Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1 (23). С. 172–180

Ф. Э. Велиев

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ВОЗДЕЙСТВИИ ЛОКАЛЬНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ ТОЛЩИНЫ ПЛАСТИНЫ НА ТРЕЩИНУ

Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку

Аннотация. Рассматривается контактная задача о частичном контактировании берегов прямолинейной трещины, вызванного локальным изменением толщины материала пластины на пути роста трещины. При некоторых формах выточек и соотношениях их геометрических параметров уменьшается деформация растягиваемой пластины в направлении, перпендикулярном трещине. В связи с этим снижается коэффициент интенсивности напряжений в кончиках трещины. При некоторых соотношениях геометрических параметров пластины с локальными изменениями толщины на пути роста трещины будут возникать зоны сжимающих напряжений, в которых берега трещины на некотором участке войдут в контакт. Считается, что на некоторой части контакта возникает сцепление берегов, а на остальной возможно проскальзывание. Определение неизвестных контактных напряжений и размеров зон контакта сводится к решению системы двух сингулярных интегральных уравнений. Каждое сингулярное интегральное уравнение с дополнительными условиями сведено к задаче Римана, решение которой получено в квадратурах. Найдены нормальные и касательные напряжения па участках контакта, а также размеры зон контакта берегов трещины.

Ключевые слова: прямолинейная трещина, локальное изменение толщины пластины, контактная зона сцепления, зона проскальзывания, контактные напряжения.

УДК: 539.375

Постановка задачи. При некоторых формах выточек и соотношениях их геометрических параметров уменьшается деформация растягиваемой пластины в направлении, перпендикулярном трещине, и в связи с этим снижается коэффициент интенсивности напряжений в кончиках трещины. Следует ожидать, что при некотором соотношении геометрических параметров пластины с локальными изменениями толщины на пути роста трещины, будут возникать зоны сжимающих напряжений, в которых берега трещины на некотором участке войдут в контакт. Это приведет к появлению контактных напряжений на данном участке берегов трещины.

Рассматривается тонкая упругая пластинка постоянной толщины $2h_0$ всюду, за исключением некоторой области S вблизи конца сквозной прямолинейной трещины. Характерный линейный размер области S считается малым по сравнению с длиной трещины. Трещина расположена у области S. В области S толщина пластины представляет собой некоторую функцию координат. Как известно, такие локальные изменения в толщине пластины нетрудно выполнить технологически, как некоторые выточки (выдавки) или, наоборот, наплавления (утолщения) материала. Цель таких выточек или наплавлений в задержке или торможении развития сквозной трещины.

Поступила 16.02.2015

Пусть пластина изготовлена из однородного изотропного упругого материала и содержит прямолинейную трещину. Для торможения развития трещины вблизи ее концов создают локальные изменения в толщине пластины, как некоторые выточки (выдавки).

В случае, когда характерный линейный размер области S считается малым по сравнению с длиной трещины или с каким-либо другим характерным линейным размером L пластинки в плане, возможно эффективное асимптотическое решение этой задачи, основанное на представлении о тонкой структуре конца трещины [1]. Задачу о тонкой структуре конца трещины (т. е. о распределении напряжений и деформаций на расстояниях r от конца трещины, удовлетворяющих условию L»r»ρ, где ρ — радиус кривизны конца трещины) можно ставить следующим образом.

Рассмотрим окрестность конца прямолинейной трещины, которая мала по сравнению с характерным линейным размером в плане пластины, но больше сравнительно с характерным линейным размером области S. Тогда трещина на плоскости xy представится полубесконечным разрезом вдоль $y=0$, $-\infty<\mathrm{x}<0$.

На бесконечности реализуется напряженное поле, характерное для тонкой структуры конца трещины. Это поле считается заданным и имеет [1] вид

$$\text{при}\, z \to \infty \quad \Phi(z) = \frac{K_I - iK_{II}}{2\sqrt{2\pi z}},\, \Omega(z) = \frac{K_I - iK_{II}}{2\sqrt{2\pi z}}, \tag{1}$$

где $z = x + iy = re^{i\theta}$; r, θ — полярные координаты; $i = \sqrt{-1}$; $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ комплексные потенциалы Н. И. Мусхелишвили [2].

