет наиболее простым способом провести факторизацию характеристического полинома квадратичной энергетической формы гемитропного микрополряного тела.

Наиболее естественной нумерацией, реализованной в работах [15—17], будет следующая:

$$\begin{array}{llll}
\epsilon_{(11)} \longleftrightarrow Y_{\underline{1}}, & \varphi_1 \longleftrightarrow Y_{\underline{7}}, & \kappa_{(11)} \longleftrightarrow Y_{\underline{10}}, & \kappa_1 \longleftrightarrow Y_{\underline{16}}, \\
\epsilon_{(22)} \longleftrightarrow Y_{\underline{2}}, & \varphi_2 \longleftrightarrow Y_{\underline{8}}, & \kappa_{(22)} \longleftrightarrow Y_{\underline{11}}, & \kappa_2 \longleftrightarrow Y_{\underline{17}}, \\
\epsilon_{(33)} \longleftrightarrow Y_{\underline{3}}, & \varphi_3 \longleftrightarrow Y_{\underline{9}}, & \kappa_{(33)} \longleftrightarrow Y_{\underline{12}}, & \kappa_3 \longleftrightarrow Y_{\underline{18}}; \\
\epsilon_{(23)} \longleftrightarrow Y_{\underline{4}}, & & \kappa_{(23)} \longleftrightarrow Y_{\underline{13}}, & \\
\epsilon_{(13)} \longleftrightarrow Y_{\underline{5}}, & & \kappa_{(13)} \longleftrightarrow Y_{\underline{14}}, & \\
\epsilon_{(12)} \longleftrightarrow Y_{\underline{6}}, & & \kappa_{(12)} \longleftrightarrow Y_{\underline{15}}; &
\end{array} \tag{8}$$

Способы введения формальных переменных $Y_{\underline{1}}, \ldots, Y_{\underline{18}}$ (6), (7) и (8) для удобства изложения назовем «красной» R-нумерацией, «зеленой» G-нумерацией и «красной» B-нумерацией, соответственно. В дальнейшем изложении настоящего исследования будем пользоваться «красной» R-нумерацией (6).

Следует отметить, что в научных публикациях можно найти и другие способы нумерации. Например, оригинальная нумерация компонент асимметричных тензоров деформации и изгиба–кручения предожена в работе Э.Л. Аэро и Е.В. Кувшинского [5]. Матрица такой квадратичной формы имеет диагональный вид, на главной диагонали которой стоит четыре подматрицы. Одна из указанных подматриц имеет алгебраическую размерность 6×6, а три другие — алгебраическую размерность 4×4. Причем все подматрицы оказываются полностью заполнены ненулевыми элементами.

С учетом замен (6) квадратичная форма энергии деформации (5) записывается как:

$$\begin{aligned}
\mathscr{U} = {} & Y_{\underline{1}}^2(\underset{1}{A} + \underset{3}{A}) + Y_{\underline{2}}^2(\underset{1}{A} + \underset{3}{A}) + Y_{\underline{3}}^2(\underset{1}{A} + \underset{3}{A}) + 2\underset{3}{A}Y_{\underline{4}}^2 + 2\underset{3}{A}Y_{\underline{5}}^2 + 2\underset{3}{A}Y_{\underline{6}}^2 + \\
& + Y_{\underline{7}}^2(\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) + Y_{\underline{8}}^2(\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) + Y_{\underline{9}}^2(\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) + 2\underset{4}{A}Y_{\underline{10}}^2 + 2\underset{4}{A}Y_{\underline{11}}^2 + 2\underset{4}{A}Y_{\underline{12}}^2 + \\
& + \underset{5}{A}Y_{\underline{13}}^2 + \underset{5}{A}Y_{\underline{14}}^2 + \underset{5}{A}Y_{\underline{15}}^2 + \underset{6}{A}Y_{\underline{16}}^2 + \underset{6}{A}Y_{\underline{17}}^2 + \underset{6}{A}Y_{\underline{18}}^2 + 2\underset{1}{A}Y_{\underline{1}}Y_{\underline{2}} + 2\underset{1}{A}Y_{\underline{1}}Y_{\underline{3}} + 2\underset{1}{A}Y_{\underline{2}}Y_{\underline{3}} + \\
& + 2\underset{2}{A}Y_{\underline{7}}Y_{\underline{8}} + \underset{7}{A}Y_{\underline{1}}Y_{\underline{7}} + \underset{7}{A}Y_{\underline{1}}Y_{\underline{8}} + \underset{7}{A}Y_{\underline{2}}Y_{\underline{7}} + \underset{7}{A}Y_{\underline{2}}Y_{\underline{8}} + \underset{7}{A}Y_{\underline{3}}Y_{\underline{7}} + \underset{7}{A}Y_{\underline{3}}Y_{\underline{8}} + \underset{8}{A}Y_{\underline{1}}Y_{\underline{7}} + \\
& + 2\underset{8}{A}Y_{\underline{10}}Y_{\underline{4}} + 2\underset{8}{A}Y_{\underline{11}}Y_{\underline{5}} + 2\underset{8}{A}Y_{\underline{12}}Y_{\underline{6}} + \underset{8}{A}Y_{\underline{2}}Y_{\underline{8}} + \underset{9}{A}Y_{\underline{13}}Y_{\underline{16}} + \underset{9}{A}Y_{\underline{14}}Y_{\underline{17}} + \\
& + \underset{9}{A}Y_{\underline{15}}Y_{\underline{18}} + Y_{\underline{9}}(2\underset{2}{A}Y_{\underline{7}} + 2\underset{2}{A}Y_{\underline{8}} + \underset{7}{A}Y_{\underline{1}} + \underset{7}{A}Y_{\underline{2}} + \underset{7}{A}Y_{\underline{3}} + \underset{8}{A}Y_{\underline{3}}) .
\end{aligned} \tag{9}$$

Отметим, что уравнение (9) может быть представлено в компактных матричных обозначениях как:

$$\mathscr{U} = [\mathrm{Y}]^\top [\mathrm{A}][\mathrm{Y}], \tag{10}$$

где

$$[\mathrm{Y}]^\top = [Y_{\underline{1}}, Y_{\underline{2}}, Y_{\underline{3}}, Y_{\underline{4}}, Y_{\underline{5}}, Y_{\underline{6}}, Y_{\underline{7}}, Y_{\underline{8}}, Y_{\underline{9}}, Y_{\underline{10}}, Y_{\underline{11}}, Y_{\underline{12}}, Y_{\underline{13}}, Y_{\underline{14}}, Y_{\underline{15}}, Y_{\underline{16}}, Y_{\underline{17}}, Y_{\underline{18}}];$$

$[\mathrm{Y}]^\top$ — транспонированный вектор-столбец алгебраической размерности 18, составленный из формальных переменных теории микрополярной упругости; $[\mathrm{A}]$ — формальная матрица размерности 18×18, задающаяся 9 изоэнтропийными

механическими модулями микрополярной среды. В случае гемитропного микрополярного твердого тела формальная матрица [A] имеет следующую структуру:

$$[\mathrm{A}] = \begin{bmatrix} [\mathrm{A}_{11}] & 0 & [\mathrm{A}_{13}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\mathrm{A}_{22}] & 0 & [\mathrm{A}_{24}] & 0 & 0 \\ [\mathrm{A}_{31}] & 0 & [\mathrm{A}_{33}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\mathrm{A}_{42}] & 0 & [\mathrm{A}_{44}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [\mathrm{A}_{55}] & [\mathrm{A}_{56}] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [\mathrm{A}_{65}] & [\mathrm{A}_{66}] \end{bmatrix}, \tag{11}$$

где $[\mathrm{A}_{hk}]$ $(h, k = 1, \ldots, 6)$ — симметричные квадратные подматрицы алгебраической размерности 3×3, которые задаются микрополярными упругими определяющими постоянными $\underset{\mathfrak{a}}{A}$ $(\mathfrak{a} = 1, \ldots, 9)$ согласно формулам:

$$[\mathrm{A}_{11}] = \begin{bmatrix} \underset{1}{A} + \underset{3}{A} & \underset{1}{A} & \underset{1}{A} \\ \underset{1}{A} & \underset{1}{A} + \underset{3}{A} & \underset{1}{A} \\ \underset{1}{A} & \underset{1}{A} & \underset{1}{A} + \underset{3}{A} \end{bmatrix}, \quad [\mathrm{A}_{33}] = \begin{bmatrix} \underset{2}{A} + \underset{4}{A} & \underset{2}{A} & \underset{2}{A} \\ \underset{2}{A} & \underset{2}{A} + \underset{4}{A} & \underset{2}{A} \\ \underset{2}{A} & \underset{2}{A} & \underset{2}{A} + \underset{4}{A} \end{bmatrix},$$

$$2[\mathrm{A}_{13}] = 2[\mathrm{A}_{31}] = \begin{bmatrix} \underset{7}{A} + \underset{8}{A} & \underset{7}{A} & \underset{7}{A} \\ \underset{7}{A} & \underset{7}{A} + \underset{8}{A} & \underset{7}{A} \\ \underset{7}{A} & \underset{7}{A} & \underset{7}{A} + \underset{8}{A} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

$$2[\mathrm{A}_{56}] = 2[\mathrm{A}_{65}] = \underset{9}{A}\,\mathrm{diag}[1,1,1], \qquad [\mathrm{A}_{24}] = [\mathrm{A}_{42}] = \underset{8}{A}\,\mathrm{diag}[1,1,1],$$

$$[\mathrm{A}_{22}] = 2\underset{3}{A}\,\mathrm{diag}[1,1,1], \qquad [\mathrm{A}_{55}] = \underset{5}{A}\,\mathrm{diag}[1,1,1],$$

$$[\mathrm{A}_{44}] = 2\underset{4}{A}\,\mathrm{diag}[1,1,1], \qquad [\mathrm{A}_{66}] = \underset{6}{A}\,\mathrm{diag}[1,1,1].$$

3. Метод диагонализации выделением полных квадратов. Для получения определяющих неравенств мы приводим форму энергии деформации (9) к диагональному (или каноническому) виду, используя простейший и алгоритмический метод линейной алгебры (метод выделения полных квадратов, предложенный Ж.Л. Лагранжем в 1759 г.). В дальнейшем обсуждении подчеркивания под индексами опущены. Отметим, что все коэффициенты при квадратах формальных переменных $Y_{\underline{1}}$,...,$Y_{\underline{18}}$ предполагаются ненулевыми. В противном случае этот метод неприменим.

Преобразуем квадратичную форму (9), последовательно выделяя полный квадрат для каждой формальной переменной, начиная с первой. Сначала перегруппируем все члены, включающие переменную $Y_{\underline{1}}$. Затем выделим полный квадрат, содержащий эту переменную. Далее примем предварительно выделенный полный квадрат за новую формальную переменную $X_{\underline{1}}^2$. После этого вычтем полученный полный квадрат, содержащий переменную $Y_{\underline{1}}$, из квадратичной формы (9). Новая квадратичная форма $\mathscr{U}_{\underline{17}}$,[4]полученная таким образом, не

[4]Индекс остаточной энергии деформации указывает на количество включенных в квадратичную форму формальных переменных.

содержит переменную $Y_{\underline{1}}$. Затем поступим аналогично относительно формальной переменной $Y_{\underline{2}}$: вычтем полный квадрат, содержащий $Y_{\underline{2}}$, из редуцированной квадратичной формы, полученной на предыдущем шаге. Далее найдем новую квадратичную форму, не содержащую формальных переменных $Y_{\underline{1}}$ и $Y_{\underline{2}}$. Алгоритм следует продолжить вплоть до формальной переменной $Y_{\underline{18}}$. Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned}\mathscr{U} =&(\mathscr{U}_{\underline{18}} - \mathscr{U}_{\underline{17}}) + (\mathscr{U}_{\underline{17}} - \mathscr{U}_{\underline{16}}) + (\mathscr{U}_{\underline{16}} - \mathscr{U}_{\underline{15}}) + (\mathscr{U}_{\underline{15}} - \mathscr{U}_{\underline{14}}) + (\mathscr{U}_{\underline{14}} - \mathscr{U}_{\underline{13}}) + \\ &+ (\mathscr{U}_{\underline{13}} - \mathscr{U}_{\underline{12}}) + (\mathscr{U}_{\underline{12}} - \mathscr{U}_{\underline{11}}) + (\mathscr{U}_{\underline{11}} - \mathscr{U}_{\underline{10}}) + (\mathscr{U}_{\underline{10}} - \mathscr{U}_{\underline{9}}) + (\mathscr{U}_{\underline{9}} - \mathscr{U}_{\underline{8}}) + \\ &+ (\mathscr{U}_{\underline{8}} - \mathscr{U}_{\underline{7}}) + (\mathscr{U}_{\underline{7}} - \mathscr{U}_{\underline{6}}) + (\mathscr{U}_{\underline{6}} - \mathscr{U}_{\underline{5}}) + (\mathscr{U}_{\underline{5}} - \mathscr{U}_{\underline{4}}) + (\mathscr{U}_{\underline{4}} - \mathscr{U}_{\underline{3}}) + \\ &+ (\mathscr{U}_{\underline{3}} - \mathscr{U}_{\underline{2}}) + (\mathscr{U}_{\underline{2}} - \mathscr{U}_{\underline{1}}) + \mathscr{U}_{\underline{1}} = \mathscr{U}_{\underline{18}}.\end{aligned} \tag{13}$$

В формуле (13) каждая из квадратичных форм $\mathscr{U}_{\underline{17}}$, $\mathscr{U}_{\underline{16}}$, ..., $\mathscr{U}_{\underline{1}}$ является остаточной энергией деформации по входящим в нее деформациям и изгибам–кручениям.

По итогу выполнения алгоритма отделения квадратов приходим к канонической квадратичной форме диагонального типа относительно новых формальных переменных $X_{\underline{1}}, \ldots, X_{\underline{18}}$, которые называются каноническими переменными и вычисляются согласно:

$$X_{\underline{s}} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathscr{U}_{\underline{18-s+1}}}{\partial Y_{\underline{s}}} \qquad (s = 1, \ldots, 18;\ \text{по } s \text{ не суммируется}). \tag{14}$$

Обобщая уравнения (14), представим их в следующем виде:

$$[2X] = \frac{\partial \mathscr{U}_{\text{res}}}{\partial [Y]}. \tag{15}$$

Заметим, что новые формальные переменные $X_{\underline{1}}, \ldots, X_{\underline{18}}$, согласно (14), являются сопряженными по отношению к исходным формальным переменным $Y_{\underline{1}}, \ldots, Y_{\underline{18}}$ по остаточным энергиям деформации $\mathscr{U}_{\underline{18}}$, ..., $\mathscr{U}_{\underline{1}}$. Указанное обстоятельство позволяет выявить физический смысл новых формальных переменных $X_{\underline{1}}, \ldots, X_{\underline{18}}$, которые оказываются аналогами силовых и моментных напряжений по отношению к исходным формальным переменным.

