Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1 (23). С. 181–188

А. В. Никитин

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ТРУБЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

Аннотация. Рассматривается неоднородная толстостенная труба, находящаяся под действием внутреннего давления. Предполагается, что она сохраняет значение предела текучести постоянным вдоль параллельных прямых. Определено напряженное состояние для трубы. В работе [2] изучено предельное состояние трубы при анизотропии Мизеса – Хилла. Трансляционная анизотропия впервые введена в работах [3]–[7]. В работе [8] рассмотрено упругопластическое состояние двуслойной трансляционно-анизотропной трубы. Предельное состояние слоистой трубы при наличии трансляционной анизотропии исследовалось в [10], [13]. Упругопластическое состояние неоднородной трубы рассмотрено в работах[11], [12].

Ключевые слова: пластичность, неоднородность, труба, анизотропия, давление.

УДК: 539.375

Рассмотрим толстостенную трубу радиусов α, β; $\alpha < \beta$ (рис. 1). Условие пластичности примем в виде [5]:

$$A\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}-\frac{k_1-k_2}{2}\right)^2+B\left(\tau_{xy}-k_3\right)^2=k_{xy}^2,\quad k_1,k_2,k_3-const, \tag{1}$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ — компоненты напряжения в декартовой системе координат, $k_{xy}=k_{xy}(x,y)$.

При $A=B=1$ и $k_{xy}=const$ имеет место трансляционная анизотропия, при $k_1=k_2=k_3=0$, $k_{xy}=const$ — анизотропия Мизеса – Хилла.

Положим,

$$\delta=\frac{A-B}{2},\ k_1=k^0+\delta k_1',\ k_2=k^0+\delta k_2',\ k_3=\delta k_3',$$

$$k_{xy}=k_0+\delta(cx+dy),\quad k_0,\ c,\ d-const, \tag{2}$$

где δ — малый безразмерный параметр.

Тогда

$$A=t+\delta,\ B=t-\delta,\ t=\frac{A+B}{2}. \tag{3}$$

Поступила 10.01.2015

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 14-01-31323 мол_а) и в рамках выполнения государственного задания (код проекта 1179).

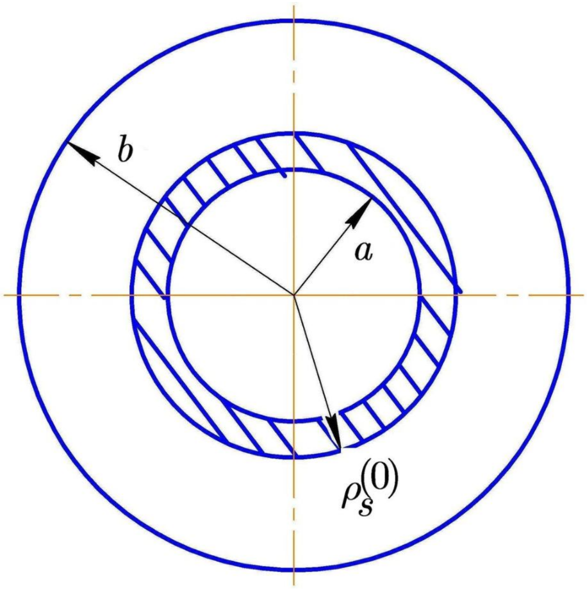

Рис. 1

В последующем все величины, которые имеют размерность напряжения, предполагаются безразмерными, отнесенными к величине предела текучести k_0.

Обозначим

$$\frac{k_{xy}}{k_0} = \chi, \ \frac{p}{k_0} = q. \tag{4}$$

Все величины, имеющие размерность длины, отнесем к некоторой характерной величине $\rho_s^{(0)}$ и обозначим:

$$\frac{a}{\rho_s^{(0)}} = \alpha, \ \frac{r}{\rho_s^{(0)}} = \rho. \tag{5}$$

Связь между напряжениями в декартовой системе координат x, y и напряжениями в полярной системе координат ρ, θ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \dfrac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2}\cos 2\theta + \tau_{\rho\theta}\sin 2\theta, \\ \sigma_y = \dfrac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \dfrac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2}\cos 2\theta - \tau_{\rho\theta}\sin 2\theta, \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2}\sin 2\theta + \tau_{\rho\theta}\cos 2\theta. \end{cases} \tag{6}$$

Перейдем к полярным координатам:

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta. \tag{7}$$

Из (1), (2),(6),(7) имеем условие пластичности в полярных координатах:

$$\begin{gathered} (\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 \left[A\cos^2 2\theta + B\sin^2 2\theta\right] + 4\tau_{\rho\theta}^2 \left[A\sin^2 2\theta + B\cos^2 2\theta\right] + \\ + A\,(k_1 - k_2)^2 + 4Bk_3^2 + 2\,(\sigma_\rho - \sigma_\theta)\,\tau_{\rho\theta}\,(A - B)\sin 4\theta - \\ -4\tau_{\rho\theta}\left[\sin 2\theta\,(k_1 - k_2) + 2k_3\cos 2\theta\right] - 2\,(\sigma_\rho - \sigma_\theta)\left(\cos 2\theta\,(k_1 - k_2) - 2k_3\cos 2\theta\right) = \\ = 4\left(1 + \delta\rho\,(c\cos\theta + d\sin\theta)\right)^2. \end{gathered} \tag{8}$$

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\theta} + \dfrac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \\ \dfrac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \dfrac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Решение будем искать решение в виде:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta\sigma_{ij}^{(1)}. \tag{10}$$

Предположим, что нулевое, исходное напряженное состояние трубы является осесимметричным, т. е.

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0. \tag{11}$$

Компоненты напряжений в нулевом приближении определены в [1].

В первом приближении (8) преобразуется к виду:

$$\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_\rho^{(1)} = 2\rho\left[c\cos\theta + d\sin\theta\right] + 1 + (k_2' - k_1')\cos 2\theta + 2k_3'\sin 2\theta, \tag{12}$$

а (9) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_\rho^{(1)}}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\tau_{\rho\theta}^{(1)}}{\partial\theta} + \dfrac{\sigma_\rho^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)}}{\rho} = 0, \\ \dfrac{\partial\tau_{\rho\theta}^{(1)}}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\sigma_\theta^{(1)}}{\partial\theta} + \dfrac{2\tau_{\rho\theta}^{(1)}}{\rho} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Удовлстворим (13), полагая

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(1)} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial\theta^2}, \\ \sigma_\theta^{(1)} &= \frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial\rho^2}, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)} &= -\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\theta}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Из (12), (16) найдем

$$\begin{gathered} \rho^2\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial\rho^2} - \rho\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\rho} - \frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial\theta^2} = 2\rho^3\left(c\cos\theta + d\sin\theta\right) + \\ +\rho^2 + \rho^2\cos 2\theta\left(k_2' - k_1'\right) + 2\rho^3 k_3'\sin 2\theta. \end{gathered} \tag{15}$$

Решение уравнения (17) представим как сумму решений общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$\Phi^{(1)} = \Phi_{odn}^{(1)} + \Phi_{chastn}^{(1)}. \tag{16}$$

Однородное уравнение (17) имеет вид:

$$\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial\rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial\theta^2} = 0. \tag{17}$$

Положим,

$$\Phi_{odn}^{(1)} = R_1\cos(m\theta) + R_2\sin(m\theta) = R\cos(m\theta + \theta_0), \tag{18}$$

где

$$R_i = R_i(\rho), \ \cos(\theta_0) = \frac{R_1}{R}, \ \sin(\theta_0) = \frac{R_2}{R}, \ R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}.$$

Согласно[1], имеем при $m = 0$:

$$R = C_{00} + C_{01}, \text{ где } \quad C_{00},\ C_{01} - const, \tag{19}$$

при $m = 1$:

$$R = \rho\left(C_{11} + C_{12}\ln\rho\right), \text{ где } \quad C_{11},\ C_{12} - const, \tag{20}$$

при $m \geq 2$:

$$R = \rho\left[C_{m1}\cos\left(\sqrt{m^2-1}\ln\rho\right) + C_{m2}\sin\left(\sqrt{m^2-1}\ln\rho\right)\right], \tag{21}$$

где $C_{m1},\ C_{m2}$ — $const$.

Согласно (17) при $m = 0,\ 1,\ 2$

$$R = \left(C_{00} + C_{01}\right) + \rho\left(C_{11} + C_{12}\ln\rho\right) + \rho\left[C_{m1}\cos\left(\sqrt{3}\ln\rho\right) + C_{m2}\sin\left(\sqrt{3}\ln\rho\right)\right]. \tag{22}$$

Частное решение неоднородного уравнения (17) имеет вид

$$\begin{gathered}\Phi^{(1)}_{chastn} = \frac{1}{2}\left(\rho^2\ln\rho - \frac{\rho^2}{2}\right) + \frac{\rho^3}{2}\left(c\cos\theta + d\sin\theta\right) + \\ +\rho^2\left(\frac{k_2' - k_1'}{4}\right)\cos 2\theta + \frac{k_3''}{2}\rho^2\sin 2\theta.\end{gathered} \tag{23}$$