В рассматриваемой задаче параметрами нагружения являются коэффициенты интенсивности K_I, K_{II}, представляющие собой некоторые функции формы пластины и граничных условий.

Под действием внешней нагрузки и влияния локального изменения толщины вблизи конца трещины, в зоне сжимающих напряжений берега трещины на некотором участке $y=0$, $\lambda \le \mathrm{x} \le 0$, войдут в контакт, что будет способствовать к появлению контактных напряжений на данном участке. Вне контактного участка берега трещины свободны от усилий. Параметр λ, характеризующий границу области контакта между берегами трещины, должен быть определен в процессе решения задачи.

Считается, что площадка контакта состоит из участка сцепления берегов $(d,\, 0)$ и участка $(\lambda,\, d)$, на котором возможно проскальзывание. Модель контакта с трением и сцеплением впервые была рассмотрена Л. А. Галиным [3].

Размеры контактных зон пока неизвестны и подлежат определению. Область S может иметь любые (но конечные) размеры и конфигурацию.

При действии внешней силовой нагрузки и воздействия локального изменения толщины пластины вблизи конца трещины на пластину на некотором участке берега трещины взаимодействуют между собой, что приводит к появлению нормальных $\mathrm{p_y(x)}$ и касательных $\mathrm{p_{xy}(x)}$ контактных напряжений. Значения этих напряжений заранее неизвестны и подлежат определению.

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид

$$\begin{gathered} \sigma_\mathrm{y} - i\sigma_\mathrm{xy} = 0 \text{ при } \mathrm{y} = 0,\ -\infty < \mathrm{x} < \lambda, \\ \sigma_\mathrm{y} = \mathrm{p_y(x)},\ \tau_\mathrm{xy} = f\mathrm{p_y(x)} \text{ при } \mathrm{y} = 0,\ \lambda < \mathrm{x} < d, \\ \sigma_\mathrm{y} = \mathrm{p_y(x)},\ \tau_\mathrm{xy} = \mathrm{p_{xy}(x)} \text{ при } \mathrm{y} = 0,\ d < \mathrm{x} < 0, \end{gathered} \tag{2}$$

где принято, что на участке проскальзывания имеет место силы сухого трения (закон трения принимается в форме Кулона); $f(\mathrm{x})$ — коэффициент трения; σ_x, σ_y, τ_xy — компоненты тензора напряжений в декартовых координатах.

Постановку задачи следует дополнить соотношением для перемещений на участках контакта

$$v^{+} - v^{-} = 0 \text{ при } \mathrm{y} = 0, \ \lambda < \mathrm{x} < 0, \tag{3}$$

$$u^{+} - u^{-} = 0 \text{ при } \mathrm{y} = 0, \ d < \mathrm{x} < 0,$$

где $(v^{+} - v^{-})$ — нормальная; $(u^{+} - u^{-})$ — касательная составляющие раскрытия берегов трещины.

Рассматриваемая задача состоит в определении контактных напряжений на участке y$= 0$, $\lambda \leq \mathrm{x} \leq 0$, напряженно-деформированного состояния пластины вне трещины.

Решение краевой задачи

Напряженно-деформированное состояние в рассматриваемой пластине можно представить в виде

$$\sigma_x = \sigma_x^{(0)} + \sigma_x^{(1)}, \quad \sigma_y = \sigma_y^{(0)} + \sigma_y^{(1)}, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^{(0)} + \tau_{xy}^{(1)},$$

$$u = u_0 + u_1; \quad v = v_0 + v_1.$$

Здесь $\sigma_x^{(0)}$, $\sigma_y^{(0)}$, $\tau_{xy}^{(0)}$, u_0, v_0 — компоненты тензора напряжений и вектора перемещений для пластины с трещиной при отсутствии локальных изменений в кончике трещины; $\sigma_x^{(1)}$, $\sigma_y^{(1)}$, $\tau_{xy}^{(1)}$ возмущенное напряженное состояние из-за наличия локального изменения толщины в окрестности кончика трещины, а u_1, v_1 — составляющие вектора перемещений, вызванные наличием локального изменения толщины.

Невозмущенное напряженное состояние $\sigma_x^{(0)}$, $\sigma_y^{(0)}$, $\tau_{xy}^{(0)}$ известно.

Перейдем к определению возмущенного напряженного состояния. Предположим, что пластинка находится в обобщенном плосконапряженном состоянии, и, учитывая переменность толщины в области S, запишем общие уравнения статического деформирования пластины переменной толщины в виде

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

$$\begin{gathered} N_x = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y}\right), \\ N_y = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial x}\right), \\ N_{xy} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right). \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь N_x, N_y, N_{xy} — нормальные и сдвигающие усилия, приходящиеся на единицу длины соответственно; u, v — компоненты вектора перемещений; E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона материала пластинки.

Функция толщины h(x,y) может быть представлена в виде [4]

$$h(x,y) = h_0\left[1 + \varepsilon\bar{h}(x,y)\right], \tag{6}$$

где $\bar{h}(x,y)$ — некоторая известная безразмерная непрерывная функция; $\varepsilon = (h_2 - h_1)/(h_2 + h_1)$ — малый параметр; h_1 и h_2 — соответственно, наименьшее и наибольшее значение толщины пластинки в области S.

Решение задачи ищем методом малого параметра

$$N_x = N_x^{(0)} + \varepsilon N_x^{(0)} + \ldots; \quad N_y = N_y^{(0)} + \varepsilon N_y^{(0)} + \ldots \tag{7}$$

$$N_{xy} = N_{xy}^{(0)} + \varepsilon N_{xy}^{(0)} + ...u = u_0 + \varepsilon u_1 + ...; v = v_0 + \varepsilon v_1 + ...$$

Формулы (6) и (7) подставляем в уравнения (4) и (5) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях малых параметров. В полученных уравнениях уравнения нулевого приближения (невозмущенного состояния) совпадают с уравнениями классической плоской задачи теории упругости, а уравнения первого и второго приближений совпадают с теми же уравнениями с объемной силой, определяемой из решения предыдущих приближений.

Краевые условия задачи в первом приближении примут вид

$$N_y^* = 0; \quad N_{xy}^* = 0 \text{ при y} = 0, -\infty < \text{x} < \lambda, \tag{8}$$

$$N_y^* = N_y^+; \quad N_{xy}^* = fN_y^+ \text{ при y} = 0, \lambda < \text{x} < d,$$

$$N_y^* = N_y^+; \quad N_{xy}^* = N_y^+ \text{ при y} = 0,\ d < \text{x} < 0.$$

При выводе уравнений и граничных условий первого приближения были введены следующие обозначения

$$N_y^* = N_y^{(1)} - \bar{h}(x,y)N_y^{(0)}; \quad N_{xy}^* = N_{xy}^{(1)} - \bar{h}(x,y)N_{xy}^{(0)}.$$

Здесь N_y^+ и N_{xy}^+ — искомые контактные усилия, подлежащие определению.

$$N_y^+ = 2h_0 p_y; \quad N_{xy}^+ = 2h_0 p_{xy}.$$

Основные соотношения поставленной задачи должны быть дополнены уравнением, связывающим раскрытия берегов трещины

$$\left(v_1^+ - v_1^-\right) = 0 \text{ при y} = 0, \lambda \le \text{x} \le 0, \tag{9}$$

$$\left(u_1^+ - u_1^-\right) = 0 \text{ при y} = 0,\ d < \text{x} < 0.$$

При наличии объемных сил решение ищем в виде суммы

$$N_x^* = N_{x_0}^{(1)} + N_{x_1}^{(1)}; \quad N_y^* = N_{y_0}^{(1)} + N_{y_1}^{(1)}; \quad N_{xy}^* = N_{xy_0}^{(1)} + N_{xy_1}^{(1)},$$

где $N_{x_0}^{(1)}$, $N_{y_0}^{(1)}$, $N_{xy_0}^{(1)}$ — любое частное решение при наличии объемной силы; $N_{x_1}^{(1)}$, $N_{y_1}^{(1)}$, $N_{xy_1}^{(1)}$ — общее решение при отсутствии объемной силы.