Исходная квадратичная форма $\mathscr{U}$ в новых формальных переменных $X_{\underline{1}}, \ldots, X_{\underline{18}}$ принимает каноническое диагональное представление:

$$\mathscr{U}_{\text{diag}} = \sum_{s=1}^{18} \frac{X_s^2}{a_s}, \tag{16}$$

где множители $1/a_s$ при квадратах канонических определяются согласно

$$a_s = \frac{\partial X_s}{\partial Y_s} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathscr{U}_{\underline{18-s+1}}}{\partial Y_s^2} \qquad (s = 1, \ldots, 18;\ \text{по } s \text{ не суммируется}). \tag{17}$$

В последнем соотношении суммирование по повторяющемуся индексу s не производится.

Переход от старых переменных [Y] к новым переменным [X] можно определить как преобразование с помощью правой верхнетреугольной (RU-треугольной) матрицы перехода [T]:

$$[\mathrm{X}] = [\mathrm{T}][\mathrm{Y}], \qquad [\mathrm{Y}] = [\mathrm{T}]^{-1}[\mathrm{X}]. \tag{18}$$

Квадратичная форма (10) в новых переменных (18) представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathscr{U} &= [\mathrm{Y}]^{\top}[\mathrm{A}][\mathrm{Y}] = \big[[\mathrm{T}]^{-1}[\mathrm{X}]\big]^{\top}[\mathrm{A}]\big[[\mathrm{T}]^{-1}[\mathrm{X}]\big] = \\ &= [\mathrm{X}]^{\top}\Big[\big[[\mathrm{T}]^{-1}\big]^{\top}[\mathrm{A}][\mathrm{T}]^{-1}\Big][\mathrm{X}] = [\mathrm{X}]^{\top}[\mathrm{A}]_{\mathrm{diag}}[\mathrm{X}], \end{aligned} \tag{19}$$

где введено обозначение для подобной матрицы $[\mathrm{A}]_{\mathrm{diag}} = \big[[\mathrm{T}]^{-1}\big]^{\top}[\mathrm{A}][\mathrm{T}]^{-1}$.

Нетрудно также заметить, что компоненты матрицы перехода вычисляются согласно:

$$T_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial Y_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathscr{U}_{\underline{18-i+1}}}{\partial Y_i \partial Y_j} \qquad (i, j = 1, \ldots, 18). \tag{20}$$

Причем диагональные элементы матрицы перехода равны:

$$T_{ss} = \frac{\partial X_s}{\partial Y_s} = a_s \qquad (s = 1, \ldots, 18;\ \text{по } s \text{ не суммируется}). \tag{21}$$

Матрица перехода с учетом нулевых элементов имеет следующую структуру:

$$\begin{bmatrix}
T_{\underline{1}\,\underline{1}} & \underset{1}{A} & \underset{1}{A} & 0 & 0 & 0 & T_{\underline{1}\,\underline{7}} & \frac{1}{2}\underset{7}{A} & \frac{1}{2}\underset{7}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & T_{\underline{2}\,\underline{2}} & T_{\underline{2}\,\underline{3}} & 0 & 0 & 0 & T_{\underline{2}\,\underline{7}} & T_{\underline{2}\,\underline{8}} & T_{\underline{2}\,\underline{9}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & T_{\underline{3}\,\underline{3}} & 0 & 0 & 0 & T_{\underline{3}\,\underline{7}} & T_{\underline{3}\,\underline{8}} & T_{\underline{3}\,\underline{9}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2\underset{3}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underset{8}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2\underset{3}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underset{8}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\underset{3}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underset{8}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{\underline{7}\,\underline{7}} & T_{\underline{7}\,\underline{8}} & T_{\underline{7}\,\underline{9}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{\underline{8}\,\underline{8}} & T_{\underline{8}\,\underline{9}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{\underline{9}\,\underline{9}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{\underline{10}\,\underline{10}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{\underline{10}\,\underline{10}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{\underline{10}\,\underline{10}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underset{5}{A} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\underset{9}{A} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underset{5}{A} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\underset{9}{A} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underset{5}{A} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\underset{9}{A} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{\underline{16}\,\underline{16}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{\underline{16}\,\underline{16}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{\underline{16}\,\underline{16}}
\end{bmatrix} \tag{22}$$

Ненулевые компоненты матрицы перехода [T] вычисляются через определяющие механические модули согласно формулам:

$$T_{\underline{1}\,\underline{1}} = \underset{1}{A} + \underset{3}{A}, \qquad T_{\underline{1}\,\underline{2}} = T_{\underline{1}\,\underline{3}} = \underset{1}{A}, \qquad T_{\underline{1}\,\underline{7}} = \frac{1}{2}(\underset{7}{A} + \underset{8}{A}), \qquad T_{\underline{1}\,\underline{8}} = T_{\underline{1}\,\underline{9}} = \frac{1}{2}\underset{7}{A},$$

$$T_{\underline{2}\,\underline{2}} = \frac{\underset{3}{A}(2\underset{1}{A} + \underset{3}{A})}{\underset{1}{A} + \underset{3}{A}}, \qquad T_{\underline{2}\,\underline{3}} = \frac{\underset{1\ 3}{AA}}{\underset{1}{A} + \underset{3}{A}}, \qquad T_{\underline{2}\,\underline{7}} = \frac{\underset{3\ 7}{AA} - \underset{1\ 8}{AA}}{2(\underset{1}{A} + \underset{3}{A})},$$

$$T_{\underline{2}\,\underline{8}} = \frac{\underset{1\ 8}{AA} + \underset{3\ 7}{AA} + \underset{3\ 8}{AA}}{2(\underset{1}{A} + \underset{3}{A})}, \qquad T_{\underline{2}\,\underline{9}} = \frac{\underset{3\ 7}{AA}}{2\underset{1}{A} + 2\underset{3}{A}},$$

$$T_{\underline{3}\,\underline{3}} = \frac{3\underset{1\ 3}{AA} + \underset{3}{A^2}}{2\underset{1}{A} + \underset{3}{A}}, \qquad T_{\underline{3}\,\underline{7}} = \frac{\underset{3\ 7}{AA} - \underset{1\ 8}{AA}}{4\underset{1}{A} + 2\underset{3}{A}},$$

$$T_{\underline{3}\,\underline{8}} = \frac{\underset{3\ 7}{AA} - \underset{1\ 8}{AA}}{4\underset{1}{A} + 2\underset{3}{A}}, \qquad T_{\underline{3}\,\underline{9}} = \frac{2\underset{1\ 8}{AA} + \underset{3\ 7}{AA} + \underset{3\ 8}{AA}}{2(2\underset{1}{A} + \underset{3}{A})},$$

$$T_{\underline{4}\,\underline{4}} = T_{\underline{5}\,\underline{5}} = T_{\underline{6}\,\underline{6}} = 2\underset{3}{A}, \qquad T_{\underline{4}\,\underline{10}} = T_{\underline{5}\,\underline{10}} = T_{\underline{6}\,\underline{10}} = \underset{8}{A},$$

$$T_{\underline{7}\,\underline{7}} = \frac{12\underset{1\ 2\ 3}{AAA} + 12\underset{1\ 3\ 4}{AAA} - 2\underset{1\ 8}{AA^2} + 4\underset{2\ 3}{AA^2} + 4\underset{3\ \ 4}{A^2A} - 3\underset{3\ 7}{AA^2} - 2\underset{3\ 7\ 8}{AAA} - \underset{3\ 8}{AA^2}}{4\underset{3}{A}(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A})},$$

$$T_{\underline{7}\,\underline{8}} = \frac{12\underset{1\ 2\ 3}{AAA} + \underset{1\ 8}{AA^2} + 4\underset{2\ 3}{AA^2} - 3\underset{3\ 7}{AA^2} - 2\underset{3\ 7\ 8}{AAA}}{4\underset{3}{A}(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A})},$$

$$T_{\underline{7}\,\underline{9}} = \frac{12\underset{1\ 2\ 3}{AAA} + \underset{1\ 8}{AA^2} + 4\underset{2\ 3}{AA^2} - 3\underset{3\ 7}{AA^2} - 2\underset{3\ 7\ 8}{AAA}}{4\underset{3}{A}(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A})}$$

$$T_{\underline{8}\,\underline{8}} = \frac{\left(4\underset{3\ 4}{AA} - \underset{8}{A^2}\right)\left(24\underset{1\ 2\ 3}{AAA} + 12\underset{1\ 3\ 4}{AAA} - \underset{1\ 8}{AA^2} + 8\underset{2\ 3}{AA^2} + 4\underset{3\ \ 4}{A^2A} - 6\underset{3\ 7}{AA^2} - 4\underset{3\ 7\ 8}{AAA} - \underset{3\ 8}{AA^2}\right)}{4\underset{3}{A}\left(12\underset{1\ 2\ 3}{AAA} + 12\underset{1\ 3\ 4}{AAA} - 2\underset{1\ 8}{AA^2} + 4\underset{2\ 3}{AA^2} + 4\underset{3\ \ 4}{A^2A} - 3\underset{3\ 7}{AA^2} - 2\underset{3\ 7\ 8}{AAA} - \underset{3\ 8}{AA^2}\right)},$$

$$T_{\underline{8}\,\underline{9}} = \frac{\left(4\underset{3\ 4}{AA} - \underset{8}{A^2}\right)\left(12\underset{1\ 2\ 3}{AAA} + \underset{1\ 8}{AA^2} + 4\underset{2\ 3}{AA^2} - 3\underset{3\ 7}{AA^2} - 2\underset{3\ 7\ 8}{AAA}\right)}{4\underset{3}{A}\left(12\underset{1\ 2\ 3}{AAA} + 12\underset{1\ 3\ 4}{AAA} - 2\underset{1\ 8}{AA^2} + 4\underset{2\ 3}{AA^2} + 4\underset{3\ \ 4}{A^2A} - 3\underset{3\ 7}{AA^2} - 2\underset{3\ 7\ 8}{AAA} - \underset{3\ 8}{AA^2}\right)},$$

$$T_{\underline{9}\,\underline{9}} = \frac{\left(4\underset{3\ 4}{AA} - \underset{8}{A^2}\right)\left(36\underset{1\ 2}{AA} + 12\underset{1\ 4}{AA} + 12\underset{2\ 3}{AA} + 4\underset{3\ 4}{AA} - 9\underset{7}{A^2} - 6\underset{7\ 8}{AA} - \underset{8}{A^2}\right)}{4\left(24\underset{1\ 2\ 3}{AAA} + 12\underset{1\ 3\ 4}{AAA} - \underset{1\ 8}{AA^2} + 8\underset{2\ 3}{AA^2} + 4\underset{3\ \ 4}{A^2A} - 6\underset{3\ 7}{AA^2} - 4\underset{3\ 7\ 8}{AAA} - \underset{3\ 8}{AA^2}\right)},$$

$$T_{\underline{10}\,\underline{10}} = T_{\underline{11}\,\underline{11}} = T_{\underline{12}\,\underline{12}} = \frac{4\underset{3}{A}\underset{4}{A} - \underset{8}{A}^2}{2\underset{3}{A}}, \qquad T_{\underline{13}\,\underline{13}} = T_{\underline{14}\,\underline{14}} = T_{\underline{15}\,\underline{15}} = \underset{5}{A},$$

$$T_{\underline{13}\,\underline{16}} = T_{\underline{14}\,\underline{17}} = T_{\underline{15}\,\underline{18}} = \frac{1}{2}\underset{9}{A}, \qquad T_{\underline{16}\,\underline{16}} = T_{\underline{17}\,\underline{17}} = T_{\underline{18}\,\underline{18}} = \frac{4\underset{5}{A}\underset{6}{A} - \underset{9}{A}^2}{4\underset{5}{A}}.$$

Вычислим далее матрицу $[\mathrm{T}]^{-1}$ обратную к матрице перехода $[\mathrm{T}]$. Введем обозначение для компонент обратной матрицы по аналогии с визуализацией компонент псевдотензора:

$$\overset{[g]\#1\#2\#3}{\underset{(n)}{T}}{}_{k,\ldots,h}, \tag{23}$$

где, как и прежде [27, 28], сверху от корневого символа в квадратных скобках указывается алгебраический вес, снизу от корневого символа в круглых скобках указывается ранг, сверху корневого символа вместо #1#2#3 указываются матричные операции (например, $-1, \top, \exp$ и т.д.). В нашем случае компоненты обратной матрицы перехода обозначим через $\overset{-1}{T}_{kh}$.

Матрица $[\mathrm{T}]^{-1}$ также будет верхнетреугольной, при этом ее ненулевые компоненты выражаются через компоненты матрицы $[\mathrm{T}]$ согласно:

$$\overset{-1}{T}_{ss} = (\mathrm{T}_{ss})^{-1}, \qquad (s = 1, \ldots, 18;\ \text{по } s \text{ не суммируется})$$

$$\overset{-1}{T}_{\underline{1}\,\underline{2}} = -\frac{T_{\underline{1}\,\underline{2}}}{T_{\underline{1}\,\underline{1}}T_{\underline{2}\,\underline{2}}}, \qquad \overset{-1}{T}_{\underline{1}\,\underline{3}} = \frac{T_{\underline{1}\,\underline{2}}(T_{\underline{2}\,\underline{3}} - T_{\underline{2}\,\underline{2}})}{T_{\underline{1}\,\underline{1}}T_{\underline{2}\,\underline{2}}T_{\underline{3}\,\underline{3}}}, \qquad \overset{-1}{T}_{\underline{2}\,\underline{3}} = -\frac{T_{\underline{2}\,\underline{3}}}{T_{\underline{2}\,\underline{2}}T_{\underline{3}\,\underline{3}}},$$

$$\overset{-1}{T}_{\underline{1}\,\underline{7}} = \frac{T_{\underline{1}\,\underline{2}}T_{\underline{3}\,\underline{7}}(T_{\underline{2}\,\underline{2}} - T_{\underline{2}\,\underline{3}}) + T_{\underline{1}\,\underline{2}}T_{\underline{2}\,\underline{7}}T_{\underline{3}\,\underline{3}} - T_{\underline{1}\,\underline{7}}T_{\underline{2}\,\underline{2}}T_{\underline{3}\,\underline{3}}}{T_{\underline{1}\,\underline{1}}T_{\underline{2}\,\underline{2}}T_{\underline{3}\,\underline{3}}T_{\underline{7}\,\underline{7}}},$$