Из (16), (18), (23), (24) имеем:

$$\begin{gathered}\sigma^{(1)}_{\rho} = C_{00} + \frac{C_{11}}{\rho}\cos\left(\theta+\theta_0\right) + \frac{\bar{C}_{11}}{\rho}\sin\left(\theta+\theta_0\right) + \\ \frac{1}{\rho}\sum_{m=2}\left\{C_{m1}\left[\left(1-m^2\right)\cos\left(\sqrt{m^2-1}\ln\rho\right) - \left(\sqrt{m^2-1}\right)\sin\left(\sqrt{m^2-1}\ln\rho\right)\right] + \right. \\ \left. +C_{m2}\left[\sqrt{m^2-1}\cos\left(\sqrt{m^2-1}\ln\rho\right) + \left(1-m^2\right)\sin\left(\sqrt{m^2-1}\ln\rho\right)\right]\right\}\cos\left(m\theta+\theta_0\right) + \\ +\rho\left(c\cos\theta + d\sin\theta\right) + \ln\rho + \left(\frac{k_1' - k_2'}{2}\right)\cos 2\theta - k_3'\sin 2\theta,\end{gathered} \tag{24}$$

$$\begin{gathered}\sigma^{(1)}_{\theta} = C_{00} + \frac{C_{11}}{\rho}\cos\left(\theta+\theta_0\right) + \frac{\bar{C}_{11}}{\rho}\sin\left(\theta+\theta_0\right) + \\ \frac{1}{\rho}\sum_{m=2}\left\{C_{m1}\left[\left(1-m^2\right)\cos\left(\sqrt{m^2-1}\ln\rho\right) - \left(\sqrt{m^2-1}\right)\sin\left(\sqrt{m^2-1}\ln\rho\right)\right] + \right. \\ \left. +C_{m2}\left[\sqrt{m^2-1}\cos\left(\sqrt{m^2-1}\ln\rho\right) + \left(1-m^2\right)\sin\left(\sqrt{m^2-1}\ln\rho\right)\right]\right\}\cos\left(m\theta+\theta_0\right) + \\ +3\rho\left(c\cos\theta + d\sin\theta\right) + \left(1+\ln\rho\right) + \left(\frac{k_2'-k_1'}{2}\right)\cos 2\theta + k_3'\sin 2\theta,\end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered}\tau^{(1)}_{\rho\theta} = \frac{C_{11}}{\rho}\sin\left(\theta+\theta_0\right) - \frac{\bar{C}_{11}}{\rho}\cos\left(\theta+\theta_0\right) + \frac{1}{\rho}\sum_{m=2}\left(m\sqrt{m^2-1}\right)\times \\ \times\left[-C_{m1}\sin\left(\sqrt{m^2-1}\ln\rho\right) + C_{m2}\cos\left(\sqrt{m^2-1}\ln\rho\right)\right]\sin\left(m\theta+\theta_0\right) + \\ +\rho\left(c\sin\theta - d\cos\theta\right) + \frac{\left(k_2' - k_1'\right)}{2}\sin 2\theta - k_3'\cos 2\theta,\end{gathered} \tag{26}$$

где $C_{00},\quad C_{m1},\quad C_{m2} - const\quad$ при $\quad m \geq 1$.

При $k_1' = k_2' = k_3' = 0$ имеем решение, полученное в работе[13], при $A = B = 1$ решение, полученное в [11].

Граничные условия на внутреннем контуре трубы, согласно [1]

$$\begin{gathered}\sigma^{(1)p}_{\rho}|_{\rho=\alpha} = 0, \\ \tau^{(1)p}_{\rho\theta}|_{\rho=\alpha} = 0.\end{gathered} \tag{27}$$