Для построения решения при объемных силах используем представление А. Г. Угодчикова [5]

$$\frac{N_x^* + N_y^*}{2h_0} = 4Re\left[\Phi_1^{(1)}(z) - \frac{1}{2(1+\kappa)}\frac{\partial F_1}{\partial z}\right];$$

$$\frac{N_y^* - N_x^* + 2iN_{xy}^*}{2h_0} = 2\left[z\Phi_1'(z) + \Psi_1(z) - \frac{1}{2(1+\kappa)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa\overline{F_1} - \overline{Q_1}\right)\right].$$

В эти соотношения входят две аналитические функции $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ комплексной переменной $z = \text{x} + i\text{y}$ и две функции $F_1(z,\bar{z})$ и $Q_1(z,\bar{z})$, представляющие собой любые частные решения уравнений

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial \bar{z}} = F, \quad \frac{\partial^2 Q_1}{\partial z^2} = \bar{F}, \tag{10}$$

$$F = X_1 + Y_1 = \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}\left(N_x^{(0)} + iN_{xy}^{(0)}\right) + i\frac{\partial \bar{h}}{\partial y}\left(N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)}\right).$$

Используя общие представления для напряжений, для определения функций $\Phi_1(z)$ и $\Omega_1(z)$ имеем задачу линейного сопряжения [2]

$$[\Phi_1(x)+\Omega_1(x)]^+ + [\Phi_1(x)+\Omega_1(x)]^- = 2p_1(x), \tag{11}$$

$$[\Phi_1(x)-\Omega_1(x)]^+ - [\Phi_1(x)-\Omega_1(x)]^- = 0.$$

где $p_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при y} = 0, \quad -\infty < x < \lambda \\ f(x) + N_y^+(1-if) & \text{при } y=0, \lambda < x < d \\ f(x) + N_y^+ - iN_{xy}^+ & \text{при } y=0, d \le x \le 0 \end{cases}$

$$f(x) = \frac{1}{1+\kappa} Re\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{1}{2(1+\kappa)}\left(\kappa\frac{\partial \overline{F_1}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{Q_1}}{\partial z}\right) \text{ при y } = 0. \tag{12}$$

Функции $F_1(z,\bar z)$ и $Q_1(z,\bar z)$ можно формально записать в виде

$$F_1(z,\bar z) = \int z dz \int \bar z F(z,\bar z)\, d\bar z; \quad Q_1(z,\bar z) = \int z dz \int z\overline{F(z,\bar z)} dz.$$

Для функций $\Phi_1(z)$ и $\Omega_1(z)$ находим

$$\Phi_1(z) = \Omega_1(z) = \frac{1}{2\pi i\sqrt{z}} \int_{-\infty}^{0} \frac{\sqrt{t}p_1(t)dt}{t-z}. \tag{13}$$

Здесь функция $\sqrt{z}$ аналитична вне полубесконечного разреза при y =0, x<0 и положительна на продолжение разреза.

Для перемещений с помощью найденных потенциалов в первом приближении найдем

$$\left(u_1^+ - u_1^-\right) - i\left(v_1^+ - v_1^-\right) = \frac{1+\kappa}{2\mu}\left[-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{0} p_1(t)\ln\frac{\sqrt{t}+\sqrt{x}}{\sqrt{t}-\sqrt{x}}dt\right]. \tag{14}$$

Удовлетворяя условиям (9), получим интегральные уравнения относительно неизвестных функций $N_y^+(x)$ и $N_{xy}^+(x)$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f_1(t)\ln\frac{\sqrt{t}+\sqrt{x}}{\sqrt{t}-\sqrt{x}}dt + \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{0} N_y^+(t)\ln\frac{\sqrt{t}+\sqrt{x}}{\sqrt{t}-\sqrt{x}}dt = 0 \ (\lambda \le \text{x} \le 0), \tag{15}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f_2(t)\ln\frac{\sqrt{t}+\sqrt{x}}{\sqrt{t}-\sqrt{x}}dt + \frac{1}{\pi}\int_{d}^{0} N_{xy}^+(t)\ln\frac{\sqrt{t}+\sqrt{x}}{\sqrt{t}-\sqrt{x}}dt + \tag{16}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{d} fN_y^+(t)\ln\frac{\sqrt{t}+\sqrt{x}}{\sqrt{t}-\sqrt{x}}dt = 0 \ \ (d \le x \le 0),$$

где $f_1(x) = \mathrm{Re} f(x)$; $f_2(x) = \mathrm{Im} f(x)$.