$$\begin{aligned}\overset{-1}{T}_{\underline{1}\,\underline{8}} =& \big(T_{\underline{1}\,\underline{2}}(T_{\underline{3}\,\underline{7}}(T_{\underline{2}\,\underline{2}} - T_{\underline{2}\,\underline{3}})(T_{\underline{7}\,\underline{7}} - T_{\underline{7}\,\underline{8}}) - T_{\underline{2}\,\underline{7}}T_{\underline{3}\,\underline{3}}T_{\underline{7}\,\underline{8}} + T_{\underline{2}\,\underline{8}}T_{\underline{3}\,\underline{3}}T_{\underline{7}\,\underline{7}}) + \\ &+ T_{\underline{1}\,\underline{7}}T_{\underline{2}\,\underline{2}}T_{\underline{3}\,\underline{3}}T_{\underline{7}\,\underline{8}} - T_{\underline{1}\,\underline{8}}T_{\underline{2}\,\underline{2}}T_{\underline{3}\,\underline{3}}T_{\underline{7}\,\underline{7}}\big)(T_{\underline{1}\,\underline{1}}T_{\underline{2}\,\underline{2}}T_{\underline{3}\,\underline{3}}T_{\underline{7}\,\underline{7}}T_{\underline{8}\,\underline{8}})^{-1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{-1}{T}_{\underline{1}\,\underline{9}} =& \big(T_{\underline{1}\,\underline{2}}T_{\underline{8}\,\underline{9}}(T_{\underline{2}\,\underline{7}}T_{\underline{3}\,\underline{3}}T_{\underline{7}\,\underline{8}} - T_{\underline{2}\,\underline{8}}T_{\underline{3}\,\underline{3}}T_{\underline{7}\,\underline{7}} - T_{\underline{3}\,\underline{7}}(T_{\underline{2}\,\underline{2}} - T_{\underline{2}\,\underline{3}})(T_{\underline{7}\,\underline{7}} - T_{\underline{7}\,\underline{8}})) + \\ &+ T_{\underline{1}\,\underline{2}}T_{\underline{8}\,\underline{8}}((T_{\underline{2}\,\underline{2}} - T_{\underline{2}\,\underline{3}})(T_{\underline{3}\,\underline{9}}T_{\underline{7}\,\underline{7}} - T_{\underline{3}\,\underline{7}}T_{\underline{7}\,\underline{8}}) - T_{\underline{2}\,\underline{7}}T_{\underline{3}\,\underline{3}}T_{\underline{7}\,\underline{8}} + T_{\underline{2}\,\underline{9}}T_{\underline{3}\,\underline{3}}T_{\underline{7}\,\underline{7}}) + \\ &+ T_{\underline{1}\,\underline{7}}T_{\underline{2}\,\underline{2}}T_{\underline{3}\,\underline{3}}T_{\underline{7}\,\underline{8}}(T_{\underline{8}\,\underline{8}} - T_{\underline{8}\,\underline{9}}) + T_{\underline{1}\,\underline{8}}T_{\underline{2}\,\underline{2}}T_{\underline{3}\,\underline{3}}T_{\underline{7}\,\underline{7}}(T_{\underline{8}\,\underline{9}} - T_{\underline{8}\,\underline{8}})\big)(T_{\underline{1}\,\underline{1}}T_{\underline{2}\,\underline{2}}T_{\underline{3}\,\underline{3}}T_{\underline{7}\,\underline{7}}T_{\underline{8}\,\underline{8}}T_{\underline{9}\,\underline{9}})^{-1},\end{aligned}$$

$$\overset{-1}{T}_{\underline{2}\,\underline{7}} = \frac{T_{\underline{2}\,\underline{3}}T_{\underline{3}\,\underline{7}} - T_{\underline{2}\,\underline{7}}T_{\underline{3}\,\underline{3}}}{T_{\underline{2}\,\underline{2}}T_{\underline{3}\,\underline{3}}T_{\underline{7}\,\underline{7}}},$$

$$\overset{-1}{T}_{\underline{2}\,\underline{8}} = \frac{T_{\underline{2}\,\underline{3}}T_{\underline{3}\,\underline{7}}(T_{\underline{7}\,\underline{7}} - T_{\underline{7}\,\underline{8}}) + T_{\underline{2}\,\underline{7}}T_{\underline{3}\,\underline{3}}T_{\underline{7}\,\underline{8}} - T_{\underline{2}\,\underline{8}}T_{\underline{3}\,\underline{3}}T_{\underline{7}\,\underline{7}}}{T_{\underline{2}\,\underline{2}}T_{\underline{3}\,\underline{3}}T_{\underline{7}\,\underline{7}}T_{\underline{8}\,\underline{8}}},$$

$$\begin{aligned}\overset{-1}{T}_{\underline{2}\,\underline{9}} =& \big(T_{\underline{2}\,\underline{3}}T_{\underline{3}\,\underline{9}}T_{\underline{7}\,\underline{7}}T_{\underline{8}\,\underline{8}} - T_{\underline{2}\,\underline{3}}T_{\underline{3}\,\underline{7}}(T_{\underline{7}\,\underline{7}}T_{\underline{8}\,\underline{9}} + T_{\underline{7}\,\underline{8}}(T_{\underline{8}\,\underline{8}} - T_{\underline{8}\,\underline{9}})) + T_{\underline{2}\,\underline{7}}T_{\underline{3}\,\underline{3}}T_{\underline{7}\,\underline{8}}(T_{\underline{8}\,\underline{8}} - T_{\underline{8}\,\underline{9}}) + \\ &+ T_{\underline{2}\,\underline{8}}T_{\underline{3}\,\underline{3}}T_{\underline{7}\,\underline{7}}T_{\underline{8}\,\underline{9}} - T_{\underline{2}\,\underline{9}}T_{\underline{3}\,\underline{3}}T_{\underline{7}\,\underline{7}}T_{\underline{8}\,\underline{8}}\big)(T_{\underline{2}\,\underline{2}}T_{\underline{3}\,\underline{3}}T_{\underline{7}\,\underline{7}}T_{\underline{8}\,\underline{8}}T_{\underline{9}\,\underline{9}})^{-1},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{-1}{T}_{\underline{3}\,\underline{7}} = -\frac{T_{\underline{3}\,\underline{7}}}{T_{\underline{3}\,\underline{3}}T_{\underline{7}\,\underline{7}}}, \qquad \overset{-1}{T}_{\underline{3}\,\underline{8}} = \frac{T_{\underline{3}\,\underline{7}}(T_{\underline{7}\,\underline{8}} - T_{\underline{7}\,\underline{7}})}{T_{\underline{3}\,\underline{3}}T_{\underline{7}\,\underline{7}}T_{\underline{8}\,\underline{8}}},\\
&\overset{-1}{T}_{\underline{7}\,\underline{8}} = -\frac{T_{\underline{7}\,\underline{8}}}{T_{\underline{7}\,\underline{7}}T_{\underline{8}\,\underline{8}}}, \qquad \overset{-1}{T}_{\underline{7}\,\underline{9}} = \frac{T_{\underline{7}\,\underline{8}}(T_{\underline{8}\,\underline{9}} - T_{\underline{8}\,\underline{8}})}{T_{\underline{7}\,\underline{7}}T_{\underline{8}\,\underline{8}}T_{\underline{9}\,\underline{9}}}, \qquad \overset{-1}{T}_{\underline{8}\,\underline{9}} = -\frac{T_{\underline{8}\,\underline{9}}}{T_{\underline{8}\,\underline{8}}T_{\underline{9}\,\underline{9}}}\\
&\overset{-1}{T}_{\underline{3}\,\underline{9}} = \frac{T_{\underline{3}\,\underline{7}}T_{\underline{7}\,\underline{7}}T_{\underline{8}\,\underline{9}} + T_{\underline{3}\,\underline{7}}T_{\underline{7}\,\underline{8}}(T_{\underline{8}\,\underline{8}} - T_{\underline{8}\,\underline{9}}) - T_{\underline{3}\,\underline{9}}T_{\underline{7}\,\underline{7}}T_{\underline{8}\,\underline{8}}}{T_{\underline{3}\,\underline{3}}T_{\underline{7}\,\underline{7}}T_{\underline{8}\,\underline{8}}T_{\underline{9}\,\underline{9}}},\\
&\overset{-1}{T}_{\underline{4}\,\underline{10}} = \overset{-1}{T}_{\underline{5}\,\underline{11}} = \overset{-1}{T}_{\underline{6}\,\underline{12}} = -\frac{T_{\underline{4}\,\underline{10}}}{T_{\underline{10}\,\underline{10}}T_{\underline{4}\,\underline{4}}},\\
&\overset{-1}{T}_{\underline{13}\,\underline{16}} = \overset{-1}{T}_{\underline{14}\,\underline{17}} = \overset{-1}{T}_{\underline{15}\,\underline{18}} = -\frac{T_{\underline{14}\,\underline{16}}}{T_{\underline{14}\,\underline{14}}T_{\underline{16}\,\underline{16}}}.
\end{aligned}
$$

Новые переменные $X_{\underline{1}}, \ldots, X_{\underline{18}}$ вычисляются через старые переменные $Y_{\underline{1}}, \ldots, Y_{\underline{18}}$ согласно:

$$
\begin{aligned}
&X_{\underline{1}} = \overset{-1}{T}_{\underline{1}\,\underline{1}}Y_{\underline{1}} + \overset{-1}{T}_{\underline{1}\,\underline{2}}Y_{\underline{2}} + \overset{-1}{T}_{\underline{1}\,\underline{3}}Y_{\underline{3}} + \overset{-1}{T}_{\underline{1}\,\underline{7}}Y_{\underline{7}} + \overset{-1}{T}_{\underline{1}\,\underline{8}}Y_{\underline{8}} + \overset{-1}{T}_{\underline{1}\,\underline{9}}Y_{\underline{9}},\\
&X_{\underline{2}} = \overset{-1}{T}_{\underline{2}\,\underline{2}}Y_{\underline{2}} + \overset{-1}{T}_{\underline{2}\,\underline{3}}Y_{\underline{3}} + \overset{-1}{T}_{\underline{2}\,\underline{7}}Y_{\underline{7}} + \overset{-1}{T}_{\underline{2}\,\underline{8}}Y_{\underline{8}} + \overset{-1}{T}_{\underline{2}\,\underline{9}}Y_{\underline{9}},\\
&X_{\underline{3}} = \overset{-1}{T}_{\underline{3}\,\underline{3}}Y_{\underline{3}} + \overset{-1}{T}_{\underline{3}\,\underline{7}}Y_{\underline{7}} + \overset{-1}{T}_{\underline{3}\,\underline{8}}Y_{\underline{8}} + \overset{-1}{T}_{\underline{3}\,\underline{9}}Y_{\underline{9}},\\
&X_{\underline{4}} = \overset{-1}{T}_{\underline{4}\,\underline{4}}Y_{\underline{4}} + \overset{-1}{T}_{\underline{4}\,\underline{10}}Y_{\underline{10}}, \qquad X_{\underline{5}} = \overset{-1}{T}_{\underline{5}\,\underline{5}}Y_{\underline{5}} + \overset{-1}{T}_{\underline{5}\,\underline{11}}Y_{\underline{11}}, \qquad X_{\underline{6}} = \overset{-1}{T}_{\underline{6}\,\underline{6}}Y_{\underline{6}} + \overset{-1}{T}_{\underline{6}\,\underline{12}}Y_{\underline{12}},\\
&X_{\underline{7}} = \overset{-1}{T}_{\underline{7}\,\underline{7}}Y_{\underline{7}} + \overset{-1}{T}_{\underline{7}\,\underline{8}}Y_{\underline{8}} + \overset{-1}{T}_{\underline{7}\,\underline{9}}Y_{\underline{9}}, \qquad X_{\underline{8}} = \overset{-1}{T}_{\underline{8}\,\underline{8}}Y_{\underline{8}} + \overset{-1}{T}_{\underline{8}\,\underline{9}}Y_{\underline{9}}, \qquad X_{\underline{9}} = \overset{-1}{T}_{\underline{9}\,\underline{9}}Y_{\underline{9}},\\
&X_{\underline{10}} = \overset{-1}{T}_{\underline{10}\,\underline{10}}Y_{\underline{10}}, \qquad X_{\underline{11}} = \overset{-1}{T}_{\underline{11}\,\underline{11}}Y_{\underline{11}}, \qquad X_{\underline{12}} = \overset{-1}{T}_{\underline{12}\,\underline{12}}Y_{\underline{12}},\\
&X_{\underline{13}} = \overset{-1}{T}_{\underline{13}\,\underline{13}}Y_{\underline{13}} + \overset{-1}{T}_{\underline{13}\,\underline{16}}Y_{\underline{16}}, \quad X_{\underline{14}} = \overset{-1}{T}_{\underline{14}\,\underline{14}}Y_{\underline{14}} + \overset{-1}{T}_{\underline{14}\,\underline{17}}Y_{\underline{17}},\\
&X_{\underline{15}} = \overset{-1}{T}_{\underline{15}\,\underline{15}}Y_{\underline{15}} + \overset{-1}{T}_{\underline{15}\,\underline{18}}Y_{\underline{18}}, \quad X_{\underline{16}} = \overset{-1}{T}_{\underline{16}\,\underline{16}}Y_{\underline{16}}, \quad X_{\underline{17}} = \overset{-1}{T}_{\underline{17}\,\underline{17}}Y_{\underline{17}}, \quad X_{\underline{18}} = \overset{-1}{T}_{\underline{18}\,\underline{18}}Y_{\underline{18}}.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Отметим еще раз, что физический смысл новых формальных переменных $X_{\underline{1}}, \ldots, X_{\underline{18}}$ являются аналогами силовых и моментных напряжений сопряженными с исходными формальными переменными $Y_{\underline{1}}, \ldots, Y_{\underline{18}}$, являющимися деформациями и изгибами–кручениями.

Заключение В настоящем исследовании рассматрены вопросы преобразования энергии деформации гемитропного микрополярного упругого твердого тела к каноническому виду. Энергетическая форма задавалась как линейная оболочка неприводимых квадратичных алгебраических полуизометрических инвариантов. Подводя итог исследования, сформулируем следующие основные выводы:

(1) Получено изометрически инвариантное А-представление квадратичной формы энергии деформации гемитропного микрополярного упругого

твердого тела, определяемое 9 изоэнтропийными (адиабатическими) механическими модулями, которые в математической модели выступают как произвольные коэффициенты в линейной оболочке неприводимой системы полуизометрических инвариантов.

(2) Для удобства дальнейшего изложения и упрощения преобразования А-представления энергии деформации введены формальные переменные $Y_{\underline{1}},...,Y_{\underline{18}}$. Обсуждаются различные способы введения формальных переменных.

(3) Методом отделения полных квадратов Лагранжа квадратичная энергетическая форма приведена к каноническому виду.

(4) Введено понятие остаточной энергии деформации $\mathscr{U}_{\text{res}}$.

(5) Получены матрица перехода от исходных формальных переменных $Y_{\underline{1}},...,Y_{\underline{18}}$ к новым (каноническим) $X_{\underline{1}},...,X_{\underline{18}}$ и обратная матрица.

(6) Предложена новая визуализация псевдотензорных объектов, отражающая матричные операции над ними.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 124013000674-0).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number 124013000674-0).

ЛИТЕРАТУРА

1. Cosserat E. M. P., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et fils, 1909. VI+226.
2. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383.
3. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // Физика твердого тела. 1960. Т. 2, № 7. С. 1399–1409.
4. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Континуальная теория асимметрической упругости. Учет «внутреннего» вращения // Физика твердого тела. 1960. Т. 5, № 9. С. 2591–2598.

5. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Континуальная теория асимметричной упругости. Равновесие изотропного тела // Физика твердого тела. 1960. Т. 6, № 9. С. 2689–2699.
6. Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.
7. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964. Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
8. Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua / ed. by E. Kröner. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
9. Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345. (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics).
10. Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22, вып. 3. С. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
11. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. 3(53). С. 86–100. DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
12. Besdo D. A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // Acta Mechanica. 1974. Vol. 20. P. 105–131.
13. Altenbach H., Maugin G. A., Erofeev V. (Mechanics of generalized continua. Berlin: Springer, 2011. DOI: 10.1007/978-3-642-19219-7.
14. Maugin G. A. Non-classical continuum mechanics. Singapore: Springer Verlag, 2017. DOI: 10.1007/978-981-10-2434-4.
15. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Диагонализация энергетической формы гемитропного тела и система определяющих неравенств. Метод отделения квадратов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2026. Т. 30, № 2. С. 288–307.
16. Мурашкин Е., Радаев Ю. Факторизация характеристического полинома энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. 1(67). С. 113–125. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.008.
17. Мурашкин Е., Радаев Ю. Факторизация характеристического полинома энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. 1(67). С. 159–179. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.021.
18. Радаев Ю., Мурашкин Е. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.

19. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории линейных гемитропных микрополярных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4. С. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
20. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. 4(54). С. 108–115. DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009.
21. Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. 1(55). С. 110–121. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
22. Krylova E. Y., Murashkin E. V., Radaev Y. N. The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic, and ultraisotropic micropolar elastic solids // Mechanics of Solids. United States, 2024. Vol. 59, no. 3. P. 1311–1320. DOI: 10.1134/s0025654424603719.
23. Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.]
24. Спенсер Э. Теория инвариантов. Мир, 1974.
25. Жилин П. А. Рациональная механика сплошных сред. Санкт-Петербург: Изд-во политехн. ун-та, 2012.
26. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Cubic Approximation of Stress Potential for a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. Russian Federation, 2025. Vol. 46, no. 5. P. 2391–2400. DOI: 10.1134/S1995080225606514.
27. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On algebraic triple weights formulation of micropolar thermoelasticity // Mechanics of Solids. United States, 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
28. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. 3(57). С. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.

REFERENCES

1. Cosserat E. M. P., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et fils, 1909. VI+226.
2. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383.
3. Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Basic Equations of the Theory of Elasticity of Media with Rotational Interaction of Particles // Fizika Tverdogo Tela. 1960. T. 2, № 7. C. 1399–1409.
4. Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Continuum Theory of Asymmetric Elasticity. Account of “Internal” Rotation // Fizika Tverdogo Tela. 1960. T. 5, № 9. C. 2591–2598.

5. Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Continuum Theory of Asymmetric Elasticity. Equilibrium of an Isotropic Body // Fizika Tverdogo Tela. 1960. T. 6, № 9. C. 2689–2699.
6. Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.
7. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964. Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
8. Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua / ed. by E. Kröner. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
9. Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345. (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics).
10. Radayev Y. N. Multiplier Rule in Covariant Formulations of Micropolar Theories of Continuum Mechanics // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2018. T. 22, вып. 3. C. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
11. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Two Basic Natural Forms of the Potential of Asymmetric Force-Stress and Couple-Stress Tensors in the Mechanics of Hemitropic Solids // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. 3(53). C. 86–100. DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
12. Besdo D. A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // Acta Mechanica. 1974. Vol. 20. P. 105–131.
13. Altenbach H., Maugin G. A., Erofeev V. (Mechanics of generalized continua. Berlin: Springer, 2011. DOI: 10.1007/978-3-642-19219-7.
14. Maugin G. A. Non-classical continuum mechanics. Singapore: Springer Verlag, 2017. DOI: 10.1007/978-981-10-2434-4.
15. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Diagonalization of the Energy Form of a Hemitropic Solid and a System of Constitutive Inequalities. Method of Completing Squares // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2026. T. 30, № 2. C. 288–307.
16. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Factorization of the Characteristic Polynomial of the Energy Form of a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2026. 1(67). C. 113–125. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.008.
17. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Factorization of the Characteristic Polynomial of the Energy Form of a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2026. 1(67). C. 159–179. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.021.
18. Radayev Y. N., Murashkin E. V. Pseudotensor Formulation of the Mechanics of Hemitropic Micropolar Media // Problems of Strength and Plasticity. 2020. T. 82, № 4. C. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.

19. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Theory of Linear Hemitropic Micropolar Media // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2020. № 4. С. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
20. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Reduction of Natural Forms of Hemitropic Energy Potentials to Conventional Forms // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. 4(54). С. 108–115. DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009.
21. Murashkin E. V. On the Relation Between Micropolar Constitutive Parameters of Thermodynamic State Potentials // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. 1(55). С. 110–121. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
22. Krylova E. Y., Murashkin E. V., Radaev Y. N. The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic, and ultraisotropic micropolar elastic solids // Mechanics of Solids. United States, 2024. Vol. 59, no. 3. P. 1311–1320. DOI: 10.1134/s0025654424603719.
23. Gurevich G. B. Foundations of the Theory of Algebraic Invariants. Moscow–Leningrad: GITTL, 1948. 408 c. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.]
24. Spencer E. Theory of Invariants. Mir, 1974.
25. Zhilin P. A. Rational Continuum Mechanics. St. Petersburg: Polytechnic University Press, 2012.
26. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Cubic Approximation of Stress Potential for a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. Russian Federation, 2025. Vol. 46, no. 5. P. 2391–2400. DOI: 10.1134/S1995080225606514.
27. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On algebraic triple weights formulation of micropolar thermoelasticity // Mechanics of Solids. United States, 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
28. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Polyvariance of the Basic Equations of Coupled Micropolar Thermoelasticity // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. 3(57). С. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.

Семинар по механике сплошной среды им. Л. А. Галина
под руководством академика И. Г. Горячевой и профессора Ю. Н. Радаева
24 апреля 2026 г., Заседание 791

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.015 *EDN: WPKHIC*
Краткое сообщение *УДК: 517.28*

Орлов В. Н.

СИНГУЛЯРНАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Московский государственный строительный университет, Москва, Россия

Аннотация. Как показывают публикации, в различных областях задачи приводят к математическим моделям, основанным как на линейных [1,2], так и нелинейных [3-8] дифференциальных уравнениях. В случае нелинейных дифференциальных уравнений следует учитывать важный аспект нелинейности, наличие подвижных особых точек алгебраического типа у решения такого вида уравнений. Такие уравнения относятся к классу в общем случае не разрешимых в квадратурах. На данный момент, на основании публикаций, можно отметить два подхода в решении нелинейных дифференциальных уравнений. Первый подход связан с возможностью разрешить такие уравнения в квадратурах, если эти уравнения обладают свойством Пенлеве (наличие простых и кратных полюсов), что возможно лишь в частных случаях [9-19]. Второй подход связан с поиском аналитического приближенного решения нелинейных дифференциальных уравнений как обладающих свойством Пенлеве, так и не обладающих этим свойством (наличие критических полюсов) [20-28]. На основе исследования движения жидкости в трещиноватых коллекторах [30-32], дается постановка сингулярной задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Герасимова – Капуто. Учитывая классификацию Фукса особых точек на неподвижные и подвижные [29], на первом этапе реализуется авторский метод [25] для неподвижной особой точки. Доказывается теорема существования и единственности решения в окрестности неподвижной особой точки. Получена априорная оценка погрешности аналитического приближенного решения и проведен численный эксперимент с графической интерпретацией.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, дробная производная, особая точка, аналитическое приближенное решение, априорная погрешность.

Орлов Виктор Николаевич, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики; `e-mail:` orlovvn@mgsu.ru; https://orcid.org/0000-0001-7606-5490; AuthorID: 711175

для цитирования: *Орлов В. Н.* Сингулярная задача Коши для нелинейного дифференциального уравнения дробного порядка // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 232–238. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.015. EDN: WPKHIC

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© Орлов В. Н. 2026

Поступила: 10.04.26; принята в печать: 07.09.26; опубликована: 29.10.26.

L. A. Galin Seminar on Continuum Mechanics
Chaired by Academician I. G. Goryacheva and Professor Yu. N. Radayev
April 24, 2026, Session 791

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.015 *EDN: WPKHIC*
Brief Communication

V. N. Orlov

SINGULAR CAUCHY PROBLEM FOR A NONLINEAR FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russia

Abstract. According to the publications, problems solved in various fields lead to mathematical models based on both linear [1,2] and nonlinear [3-8] differential equations. In the case of nonlinear differential equations, an important aspect of nonlinearity must be taken into account: the presence of moving algebraic singular points in the solution of this type of equation. Such equations belong to the class of equations that are generally not solvable by quadratures. Currently, based on publications, two approaches to solve nonlinear differential equations can be distinguished. The first approach is associated with the possibility of solving such equations in quadratures if these equations possess the Painlevé property (the presence of simple and multiple poles), which is possible only in special cases [9-19]. The second approach is associated with looking up an analytical approximate solution to nonlinear differential equations, both those possessing the Painlevé property and those not possessing this property (the presence of critical poles) [20-28]. Based on the study of fluid flow in fractured reservoirs [30–32], a formulation of the singular Cauchy problem for a nonlinear differential equation with a Gerasimov–Caputo fractional derivative is given. Taking into account Fuchs's classification of singular points as fixed and moving ones [29], the author's method [25] is implemented at the first stage for a fixed singular point. A theorem for the existence and uniqueness of a solution in the neighborhood of a fixed singular point is proved. An a priori estimate of the error of the analytical approximate solution is obtained, and a numerical experiment with graphical interpretation is conducted.

Keywords: nonlinear differential equation, fractional derivative, singular point, analytical approximate solution, a priori error.

Victor N. Orlov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor; `e-mail:` orlovvn@mgsu.ru; `https://orcid.org/0000-0001-7606-5490`; AuthorID: 711175

to cite this article: *Orlov V. N.* Singular Cauchy problem for a nonlinear fractional differential equation // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 232–238. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.015

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
Источник финансирования. Автор заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.
Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колесников К. С. Курс теоретической механики. Москва: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005.
2. Буфетов А. И., Гончарук Н. Б., Ильяшенко Ю. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: Издательство Попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2012. 120 с.
3. Lewis F. L. Optimal Control. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc., 2012. 540 p.
4. Матвеев Н. М. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Санкт-Петербург: Издательство СПбГУ, 2008. 336 с.
5. Чудновский В. М., Холодкевич Е. Д. Теория сверхизлучательных лавин радиоволнового диапазона // Физика твердого тела. 1982. Т. 24, № 4. С. 1118–1123. EDN: SALUBA.
6. Hill J. M. Radial Deflections of Thin Precompressed Cylindrical Rubber Bush Mountings // International Journal of Solids and Structures. 1977. Vol. 13. P. 93–104. DOI: 10.1016/0020-7683(77)90125-1.
7. Ockendon J. R. Numerical and Analytical Solutions of Moving Boundary Problems // Proceedings of the Symposium on Moving Boundary Problems / ed. by D. G. Wilson, A. D. Solomon, P. T. Boggs. New York, 1978. P. 129–145.
8. Axford R. A. Non-Linear Thermal Instability Phenomena in Plates and Rods // A.S.M.E. Nuclear Engineering Division, Winter Annual Meeting (Michigan). 1973. P. 1–12.
9. Conte R., Musette M. The Painlevé Handbook. Dordrecht: Springer, 2008.
10. Filipuk G., Chichurin A. The Properties of Certain Linear and Nonlinear Differential Equations // Advances in Mechanics and Mathematics. Vol. 41. 2019. P. 193–200. DOI: 10.1007/978-3-030-02487-1_11.
11. Chichurin A., Shvychkina H. Computer Simulation of Two Chemostat Models for One Nutrient Resource // Mathematical Biosciences. 2016. Vol. 278. P. 30–36. DOI: 10.1016/j.mbs.2016.05.004. EDN: XNPVAR.
12. Evtushenko S. A Nonlinear System of Differential Equations in Supercritical Flow Spread Problem and Its Solution Technique // Axioms. 2023. Vol. 12. P. 11. DOI: 10.3390/axioms12010011. EDN: TWOEKT.

Received: 10.04.26; accepted: 07.09.26; published: 29.10.26.

13. Dukhnovskii S. Global Existence Theorems of a Solution of the Cauchy Problem for Systems of the Kinetic Carleman and Godunov–Sultangazin Equations // Eurasian Mathematical Journal. 2021. Vol. 12. P. 97–102. DOI: 10.32523/2077-9879-2021-12-1-97-102. EDN: DHIPXA.
14. Dukhnovsky S. New Exact Solutions for the Time Fractional Broadwell System // Advanced Studies: Euro-Tbilisi Mathematical Journal. 2022. Vol. 15. P. 53–66. DOI: 10.32513/asetmj/19322008204. EDN: LWAYSI.
15. Dukhnovsky S. A Self-Similar Solution and the Tanh-Function Method for the Kinetic Carleman System // Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica. 2022. P. 99–110. DOI: 10.56415/basm.y2022.i1.p.99.
16. Чжан Б., Чэнь Я., Мартынов И. П. Первые интегралы и рациональные решения дифференциальных уравнений с подвижной особой линией // Проблемы физики, математики и техники. 2019. Т. 38, № 1. С. 72–77.
17. Martynov I. P., Chichurin A. V. On the Solution of the Chazy System of Equations // Nonlinear Oscillations. 2009. Vol. 12. P. 94–100. DOI: 10.1007/s11072-009-0062-8. EDN: XMCFBB.
18. Kudryashov N. A. Exact Solutions and Integrability of the Duffing–Van der Pol Equation // Regular and Chaotic Dynamics. 2018. Vol. 23, no. 4. P. 471–479. DOI: 10.1134/S156035471804007X. EDN: JTHNOE.
19. Kudryashov N. A. One Method for Finding Exact Solutions of Nonlinear Differential Equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2012. Vol. 17, no. 6. P. 2248–2253. DOI: 10.1016/j.cnsns.2011.10.016. EDN: PDGRPN.
20. Orlov V., Chichurin A. On the Theory of Constructing a Numerical-Analytical Solution of a Cantilever Beam Bend Nonlinear Differential Equation of the First Order // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1425. P. 012129. DOI: 10.1088/1742-6596/1425/1/012129. EDN: UZCALP.
21. Orlov V., Gasanov M. Research of a Third-Order Nonlinear Differential Equation in the Vicinity of a Moving Singular Point for a Complex Plane // E3S Web of Conferences. 2021. Vol. 263. P. 03019. DOI: 10.1051/e3sconf/202126303019. EDN: IJRRSC.
22. Orlov V. N., Leont'eva T. Y. On the Expansion of the Domain for an Analytical Approximate Solution of a Class of Second-Order Nonlinear Differential Equations in the Complex Domain // Bulletin of Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24. P. 174–186. DOI: 10.14498/vsgtu1727. EDN: ZKDBOL.
23. Orlov V., Gasanov M. Analytic Approximate Solution in the Neighborhood of a Moving Singular Point of a Class of Nonlinear Equations // Axioms. 2022. Vol. 11. P. 637. DOI: 10.3390/axioms11110637. EDN: HNRIRZ.
24. Orlov V., Gasanov M. Technology for Obtaining the Approximate Value of Moving Singular Points for a Class of Nonlinear Differential Equations in a Complex Domain // Mathematics. 2022. Vol. 10. P. 3984. DOI: 10.3390/math10213984. EDN: JRWZHU.
25. Orlov V. N. Moving Singular Points and the Van der Pol Equation, as Well as the Uniqueness of Its Solution // Mathematics. 2023. Vol. 11. P. 873. DOI: 10.3390/math11040873. EDN: TWFIGO.

