

Н. М. Калантарлы

РОСТ ТРЕЩИНЫ СО СВЯЗЯМИ МЕЖДУ БЕРЕГАМИ В КОНЦЕВЫХ ЗОНАХ В РАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕМСЯ КОЛЬЦЕВОМ ДИСКЕ

Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку

Аннотация. Предложена модель разрушения вращающегося диска, основанная на исследовании зоны процесса разрушения вблизи кончика трещины. Принято, что зона предразрушения представляет собой слой конечной длины, в котором между отдельными структурными элементами материала частично нарушены связи (концевая зона). Наличие связей между берегами трещины в концевой зоне моделируется приложением к поверхности трещины сил сцепления, вызванных присутствием связей. Получена зависимость предельной скорости равномерного вращения кольцевого диска от длины трещины.

Ключевые слова: равномерно вращающийся кольцевой диск, трещина со связями между берегами, сила сцепления, зона предразрушения.

УДК: 539.375

Введение. Разнообразное применение кольцевых дисков и, зачастую, сложные условия эксплуатации делают исследование их напряженно-деформированного состояния и разрушения весьма востребованной задачей. Этой задаче посвящена обширная литература (см. обзор в монографиях [1], [2]). В настоящей работе для равномерно вращающегося кольцевого диска используется модель трещины со связями между берегами [3]–[7].

Постановка задачи. Рассмотрим кольцевой диск, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной к плоскости сечения диска и проходящей через ее центр. Считается, что поперечное сечение кольцевого диска заполняет в плоскости $z = x + iy$ область S , ограниченную извне и изнутри окружностями радиуса R_1 и R , соответственно. Имеет место плоское напряженное состояние.

Принято, что в сечении диска имеется произвольно размещенная прямолинейная трещина с концевыми зонами предразрушения. Размер концевых зон предразрушения соизмерим с длиной трещины. В концевых зонах действуют связи между берегами. Размер концевых зон изначально неизвестен и определяется в процессе решения рассматриваемой задачи механики разрушения.

Отнесем кольцевой диск к полярной системе координат $r\theta$, выбрав начало координат в центре концентрических окружностей L_1 и L с радиусами соответственно R_1 и R (рис. 1). В центре прямолинейной трещины с концевыми зонами предразрушения поместим начало локальной системы координат $x_1O_1y_1$. Ось x_1 образует угол α_1 с осью x ($\theta = 0$) и совпадает с линией трещины.

Под действием инерционных сил в связях, соединяющих берега трещины в концевых зонах предразрушения, будут возникать нормальные q_{y_1} и касательные $q_{x_1y_1}$ усилия. Следовательно, в концевых зонах к берегам трещины в диске приложены нормальные и касательные

напряжения, равные, соответственно, q_{y_1} и $q_{x_1y_1}$. Во внутренней области трещины (вне концевых зон) берега трещины свободны от внешних нагрузок.

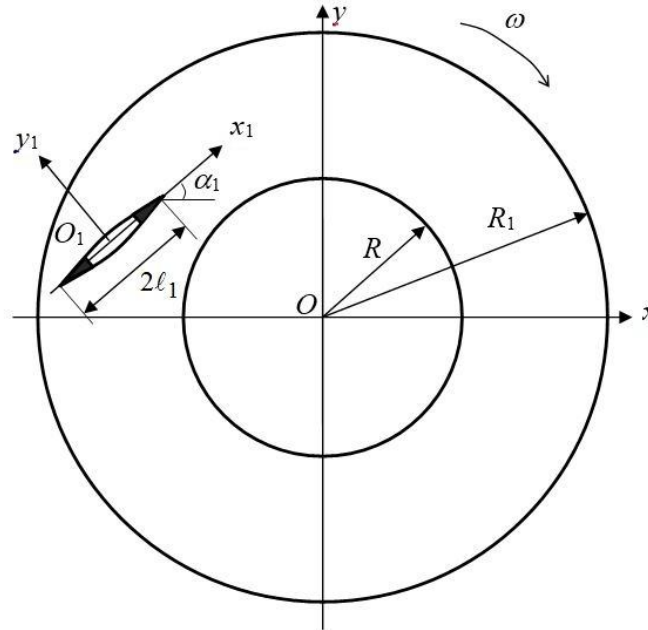


Рис. 1

Для исследования напряженно-деформированного состояния равномерно вращающегося кольцевого диска, ослабленного произвольно размещенной прямолинейной трещиной с концевыми зонами предразрушения, необходимо совместное решение уравнений теории упругости с объемными силами при следующих граничных условиях