Условиями для определения размеров контактной зоны являются условия конечности напряжений в окрестности вершины трещины. Добавляя условие конечности напряжений, находим для каждого сингулярного интегрального уравнения недостающее уравнение соответственно

$$K_I^{(0)} + \varepsilon K_I^{(1)} = 0, \quad K_{II}^{(0)} + \varepsilon K_{II}^{(1)} = 0, \tag{17}$$

$$K_I^{(0)} = K_I, \quad K_{II}^{(0)} = K_{II},$$

$$K_xI^{(1)} = \bar{h}(0,0)K_I^{(0)} + K_I^*, \quad K_{II}^{(1)} = \bar{h}(0,0)K_{II}^{(0)} + K_{II}^*,$$

$$K_I^* = -\frac{\sqrt{2}}{\pi i}\left[\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{f_1(x)dx}{\sqrt{x}} + \int\limits_{\lambda}^{0} \frac{N_y^+(x)dx}{\sqrt{x}}\right],$$

$$K_{II}^* = -\frac{\sqrt{2}}{\pi i}\left[\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{f_2(x)dx}{\sqrt{x}} + \int\limits_{\lambda}^{0} \frac{N_{xy}+(x)dx}{\sqrt{x}}\right].$$

Решение сингулярных интегральных уравнений (15) и (16) получим путем решения соответствующей задачи Римана [6]. Сингулярное интегральное уравнение (15) представим в следующем виде

$$\int\limits_{\lambda}^{0} \frac{\sqrt{t}N_y^+(t)dt}{t-x} = \pi F_1(x) \ \ (\lambda \le \mathrm{x} \le 0), \tag{18}$$

где $F_1(x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\sqrt{t}f_1(t)dt}{t-x}$.

Решив сингулярное интегральное уравнение (18) (см. [7] приложение) с учетом условий ограниченности контактных напряжений при x=λ и x =0 (условие разрешимости сингулярного интегрального уравнения в классе всюду ограниченных функций), получим формулу для нахождения нормальных контактных напряжений

$$N_y^+(x) = \frac{X^+(x)}{\pi i}\int\limits_{\lambda}^{0} \frac{F_1^*(t)dt}{X^+(t)(t-x)}. \tag{19}$$

Здесь $F_1^*(t) = \dfrac{F(t)}{\pi i}$, $X(t) = \sqrt{t(t-\lambda)}$.

Аналогично решая сингулярное интегральное уравнение (17), получим расчетную формулу для определения касательных напряжений на участке сцепления берегов трещины (d,0)

$$N_{xy}^+(x) = \frac{X_1^+(x)}{\pi i}\int\limits_{d}^{0} \frac{F_2^*(t)dt}{X_1^+(t)(t-x)}. \tag{20}$$

Здесь

$$F_2^*(t) = \frac{F_2(t)}{\pi i};\ F_2(t) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{f_2(t)\sqrt{t}dt}{t-x} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\lambda}^{d} \frac{fN_y^+(t)\sqrt{t}dt}{t-x};$$

$$X_1(t) = \sqrt{t(t-d)}.$$

Касательные контактные напряжения на участке проскальзывания (λ,d) находятся по закону Кулона. Анализ частичного контактирования берегов трещины в пластине сводится к параметрическому исследованию полученных формул и уравнений (17) при различных законах распределения напряжений в пластине, геометрических параметров изменения толщины пластины, а также механических постоянных материала.

Для компонент нормальных и сдвигающих усилий, приходящихся на единицу длины, имеем

$$N_x = \left[1 + \varepsilon\bar{h}(x,y)\right] N_x^{(0)} + \varepsilon N_x^*,$$

$$N_y = \left[1 + \varepsilon\bar{h}(x,y)\right] N_y^{(0)} + \varepsilon N_y^*,$$

$$N_{xy} = \left[1 + \varepsilon \bar{h}(x, y)\right] N_{xy}^{(0)} + \varepsilon N_{xy}^{*}.$$

Конкретные примеры. Для определения распределения контактных напряжений и размера контактной зоны необходимо задать закон изменения толщины в пластине в окрестности конца трещины (область S). Рассмотрим наиболее распространенные на практике формы выточек и утолщений.

Конусовидная выточка

Пусть выточка имеет форму усеченного кругового конуса с осью, проходящей вблизи конца сквозной трещины, перпендикулярно плоскости Oxy. Нижнее и верхнее основания – круговые с радиусами R_1 и R_0 соответственно. Толщина пластины у основания выточки равна $2h_1$. Уравнение верхней поверхности пластины имеет вид

$$h = \begin{cases} h_1 & \text{при } x^2 + (y-b)^2 \le R_1^2 \quad \text{область } S \\ h_1 + \varepsilon\left(\sqrt{x^2 + (y-b)^2} - R_0\right) & \text{при } R_1^2 \le x^2 + (y-b)^2 \le R_0^2 \\ h_0 & \text{при } x^2 + (y-b)^2 \ge R_0^2. \end{cases}$$

Здесь малый параметр определяется по формуле

$$\varepsilon = (h_0 - h_1)/(R_0 - R_1).$$

Очевидно, что, если $h_1 > h_0$, получим конусовидное утолщение. Для конусовидной выточки пластины получаем

$$\bar{h} = \begin{cases} -\dfrac{R_0 - h_1}{h_0} & \text{при } x^2 + (y-b)^2 \le R_1^2 \quad \text{область } S \\ \dfrac{1}{h_0}\left(\sqrt{x^2 + (y-b)^2} - R_0\right) & \text{при } R_1^2 \le x^2 + (y-b)^2 \le R_0^2 \\ 0 & \text{при } x^2 + (y-b)^2 \ge R_0^2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = 0 \text{ при } \quad x^2 + (y-b)^2 \le R_1^2, \quad x^2 + (y-b)^2 \ge R_0^2$$

$$\text{при } R_1^2 \le x^2 + (y-b)^2 \le R_0^2 \text{ (область } S),$$

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = \frac{x}{h_0\sqrt{x^2 + (y-b)^2}}; \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = \frac{y}{h_0\sqrt{x^2 + (y-b)^2}}.$$

Подставляя эти формулы и (10), находим

$$X_1 + iY_1 = F = 0 \text{ при } \quad x^2 + (y-b)^2 \le R_1^2, \quad x^2 + (y-b)^2 \ge R_0^2,$$

$$X_1 + iY_1 = \frac{x}{h_0\sqrt{x^2 + (y-b)^2}}\left(N_x^{(0)} + iN_{xy}^{(0)}\right) + \frac{iy}{h_0\sqrt{x^2 + (y-b)^2}}\left(N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)}\right)$$

$$\text{при } R_1^2 \le x^2 + (y-b)^2 \le R_0^2 \text{ (область } S).$$

Здесь выражения $\left(N_x^{(0)} + iN_{xy}^{(0)}\right)$ и $\left(N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)}\right)$ определяются по соотношениям

$$\frac{N_x^{(0)} + N_y^{(0)}}{2h_0} = 2\left[\Phi^{(0)}(z) + \overline{\Phi^{(0)}(z)}\right],$$

$$\frac{N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)}}{2h_0} = \Phi^{(0)}(z) + \Omega^{(0)}(z) + (z - \bar{z})\,\overline{\Phi^{(0)\prime}(z)},$$

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy.$$

С помощью соотношений (10), (12) находим функцию $f(x)$. После нахождения функции $f(x)$ по соотношениям (19) и (20), (17) с помощью численного интегрирования находились контактные напряжения и значения параметров λ, d, характеризующих зону контакта берегов трещины в зависимости от геометрических параметров пластины при ν=0,32.

Ниже приводятся значения параметра $\lambda_0 = \lambda/R_0$ в зависимости от относительной толщины выточки (от отношения глубины выточки к толщине пластины) h_1/h_0.

h_1/h_0	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,15	0,1
λ/R_0	0	1,062	1,233	1,762	1,921	2,481	2,617

Параболоидная выточка

Пусть выточка в кончике трещины имеет форму усеченного параболоида вращения с осью, проходящей вблизи конца сквозной трещины, перпендикулярно плоскости Оху. Верхняя поверхность пластины описывается уравнением

$$h = \begin{cases} h_1 + \varepsilon \dfrac{x^2 + (y-b)^2}{R_0} & \text{при } x^2 + (y-b)^2 \le R_0^2 \\ h_0 & \text{при } x^2 + (y-b)^2 > R_0^2. \end{cases}$$

Здесь ε — малый параметр, в этом случае определяемый как $\varepsilon = (h_0 - h_1)/R_0$. Если $h_1 > h_0$, получим пластину с параболоидным утолщением.

Повторяя изложенную методику, находим функцию $f(x)$.

Система соотношений отличается от предыдущего случая только подинтегральным выражением. В результате расчетов определялись контактные напряжения и значения параметров λ, d, характеризующих зону контакта берегов трещины в зависимости от геометрических и физических параметров пластины с выточкой при $\nu = 0{,}32$.

Ниже приводятся результаты расчетов

h_1/h_0	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,15	0,1	0,05
λ/R_0	0	0	1,036	1,316	1,908	2,012	2,301	2,832

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Черепанов, Г. П.* Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1974. – 640 с.

[2] *Мусхелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.

[3] *Галин, Л. А.* Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления / Л. А. Галин // Прикл. математика и механика. – 1945. – Т. 9. – Вып. 5. – С. 413–424.

[4] *Mirsalimov, V. M.* Fracture of plates with variable thickness / V. M. Mirsalimov // Materials Science. – 1996. – Vol. 32. – No. 3. – P. 296–305.

[5] *Угодчиков, А. Г.* Решение краевых задач плоской теории упругости на цифровых и аналоговых машинах / А. Г. Угодчиков, М. И. Длугач, А. Е. Степанов. – М. : Высшая школа. 1970. – 528 с.

[6] *Гахов, Ф. Д.* Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М. : Наука, 1977, – 640 с.

[7] *Мирсалимов, В. М.* Неодномерные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.

Велиев Фарид Эльхан оглы,

кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку

e-mail: iske@mail.ru

F. E. Veliev

CONTACT PROBLEM OF EFFECT BY LOCAL CHANGE OF PLATE THICKNESS ON THE CRACK

Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku

Abstract. A contact problem of partial contacting of rectilinear crack surfaces caused by a local change of the plate material thickness on crack growth path is considered. At some forms of recesses and ratios of their geometric parameters the deformation of elongated plate is decreased in direction perpendicular to the fracture. In this connection stress intensity factor in the crack tip decreased. At some ratios of the geometric parameters of the plate with local thickness changes on the crack growth path a zone of compressive stresses will occur. In this zone of compressive stresses the crack surfaces in a certain section will contact. It is assumed that in some part of the contact zone the engagement of the crack surfaces occurs and in the rest part the slippage is allowed. Determination of unknown contact stresses and sizes of the contact zones is reduced to solving of system of two singular integral equations. Each singular integral equation with the additional conditions is reduced to the Riemann problem, which is solved by quadratures. Normal and tangential stresses in the contact zones are found, as well as the size of the crack contact zones.
Keywords: rectilinear crack, local change of plate thickness, contact engagement zone, slippage zone, contact stresses.

REFERENCES

[1] *Cherepanov, G. P.* Mechanics of brittle fracture / G. P. Cherepanov. – New York : Mc Graw-Hill, 1979. – 950 p. (in Russian)

[2] *Muskhelishvili, N. I.* Some basic problems of mathematical theory of elasticity / N. I. Muskhelishvili. – Amsterdam : Kluwer, 1977. – 707 p. (in Russian)

[3] *Galin, L. A.* Indentation of stamp in presence of friction and cohesion / L. A. Galin // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1945. – Vol. 9. – Issue 5. – P. 413–424. (in Russian)

[4] *Mirsalimov, V. M.* Fracture of plates with variable thickness / V. M. Mirsalimov // Materials Science. – 1996. – Vol. 32. – No. 3. – P. 296–305.

[5] *Ugodchikov, A. G.* Solution of boundary value problems of the plane elasticity theory on digital and analog machines / A. G. Ugodchikov, M. I. Dlugach, A. E. Stepanov. – M. : Vysshaja shkola, 1970. – 528 p. (in Russian)

[6] *Gakhov, F. D.* Boundary value problems / F. D. Gakhov. – M. : Nauka, 1977. – 640 p. (in Russian)

[7] *Mirsalimov, V. M.* Non-one-dimensional elastoplastic problems / V. M. Mirsalimov. – M. : Nauka, 1987. – 256 p. (in Russian)

Valiyev, Farid Elkhan oglu

PhD, Sciences, Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Azerbaijan, Baku