26. Leont'eva T. Y. Influence of Perturbation of Moving Singular Point on the Approximate Solution of a Nonlinear Second Order Differential Equation in the Complex Region // Bull. Yakovlev Chuvash State Pedagog. Univ. Ser. Mech. Limit State. 2015. Vol. 24. P. 109–118. (in Russian).
27. Pchelova A. Z., Kudryashova N. V. Existence Theorem for a Solution to a Third-Order Nonlinear Differential Equation with a Third-Degree Polynomial Right-Hand Side in the Domain of Analyticity // Proceedings of the All-Russian Scientific Conference "Mechanics of the Limit State and Related Matters", Dedicated to the 85th Anniversary of Prof. D. D. Ivlev. Part 2 (Cheboksary, Russia, Sept. 15–18, 2015). P. 215–220.
28. Pchelova A. Z., Kolle K. V. Existence Theorem for a Solution to a Third-Order Nonlinear Differential Equation with a Third-Degree Polynomial Right-Hand Side in a Neighborhood of a Moving Singular Point // Proceedings of the All-Russian Scientific Conference "Mechanics of the Limit State and Related Matters", Dedicated to the 85th Anniversary of Prof. D. D. Ivlev. Part 2 (Cheboksary, Russia, Sept. 15–18, 2015). P. 221–226.
29. Fuchs L. // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1873. Vol. 76. P. 177–213.
30. Шаймуратов Р. В. Гидродинамика нефтяного трещиноватого пласта. Москва: Недра, 1980. 223 с.
31. Наказная Л. Г. Фильтрация жидкости и газа в трещиноватых коллекторах. Москва: Недра, 1972. 183 с.
32. Aleroev T. S., Aleroeva H. T., Tang Y., Zhang S. Features of Seepage of a Liquid to a Chink in the Cracked Deformable Layer // International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing. 2010. Vol. 1, no. 3. P. 333–347. DOI: 10.1142/S1793962310000195. EDN: PFUXPL.

REFERENCES

1. Kolesnikov K. S. Course of Theoretical Mechanics. Moscow: Bauman Moscow State Technical University Press, 2005. (in Russian).
2. Bufetov A. I., Goncharuk N. B., Il'yashenko Y. S. Ordinary Differential Equations. Moscow: Publishing House of the Board of Trustees of the Faculty of Mechanics, Mathematics, Moscow State University, 2012. 120 p. (in Russian).
3. Lewis F. L. Optimal Control. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc., 2012. 540 p.
4. Matveev N. M. Lectures on the Analytical Theory of Differential Equations. St. Petersburg: St. Petersburg State University Press, 2008. 336 p. (in Russian).
5. Chudnovskii V. M., Kholodkevich E. D. Theory of Superradiant Avalanches in the Radio-Wave Range // Fizika Tverdogo Tela. 1982. Vol. 24, no. 4. P. 1118–1123. EDN: SALUBA. (in Russian).
6. Hill J. M. Radial Deflections of Thin Precompressed Cylindrical Rubber Bush Mountings // International Journal of Solids and Structures. 1977. Vol. 13. P. 93–104. DOI: 10.1016/0020-7683(77)90125-1.
7. Ockendon J. R. Numerical and Analytical Solutions of Moving Boundary Problems // Proceedings of the Symposium on Moving Boundary Problems / ed. by D. G. Wilson, A. D. Solomon, P. T. Boggs. New York, 1978. P. 129–145.

8. Axford R. A. Non-Linear Thermal Instability Phenomena in Plates and Rods // A.S.M.E. Nuclear Engineering Division, Winter Annual Meeting (Michigan). 1973. P. 1–12.
9. Conte R., Musette M. The Painlevé Handbook. Dordrecht: Springer, 2008.
10. Filipuk G., Chichurin A. The Properties of Certain Linear and Nonlinear Differential Equations // Advances in Mechanics and Mathematics. Vol. 41. 2019. P. 193–200. DOI: 10.1007/978-3-030-02487-1_11.
11. Chichurin A., Shvychkina H. Computer Simulation of Two Chemostat Models for One Nutrient Resource // Mathematical Biosciences. 2016. Vol. 278. P. 30–36. DOI: 10.1016/j.mbs.2016.05.004. EDN: XNPVAR.
12. Evtushenko S. A Nonlinear System of Differential Equations in Supercritical Flow Spread Problem and Its Solution Technique // Axioms. 2023. Vol. 12. P. 11. DOI: 10.3390/axioms12010011. EDN: TWOEKT.
13. Dukhnovskii S. Global Existence Theorems of a Solution of the Cauchy Problem for Systems of the Kinetic Carleman and Godunov–Sultangazin Equations // Eurasian Mathematical Journal. 2021. Vol. 12. P. 97–102. DOI: 10.32523/2077-9879-2021-12-1-97-102. EDN: DHIPXA.
14. Dukhnovsky S. New Exact Solutions for the Time Fractional Broadwell System // Advanced Studies: Euro-Tbilisi Mathematical Journal. 2022. Vol. 15. P. 53–66. DOI: 10.32513/asetmj/19322008204. EDN: LWAYSI.
15. Dukhnovsky S. A Self-Similar Solution and the Tanh-Function Method for the Kinetic Carleman System // Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica. 2022. P. 99–110. DOI: 10.56415/basm.y2022.i1.p.99.
16. Zhang B., Chen Y., Martynov I. P. First Integrals and Rational Solutions of Differential Equations with a Movable Singular Line // Problems of Physics, Mathematics and Technics. 2019. Vol. 38, no. 1. P. 72–77. (in Russian).
17. Martynov I. P., Chichurin A. V. On the Solution of the Chazy System of Equations // Nonlinear Oscillations. 2009. Vol. 12. P. 94–100. DOI: 10.1007/s11072-009-0062-8. EDN: XMCFBB.
18. Kudryashov N. A. Exact Solutions and Integrability of the Duffing–Van der Pol Equation // Regular and Chaotic Dynamics. 2018. Vol. 23, no. 4. P. 471–479. DOI: 10.1134/S156035471804007X. EDN: JTHNOE.
19. Kudryashov N. A. One Method for Finding Exact Solutions of Nonlinear Differential Equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2012. Vol. 17, no. 6. P. 2248–2253. DOI: 10.1016/j.cnsns.2011.10.016. EDN: PDGRPN.
20. Orlov V., Chichurin A. On the Theory of Constructing a Numerical-Analytical Solution of a Cantilever Beam Bend Nonlinear Differential Equation of the First Order // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1425. P. 012129. DOI: 10.1088/1742-6596/1425/1/012129. EDN: UZCALP.
21. Orlov V., Gasanov M. Research of a Third-Order Nonlinear Differential Equation in the Vicinity of a Moving Singular Point for a Complex Plane // E3S Web of Conferences. 2021. Vol. 263. P. 03019. DOI: 10.1051/e3sconf/202126303019. EDN: IJRRSC.
22. Orlov V. N., Leont'eva T. Y. On the Expansion of the Domain for an Analytical Approximate Solution of a Class of Second-Order Nonlinear Differential Equations in the Complex Domain // Bulletin of Samara State Technical University. Series:

Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24. P. 174–186. DOI: 10.14498/vsgtu1727. EDN: ZKDBOL.

23. Orlov V., Gasanov M. Analytic Approximate Solution in the Neighborhood of a Moving Singular Point of a Class of Nonlinear Equations // Axioms. 2022. Vol. 11. P. 637. DOI: 10.3390/axioms11110637. EDN: HNRIRZ.
24. Orlov V., Gasanov M. Technology for Obtaining the Approximate Value of Moving Singular Points for a Class of Nonlinear Differential Equations in a Complex Domain // Mathematics. 2022. Vol. 10. P. 3984. DOI: 10.3390/math10213984. EDN: JRWZHU.
25. Orlov V. N. Moving Singular Points and the Van der Pol Equation, as Well as the Uniqueness of Its Solution // Mathematics. 2023. Vol. 11. P. 873. DOI: 10.3390/math11040873. EDN: TWFIGO.
26. Leont'eva T. Y. Influence of Perturbation of Moving Singular Point on the Approximate Solution of a Nonlinear Second Order Differential Equation in the Complex Region // Bull. Yakovlev Chuvash State Pedagog. Univ. Ser. Mech. Limit State. 2015. Vol. 24. P. 109–118. (in Russian).
27. Pchelova A. Z., Kudryashova N. V. Existence Theorem for a Solution to a Third-Order Nonlinear Differential Equation with a Third-Degree Polynomial Right-Hand Side in the Domain of Analyticity // Proceedings of the All-Russian Scientific Conference "Mechanics of the Limit State and Related Matters", Dedicated to the 85th Anniversary of Prof. D. D. Ivlev. Part 2 (Cheboksary, Russia, Sept. 15–18, 2015). P. 215–220.
28. Pchelova A. Z., Kolle K. V. Existence Theorem for a Solution to a Third-Order Nonlinear Differential Equation with a Third-Degree Polynomial Right-Hand Side in a Neighborhood of a Moving Singular Point // Proceedings of the All-Russian Scientific Conference "Mechanics of the Limit State and Related Matters", Dedicated to the 85th Anniversary of Prof. D. D. Ivlev. Part 2 (Cheboksary, Russia, Sept. 15–18, 2015). P. 221–226.
29. Fuchs L. // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1873. Vol. 76. P. 177–213.
30. Shaimuratov R. V. Hydrodynamics of a Fractured Oil Reservoir. Moscow: Nedra, 1980. 223 p. (in Russian).
31. Nakaznaya L. G. Liquid and Gas Filtration in Fractured Reservoirs. Moscow: Nedra, 1972. 183 p. (in Russian).
32. Aleroev T. S., Aleroeva H. T., Tang Y., Zhang S. Features of Seepage of a Liquid to a Chink in the Cracked Deformable Layer // International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing. 2010. Vol. 1, no. 3. P. 333–347. DOI: 10.1142/S1793962310000195. EDN: PFUXPL.

Семинар по механике сплошной среды им. Л. А. Галина
под руководством академика И. Г. Горячевой и профессора Ю. Н. Радаева
29 мая 2026 г., Заседание 792

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.016 *EDN: IPWSFH*
Краткое сообщение *УДК: 538.9, 539.4*

Корнев Ю. В., Гилязова Р. Ф., Драч Е. А., Муромцев Д. Н., Майский А. В., Валиев Х. Х., Келбышева Е. С., Джага А. О.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ МИКРОСТРУКТУРЫ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИСПЕРСНОНАПОЛНЕННЫХ ЭЛАСТОМЕРНЫХ И ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ

Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия

Аннотация. Дисперснонаполненные полимерные композиты являются распространёнными конструкционными материалами, изделия из которых применяются во многих отраслях промышленности. Основными компонентами в составе данного класса композитов, которые определяют комплекс их физико-механических свойств, являются полимерная основа (полимерная/эластомерная матрица) и высокодисперсные (субмикро- и нано-) частицы упрочняющего наполнителя, распределенные в объеме полимерной матрицы [1]. В связи с этим, актуальными являются экспериментально-теоретические исследования, направленные на развитие методов количественной оценки параметров микроструктуры дисперснонаполненных эластомерных композитов, поиска взаимосвязи параметров микроструктуры и механических свойств данного класса материалов с целью направленного регулирования их физико-механических характеристик [2, 3]. В работе представлены результаты исследований эффектов упрочнения в дисперснонаполненных эластомерных композитах с применением в качестве наполнителей измельчённых частиц породы шунгит и частиц диоксида кремния, полученных из возобновляемого сырья. В отличие от известных эффектов упрочнения эластомерных композитов, полученных с применением химически синтезированных частиц наполнителя, в настоящей работе частицы получены по запатентованной технологии измельчения (до субмикро- и наноразмеров). Дается анализ эффектам упрочнения в эластомерных композитах с применением в качестве наполнителя измельчённых частиц в сравнении с химически синтезированными частицами углерода и диоксида кремния. Установлено, что определяющим фактором эффекта упрочнения в данных материалах является размер частиц дисперсного наполнителя. Дается анализ параметров микроструктуры образов эластомерных композитов, изготовленных в соответствии с моделью Шкловского - де Жена [3], контролировался параметр θ. Установлено, что важной характеристикой микроструктуры образцов эластомерных композитов с одинаковым исходным размером частиц наполнителя является степень (качество) их диспергирования в эластомерной матрице. На основе проведённых исследований предложен метод количественной оценки качества диспергирования частиц наполнителя в объёме эластомерной/полимерной матрицы и предложен новый параметр A_k. Установлено, что параметр A_k коррелирует с рядом механических свойств эластомерных композитов (прочность, сопротивление истиранию [4], удельная работа деформации на разрушение образца, относительный

гистерезис и др.). Также приведены результаты исследований взаимосвязи параметров микроструктуры и механических свойств для дисперснонаполненных пластиков на основе полиэтилена (с частицами диоксида кремния) и эпоксидной смолы (с углеродными нанотрубками). Проведён анализ кривых ползучести, полученных в экспериментах по наноиндентированию для эластомерных композитов с различной микроструктурой. Для полученных в ходе эксперимента зависимостей были выбраны такие аппроксимирующие математические функции, параметры которых являются реальными вязкоупругими характеристиками материала. Была определена вязкостная характеристика (составляющая) материала, которая, связана с потерями энергии в образце при деформации. При анализе кривых ползучести применялась комбинированная модель из элементов Максвелла и Кельвина-Фойгта. Установлено, что ползучесть эластомерных композитов заметно зависит от дисперсности частиц наполнителя. Так, в случае добавления субмикрочастиц породы шунгит в состав композита существенно возрастает вязкостная составляющая η_2 (до 36 %), а добавка микрочастиц породы шунгит приводит к снижению значений упругой и вязкостной составляющей на 8 и 23% соответственно, по сравнению с эталонным образцом. Предложен метод оценки мгновенного и длительного модуля упругости эластомерных композитов по данным ползучести при наноиндентировании. Исследованы электрореологические свойства эластомерных композитов, наполненных микро- частицами полиимидов различного строения (два типа частиц). Установлены параметры микроструктуры (значения параметра A_k) данных композитов, при которых для исследованных образцов наблюдается максимальный рост (до десяти раз) значений действительной составляющей комплексного динамического модуля упругости при наведении внешнего электрического поля. При этом отмечается так же рост модуля потерь и некоторое снижение значений $\tan\delta$. Для указанных композитов установлено, что при снижении параметра A_k электрореологический эффект, как правило, возрастает. С применением предложенных методов и подходов разработаны эластомерные композиты с минимальными гистерезисными потерями, улучшенной износостойкостью и упруго-прочностными свойствами для возможного применения в шинной промышленности, а также, эластомерные композиты с улучшенными диссипативными свойствами для конструкций гасителей колебаний.

Ключевые слова: дисперснонаполненные эластомерные композиты, полимерные композиты, высокодисперсные частицы наполнители, сверхтонкое измельчение, эффекты упрочнения, структура композитов, параметры микроструктуры, электрореологические эластомеры, ползучесть эластомерных композитов, наноиндентирование, АСМ-микроскопия.