$$\sigma_r = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0 \text{ на } L, \quad (1)$$

$$\sigma_r = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0 \text{ на } L_1,$$

$$\sigma_{y_1} = 0; \quad \tau_{x_1y_1} = 0 \text{ при } y_1 = 0 \text{ и } x_1 \in (\lambda_1, \lambda_2), \quad (2)$$

$$\sigma_{y_1} = q_{y_1}; \quad \tau_{x_1y_1} = q_{x_1y_1} \text{ при } y_1 = 0, \quad x_1 \in [-\ell_1, \lambda_1] \text{ и } [\lambda_2, \ell_1],$$

где $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ — компоненты тензора напряжений.

Постановку рассматриваемой задачи необходимо дополнить уравнением, связывающим усилия в связях и перемещения раскрытия берегов концевых зон предразрушения

$$(v_1^+ - v_1^-) - i(u_1^+ - u_1^-) = \Pi(x_1, \sigma_1) [q_{y_1}(x_1) - iq_{x_1y_1}(x_1)]. \quad (3)$$

Здесь $(v_1^+ - v_1^-)$ — нормальные и $(u_1^+ - u_1^-)$ — касательные составляющие раскрытия берегов зон предразрушения; функция $\Pi(x_1, \sigma_1)$ представляет собой эффективную податливость связей, зависящую от натяжения связей; $\sigma_1 = \sqrt{q_{y_1}^2 + q_{x_1y_1}^2}$ — модуль вектора усилий в соответствующих связях. При постоянном значении функции Π имеем в уравнении (3) линейный закон деформирования связей; в общем случае он нелинейный и задан.

Метод решения краевой задачи. Решение граничной задачи (1)–(2) ищем в виде суммы:

$$\sigma_r = \sigma_r^0 + \sigma_r^1, \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^0 + \sigma_\theta^1, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^0 + \tau_{r\theta}^1. \quad (4)$$

Здесь $\sigma_r^0, \sigma_\theta^0, \tau_{r\theta}^0$ — частное решение уравнений теории упругости для равномерно вращающегося кольцевого диска без трещины с концевыми зонами предразрушения; $\sigma_r^1, \sigma_\theta^1, \tau_{r\theta}^1$ — искомые компоненты напряжений, вызванные наличием в сечении трещины с концевыми зонами предразрушения во вращающемся диске.

Компоненты напряжений $\sigma_r^0, \sigma_\theta^0, \tau_{r\theta}^0$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r^0 &= -\frac{2\lambda + 3\mu}{4(\lambda + 2\mu)} \rho \omega^2 r^2 - \frac{p_1 R_1^2 - p R^2}{R_1^2 - R^2} + \frac{1}{r^2} \frac{(p_1 - p) R_1^2}{(R_1^2 - R^2)}; \\ \sigma_\theta^0 &= -\frac{2\lambda + \mu}{4(\lambda + 2\mu)} \rho \omega^2 r^2 - \frac{p_1 R_1^2 - p R^2}{R_1^2 - R^2} - \frac{1}{r^2} \frac{(p_1 - p) R^2 R_1^2}{(R_1^2 - R^2)}; \\ \tau_{r\theta}^0 &= 0; \quad p = -\frac{2\lambda + 3\mu}{4(\lambda + 2\mu)} \rho \omega^2 R^2; \quad p_1 = -\frac{2\lambda + 3\mu}{4(\lambda + 2\mu)} \rho \omega^2 R_1^2, \end{aligned}$$

где λ, μ — постоянные Ламе; ρ — плотность материала.