Из (25), (27), (28) имеем

$$\begin{gathered}C_{00}+\frac{1}{\alpha}C_{21}\left[-3\cos\left(\sqrt{3}\ln\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\ln\alpha\right)\right]+\\ +C_{22}\left[\sqrt{3}\cos\left(\sqrt{3}\ln\alpha\right)-3\sin\left(\sqrt{3}\ln\alpha\right)\right]\cos 2\theta+\frac{C_{11}}{\alpha}\cos\theta+\frac{\bar{C}_{11}}{\alpha}\sin\theta=\\ =-\alpha\left(c\cos\theta+d\sin\theta\right)-\ln\alpha-\left(\frac{k_1'-k_2'}{2}\right)\cos 2\theta+k_3'\sin 2\theta,\end{gathered}\tag{28}$$

$$\begin{gathered}\frac{C_{11}}{\alpha_1}\sin\theta-\frac{\bar{C}_{11}}{\alpha_1}\cos\theta+\frac{2\sqrt{3}}{\alpha}\left[-C_{21}\sin\left(\sqrt{3}\ln\alpha\right)+C_{22}\cos\left(\sqrt{3}\ln\alpha\right)\right]\sin 2\theta\\ =\alpha\left(d\cos\theta-c\sin\theta\right)-\frac{(k_2'-k_1')}{2}\sin 2\theta+k_3'\cos 2\theta.\end{gathered}\tag{29}$$

Из (29), (31) вытекает:

$$\begin{gathered}C_{21}=-\frac{\sqrt{3}}{36}\alpha\left(\sqrt{3}\cos\left(\sqrt{3}\ln\alpha\right)+3\sin\left(\sqrt{3}\ln\alpha\right)\right)(k_1-k_2),\\ C_{22}=-\frac{\sqrt{3}}{36}\alpha\left(\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\ln\alpha\right)-3\cos\left(\sqrt{3}\ln\alpha\right)\right)(k_1-k_2),\\ C_{11}=-c\alpha^2,\\ \bar{C}_{11}=-d\alpha^2,\\ C_{00}=-\ln\alpha.\end{gathered}\tag{30}$$

Подставив (30) в (25) (27) получим:

$$\begin{gathered}\sigma_\rho^{(1)}=\ln\left(\frac{\rho}{\alpha}\right)+\cos 2\theta\left(\frac{k_1'-k_2'}{2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{\rho}\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{\rho}{\alpha}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3\rho}\alpha\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{\rho}{\alpha}\right)\right)+\\ -k_3'\sin 2\theta+\left(\rho-\frac{\alpha^2}{\rho}\right)\left(c\cos\theta+d\sin\theta\right),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\sigma_\theta^{(1)}=\ln\left(\frac{\rho}{\alpha}+1\right)+\cos 2\theta\left(\frac{k_2'-k_1'}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{\rho}\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{\rho}{\alpha}\right)+\frac{\sqrt{3}}{3\rho}\alpha\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{\rho}{\alpha}\right)\right)+\\ +k_3'\sin 2\theta+\left(3\rho-\frac{\alpha^2}{\rho}\right)\left(c\cos\theta+d\sin\theta\right),\end{gathered}$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(1)}=\frac{\rho^2-\alpha^2}{\rho}\left(c\sin\theta-d\cos\theta\right)+\frac{(\rho-\alpha)}{\rho}\sin 2\theta\left(\frac{k_2'-k_1'}{2}\right)-k_3'\cos 2\theta.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.

[2] *Ивлев, Д. А.* О предельном состоянии слоистых круговых цилиндров из анизотропного материала под действием внутреннего давления / Д. А. Ивлев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (66). – С. 57–63.

[3] *Ивлев, Д. Д.* О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении / Д.Д. Ивлев, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 1 (11). – С. 60–62.

[4] *Ивлев, Д. Д.* О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии в случае плоской деформации / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 1 (11). – С. 63–65.

[5] *Ивлев, Д. Д.* О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, С. В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 1 (11). – С. 66–69.

[6] *Ивлев, Д. Д.* Вопросы теории идеальнопластической трансляционной анизотропии / Д. Д. Ивлев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2011. – № 1 (9). – С. 101–106.

[7] *Ивлев, Д. Д.* К теории идеальной трансляционной пластической анизотропии / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2011. – № 1 (9). – С. 107–110.

[8] *Кержаев, А. П.* Упругопластическое состояние двухслойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, при трансляционной анизотропии / А. П. Кержаев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2013. – № 2 (16). – С. 71–81.

[9] *Максимова, Л. А.* Об упругопластическом состоянии неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления / Л. А. Максимова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2007. – № 2. – С. 91–95.

[10] *Никитин, А.В.* Предельное состояние слоистой трансляционно-анизотропной трубы / А. В. Никитин, С. В. Тихонов // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела– 2014. - № 2 (16). – С. 101–104.

[11] *Никитин, А. В.* Упругопластическое состояние трансляционно анизотропной линейно – неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления / А. В. Никитин, С. В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2013. - № 4 (80). – С. 148–155.