Корнев Юрий Витальевич, кандидат технических наук, старший научный сотрудник; `e-mail:` yurikornev@mail.ru; https://orcid.org/0000-0001-5524-4289; AuthorID: 559146

Гилязова Рената Фаритовна, младший научный сотрудник; `e-mail:` renata.gilyazova@gmail.com; AuthorID: 1302399

Драч Екатерина Анатольевна, младший научный сотрудник; `e-mail:` catherinedratch@yandex.ru; https://orcid.org/0009-0000-1768-4021; AuthorID: 1343784

Муромцев Денис Николаевич, аспирант; `e-mail:` muromtsevdn@mail.ru

Майский Андрей Викторович, аспирант; `e-mail:` andrey.mayskiy@gmail.com

Валиев Хаммат Хафизович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник; `e-mail:` hhvlv@mail.ru; https://orcid.org/0000-0002-7445-5177; РИНЦ AuthorID: 160611

Келбышева Елена Сергеевна, кандидат химических наук, старший научный сотрудник; `e-mail:` kellena80@mail.ru; https://orcid.org/0000-0002-9611-6328; РИНЦ AuthorID: 630257

Джага Артем Олегович, младший научный сотрудник; e-mail: art.dzhaga@gmail.com; https://orcid.org/0009-0004-0121-3259; РИНЦ AuthorID: 1348767

для цитирования: *Корнев Ю. В., Гилязова Р. Ф., Драч Е. А., Муромцев Д. Н., Майский А. В., Валиев Х. Х., Келбышева Е. С., Джага А. О.* Экспериментально-теоретическое исследование влияния параметров микроструктуры на механические свойства дисперснонаполненных эластомерных и полимерных композитов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 239–246. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.016. EDN: IPWSFH

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© Корнев Ю. В., Гилязова Р. Ф., Драч Е. А., Муромцев Д. Н., Майский А. В., Валиев Х. Х., Келбышева Е. С., Джага А. О. 2026

Поступила: 07.06.26; принята в печать: 10.09.26; опубликована: 29.10.26.

L. A. Galin Seminar on Continuum Mechanics
Chaired by Academician I. G. Goryacheva and Professor Yu. N. Radayev
May 29, 2026, Session 792

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.016 *EDN: IPWSFH*
Brief Communication

Y. V. Kornev, R. F. Gilyazova, E. A. Dratch, D. N. Muromtsev, A. V. Maisky, Kh. Kh. Valiev, E. S. Kelbysheva, A. O. Dzhaga

EXPERIMENTAL AND THEORETICAL STUDY OF THE INFLUENCE OF MICROSTRUCTURE PARAMETERS ON THE MECHANICAL PROPERTIES OF DISPERSION-FILLED ELASTOMERIC AND POLYMER COMPOSITES

Institute of Applied Mechanics of the RAS, Moscow, Russia

Abstract. Particle-filled polymer composites are common structural materials applied in many industries. The main components of this class of composites, that determine their physical and mechanical properties, are the polymer base (polymer/elastomer matrix) and highly dispersed (submicro- and nano-) particles of reinforcing filler distributed throughout the polymer matrix [1]. Therefore, experimental and theoretical research aimed at developing methods for quantitatively assessing the microstructural parameters of particle-filled elastomer composites and identifying the relationship between microstructural parameters and mechanical properties of this class of materials for the purpose of targeted regulation of their physical and mechanical characteristics is relevant [2, 3]. This paper presents the results of studies of reinforcing effects in particle-filled elastomer composites applying milled shungite particles and silicon dioxide particles obtained from renewable raw materials as fillers. In contrast to the known strengthening effects of elastomeric composites obtained using chemically synthesized filler particles, in this study the particles were produced using a patented grinding technology (to submicron and nanoscale sizes). The strengthening effects in elastomeric composites using milled particles as filler are analyzed in comparison with chemically synthesized carbon and silicon dioxide particles. It was established that the primary factor in the strengthening effect in these materials is the particle size of the dispersed filler. An analysis of the microstructural parameters of elastomeric composite samples manufactured according to the Shklovsky-de Gennes model [3] is provided, with the θ parameter being controlled. It was established that an important characteristic of the microstructure of elastomeric composite samples with the same initial filler particle size is the degree (quality) of their dispersion in the elastomer matrix. Based on the conducted research, a method for quantitatively assessing the dispersion quality of filler particles within an elastomer/polymer matrix is proposed, along with a new parameter, A_k. It is established that A_k correlates with a number of mechanical properties of elastomer composites (strength, abrasion resistance [4], specific work of deformation at specimen failure, relative hysteresis, etc.). The results of studies examining the relationship between microstructure parameters and mechanical properties for dispersed-filled plastics based on polyethylene (with silicon dioxide particles) and epoxy resin (with carbon nanotubes) are also presented. Creep curves obtained in nanoindentation experiments for elastomer composites with different microstructures are analyzed. Approximating mathematical functions whose parameters represent the actual viscoelastic characteristics of the material were selected for the dependences obtained during the experiment. The viscosity characteristic (component) of the material, which

is associated with energy losses in the specimen during deformation, was determined. A combined model of Maxwell and Kelvin-Voigt elements was used to analyze the creep curves. It was found that the creep of elastomeric composites significantly depends on the dispersity of the filler particles. For example, adding shungite submicroparticles to the composite significantly increases the viscosity component η_2 (up to 36%), while the addition of shungite microparticles leads to a decrease in the elastic and viscous components by 8% and 23%, respectively, compared to the reference sample. A method for estimating the instantaneous and long-term elastic modulus of elastomeric composites based on nanoindentation creep data is proposed. The electrorheological properties of elastomeric composites filled with polyimide microparticles of different structures (two types of particles) were studied. Microstructural parameters (the A_k parameter values) of these composites were determined, at which the maximum increase (up to tenfold) in the real component of the complex dynamic modulus of elasticity was observed for the studied samples upon application of an external electric field. An increase in the loss modulus and a slight decrease in $\tan\delta$ values were also observed. For these composites, it was found that, as the A_k parameter decreased, the electrorheological effect generally increased. Applying proposed methods and approaches, elastomer composites with minimal hysteresis losses, improved wear resistance, and elastic-strength properties were developed for potential application in the tire industry, as well as elastomer composites with improved dissipative properties for vibration damper designs.

Keywords: Dispersed-filled elastomer composites, polymer composites, highly dispersed filler particles, ultrafine grinding, strengthening effects, composite structure, microstructure parameters, electrorheological elastomers, creep of elastomer composites, nanoindentation, AFM microscopy.

Yuri V. Kornev, Ph.D., senior researcher; e-mail: yurikornev@mail.ru; https://orcid.org/0000-0001-5524-4289; AuthorID: 559146

Renata F. Gilyazova, junior researcher; e-mail: renata.gilyazova@gmail.com; AuthorID: 1302399

Ekaterina A. Dratch, junior researcher; e-mail: catherinedratch@yandex.ru; https://orcid.org/0009-0000-1768-4021; AuthorID: 1343784

Denis N. Muromtsev, graduate student; e-mail: muromtsevdn@mail.ru

Andrey V. Maisky, graduate student; e-mail: andrey.mayskiy@gmail.com

Khammat Kh. Valiev, Ph.D., senior researcher; e-mail: hhvlv@mail.ru; https://orcid.org/0000-0002-7445-5177; AuthorID: 160611

Elena S. Kelbysheva, Ph.D., senior researcher; e-mail: kellena80@mail.ru; https://orcid.org/0000-0002-9611-6328; AuthorID: 630257

Artem O. Dzhaga, junior researcher; e-mail: art.dzhaga@gmail.com; https://orcid.org/0009-0004-0121-3259; AuthorID: 1348767

to cite this article: *Kornev Y. V., Gilyazova R. F., Dratch E. A., Muromtsev D. N., Maisky A. V., Valiev Kh. Kh., Kelbysheva E. S., Dzhaga A. O.* Experimental and theoretical study of the influence of microstructure parameters on the mechanical properties of dispersion-filled elastomeric and polymer composites // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 239–246. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.016

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Ю. В. Корневу принадлежит разработка концепции, формулировка целей и задач исследования, разработка методов и подходов при проведении эксперимента и анализе полученных данных, организация работ, наблюдение за проведением исследования, проведение экспериментов, написание текста статьи; Р. Ф. Гилязовой принадлежит проведение экспериментов по оценке упруго-прочностных и гистерезисных свойств, износостойкости, ползучести при наноиндентировании эластомерных композитов с техническим углеродом, анализ литературных источников, сбор данных, апробация методик, проведение статистического анализа экспериментальных данных, построение графиков, диаграмм и иллюстраций; Е. А. Драч принадлежит получение изображений частиц полиимидов и структуры эластомерных композитов, наполненных полиимидами, с применением оптической микроскопии, проведение эксперимента по оценке ползучести при наноиндентировании эластомерных композитов с частицами полиимидов, проведение статистического анализа экспериментальных данных, построение графиков, диаграмм и иллюстраций; Д. Н. Муромцеву принадлежит изготовление образцов эластомерных композитов с частицами технического углерода, определение оптимальных технологических параметров изготовления образцов, работа на смесителе Haake Rheomix, работа с исследовательскими экспериментальными данными: сбор, обработка, валидация, а также проверка воспроизводимости результатов исследования; А. В. Майскому принадлежит разработка и применение программ, кода, вычислительных инструментов, применённых в ходе работы для анализа кривых ползучести (Python, Wolfram Mathematica и др.); Х. Х. Валиеву принадлежит получение изображений структуры образцов эластомерных композитов методом атомно-силовой микроскопии с нанометровым разрешением; Е. С. Келбышевой принадлежит синтез частиц полиимидов различного строения, характеризация частиц полиимидов; А. О. Джага принадлежит изготовление образцов эластомерных композитов с частицами полиимидов, электрореологические исследования эластомерных композитов на динамическом реометре Haake Rheostress RS 150 с наведённым внешним электрическим полем.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Источник финансирования. Грант РФФИ проект № 15-38-70040, НИОКТР № 124041900006-3, 124112800012-2, Грант РНФ 22-19-00678.

Received: 07.06.26; accepted: 10.09.26; published: 29.10.26.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. Yuriy V. Kornev was responsible for concept development, formulation of research goals and objectives, development of methods and approaches for conducting the experiment and analyzing the obtained data, organization of work, study supervision, experimentation, and manuscript writing. Renata F. Gilyazova was responsible for experiments to evaluate the elastic-strength and hysteresis properties, wear resistance, and creep during nanoindentation of elastomeric composites with carbon black, literature review, data collection, and method validation, and statistical analysis of the experimental data, creation of graphs, diagrams, and illustrations. Ekaterina A. Drach was responsible for obtaining images of polyimide particles and the structure of elastomeric composites filled with polyimides using optical microscopy, experiments to evaluate creep during nanoindentation of elastomeric composites with polyimide particles, statistical analysis of the experimental data, and creation of graphs, diagrams, and illustrations. Denis N. Muromtsev was responsible for fabrication of elastomer composite samples with carbon black particles, determination of optimal process parameters for sample fabrication, use of a Haake Rheomix mixer, and experimental research data collection, processing, validation, and verification of the reproducibility of the results. Andrey V. Maisky was responsible for development and implementation of programs, code, and computational tools used in the study to analyze creep curves (Python, Wolfram Mathematica, etc.). Khammat Kh. Valiev was responsible for obtaining images of the structure of elastomer composite samples by atomic force microscopy with nanometer resolution. Elena S. Kelbysheva was responsible for synthesis of polyimide particles with various structures and characterization of polyimide particles. Artem O. Dzhaga was responsible for fabrication of elastomer composite samples with polyimide particles and electrorheological studies of elastomeric composites using a Haake Rheostress RS 150 dynamic rheometer with an induced external electric field.

Competing interests. The authors declare no conflict of interest.

Funding. Grant of the Russian Foundation for Basic Research, project No. 15-38-70040, R&D No. 124041900006-3, 124112800012-2, Grant of the Russian Science Foundation 22-19-00678.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яновский Ю. Г. Наномеханика и прочность композиционных материалов. Москва: ИПРИМ РАН, 2008. 179 с.
2. Козлов Г. В., Яновский Ю. Г., Карнет Ю. Н. Физико-механические свойства наноструктурированных полимерных композитов в рамках фрактального и мультифрактального описаний. Москва: OneBook, 2013. 341 с.
3. Симонов-Емельянов И. Д. Структура и свойства дисперсно-наполненных полимерных композиционных материалов. Санкт-Петербург: ЦОП «Профессия», 2024. 280 с.
4. Корнев Ю. В., Гилязова Р. Ф., Валиев Х. Х. и др. Оценка влияния параметров микроструктуры на износостойкость эластомерных композитов // Трение и износ. 2026. Т. 47, № 2. С. 175–183. DOI: 10.32864/0202-4977-2026-47-2-175-183.

REFERENCES

1. Yanovsky Y. G. Nanomechanics and Strength of Composite Materials. Moscow: Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 2008. 179 p. (in Russian).
2. Kozlov G. V., Yanovsky Y. G., Karnet Y. N. Physical and Mechanical Properties of Nanostructured Polymer Composites within Fractal and Multifractal Descriptions. Moscow: OneBook, 2013. 341 p. (in Russian).
3. Simonov-Emel'yanov I. D. Structure and Properties of Disperse-Filled Polymer Composite Materials. St. Petersburg: Professiya, 2024. 280 p. (in Russian).
4. Kornev Y. V., Gilyazova R. F., Valiev K. K., et al. Evaluation of the Effect of Microstructural Parameters on the Wear Resistance of Elastomeric Composites // Friction and Wear. 2026. Vol. 47, no. 2. P. 175–183. DOI: 10.32864/0202-4977-2026-47-2-175-183. (in Russian).

Семинар по механике сплошной среды им. Л. А. Галина
под руководством академика И. Г. Горячевой и профессора Ю. Н. Радаева
30 января 2026 г., заседание 788

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.017 *EDN: CCYLZR*
Краткое сообщение *УДК: 539.219.1*

Сорокин Г. С.

АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ПРИМЕРЕ СКАЛЬНЫХ ГРУНТОВ И КОМПОЗИТОВ ДЛЯ МЕДИЦИНСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ

Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия

Аннотация. Композитные материалы получили широкое распространение в различных областях человеческой деятельности. Авиакосмическая отрасль, автомобилестроение и транспорт, судостроение, строительство, горное дело и архитектура, энергетика, медицина, химическая промышленность, электроника и электротехника. В каждом отдельном направлении композитные материалы применяются для решения различных по своей природе задач. На данный момент из-за анизотропной, многоуровневой, дефекточувствительной природы композитов проектирование новых материалов под специализированные задачи и определение характеристик существующих композитных материалов связанно с проведением большого количества практических экспериментов и требует затрат времени и финансовых ресурсов, а в некоторых случаях, как например для горных пород (горные породы являются композитами природного образования) просто невозможно. Таким образом, потребность в разработке методики определения эффективных характеристик композитных материалов с помощью численно-аналитических методов является актуальной для определения свойств структурно неоднородных сред (таких как композитные материалы и горные породы), проектирования новых композитных материалов с заданными свойствами, инженерных расчетов и научных исследований. В рамках данной работы была разработана методика определения эффективных характеристик композитных материалов, имеющих периодическую структуру, со случайными характеристиками фаз. В отличии от ранее разработанных методов и практикуемых лабораторных исследований разработанная методика позволяет быстро и с необходимой точностью определить эффективные механические характеристики материалов. Использование этой методики особенно актуально для определения свойств массивов горных пород, где часто их определение невозможно или сопряжено со значительными финансовыми и временными затратами. Разработанная методика реализует оценку эффективного тензора жесткости и соответственно эффективных технических характеристик композитных материалов (модули Юнга, сдвига и коэффициенты Пуассона) с использованием методов теории вероятностей и математической статистики и метода асимптотического усреднения. Метод кривых Пирсона был определен как оптимальный для обработки базового набора лабораторных данных и определения закона распределения варьируемых характеристик матрицы и включения, рассматриваемых в рамках данной работы как случайные величины. Методика была апробирована на результатах двух лабораторных экспериментов: на результатах испытания скального

массива, являющегося основанием одного из ответственных сооружений; на результатах испытаний медицинского композита (костного цемента), выполненных для определения оптимального соотношения присадок. Представленные в работе подходы к оценке эффективных деформационных характеристик композитных материалов периодической структуры со случайными значениями механических характеристик могут быть применены для существенного уточнения определения характеристик природных композитов таких, как скальные и мерзлые грунты для строительства, а также при разработке новых композитных материалов с заданными характеристиками. Диссертация докладывалась в полном объеме на № 788 Заседании Семинара по механике сплошной среды им. Л.А. Галина ИПМех РАН под руководством академика И.Г. Горячевой и профессора Ю.Н. Радаева. Автор благодарит профессора Ю.Н. Радаева за внимание и поддержку в работе!

Ключевые слова: метод Пирсона, метод графического изображения и табулирования, критерии согласия, функция распределения компонентов тензора жёсткости слоёв, эффективный тензор жёсткости, эффективные деформационные характеристики.

Сорокин Георгий Сергеевич, аспирант; e-mail: gergsorokin@gmail.com; https://orcid.org/0009-0007-6868-7805; РИНЦ AuthorID: 1254141

для цитирования: *Сорокин Г. С.* Аналитико-численные методы определения эффективных механических характеристик композитных материалов на примере скальных грунтов и композитов для медицинского применения // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 247–251. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.017. EDN: CCYLZR

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© Сорокин Г. С. 2026

Поступила: 15.06.26; принята в печать: 07.09.26; опубликована: 29.10.26.

L. A. Galin Seminar on Continuum Mechanics
Chaired by Academician I. G. Goryacheva and Professor Yu. N. Radayev
January 30, 2026, Session 788

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.017 *EDN: CCYLZR*
Brief Communication

G. S. Sorokin

ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS FOR DETERMINING THE EFFECTIVE MECHANICAL CHARACTERISTICS OF COMPOSITE MATERIALS ON THE EXAMPLE OF ROCK SOILS AS NATURALLY FORMED COMPOSITES AND COMPOSITES FOR MEDICAL APPLICATIONS

Institute of Applied Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. Composite materials have become widely used in various fields of human endeavor, including aerospace, automotive and transportation, shipbuilding, construction, mining and architecture, the energy industry, medicine, the chemical industry, and electronics and electrical engineering. In each field, composite materials are used to solve diverse problems. Currently, due to the anisotropic, multi-layered, and defect-sensitive nature of composites, designing of new materials tailored to specific applications and determination of the properties of existing composite materials requires extensive practical experimentation, time-consuming, and resource-intensive research. In some cases, such as rocks (which are composites of natural formations), this is simply impossible. Thus, the need to develop a methodology for determining the effective characteristics of composite materials using numerical-analytical methods is relevant for assessing the properties of structurally heterogeneous media (such as composite materials and rocks), designing new composite materials with specified properties, performing engineering calculations, and conducting of scientific research. Within the framework of this study, was developed a methodology for determining of the effective characteristics of composite materials with a periodic structure and random phase properties. In contrast to previously developed methods and commonly used laboratory investigations, the proposed methodology makes it possible to determine the effective mechanical properties of materials quickly and with the required accuracy. The use of this methodology is particularly relevant for determining the properties of rock masses, where their assessment is often impossible or involves significant financial and time costs. The developed methodology provides an assessment of the effective stiffness tensor and, accordingly, the effective engineering properties of composite materials (Young's moduli, shear moduli, and Poisson's ratios) using methods of probability theory and mathematical statistics, as well as the asymptotic homogenization method. The Pearson curve method was identified as the optimal approach for processing the basic set of laboratory data and determining the distribution law of the variable properties of the matrix and the inclusion, which are considered in this study as random variables. The methodology was validated using the results of two laboratory experiments: on the results of testing a rock mass serving as the foundation of a critical structure; on the results of testing a medical composite (bone cement), performed to determine the optimal ratio of additives. The approaches presented in this work for evaluating the effective deformation characteristics of composite materials with a periodic structure and random values of mechanical properties can be applied to significantly improve the determination of the

characteristics of natural composites, such as rock and frozen soils used in construction, as well as in the development of new composite materials with specified properties. The dissertation was presented in full at the No. 788 meeting of the L. A. Galin Seminar on Continuum Mechanics of the Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, chaired by Academician I. G. Goryacheva and Professor Yu. N. Radayev. The author expresses gratitude to Professor Yu. N. Radayev for his attention and support in this work.

Keywords: Pearson's method, graphical representation and tabulation method, goodness-of-fit criteria, random distribution function of layer stiffness tensor components, effective stiffness tensor; effective deformation characteristics.

Georgii S. Sorokin, graduate student; e-mail: gergsorokin@gmail.com; https://orcid.org/0009-0007-6868-7805; AuthorID: 1254141

to cite this article: *Sorokin G. S.* Analytical and numerical methods for determining the effective mechanical characteristics of composite materials on the example of rock soils as naturally formed composites and composites for medical applications // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 247–251. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.017

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Г. С. Сорокину принадлежит разработка описываемой в тексте рукописи методики, написание текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, обзор литературы по теме статьи.
Конфликт интересов. Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
Источник финансирования. Автор заявляет об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. Georgii S. Sorokin was responsible for development of the methodology described in the manuscript, writing of the manuscript text, approval of the final version of the manuscript, and literature review on the topic of the article.
Competing interests. The author declares that they have no competing interests.
Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов А. Н., Власов Д. А., Сорокин Г. С., Карнет Ю. Н. Оценка эффективного тензора жесткости композитного материала с периодическим расположением центров включений // Механика композиционных материалов и конструкций. 2023. Т. 29, № 4. С. 502–519. DOI: 10.33113/mkmk.ras.2023.29.04.06. EDN: UTJYMX.

Received: 15.06.26; accepted: 07.09.26; published: 29.10.26.

2. Власов А. Н., Сорокин Г. С., Власов Д. А., Карнет Ю. Н. Оценка эффективного тензора жесткости композитного материала периодической структуры со случайными модулями деформации // Механика композиционных материалов и конструкций. 2024. Т. 30, № 3. С. 338–353. DOI: 10.33113/mkmk.ras.2024.30.03.04. EDN: HIKCBR.
3. Kolmogorov A. N. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: Springer, 1933. 62 p.
4. Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. Москва: Наука, 1985. 640 с.
5. Кокс Д. Г., Оукс Д. Анализ данных типа времени жизни. Москва: Финансы и статистика, 1988. 191 с.
6. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах. Москва: Мир, 1968. 396 с.
7. Ковалевский А. П. Статистические критерии. Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2022. 92 с.

REFERENCES

1. Vlasov A. N., Vlasov D. A., Sorokin G. S., Karnet Y. N. Estimation of the Effective Stiffness Tensor of a Composite Material with a Periodic Arrangement of Inclusion Centers // Mechanics of Composite Materials and Structures. 2023. Vol. 29, no. 4. P. 502–519. DOI: 10.33113/mkmk.ras.2023.29.04.06. EDN: UTJYMX. (in Russian).
2. Vlasov A. N., Sorokin G. S., Vlasov D. A., Karnet Y. N. Estimation of the Effective Stiffness Tensor of a Composite Material with a Periodic Structure and Random Deformation Moduli // Mechanics of Composite Materials and Structures. 2024. Vol. 30, no. 3. P. 338–353. DOI: 10.33113/mkmk.ras.2024.30.03.04. EDN: HIKCBR. (in Russian).
3. Kolmogorov A. N. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: Springer, 1933. 62 p.
4. Korolyuk V. S., Portenko N. I., Skorokhod A. V., Turbin A. F. Handbook of Probability Theory and Mathematical Statistics. Moscow: Nauka, 1985. 640 p. (in Russian).
5. Cox D. R., Oakes D. Analysis of Survival Data. Moscow: Finansy i Statistika, 1988. 191 p. (in Russian).
6. Hahn G. J., Shapiro S. S. Statistical Models in Engineering. Moscow: Mir, 1968. 396 p. (in Russian).
7. Kovalevskii A. P. Statistical Criteria. Novosibirsk: Novosibirsk State University, 2022. 92 p. (in Russian).

Семинар по механике сплошной среды им. Л. А. Галина
под руководством академика И. Г. Горячевой и профессора Ю. Н. Радаева
6 марта 2026 г., заседание 789

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.018 *EDN: BYJLGJ*
Краткое сообщение *УДК: 539.3*

Гузев М. А.

УДАЛЕНИЕ СИНГУЛЯРНОСТИ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ПРОБЛЕМЫ ВИЛЛЬЯМСА (1952) НА ОСНОВЕ НЕЕВКЛИДОВОЙ МОДЕЛИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Институт прикладной математики ДВО РАН, г. Владивосток, Россия

Аннотация. В механике сплошной среды хорошо известен факт существования сингулярных решений для компонент поля напряжений в задачах теории упругости о равновесии пластин с угловыми вырезами [1]. Используя функцию напряжений Эйри для плоских конфигураций, которая удовлетворяет однородному бигармоническому уравнению, Вилльямс построил решение, содержащее сингулярность для поля упругих напряжений. В [1] был предложен асимптотический метод для их исследования в окрестности сингулярности. С другой стороны, в физических теориях прочности [2] также рассматриваются сингулярности полей напряжений и предлагаются способы их удаления. Способы получения регулярных решений сингулярных задач представлены у отечественных и зарубежных исследователей (см., например, [3–5] и ссылки). Тем не менее, для сингулярности Вилльямса такого способа не указано в научной литературе, поэтому целью данной работы является восполнение данного пробела. В связи с изложенным выше возникает необходимость расширения классической теории. Общая идея состоит в отказе от классических условий совместности Сен-Венана, которые идентичны требованию обращения в нуль тензора Римана-Кристоффеля, выражающему условие, что внутренняя геометрия среды является евклидовой. Поэтому обобщение классической теории может быть выполнено на пути перехода к неевклидовой модели. В этом случае компоненты тензора Римана-Кристоффеля становятся дополнительными параметрами модели, характеризующими внутреннюю геометрию материала. В двумерном случае тензор Римана-Кристоффеля определяется единственной компонентой: скалярной кривизной (функция несовместности). При расширении классической теории функция напряжения Эйри удовлетворяет неоднородному бигармоническому уравнению. Показано, что структура полного поля внутренних напряжений складывается из классического поля упругих напряжений и неклассического поля напряжений, определяемого через функцию несовместности. В предположении квадратичной зависимости внутренней энергии среды от термодинамических переменных представлено уравнение для функции несовместности. В полярной системе координат построено решение для функции напряжений Эйри и показано, что поле полных напряжений не содержит сингулярности для всех углов выреза.

Ключевые слова: сингулярные поля напряжений, функция напряжений Эйри, асимптотический метод Вилльямса, неевклидова модель.

Гузев Михаил Александрович, доктор физико-математических наук, академик РАН, профессор, директор ИПМ ДВО РАН; `e-mail:` guzev@iam.dvo.ru; https://orcid.org/0000-0001-9344-154X; AuthorID: 3404

для цитирования: *Гузев М. А.* Удаление сингулярности поля напряжений для проблемы Вилльямса (1952) на основе неевклидовой модели сплошной среды // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 252–256. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.018. EDN: BYJLGJ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© Гузев М. А. 2026

Поступила: 01.05.26; принята в печать: 30.08.26; опубликована: 29.10.26.

L. A. Galin Seminar on Continuum Mechanics
Chaired by Academician I. G. Goryacheva and Professor Yu. N. Radayev
March 6, 2026, Session 789

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.018 *EDN: BYJLGJ*
Brief Communication

M. A. Guzev

ELIMINATION OF THE STRESS FIELD SINGULARITY FOR THE WILLIAMS PROBLEM (1952) BASING ON A NON-EUCLIDEAN CONTINUUM MODEL

Institute of Applied Mathematics, FEB RAS, Vladivostok, Russia

Abstract. In the mechanics of continuous media the existence of singular solutions for stress field components in elasticity problems on the equilibrium of plates with angular notches is well known [1]. Using the Airy stress function for planar configurations, which satisfies the homogeneous biharmonic equation, Williams constructed a solution containing a singularity for the elastic stress field. An asymptotic method for studying these singularities in the vicinity of the singularity was proposed in [1]. On the other hand, physical theories of strength [2] also consider stress field singularities and propose methods for their removal. Methods for obtaining regular solutions of singular problems have been presented by domestic and international researchers (see, for example, [3–5] and references). However, no such method for the Williams singularity has been described in the scientific literature, so the purpose of this work is to fill this gap. Thus the need arises to expand the classical theory. The general idea is to abandon the classical Saint-Venant compatibility conditions, which are identical to vanishing of the Riemann-Christoffel tensor, expressing the condition that the internal geometry of the medium is Euclidean one. Therefore, a generalization of the classical theory can be achieved by transitioning to a non-Euclidean model. In this case, the components of the Riemann-Christoffel tensor become additional model parameters characterizing the internal geometry of the material. We consider the two-dimensional case then the Riemann-Christoffel tensor is defined by a single component: the scalar curvature (the incompatibility function). It is shown that at extending the classical theory, the Airy stress function satisfies an inhomogeneous biharmonic equation. In this case the structure of the total internal stress field consists of a classical elastic stress field and a nonclassical stress field defined by the incompatibility function. Under the assumption of a quadratic dependence of the internal energy of the medium on the thermodynamic variables, an equation for the incompatibility function is presented. A solution for the Airy stress function is constructed in a polar coordinate system, and it is shown that the total stress field is singularity-free for all notch angles.

Keywords: Singular stress fields, Airy stress function, Williams' asymptotic method, non-Euclidean continuum model.

Mihail A. Guzev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Academician of the Russian Academy of Sciences, Professor, Director of the Institute of Applied Mathematics, FEB RAS; `e-mail:` guzev@iam.dvo.ru; https://orcid.org/0000-0001-9344-154X; AuthorID: 3404

to cite this article: *Guzev M. A.* Elimination of the stress field singularity for the Williams problem (1952) basing on a non-Euclidean continuum model // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 252–256. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.018

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. М. А. Гузеву принадлежит проведение исследования, подготовка рукописи и определяющий вклад в содержание статьи.
Конфликт интересов. Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
Источник финансирования. Автор заявляет об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. Mihail A. Guzev was solely responsible for conducting the research and preparing the manuscript, and made a defining contribution to the content of the article.
Competing interests. The author declares that they have no competing interests.
Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Williams M. L. Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension // Journal of Applied Mechanics. 1952. Vol. 19, no. 4. P. 526–528. DOI: 10.1115/1.4010553. URL: https://authors.library.caltech.edu/records/2zph7-ee089.
2. Sinclair G. B. Stress Singularities in Classical Elasticity-I: Removal, Interpretation and Analysis // Applied Mechanics Reviews. 2004. Vol. 57, no. 4. P. 251–297. DOI: 10.1115/1.1762503. EDN: XSOAJS.
3. Васильев В. В., Лурье С. А. Дифференциальные уравнения и проблема сингулярности решений в прикладной механике и математике // Прикладная механика и техническая физика. 2023. Т. 64, № 1. С. 114–127. DOI: 10.15372/PMTF202215157. EDN: DSXGOA.
4. Po G., Lazar M., Admal N. C., Ghoniem N. A Non-Singular Theory of Dislocations in Anisotropic Crystals // International Journal of Plasticity. 2018. Vol. 103. P. 1–22. DOI: 10.1016/j.ijplas.2017.10.003.
5. Parisis K., Konstantopoulos I., Aifantis E. C. Nonsingular Solutions of GradEla Models for Dislocations: An Extension to Fractional GradEla // Journal of Micromechanics and Molecular Physics. 2018.

Received: 01.05.26; accepted: 30.08.26; published: 29.10.26.

REFERENCES

1. Williams M. L. Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension // Journal of Applied Mechanics. 1952. Vol. 19, no. 4. P. 526–528. DOI: 10.1115/1.4010553. URL: https://authors.library.caltech.edu/records/2zph7-ee089.
2. Sinclair G. B. Stress Singularities in Classical Elasticity-I: Removal, Interpretation and Analysis // Applied Mechanics Reviews. 2004. Vol. 57, no. 4. P. 251–297. DOI: 10.1115/1.1762503. EDN: XSOAJS.
3. Vasil'ev V. V., Lurie S. A. Differential Equations and the Problem of Solution Singularities in Applied Mechanics and Mathematics // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2023. Vol. 64, no. 1. P. 114–127. DOI: 10.15372/PMTF202215157. EDN: DSXGOA. (in Russian).
4. Po G., Lazar M., Admal N. C., Ghoniem N. A Non-Singular Theory of Dislocations in Anisotropic Crystals // International Journal of Plasticity. 2018. Vol. 103. P. 1–22. DOI: 10.1016/j.ijplas.2017.10.003.
5. Parisis K., Konstantopoulos I., Aifantis E. C. Nonsingular Solutions of GradEla Models for Dislocations: An Extension to Fractional GradEla // Journal of Micromechanics and Molecular Physics. 2018.

Семинар по механике сплошной среды им. Л. А. Галина
под руководством академика И. Г. Горячевой и профессора Ю. Н. Радаева
03 июля 2026 г., Заседание 793

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.003 *EDN: YGYJBV*
Краткое сообщение *УДК: 539.3*

Мурашкин Е. В.

ПСЕВДОТЕНЗОРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ТЕРМОМЕХАНИКЕ ПОЛУИЗОМЕТРИЧЕСКИХ МИКРОПОЛЯРНЫХ ТЕЛ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Аннотация. Освещаются вопросы использования алгебры и анализа псевдотензоров при моделировании термоупругого поведения полуизометрических микрополярных тел. Обсуждаются фундаментальные понятия геометрических измерений (площадей и объемов в трехмерном пространстве) и их влияние на алгебраические веса термомеханических параметров [1-5]. Рассматриваются проблемы детерминирования алгебраических весов микро- и наномасштабных термомеханических характеристик микрополярных тел. Развиваемая теория полуизометрической микрополярной термоупругости формулируется в терминах псевдовектора спинорных перемещений нечетного веса. Отмечается абсолютная инвариантность таких понятий термомеханики, как абсолютная термодинамическая температура, масса и массовые плотности (энтропии, внутренней энергии, свободной энергии Гельмгольца и т.д.). Предложена мультивесовая псевдотензорная формулировка принципа виртуальных перемещений и приведенного уравнения баланса энергии. Обсуждается переход от псевдотензорной формулировки уравнений развиваемой теории к формулировке в терминах абсолютных тензоров. Получены и проанализированы мультивесовые формулировки псевдовекторных дифференциальных уравнений статики и динамики полуизометрического термоупругого тела. Рассмотрены преобразования указанных уравнений в случаях инверсии пространства и зеркального отражения относительно заданной плоскости. Обсуждается наличие инверсных волновых мод (наряду с прямыми) в распространяющейся плоской волне [6, 7].

Ключевые слова: алгебраический вес, псевдотензор, наномасштаб, микромасштаб, микрополярность, псевдотензорный элемент объема, мультивесовая формулировка

Мурашкин Евгений Валерьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики новых материалов и технологий; e-mail: murashkin@ipmnet.ru; https://orcid.org/0000-0002-3267-4742; AuthorID: 129570

для цитирования: *Мурашкин Е. В.* Псевдотензорные представления в термомеханике полуизометрических микрополярных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 257–260. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.003. EDN: YGYJBV

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© Мурашкин Е. В. 2026

Поступила: 10.07.26; принята в печать: 07.09.26; опубликована: 29.10.26.

L. A. Galin Seminar on Continuum Mechanics
Chaired by Academician I. G. Goryacheva and Professor Yu. N. Radayev
July 03, 2026, Session 793

DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.003 *EDN: YGYJBV*
Brief Communication

E. V. Murashkin

PSEUDOTENSOR REPRESENTATIONS IN THE THERMOMECHANICS OF SEMI-ISOMETRIC MICROPOLAR SOLIDS

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia
Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Abstract. The problems of employing the algebra and analysis of pseudotensors in modeling the thermoelastic behavior of semi-isometric micropolar solids are highlighted. Fundamental concepts of geometric measurements (areas and volumes in three-dimensional space) and their influence on the algebraic weights of thermomechanical parameters are discussed [1-5]. The problems of determining the algebraic weights of micro- and nanoscale thermomechanical characteristics of micropolar solids are considered. The theory of semi-isometric micropolar thermoelasticity is formulated in terms of a pseudovector of spinor displacements of odd weight. The absolute invariance of thermomechanical concepts as absolute thermodynamic temperature, mass, and mass densities (of entropy, internal energy, Helmholtz free energy, etc.) is noted. A multiweight pseudotensor formulation of the virtual displacements principle and the reduced energy balance equation is proposed. The transition from the pseudotensor formulation of the equations of the theory being developed to a formulation in terms of absolute tensors is discussed. Multiweight formulations of pseudovector differential equations of statics and dynamics of a semi-isometric thermoelastic solid are obtained and analyzed. Transformations of these equations are considered in the cases of space inversion and mirror reflection relative to a given plane. The presence of inverse wave modes (along with direct ones) in a propagating plane wave is discussed [6, 7].

Keywords: algebraic weight, pseudotensor, nanoscale, microscale, micropolarity, pseudotensor volume element, multi-weight formulation

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; `e-mail:` evmurashkin@gmail.ru; https://orcid.org/0000-0002-3267-4742; AuthorID: 129570

to cite this article: *Murashkin E. V.* Pseudotensor Representations in the Thermomechanics of Semi-Isometric Micropolar Solids // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 257–260. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.003

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Конфликт интересов. Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
Источник финансирования. Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 124013000674-0).

ADDITIONAL INFORMATION

Competing interests. The author declares that he have no competing interests.
Funding. This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number 124013000674-0).

ЛИТЕРАТУРА

1. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On algebraic triple weights formulation of micropolar thermoelasticity // Mechanics of Solids. United States, 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
2. Мурашкин Е. В., Стадник Н. Э. Мультивесовая теория слабых разрывов, распространяющихся в полуизотропной термоупругой микрополярной среде // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2024. 2(60). С. 87–106. DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.007.
3. Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Стадник Н. Э. О мультивесовых формулировках краевых условий в теориях поверхностного роста // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2024. 1(59). С. 5–20. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.013.
4. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. 4(58). С. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
5. Мурашкин Е. В. Распространение связанных гармонических волн в теплоизолированном цилиндрическом волноводе // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2024. 4(62). С. 116–126. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.008.
6. Мурашкин Е. В. Условия атермичности продольных волн для полуизотропных термоупругих микрополярных сред // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2024. 7(79). С. 82–86.
7. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Mirror Wave Modes of Time-Harmonic Monochromatic Plane Waves in Hemitropic Elastic Micropolar Media // Mechanics of Solids. United States, 2025. Vol. 60, no. 5. P. 3566–3575. DOI: 10.1134/s0025654425700025.

Received: 10.07.26; accepted: 07.09.26; published: 29.10.26.

REFERENCES

1. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On algebraic triple weights formulation of micropolar thermoelasticity // Mechanics of Solids. United States, 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
2. Murashkin E. V., Stadnik N. E. Multi-weight theory of weak discontinuities propagating in a semi-isotropic thermoelastic micropolar medium // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of Limit State. 2024. 2(60). C. 87–106. DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.007.
3. Kovalev V. A., Murashkin E. V., Stadnik N. E. On multi-weight formulations of boundary conditions in theories of surface growth // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of Limit State. 2024. 1(59). C. 5–20. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.013.
4. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Multi-weight thermomechanics of hemitropic micropolar solids // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of Limit State. 2023. 4(58). C. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
5. Murashkin E. V. Propagation of coupled harmonic waves in a thermally insulated cylindrical waveguide // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of Limit State. 2024. 4(62). C. 116–126. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.008.
6. Murashkin E. V. Conditions of athermality of longitudinal waves for semi-isotropic thermoelastic micropolar media // Scientific Notes of Komsomolsk-on-Amur State Technical University. 2024. 7(79). C. 82–86.
7. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Mirror Wave Modes of Time-Harmonic Monochromatic Plane Waves in Hemitropic Elastic Micropolar Media // Mechanics of Solids. United States, 2025. Vol. 60, no. 5. P. 3566–3575. DOI: 10.1134/s0025654425700025.

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Алексеев Андрей Алексеевич (alexeew@bk.ru) – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета, г. Тверь, Россия.

Богданов Андрей Николаевич (bogdanov@imec.msu.ru) – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории газодинамики взрыва и реагирующих систем Научно-исследовательского института механики МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Буренин Анатолий Александрович (aab@imim.ru) – член-корреспондент РАН, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Власов Александр Николаевич (bah1955@yandex.ru) – доктор технических наук, директор Института прикладной механики РАН (ИПРИМ РАН) , г. Москва.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Гузев Михаил Александрович (guzev@iacp.dvo.ru) – академик РАН, Институт прикладной математики ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Иванов Дмитрий Валерьевич (ivanovdv.84@ya.ru) – профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н. Г . Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И.Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Келлер Илья Эрнстович (kie@icmm.ru) – доктор физико-математических наук, доцент, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Коссович Леонид Юрьевич (president@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Лисовенко Дмитрий Сергеевич (dslisov@yandex.ru) – член-корреспондент РАН, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матвеев Сергей Владимирович (sergio2100@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Матченко Николай Михайлович (ekc_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Минаева Надежда Витальевна (nminaeva@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Миронов Борис Гурьевич (mbg.chspu@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

Михин Михаил Николаевич (mmikhin@inbox.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, филиал Российского государственного университета в г. Домодедово, г. Домодедово, Россия.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Немировский Юрий Владимирович (nemiryury@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Орлов Виктор Николаевич (orlowvn@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Устинов Константин Борисович (ustinov@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, доцент, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Шитикова Марина Вячеславовна (ShitikovaMV@mgsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу http://limit21.ru

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должны быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала predel21@mail.ru и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст,

который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки на русском и английском языках**; **сведения о всех авторах на русском и английском языках**: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2e с использованием стиля predel.sty. Стиль predel.sty и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки BibTeX. Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

Содержание

Профессор Сергей Михайлович Айзикович. К 75-летию со дня рождения 7

Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Система определяющих неравенств в механике линейных анизотропных тел Гука 32

Канду В. В., Круссер А. И, Шепелев А. С., Шитикова М. В. Анализ вынужденных нелинейных колебаний пластин на вязкоупругом основании Пастернака на основе модели Кельвина-Фойгта с дробными производными 50

Адамов А. А., Келлер И. Э. Базовые испытания и идентификация модели вязкоупругого поведения эластомеров при конечных деформациях 83

Лавит И. М., Перова О. С. Напряженное состояние окрестности вершины центральной трещины в прямоугольной полосе 104

Стрелков К. С. Применение модели деформационного упрочнения для оценки герметичности премиальных резьбовых соединений 119

Бегун А. С. Конечный цилиндрический изгиб несжимаемой упругопластической пластины 132

Михин М. Н. О приведении энергии деформации гемитропных тел к каноническому виду методом Якоби 142

Петров М. В., Алексеева О. А., Михайлов Б. В. Экспериментальное исследование потери устойчивости пустых и наполненных сыпучим заполнителем тонкостенных цилиндрических оболочек средней длины при изгибе с кручением 156

Зайко Н. Ю., Любимова О. Н. О связи коэффициентов трения и стесненной деформации в контактной задаче при температурных нагрузках 173

Андрюкова В. Ю, Тарасов В. Н. Устойчивость системы арок, подкрепленных нерастяжимыми нитями 192

Торосян В. С., Погосян А. В. Об исследовании качественных закономерностей изменения скачков напряжений на границе прямоугольной области в одной известной задаче линейной эластостатики 202

Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Каноническое преобразование деформаций и изгибов–кручений в случае гемитропной микрополярной среды 215

Информация о постоянно действующих семинарах в Институте проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

Орлов В. Н. Сингулярная задача Коши для нелинейного дифференциального уравнения дробного порядка 232

Корнев Ю. В., Гилязова Р. Ф., Драч Е. А., Муромцев Д. Н., Майский А. В., Валиев Х. Х., Келбышева Е. С., Джага А. О. Экспериментально-теоретическое исследование влияния параметров

микроструктуры на механические свойства дисперснонаполненных эластомерных и полимерных композитов 239

Сорокин Г. С. Аналитико-численные методы определения эффективных механических характеристик композитных материалов на примере скальных грунтов и композитов для медицинского применения 247

Гузев М. А. Удаление сингулярности поля напряжений для проблемы Вильямса (1952) на основе неевклидовой модели сплошной среды 252

Мурашкин Е. В. Псевдотензорные представления в термомеханике полуизометрических микрополярных тел 257

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА 261

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ 265

СОДЕРЖАНИЕ 267

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА

СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2026. № 2 (68)

Отв. за выпуск: С. В. Тихонов

Технические редакторы: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Компьютерная верстка: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Макет: С. В. Тихонов

Подписано в печать 21.10.2026. Выход в свет 29.10.2026.
Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by LaTeX 2_ε. Усл. печ. л. 33,4.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ № 82

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском центре Чувашского государственного
педагогического университета им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38