Для определения второго напряженного состояния (компонент тензора напряжений $\sigma_r^1, \sigma_\theta^1, \tau_{r\theta}^1$) имеем следующие краевые условия:

$$\sigma_r^1 - i\tau_{r\theta}^1 = 0 \quad |z| = R; \quad (5)$$

$$\sigma_r^1 - i\tau_{r\theta}^1 = 0 \quad |z| = R_1;$$

$$\sigma_{y_1}^1 - i\tau_{x_1 y_1}^1 = -(\sigma_{y_1}^0 - i\tau_{x_1 y_1}^0) \quad y_1 = 0, \quad x_1 \in (\lambda_1, \lambda_2); \quad (6)$$

$$\sigma_{y_1}^1 - i\tau_{x_1 y_1}^1 = q_{y_1} - iq_{x_1 y_1} - (\sigma_{y_1}^0 - i\tau_{x_1 y_1}^0) \quad y_1 = 0, \quad x_1 \in [-\ell_1, \lambda_1] \text{ и } [\lambda_2, \ell_1].$$

Используя формулы Колосова – Мусхелишвили [8], граничные условия (5)–(6) представим в виде:

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau} \Phi'(\tau) + \Psi(\tau)] = 0 \quad \tau = R e^{i\theta}; \quad (7)$$

$$\Phi(\tau_1) + \overline{\Phi(\tau_1)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau}_1 \Phi'(\tau_1) + \Psi(\tau_1)] = 0 \quad \tau_1 = R_1 e^{i\theta};$$

$$y_1 = 0, \quad x_1 \in (\lambda_1, \lambda_2); \quad (8)$$

$$\Phi(x_1) + \overline{\Phi(x_1)} + x_1 \overline{\Phi'(x_1)} + \overline{\Psi(x_1)} = q_{y_1} - iq_{x_1 y_1} - (\sigma_{y_1}^0 - i\tau_{x_1 y_1}^0),$$

$$y_1 = 0, \quad x_1 \in [-\ell_1, \lambda_1] \text{ и } [\lambda_2, \ell_1].$$

Таким образом, задача сведена к определению двух функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, аналитических в кольцевой области S . Комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ ищем в следующем виде:

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z) + \Psi_2(z); \quad (9)$$

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \quad \Psi_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k; \quad (10)$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \frac{g_1(t) dt}{t - z_1}; \quad \Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-2i\alpha_1} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[\frac{\overline{g_1(t)}}{t - z_1} - \frac{\bar{T}_1 e^{i\alpha_1}}{(t - z_1)^2} g_1(t) \right] dt. \quad (11)$$

Здесь $g_1(t)$ — искомая функция, характеризующая раскрытие берегов трещины; $T_1 = te^{i\alpha_1} + z_1^0$; $z_1 = e^{-i\alpha_1} (z - z_1^0)$.

Неизвестная искомая функция $g_1(x_1)$ и комплексные потенциалы $\Phi_2(z)$, $\Psi_2(z)$ должны быть определены из краевых условий на берегах трещины и контуре $r = R_1$. После некоторых преобразований и вычислений соответствующих интегралов, находим:

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left\{ \left(\frac{1}{z\bar{T}_1 - 1} + \frac{1}{2} \right) \bar{T}_1 e^{i\alpha_1} g_1(t) + \left[\frac{T_1}{2} - \frac{z^2 \bar{T}_1 - 2z + T_1}{(z\bar{T}_1 - 1)^2} \right] e^{-i\alpha_1} \overline{g_1(t)} \right\} dt, \quad (12)$$

$$\Psi_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[\frac{e^{i\alpha_1} \bar{T}_1^3}{(z\bar{T}_1 - 1)^2} g_1(t) + \frac{\bar{T}_1 e^{-i\alpha_1}}{(z\bar{T}_1 - 1)^3} \overline{g_1(t)} (z^2 \bar{T}_1^2 + 4 - 3z\bar{T}_1 + zT_1 \bar{T}_1^2 - 3T_1 \bar{T}_1) \right] dt.$$

В соотношениях (11), (12) искомая функция $g_1(x_1)$, характеризует раскрытие берегов трещины.

Для нахождения комплексных потенциалов $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ имеем следующую краевую задачу

$$\Phi_0(\tau) + \bar{\Phi}_0(\tau) - e^{2i\theta} [\bar{\tau} \Phi_0'(\tau) + \Psi_0(\tau)] = - (f_1^0 - i f_2^0); \quad (13)$$

$$\Phi_0(\tau_1) + \bar{\Phi}_0(\tau_1) - e^{2i\theta} [\bar{\tau}_1 \Phi_0'(\tau_1) + \Psi_0(\tau_1)] = 0.$$

Здесь $\tau = R e^{i\theta}$; $f_1^0(\theta) - i f_2^0(\theta) = \Phi_*(\tau) + \bar{\Phi}_*(\tau) - e^{2i\theta} [\bar{\tau} \Phi_*'(\tau) + \Psi_*(\tau)]$; $\tau_1 = R_1 e^{i\theta}$; $\Phi_*(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z)$; $\Psi_*(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z)$.

Решение краевой задачи (13) получаем методом степенных рядов. Удовлетворяя функциями (10) граничным условиям (13), получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_k, b_k .

Для нахождения искомой функции $g_1(x_1)$ необходимо функциями (9) (12) удовлетворить граничным условиям на берегах прямолинейной трещины с концевыми зонами предразрушения при $y_1 = 0$, $x_1 \in [-\ell_1, \ell_1]$. Тогда, после некоторых преобразований, получаем комплексное сингулярное интегральное уравнение относительно функции $g_1(x_1)$:

$$\int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[R(t, x_1) g_1(t) + S(t, x_1) \overline{g_1(t)} \right] dt = \pi f(x_1) \quad x_1 \in [-\ell_1, \ell_1], \quad (14)$$

$$\text{где } f(x_1) = \begin{cases} f_0(x_1) & y_1 = 0 \quad x_1 \in (\lambda_1, \lambda_2) \\ q_{y_1} - i q_{x_1 y_1} + f_0(x_1) & y_1 = 0 \quad x_1 \in [-\ell_1, \lambda_1] \text{ и } [\lambda_2, \ell_1] \end{cases}$$

$$f_0(x_1) = - (\sigma_{y_1}^0 - i \tau_{x_1 y_1}^0) - [\Phi_0(x_1) + \bar{\Phi}_0(x_1) + x_1 \bar{\Phi}_0'(x_1) + \bar{\Psi}_0(x_1)].$$

Функции $R(t, x_1)$ и $S(t, x_1)$ определяются по известным формулам [9].

К сингулярному интегральному уравнению нужно добавить уравнение, обеспечивающее однозначность смещений при обходе контура трещины с концевыми зонами предразрушения

$$\int_{-\ell_1}^{\ell_1} g_1(x_1) dx_1 = 0. \quad (15)$$

В случае внешней трещины в уравнении (15) нет необходимости.

Сделав замену переменных $\xi = t/\ell_1$ и $\eta = x_1/\ell_1$, переходим в интегральном уравнении (13) к безразмерным переменным. Решение интегрального уравнения (14) ищем в виде

$$g_1^0(\eta) = \frac{\varphi_0(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}. \quad (16)$$

Применяя процедуру алгебраизации [9], [10] к сингулярному интегральному уравнению (14) и дополнительному условию (15), получим систему M алгебраических уравнений для определения M неизвестных $g_1(t_m) = v_1^0(t_m) - iu_1^0(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$):

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \ell_1 \left[\varphi_0(t_m) R(\ell_1 t_m, \ell_1 \eta_r) + \overline{\varphi_0(t_m)} S(\ell_1 t_m, \ell_1 \eta_r) \right] = f(\eta_r); \quad (17)$$

$$\sum_{m=1}^M \varphi_0(t_m) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, M-1),$$

где $t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi$ ($m = 1, 2, \dots, M$); $x_r = \cos \frac{\pi r}{M}$ ($r = 1, 2, \dots, M-1$).

Напряжения во вращающемся кольцевом диске всюду ограничены, поэтому решение сингулярного интегрального уравнения (14) ищется в классе всюду ограниченных функций (напряжений). Следовательно, к системе алгебраических уравнений (17) добавляются условия разрешимости краевой задачи. В рассматриваемой задаче их можно записать как условия конечности напряжений в окрестности кончиков трещины с концевыми зонами предразрушения:

$$\sum_{m=1}^M (-1)^m \varphi_0(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0; \quad (18)$$

$$\sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} \varphi_0(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0.$$

Таким образом, получена замкнутая конечная комплексная алгебраическая система (17)–(18) для определения неизвестных $\varphi_0(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$) и размеров концевых зон предразрушения.

В правые части алгебраической системы (17) входят неизвестные значения $q_{y_1}(x_1)$ и $q_{x_1 y_1}(x_1)$ нормальных и касательных напряжений в узловых точках, содержащихся в зонах предразрушения. Используя полученное решение задачи, находим

$$g_1(x_1) = \frac{2\mu}{i(1+\kappa)} \frac{d}{dx_1} [\Pi(x_1, \sigma_1) (q_{y_1}(x_1) - iq_{x_1 y_1}(x_1))]. \quad (19)$$

Комплексное дифференциальное уравнение (19) используется для нахождения напряжений $q_{y_1}(x_1)$ и $q_{x_1 y_1}(x_1)$ в связях между берегами концевых зон трещины.

Для построения недостающих алгебраических уравнений, с помощью которых находят приближенные значения напряжений $q_{y_1}(t_{m_1})$ и $q_{x_1 y_1}(t_{m_1})$ ($m_1 = 1, 2, \dots, M$) в узловых точках, потребуем, чтобы в узловых точках t_{m_1} , содержащихся в концевых зонах, выполнялись условия (19). При этом используется метод конечных разностей. В результате получаем комплексную алгебраическую систему из M_1 уравнений для определения приближенных значений $q_{y_1}(t_{m_1})$ и $q_{x_1 y_1}(t_{m_1})$ ($m_1 = 1, 2, \dots, M$) в узловых точках зон предразрушения.

Алгебраическая система (17)–(19) из $M + M_1 + 2$ уравнений оказалась из-за неизвестных размеров концевых зон трещины нелинейной даже в случае линейно-упругих связей. Для решения алгебраической системы (17)–(19) применяли метод последовательных приближений

и метод упругих решений А. А. Ильюшина [11]. В каждом приближении линейная алгебраическая система решалась методом Гаусса с выбором главного элемента.

Используя полученное решение задачи, найдем раскрытие трещины у края концевых зон, т.е. при $x_1 = \lambda_1$ и для правого конца трещины при

$$v_1(\lambda_2, 0) - iu_1(\lambda_2, 0) = -\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{\lambda_2}^{\ell_1} g_1(x_1) dx_1; \quad (20)$$

для левого конца трещины при $x_1 = \lambda_1$

$$v_1(\lambda_1, 0) - iu_1(\lambda_1, 0) = -\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{-\ell_1}^{\lambda_1} g_1(x_1) dx_1. \quad (21)$$

Здесь $v_1(x_0, 0) = v_1^+(x_0, 0) - v_1^-(x_0, 0)$; $u_1(x_0, 0) = u_1^+(x_0, 0) - u_1^-(x_0, 0)$ при $x_0 = \lambda_2$ для правой вершины трещины и $x_0 = \lambda_0$ для левой вершины трещины.

Используя замену переменных и квадратурную формулу Гаусса к соотношениям (20) и (21), находим для правой вершины трещины:

$$v_1(\lambda_2, 0) - iv_1(\lambda_2, 0) - i(u_1(\lambda_2, 0) - iu_1(\lambda_2, 0)) = -\frac{\pi(1+\kappa)}{2\mu} \frac{\ell_1}{M_2} \sum_{m=1}^{M_2} g_1(t_m); \quad (22)$$

для левой вершины трещины:

$$v_1(\lambda_1, 0) - iv_1(\lambda_1, 0) - i(u_1(\lambda_1, 0) - iu_1(\lambda_1, 0)) = -\frac{\pi(1+\kappa)}{2\mu} \frac{\ell_1}{M_1} \sum_{m=1}^{M_1} g_1(t_m). \quad (23)$$

Здесь M_2 — число узловых точек, содержащихся в отрезке (λ_2, ℓ_1) , M_1 — число узловых точек в отрезке $(-\ell_1, \lambda_1)$.

Отделяя действительную и мнимую части в соотношениях (21), (22), находим для правой вершины трещины (у края концевой зоны):

$$v_1(\lambda_2, 0) - \nu_1(\lambda_2, 0) = -\frac{\pi(1+\kappa)}{2\mu} \frac{\ell_1}{M_2} \sum_{m=1}^{M_2} \nu_1^0(t_m),$$

$$u_1(\lambda_2, 0) - u_1(\lambda_2, 0) = -\frac{\pi(1+\kappa)}{2\mu} \frac{\ell_1}{M_2} \sum_{m=1}^{M_2} u_1^0(t_m);$$

для левой вершины трещины:

$$v_1(\lambda_1, 0) - \nu_1(\lambda_1, 0) = -\frac{\pi(1+\kappa)}{2\mu} \frac{\ell_1}{M_1} \sum_{m=1}^{M_1} \nu_1^0(t_m),$$

$$u_1(\lambda_1, 0) - u_1(\lambda_1, 0) = -\frac{\pi(1+\kappa)}{2\mu} \frac{\ell_1}{M_1} \sum_{m=1}^{M_1} u_1^0(t_m).$$

Для модуля раскрытия берегов трещины у основания концевой зоны предразрушения находим

для правой вершины трещины

$$V_1^r = \sqrt{[v_1^+(\lambda_2, 0) - v_1^-(\lambda_2, 0)]^2 + [u_1^+(\lambda_2, 0) - u_1^-(\lambda_2, 0)]^2} = \quad (24)$$

$$= \frac{\pi(1+\kappa)}{2\mu} \frac{\ell_1}{M_2} \sqrt{A_1^2 + A_2^2};$$

для левой вершины трещины

$$\begin{aligned} V_1^l &= \sqrt{[v_1^+(\lambda_1, 0) - v_1^-(\lambda_1, 0)]^2 + [u_1^+(\lambda_1, 0) - u_1^-(\lambda_1, 0)]^2} = \\ &= \frac{\pi(1+\kappa)}{2\mu} \frac{\ell_1}{M_2} \sqrt{A_3^2 + A_4^2}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\text{где } A_1 = \sum_{m=1}^{M_2} v_1^0(t_m); A_2 = \sum_{m=1}^{M_2} u_1^0(t_m); A_3 = \sum_{m=1}^{M_1} v_1^0(t_m); A_4 = \sum_{m=1}^{M_1} u_1^0(t_m).$$

В качестве критерия разрушения используем критерий критического раскрытия трещины. Таким образом, условием, определяющим критическое значение величины угловой скорости вращения кольцевого диска, при которой трещина начнет расти, будет:
для правой вершины трещины

$$V_1^p = \delta_{cr};$$

для левой вершины трещины

$$V_1^l = \delta_{cr}.$$

С учетом соотношений (24), (25), окончательно найдем:
для роста правой вершины трещины

$$\frac{\pi(1+\kappa)}{2\mu} \frac{\ell_1}{M_2} \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \delta_{cr}; \quad (26)$$

для роста левой вершины трещины

$$\frac{\pi(1+\kappa)}{2\mu} \frac{\ell_1}{M_2} \sqrt{A_3^2 + A_4^2} = \delta_{cr}. \quad (27)$$

Совместное решение полученных уравнений (17)–(19), (26) или (27) позволяет при заданных параметрах кольцевого диска найти критическую величину угловой скорости вращения и размеры концевых зон предразрушения для состояния предельного равновесия, при котором произойдет рост трещины.

Выводы. С помощью разработанной математической модели разрушения вращающегося кольцевого диска возможно оценивать на этапе проектирования гарантированный ресурс диска с учетом ожидаемых дефектов и условий нагружения; устанавливать допустимый уровень дефектности диска, максимальные значения рабочих нагрузок; выбирать материал кольцевого диска с требуемыми статическими и циклическими характеристиками трещиностойкости.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Саврук, М. П. Механика разрушения и прочность материалов: справ. пособие. Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / М. П. Саврук. – Киев : Наукова думка. – 1988. – 620 с.
- [2] Саврук, М. П. Численный анализ в плоских задачах теории трещин / М. П. Саврук, П. Н. Осив, И. В. Прокопчук. – Киев : Наукова думка. – 1989. – 248 с.
- [3] *The special issue: Cohesive models* // Eng. Fract. Mech. – 2003. – Vol. 70. – No. 14. – P. 1741–1987.
- [4] Мирсалимов, В. М. К решению задачи механики контактного разрушения о зарождении и развитии трещины со связями между берегами во втулке фрикционной пары / В. М. Мирсалимов // ПММ. – 2007. – Т. 71. – Вып. 1. – С. 132–151.

- [5] *Mirsalimov, M. V.* Interaction between Periodic System of Rigid Inclusions and Rectilinear Cohesive Cracks in an Isotropic Medium under Transverse Shear / M. V. Mirsalimov, F. F. Hasanov // Acta Polytechnica Hungarica. – 2014. – Vol. 11. – No. 5. – P. 161–176.
- [6] *Калантарлы, Н. М.* Разрушение неравномерно нагретого кольцевого диска / Н. М. Калантарлы // Проблемы машиностроения. – 2014. – Т. 17. – № 3. – С. 19–25.
- [7] *Калантарлы, Н. М.* Предельно-равновесное состояние неравномерно нагретого кольцевого диска, ослабленного произвольной системой когезионных трещин / Н. М. Калантарлы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 3 (19). – С. 37–47.
- [8] *Мухелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
- [9] *Панасюк, В. В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацыпин. – Киев : Наук. думка. – 1976. – 443 с.
- [10] *Мирсалимов, В. М.* Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. М. : Наука, 1987. – 256 с.
- [11] *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.

Калантарлы Наиля Мерадж кызы,

кандидат физико-математических наук, доцент, докторант, Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку

e-mail: nailyak1975@gmail.com

N. M. Kalantarly

GROWTH OF CRACK WITH INTERFACIAL BONDS IN END ZONES IN A UNIFORMLY ROTATING ANNULAR DISK

Institute of Mathematics and Mechanics NAN of Azerbaijan

Abstract. Fracture model, based on the study of fracture process zone near the crack tip is proposed for rotating disk. It is assumed that the prefracture zone is a layer of finite length, in which between the separate structural elements of material the bonds are partially broken (end zone). The presence of the interfacial bonds in the end zone is modeled by application to the crack surface the cohesive forces caused by the presence of bonds. The dependence of limit rotational velocity of the annular disk on the crack length is obtained.

Keywords: uniformly rotating annular disk, cracks with interfacial bonds, cohesive forces, prefracture zone.

REFERENCES

- [1] *Savruk, M. P.* Fracture mechanics and strength of materials. Vol. 2: Stress intensity factors in cracked bodies. – Kiev : Naukova dumka, – 1988. – 620 p. (in Russian)
- [2] *Savruk, M. P.* Numerical analysis in plane problems of cracks theory / M. P. Savruk, P. N. Osiv, I. V. Prokopchuk. – Kiev : Naukova dumka. – 1989. – 248 p. (in Russian)
- [3] *The special issue: Cohesive models // Eng. Fract. Mech.* – 2003. – Vol. 70. – No. 14. – P. 1741–1987. (in Russian)
- [4] *Mirsalimov, V. M.* The solution of a problem in contact fracture mechanics on the nucleation and development of a bridged crack in the hub of a friction pair / V. M. Mirsalimov // *J. of Applied Math. and Mech.* 2007. Vol. 71. P. 120–136. (in Russian)
- [5] *Mirsalimov, M. V.* Interaction between Periodic System of Rigid Inclusions and Rectilinear Cohesive Cracks in an Isotropic Medium under Transverse Shear / M. V. Mirsalimov, F. F. Hasanov // *Acta Polytechnica Hungarica.* – 2014. – Vol. 11. – No. 5. – P. 161–176.
- [6] *Kalantarly, N. M.* Fracture of non-uniformly heated annular disk / N.M. Kalantarly // *Problems of mechanical engineering.* – 2014. – Vol. 17. – № 3. – P. 19–25. (in Russian)
- [7] *Kalantarly, N. M.* Limit-equilibrium state of non-uniformly heated annular disk, weakened by an arbitrary system of cohesive cracks / N.M. Kalantarly // *Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state.* – 2014. – № 3 (19). – P. 37–47. (in Russian)
- [8] *Muskhelishvili, N. I.* Some basic problem in the mathematical theory of elasticity / N. I. Muskhelishvili. – M. : Nauka, 1977. – 707 p. (in Russian)
- [9] *Panasyuk, V. V.* Stress distribution near cracks in plates and shells / V. V. Panasyuk, M. P. Savruk and A. P. Datsyshyn – Kiev : Naukova dumka. – 1976. – 443 p. (in Russian)
- [10] *Mirsalimov, V. M.* Non-one-dimensional elastoplastic problems / V. M. Mirsalimov. – M. : Nauka, 1987. – 256 p. (in Russian)
- [11] *Il'yushin, A. A.* Plasticity / A. A. Il'yushin. – M. ; L. : Gostekhizd, 1948. – 376 p. (in Russian)

Kalantarly, Nailya Merach kizi

PhD, Assoc. Professor, Doctorant, Institute of Mathematics and Mechanics of NAN of Azerbaijan, Baku