[12] *Никитин, А.В.* Влияние нелинейной неоднородности материала на упругопластическое состояние толстостенной трубы под воздействием внутреннего давления при трансляционной анизотропии / А. В. Никитин, С. В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2013. – № 4 (80). – С. 137–147.

[13] *Никитин, А. В.* Предельное состояние многослойной анизотропной толстостенной трубы / А. В. Никитин, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 4 (22). – С. 58–67.

[14] *Тихонов, С. В.* О двуосном растяжении плоскости из упругопластического неоднородного материала / С. В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – № 2. – С. 161–168.

Никитин Андрей Витальевич,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: ligalas5@mail.ru

A. V. Nikitin

LIMIT STATE OF AN INHOMOGENEOUS PIPE UNDER INTERNAL PRESSURE

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Abstract. The nonhomogeneous thick-walled tube under internal pressure. It is assumed that it retains the yield strength value is constant along parallel lines. Defined stress condition for the pipe. In [2] studied the limiting condition of the pipe when the anisotropy of the Mises – Hill. Translational anisotropy introduced in [3]–[7]. In [8] considered the elastic-plastic state of the two-the translation and anisotropic pipe. Limit state of laminated tubes in the presence of the translational anisotropy was studied in [10], [13]. The elastoplastic state of the inhomogeneous pipe is considered in [11], [12] .

Keywords: plasticity, heterogeneity, pipe, anisotropy, pressure.

REFERENCES

[1] *Ivlev, D. D.* perturbation Method in the theory of elastic-plastic body / D. D. Ivlev, L. V. Ershov. – M. : Nauka, 1978. – 208 p. (in Russian)

[2] *Ivlev, D. A.* About the ultimate state of laminated circular cylinders made of anisotropic material under the action of the internal pressure / D. A. Ivlev // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2010. – № 2 (66). – P. 57–63. (in Russian)

[3] *Ivlev, D. D.* On the dissipative function in the theory of translational idealisations anisotropy in torsion / D. D. Ivlev, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2012. – № 1 (11). – P. 60–62. (in Russian)

[4] *Ivlev, D. D.* On the dissipative function in the theory of translational idealisations anisotropy in the case of plane deformation / D. D. Ivlev, L. A. Maksimov, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2012. – № 1 (11). – P. 63–65. (in Russian)

[5] *Ivlev, D. D.* About the dissipative function in the theory of translational idealisations anisotropy in the generalization of the conditions Mises plasticity / D. D. Ivlev, L. A. Maksimov, S. V. Tikhonov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2012. № 1 (11). P. 66 69. (in Russian)

[6] *Ivlev, D. D.* theory idealisations translational anisotropy / D. D. Ivlev // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2011. – № 1 (9). – P. 101–106. (in Russian)

[7]*Ivlev, D. D.* the theory of ideal translational plastic anisotropy / D. D. Ivlev, L. A. Maksimov, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2011. - № 1 (9). – P. 107–110. (in Russian)

[8] *Kerzaev, A. P.* elastic-plastic mode of double tol-sitostanol pipe under internal pressure, when the translational anisotropy / A. P. Kerzaev // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. 2013. № 2 (18). P. 71 81. (in Russian)

[9] *Maksimova, L. A.* On the elastoplastic state of the inhomogeneous pipe under internal pressure / L. A. Maksimova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2007. – No. 2. – P. 91–95. (in Russian)

[10] *Nikitin, A. V.* Limiting condition layered translational anisotropic pipe / A. V. Nikitin, S. V. Tikhonov // proceedings of VIII all-Russian conference on mechanics of deformable solids. – 2014. – № 2 (18). – P. 101–104. (in Russian)

[11] *Nikitin, A. V.* Elastoplastic state of PA - linearly anisotropic inhomogeneous pipe under internal pressure / A. V. Nikitin, S. V. Tikhonov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2013. – № 4 (80). – P. 148–155. (in Russian)

[12] *Nikitin, A. V.* The influence of nonlinear inhomogeneity of the material on the elastoplastic state of thick-walled pipes under the influence of internal pressure in translational anisotropy / A. V. Nikitin, S. V. Tikhonov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2013. – № 4 (80). – P. 137–147. (in Russian)

[13] *Nikitin, A. V.* Limiting condition multilayer anisotropic thick-walled pipes / A. V. Nikitin, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2014. – № 4 (22). – P. 58–67. (in Russian)

[14] *Tikhonov, S. V.* On the biaxial stretching of the plane of heterogeneous elastic-plastic material / S. V. Tikhonov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2007. – No. 2. – P. 161–168. (in Russian)

Nikitin, Andrey Vitalevich

Postgraduate student, Departament of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary